



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Sucesiones de Brocot

Autor/es

Silvia Bordel Vozmediano

Director/es

JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS y JOSÉ LUIS ANSOARENA BARASOAIN

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2021-22



Sucesiones de Brocot, de Silvia Bordel Vozmediano
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Sucesiones de Brocot

Realizado por:

Silvia Bordel Vozmediano

Tutelado por:

**José Luis Ansorena Barasoain
Judit Mínguez Cenicerros**

Logroño, julio de 2022

Resumen/Abstract

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado vamos a estudiar las sucesiones de Brocot, las cuales aparecen por primera vez en los estudios de A. Brocot y M. Stern durante el siglo XIX.

La presente memoria abarca la teoría necesaria para comprender la construcción de las sucesiones de Brocot, sus propiedades y por qué se consideran buenas aproximaciones a números reales. Gracias a ellas, seremos capaces de definir la función de González Quijano, que resulta de gran utilidad para encontrar soluciones enteras de la ecuación de Pell y para aproximar la relación de transmisión entre trenes de engranajes.

Abstract

This Final Degree Dissertation studies Brocot's sequences, which first appear in the studies of A. Brocot and M. Stern during the nineteenth century.

Likewise, this report covers the theoretical aspects necessary to understand the construction of Brocot's sequences, their properties and the reasons why they are considered good approximations of real numbers. Thanks to them, in addition, the present study will offer a definition of the Gonzalez Quijano function, that will be extremely useful both when finding integer solutions to the Pell equation and when approximating the transmission ratio between gear trains.

Índice general

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Conceptos y resultados previos	1
1.1. Sucesión de Fibonacci	1
1.2. Fracciones continuas	3
2. Sucesiones de Brocot	9
2.1. Concepto de mediación	9
2.2. Construcción de las sucesiones de Brocot	10
2.3. Propiedades	12
2.4. Sucesiones de Farey	16
2.5. Relación entre la sucesión de Fibonacci y las sucesiones de Brocot	18
3. Aproximaciones con sucesiones de Brocot	21
3.1. Teorema de Hurwitz	27
4. Sucesión de signos y la función de González Quijano	31
4.1. Sucesión de signos	31
4.2. La función de González Quijano	35
5. Aplicaciones	41
5.1. Cálculo de engranajes	41
5.2. Ecuación de Pell	51
5.2.1. Contexto histórico	51
5.2.2. Resolución de la ecuación	52
Conclusiones	57
Bibliografía	59

Introducción

La aproximación de números reales por números racionales es un problema clásico en Teoría de Números cuyo interés se remonta al siglo XVII en relación con la fabricación de planetarios. Desde entonces, se han desarrollado diversas técnicas de aproximación, entre las que se encuentran las sucesiones de Brocot, introducidas por el matemático alemán Moritz Stern en 1858 y el relojero francés Achille Brocot en 1860, y las fracciones continuas, cuyo uso para aproximar números reales se remonta a 1572 de la mano del matemático Rafael Bombelli. Desde entonces, este tema de estudio ha sido testigo de celebrados hitos matemáticos, entre los que destacamos los resultados sobre aproximación de números algebraicos obtenidos por Klaus Roth (1925-2015) y por los que obtuvo la medalla Fields.

La memoria de este Trabajo de Fin de Grado consta de cinco capítulos. En ella, haremos un viaje que nos permita entender en qué consisten y cómo funcionan las sucesiones de Brocot.

El primer capítulo está dedicado a definir y explicar una serie de resultados previos que necesitamos conocer para el desarrollo de este trabajo. En concreto, hablaremos sobre la sucesión de Fibonacci y las fracciones continuas.

En el segundo capítulo nos introduciremos de pleno en la definición y construcción de las sucesiones de Brocot. También veremos sus interesantes propiedades, al igual que la relación existente entre las sucesiones de Brocot y la de Fibonacci. Además, una sección de este capítulo está dedicada a las sucesiones de Farey.

En el tercer capítulo explicaremos por qué las sucesiones de Brocot proporcionan buenas aproximaciones con denominadores pequeños. El resultado principal de este capítulo es el Teorema de Hurwitz, el cual nos proporciona el error cometido al aproximar un número irracional por uno racional. Veremos cómo llegar a este resultado utilizando tanto sucesiones de Brocot como fracciones continuas.

En el cuarto capítulo definiremos qué es la sucesión de signos y explicaremos cómo se utiliza para definir la función de González Quijano.

El quinto y último capítulo está dedicado a las diversas aplicaciones que pueden tener las sucesiones de Brocot en el mundo real. Nos centraremos en explicar cómo se utilizan para aproximar la relación de transmisión entre ruedas de engranajes y cómo nos ayudan a encontrar las soluciones enteras de la conocida ecuación de Pell. Además, haremos una comparación entre las aproximaciones obtenidas usando sucesiones de Brocot y las aproximaciones obtenidas usando fracciones continuas.

Capítulo 1

Conceptos y resultados previos

1.1. Sucesión de Fibonacci

Los descubrimientos de Leonardo de Pisa (1170–1240), más conocido como Fibonacci, fueron aportaciones revolucionarias al mundo de las matemáticas. La sucesión de Fibonacci, la cual definiremos a continuación, aparecía en su obra *Liber Abaci*, editada en 1202. Los números de esta sucesión se manifiestan en la naturaleza, tanto en las formas y diseños de plantas como en animales. También se han reproducido de diversas maneras en el arte, la arquitectura y la música. Para conocer más sobre los números de Fibonacci se puede consultar [18].



(a) Leonardo de Pisa



(b) Jaques Binet



(c) Abraham de Moivre

Se denomina *sucesión de Fibonacci* a la que, partiendo de los dos primeros términos iguales a 1, cada término se construye sumando los dos anteriores, esto es

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Si la denotamos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, su definición se da a partir de la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Cada f_n recibe el nombre de *número de Fibonacci*. A continuación, probaremos cómo se puede obtener una expresión explícita para f_n , en concreto, esta:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad (1.1)$$

comúnmente conocida como *fórmula de Binet*. Aunque, esta fórmula se atribuye normalmente a Jacques Binet, quien la probó en 1843, él no fue el primero en hallarla, ya que Abraham de Moivre la había encontrado alrededor de 1730.

Para ello, procederemos por inducción sobre n . Evidentemente, el resultado es cierto para $n = 1$ y $n = 2$. Vamos a suponerlo cierto hasta n y comprobemos que se cumple para $n + 1$. Por hipótesis de inducción sabemos que se cumplen las siguientes igualdades

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}};$$

$$f_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Y si sustituimos en la fórmula recursiva de la sucesión de Fibonacci, obtenemos

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Vemos que se verifica la igualdad (1.1), tal y como queríamos probar.

De la fórmula de recurrencia se deduce que términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci son primos dos a dos.

Lema 1.1. *Sean f_n , f_{n+1} y f_{n+2} tres términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Entonces podemos asegurar que son primos dos a dos.*

Demostración. Supongamos que existen dos términos consecutivos f_{n+1} y f_n de la sucesión de Fibonacci tales que $\text{mcd}(f_{n+1}, f_n) = d > 1$. Usando la fórmula de recurrencia vemos que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ y despejando obtenemos $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$. Esto nos dice que f_{n-1} también será divisible por d .

La técnica del descenso infinito de Fermat nos lleva a una contradicción. De hecho, si tomamos el mínimo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que f_{n+1} y f_n son primos dos a dos, que existe puesto que $f_1 = 1$ y $f_0 = 1$ son primos dos a dos, obtenemos que $n - 1$ también tiene la mencionada propiedad.

Finalmente, notamos que, puesto que $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, entonces

$$\text{mcd}(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}) = \text{mcd}(f_n, f_{n+1}).$$

□

Para estimar el tamaño de los términos de la sucesión de Fibonacci usamos, en cambio, la expresión explícita.

Lema 1.2. *Si $n \geq 3$, se tiene*

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} < f_n < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre n . Si $n = 3$ se tiene

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} < f_3 = 2 < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

Si $n = 4$,

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 < f_4 = 3 < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3.$$

Suponiéndolo cierto para $n \geq 4$, veamos que también se cumple para $n + 1$:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-3} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} < f_{n-1} + f_n < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1},$$

luego

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} < f_{n+1} < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n.$$

□

1.2. Fracciones continuas

Las fracciones continuas aparecieron por primera vez en los trabajos de Aryabhata (476–550), un matemático indio que las utilizó para resolver ecuaciones lineales. Durante los siglos XV y XVI, las fracciones continuas volvieron a aparecer en Europa, donde Rafael Bombelli, en 1572, las utilizó para aproximar raíces cuadradas. El término *fracción continua* apareció por primera vez en 1653 en una edición del libro *Arithmetica Infinitorum*, del matemático John Wallis (1616–1703). Sus propiedades también fueron estudiadas por William Brouncker (1620–1684). Más o menos al mismo tiempo, el físico y matemático holandés Christian Huygens (1629–1695) hizo un uso práctico de las fracciones continuas en la construcción de instrumentos científicos. Más tarde, en el siglo XVIII y principios del XIX, C. F. Gauss (1777–1855) y L. Euler (1707–1783) exploraron muchas de sus propiedades. En [11] y [17] podemos encontrar más información sobre la historia de las fracciones continuas.

A continuación, vamos a ver las propiedades más significativas de las fracciones continuas que posteriormente utilizaremos en diversos ejemplos prácticos.



(a) J. Wallis



(b) W. Brouncker



(c) L. Euler



(d) C. F. Gauss

Definición 1.1. Una *fracción continua generalizada* es una expresión de la forma

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}} \quad (1.2)$$

(finita o infinita), donde $q_k, p_k \in \mathbb{R}$ con $q_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$.

Observamos que, si la fracción continua es finita, nos proporciona un número real bien definido (salvo que algún denominador se anule, lo cual nunca ocurre si se exige que $p_k \geq 0$ y $q_k > 0$ para $k \geq 1$). Pero, si es infinita, tendremos que aclarar qué significa.

Definición 1.2. Una *fracción continua simple* es una expresión de la forma

$$\langle q_0, q_1, q_2, q_3, \dots \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

donde $q_k > 0$ para todo $k \geq 1$.

Definición 1.3. Llamaremos *cociente incompleto k -ésimo* al número q_k ; y *convergente k -ésimo* al número

$$\langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_k \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_k}}}}$$

que, como toda fracción continua finita, es un número perfectamente definido (un racional, si $q_0 \in \mathbb{Z}$ y $q_k \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq 1$).

Suponemos que $q_0 \in \mathbb{Z}$ y $q_k \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq 1$. Así, toda fracción continua simple finita representa un número racional.

$$\langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}. \quad (1.3)$$

De la misma forma, podemos representar todo número racional mediante una fracción continua finita. Para ello, se utiliza el algoritmo de Euclides para la división.

Nota 1. El algoritmo de Euclides para la división nos dice que dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \geq 1$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Además, $b|a$ si y solo si $r = 0$.

◁

Sea un número racional $\frac{r_0}{r_1}$ con $r_1 > 0$. Entonces, construimos recursivamente

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_0 + r_2, & q_0 \in \mathbb{Z}, & \quad 0 \leq r_2 < r_1; & \quad \text{si } r_2 \neq 0, \\ r_1 &= r_2 q_1 + r_3, & q_1 \in \mathbb{N}, & \quad 0 \leq r_3 < r_2; & \quad \text{si } r_3 \neq 0, \\ r_2 &= r_3 q_2 + r_4, & q_2 \in \mathbb{N}, & \quad 0 \leq r_4 < r_3; & \quad \text{si } r_4 \neq 0, \\ & \dots & & & \\ r_{n-1} &= r_n q_{n-1} + r_{n+1}, & q_{n-1} \in \mathbb{N}, & \quad 0 \leq r_{n+1} < r_n; & \quad \text{si } r_{n+1} \neq 0, \\ r_n &= r_{n+1} q_n, & & & \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde en el último paso hemos supuesto que la división $\frac{r_n}{r_{n+1}}$ es exacta. Como los r_k son enteros no negativos cada vez más pequeños, esto sucederá, necesariamente, alguna vez.

La primera de estas ecuaciones se puede expresar como

$$\frac{r_0}{r_1} = q_0 + \frac{r_2}{r_1} = q_0 + \frac{1}{r_1/r_2};$$

la segunda,

$$\frac{r_1}{r_2} = q_1 + \frac{r_3}{r_2} = q_1 + \frac{1}{r_2/r_3};$$

y así sucesivamente. Sustituyendo llegamos a

$$\begin{aligned}
 \frac{r_0}{r_1} &= q_0 + \frac{1}{r_1/r_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{r_2/r_3}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{r_3/r_4}}} = \dots \\
 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots q_{n-1} + \frac{1}{r_n/r_{n+1}}}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}} \\
 &= \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n \rangle.
 \end{aligned}$$

En el proceso anterior, $r_0 \in \mathbb{Z}$ y $r_1 \in \mathbb{N}$, luego q_0 puede ser nulo o incluso un entero negativo (si $r_0 < 0$). El algoritmo de la división nos proporciona $r_2 < r_1$, luego $q_1 \geq 1$; y así sucesivamente para el resto de los q_k . Por tanto, $q_0 \in \mathbb{Z}$ y $q_k \in \mathbb{N}$ para todo $k \geq 1$, tal y como se exigía.

Además, se puede observar que la representación de un número racional como fracción continua simple finita no es única. Para el caso en el que $q_{n+1} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, 1 \rangle &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots q_n + \frac{1}{1}}}} \\
 &= \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n + 1 \rangle.
 \end{aligned}$$

Y, si $q_n \geq 2$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n \rangle &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}} \\
 &= \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n - 1, 1 \rangle.
 \end{aligned}$$

A continuación, veremos algunos ejemplos de representación de números racionales mediante fracciones continuas.

Ejemplo 1.1. Vamos a calcular el desarrollo en fracción continua del número $\frac{2233}{786}$. Para

ello, aplicamos el algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned}
 2233 &= 786 \cdot 2 + 661, \\
 786 &= 661 \cdot 1 + 125, \\
 661 &= 125 \cdot 5 + 36, \\
 125 &= 36 \cdot 3 + 17, \\
 36 &= 17 \cdot 2 + 2, \\
 17 &= 2 \cdot 8 + 1, \\
 2 &= 1 \cdot 2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el desarrollo en fracción continua de $\frac{2233}{786}$ es $\langle 2, 1, 5, 3, 2, 8, 2 \rangle$. \diamond

Por otro lado, todo número irracional se puede representar de manera única como fracción continua infinita $\langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_i, \dots \rangle$ con $q_i \in \mathbb{Z}$, y verificando que $q_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$. La prueba de esta afirmación la podemos encontrar en [21]. Esta demostración es constructiva y proporciona un método para hallar el desarrollo en fracción continua. De hecho, el algoritmo es el mismo que hemos utilizado para expresar como fracción continua números racionales: tomamos en cada paso la parte entera del número real y proseguimos con la parte decimal. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.2. Hallar el desarrollo en fracción continua de π . Necesitamos obtener los sucesivos q_k , para calcular así, los convergentes $\frac{P_k}{Q_k}$

$$\begin{array}{lll}
 q_0 = \lfloor \pi \rfloor, & \pi = 3 + \frac{1}{\xi_1}, & \xi_1 = 7,062513305931 \dots; \\
 q_1 = \lfloor \xi_1 \rfloor, & \xi_1 = 7 + \frac{1}{\xi_2}, & \xi_2 = 15,996594406685 \dots; \\
 q_2 = \lfloor \xi_2 \rfloor, & \xi_2 = 15 + \frac{1}{\xi_3}, & \xi_3 = 1,003417231013 \dots; \\
 q_3 = \lfloor \xi_3 \rfloor, & \xi_3 = 1 + \frac{1}{\xi_4}, & \xi_4 = 292,634591014395 \dots;
 \end{array}$$

Este método nos va proporcionando los diferentes convergentes del desarrollo en fracción continua de π .

$$\begin{aligned}
 \langle 3 \rangle &= 3, \\
 \langle 3, 7 \rangle &= \frac{22}{7} = 3,142857142857 \dots, \\
 \langle 3, 7, 15 \rangle &= \frac{33}{106} = 3,141509433962 \dots, \\
 \langle 3, 7, 15, 1 \rangle &= \frac{355}{113} = 3,141592920353 \dots,
 \end{aligned}$$

Observamos que las fracciones obtenidas son muy buenas aproximaciones del número π . Si continuamos este proceso podemos llegar a

$$\pi = \langle 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, \dots \rangle.$$

◇

En general, si aplicamos el algoritmo descrito en el ejemplo 1.2 a un número irracional R obtenemos una fracción continua infinita que cumple

$$R = \lim_k \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_k \rangle$$

Además, si consideramos los convergentes k -ésimos, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} = \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_k \rangle,$$

que pueden obtenerse de forma recurrente utilizando las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} P_0 &= q_0, & P_1 &= P_0 q_1 + 1, & P_k &= q_k P_{k-1} + P_{k-2}, & k &\geq 2 \\ Q_0 &= 1, & Q_1 &= q_1, & Q_k &= q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, & k &\geq 2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

los convergentes de orden par forman una sucesión estrictamente creciente de aproximaciones a R y los convergentes de orden impar forman una sucesión estrictamente decreciente, de modo que

$$\begin{aligned} R_0 &< R_2 < R_4 < \dots < R &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k} \\ R_1 &> R_3 > R_5 > \dots < R &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k+1}, \end{aligned}$$

con

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} \leq R \leq \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}. \quad (1.6)$$

Capítulo 2

Sucesiones de Brocot

Las primeras referencias escritas que se conocen sobre las sucesiones de Brocot, también conocidas como árboles de Stern-Brocot, son los trabajos del matemático alemán Moriz Stern (1807–1894) y el relojero francés Achille Brocot (1817–1878), el cual buscaba una forma de aproximar la relación de transmisión entre las ruedas de los engranajes de sus relojes. Ambos llegaron a los mismos resultados trabajando de forma independiente. En [9] podemos encontrar el trabajo de Brocot y en [20] el trabajo de Stern.

A continuación, explicaremos en qué consiste el concepto de mediación entre dos fracciones no negativas, ya que es la base para la construcción de las sucesiones de Brocot de distintos órdenes. Hay que tener en cuenta que una fracción es una representación de un número racional, es decir, una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y que debido a un abuso del lenguaje, algunas veces se confunden ambos conceptos.

2.1. Concepto de mediación

La propiedad de *mediación* entre dos fracciones ya era conocida por Arquímedes (287–212 a.C) y muchos geómetras hindúes. En 1484, Nicolás Chuquet (1445–1488), un matemático francés, utilizó esta propiedad para calcular las sucesivas aproximaciones de \sqrt{n} para $n \leq 14$. En [3] podemos ver el método que sigue Chuquet para el caso de $n = 6$.

Definición 2.1. Sean dos fracciones no negativas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Llamamos *mediación* o *fracción mediante* a la fracción $\frac{a+c}{b+d}$.

Lema 2.1. Si $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se tiene $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Demostración. Comprobamos las dos desigualdades, mediante una cadena de expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &\Leftrightarrow ab + ad < ba + bc \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad + cd < cb + cd \Leftrightarrow ad < cb \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

□

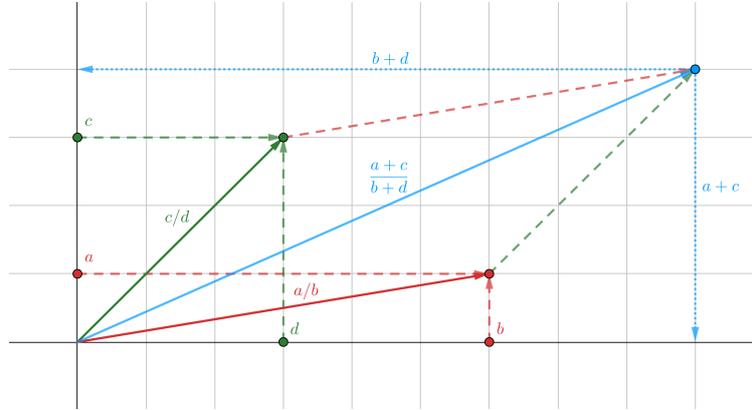


Figura 2.1: Interpretación vectorial de la mediación entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

En la siguiente sección vamos a ver cómo se construyen las sucesiones de Brocot utilizando la mediación entre dos fracciones no negativas.

2.2. Construcción de las sucesiones de Brocot

Para construir las sucesiones de Brocot es conveniente considerar una “fracción generalizada” de la forma $\frac{0}{0}$ que, en cierto modo, representa el número infinito.

Definimos la sucesión de Brocot de orden 0, B_0 , como las fracciones

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{0}.$$

Si tomamos las dos fracciones anteriores y calculamos la mediación de ambas obtendremos la sucesión de orden 1, que denotaremos por B_1 . Observamos que B_1 está formada por las fracciones

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{0}.$$

Del mismo modo, para obtener B_n con $n \geq 1$, tenemos que tomar la sucesión de orden $n - 1$ y entre cada dos fracciones consecutivas, ir intercalando su mediación, ver cuadro 2.1.

$B_0 :$	$\frac{0}{1}$																	$\frac{1}{0}$
$B_1 :$	$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{1}$										$\frac{1}{0}$
$B_2 :$	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{1}{0}$									$\frac{1}{0}$
$B_3 :$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{0}$									$\frac{1}{0}$
$B_4 :$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{0}$

Cuadro 2.1: Fracciones de Brocot de orden ≤ 4 .

Tal y como hemos dicho antes, B_n indica la sucesión de Brocot de orden n . Denotamos por $b_{n,k}$ al término que ocupa el lugar k , empezando desde $k = 0$, en la sucesión de Brocot de orden n .

Si seguimos el criterio de que, al pasar del nivel $n - 1$ al nivel n cada fracción que construimos ocupa el lugar intermedio entre aquellas que hemos utilizado para construirlas, y que pasan también al nivel n , las sucesiones de Brocot en el nivel n pueden expresarse como

$$(b_{k,2^n})_{k=0}^n,$$

y se cumple la siguiente expresión recurrente:

- $b_{2k,2^n} = b_{k,2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$.
- Para $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$, $b_{2k+1,2^n}$ es la mediación entre $b_{2k,2^n}$ y $b_{2k+2,2^n}$.

Así, por ejemplo,

$$b_{1,1} = \frac{1}{1}, \quad b_{n,0} = \frac{0}{1}, \quad b_{n,1} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 0.$$

$$b_{n,2^n} = \frac{1}{0}, \quad b_{n,2^{n-1}} = \frac{n}{1}, \quad b_{n,2^{n-1}} = \frac{1}{1}, \quad n \geq 1.$$

En general, se tiene lo siguiente:

Teorema 2.2. *La sucesión de Brocot de orden n está formada por*

$$|B_n| = 2^n + 1$$

fracciones $\frac{a}{b}$, con $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\frac{0}{1}; \frac{1}{0}\}$.

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción sobre n . La sucesión de Brocot de orden cero está formada únicamente por las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$, es decir, $|B_0| = 2$. Por consiguiente, el resultado es verdad para $n = 0$. Supongámoslo cierto para $n - 1$ y comprobémoslo para n . Observamos que $|B_n|$ viene dado por la siguiente recurrencia

$$\begin{aligned} |B_n| &= |B_{n-1}| + (|B_{n-1}| - 1) \\ &= 2|B_{n-1}| - 1 \\ &= 2(2^{n-1} + 1) - 1 \\ &= 2^n + 1. \end{aligned}$$

Obteniendo de esta forma que $|B_n| = 2^n + 1$ tal y como queríamos probar. \square

En lo que sigue, muchas veces aludiremos a fracciones de Brocot consecutivas. Con esto nos referimos siempre a dos (o más) fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ consecutivas en un mismo B_n y con $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (es decir, que, aunque no lo digamos expresamente, las supondremos en orden creciente). Por otra parte, en ocasiones será conveniente prescindir de la fracción $\frac{1}{0}$, que es la última de cada B_n , para conservar la simetría, eliminaríamos también $\frac{0}{1}$. De

este modo, la segunda y penúltima fracción de cada B_n (que son $\frac{1}{n}$ y $\frac{n}{1}$) asumen ahora el papel de primera y última columna.

A veces resulta cómodo quedarse únicamente con las fracciones de Brocot que pertenecen al intervalo $[0, 1]$. Así aparece lo que se suele denominar fracciones de Brocot reducidas, que representaremos mediante B_n^* . En esta definición, prescindimos del caso $n = 0$, pues $B_0^* = \emptyset$. Fijándonos en el cuadro 2.1, cada B_n^* es la mitad izquierda de B_n , incluida la fracción central $\frac{1}{1}$. Es claro que las fracciones de cada B_n^* se obtienen a partir de las de B_{n-1}^* mediante mediación (al igual que ocurría, por definición, con B_{n-1} y B_n).

2.3. Propiedades

Lema 2.3. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones positivas con $cb - ad = 1$. Sea $\frac{e}{f}$ la mediación de ambas. Entonces, $eb - af = 1$ y $cf - ed = 1$.

Demostración. Desarrollamos las dos expresiones involucradas para comprobar que se cumplen las igualdades.

$$eb - af = (a + c)b - a(b + d) = ab + cb - ab - ad = cb - ad = 1.$$

$$cf - ed = c(b + d) - (a + c)d = cb + cd - ad - cd = cb - ad = 1.$$

□

Teorema 2.4. Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas de Brocot, entonces

$$cb - ad = 1.$$

Y por tanto,

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}.$$

Demostración. Por inducción sobre n , probemos que esto es cierto para todas las fracciones de B_n . El resultado es cierto para $n = 0$. Supongamos que también es cierto para $n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Sean dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ en B_n , posiblemente ordenadas en orden creciente. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{a}{b}$ está en B_{n-1} . Entonces, existe $\frac{a'}{b'}$ en B_{n-1} tal que $\frac{c}{d}$ es la mediación de $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$. Por hipótesis de inducción, $a'b - ab' = 1$ (o -1 si están ordenados de forma decreciente). Por el lema 2.3, $cb - ad = 1$ (o -1 si están ordenados de forma decreciente). □

En particular, el teorema 2.4 permite probar que, en el proceso de construir las fracciones de Brocot, todas las fracciones que aparecen son irreducibles. En efecto:

Teorema 2.5. Las fracciones de Brocot aparecen siempre en forma irreducible.

Demostración. Gracias al teorema 2.4 sabemos que dadas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas en alguna sucesión de Brocot se cumple que $cb - ad = 1$. Este resultado se relaciona con la identidad de Bézout: dos números a y b son coprimos si y solo si existen $c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $ac + bd = 1$. Por tanto, este teorema se sigue del teorema 2.4. □

Lema 2.6. Las $2^n + 1$ fracciones de B_n , con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, están ordenadas de manera creciente.

Demostración. Sean $b_{k,2^n}$ y $b_{k+1,2^n}$ dos términos consecutivos de B_n , con $0 \leq k \leq 2^n - 1$. O bien $b_{k+1,2^n}$ es la mediación entre $b_{k,2^n}$ y $b_{k+2,2^n}$, o bien $b_{k,2^n}$ es la mediación entre $b_{k-1,2^n}$ y $b_{k+1,2^n}$. En ambos casos se sigue del lema 2.1 que $b_{k,2^n} < b_{k+1,2^n}$. \square

Lema 2.7. Dos fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son consecutivas en B_n si y solo si sus fracciones recíprocas, $\frac{d}{c}$, $\frac{b}{a}$, son consecutivas en B_n .

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción sobre n . Vemos que para $n = 0$ se cumple. Supongámoslo cierto para n y comprobémoslo para $n+1$. Consideramos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de B_{n+1} , con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la definición de las sucesiones de Brocot, sabemos que una de ellas pertenecerá a B_n y la otra no.

Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $\frac{a}{b} \in B_n$ y $\frac{c}{d} \notin B_n$. Si $\frac{a'}{b'}$ es la fracción anterior o siguiente a $\frac{a}{b}$ en B_n se tiene que $\frac{c}{d}$ es la mediación de $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$. Por tanto,

$$c = a + a' \quad y \quad d = b + b'.$$

Por hipótesis de inducción $\frac{b'}{a'}$ y $\frac{b}{a}$ son consecutivas en B_n y por tanto, su mediación $\frac{d}{c}$ será la siguiente a $\frac{b'}{a'}$ y la anterior a $\frac{b}{a}$ en B_{n+1} . \square

Corolario 2.8. Sea B_n la sucesión de Brocot de orden n , con $n \geq 0$. Sea $k = 0, \dots, 2^n$, se tiene que

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \iff b_{n,2^n-k} = \frac{b}{a}.$$

Demostración. Para probarlo procedemos por inducción sobre n , con $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$ es claro. Supongamos que es cierto para $n - 1$. Entonces, en cuanto a B_n , si k es par es claro que el resultado es cierto. Finalmente, si k es impar, el resultado se sigue de que $b_{k,2^n}$ es la mediación de $b_{k-1,2^n}$ y $b_{k+1,2^n}$, mientras que $b_{2^n-k,2^n}$ es la mediación de $b_{2^n-k+1,2^n}$ y $b_{2^n-k-1,2^n}$. \square

Si el lema 2.7 nos indica una simetría de las sucesiones de Brocot respecto de la inversión, el siguiente resultado refleja una simetría respecto de la aplicación $x \mapsto 1 - x$ (la simetría respecto del punto $\frac{1}{2}$).

Lema 2.9. Sean a, b, c, d, n números enteros tal que $a \leq b$, $c \leq d$ y $n \geq 1$. Las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son consecutivas en B_n si y solo si $\frac{d-c}{d}$ y $\frac{b-a}{b}$ son consecutivas en B_n .

Demostración. Para probar la implicación directa, procederemos por inducción. Es evidente que se cumple en B_1 . Supongamos que se cumple para B_n , con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y comprobémoslo para $n + 1$.

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de B_{n+1} (suponemos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$), una de ellas, digamos $\frac{a}{b}$ pertenecerá a B_n y la otra no.

Entonces, existe $\frac{a'}{b'} \in B_n$ tal que $\frac{c}{d}$ es la mediación de $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$. Por tanto,

$$c = a + a' \quad y \quad d = b + b'.$$

Por hipótesis de inducción

$$\frac{b' - a'}{b'} \quad y \quad \frac{b - a}{b}$$

son consecutivas en B_n , y, por tanto, su mediación

$$\frac{b' - a' + b - a}{b' + b} = \frac{(b + b') - (a + a')}{b' + b} = \frac{d - c}{d}$$

es consecutiva de $\frac{b-a}{b}$ en B_{n+1} . □

Corolario 2.10. *Sea B_n una sucesión de Brocot de orden n , con $n \geq 0$. Para $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ y $k = 0, \dots, 2^{n-1}$, se tiene:*

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \iff b_{n,2^{n-1}-k} = \frac{b-a}{b}.$$

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción. Para $n = 0$ es claro. Supongamos que es cierto para $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, en cuanto a B_n , si k es par es claro que el resultado es cierto. Finalmente, si k es impar, el resultado se sigue de que $b_{k,2^n}$ es la mediación de $b_{k-1,2^n}$ y $b_{k+1,2^n}$, mientras que $b_{2^{n-1}-k,2^n}$ es la mediación de $b_{2^{n-1}-k+1,2^n}$ y $b_{2^{n-1}-k-1,2^n}$. □

Lema 2.11. *Si $n \geq 2$, los seis extremos de B_n^* son, por la izquierda,*

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1};$$

y por la derecha,

$$\frac{n-2}{n-1}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{1}{1}.$$

La mayor distancia entre términos de B_n^ es $\frac{1}{n}$, que se alcanza únicamente en los extremos.*

Demostración. En B_n^* , el primer término es siempre $\frac{0}{1}$ y el último es $\frac{1}{1}$. Para probarlo procederemos por inducción sobre n . En B_2^* , los únicos términos son

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1}.$$

Observamos por lo tanto, que el resultado es verdad. Supongamos cierto que para todo $n > 2$, los tres primeros términos de la sucesión son

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n-1},$$

y que los tres últimos son

$$\frac{n-2}{n-1}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{1}{1}.$$

Ahora, vamos a ver si se cumple para $n + 1$. Si calculamos las mediaciones entre los tres primeros términos, obtenemos las siguientes fracciones

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{2n-1}, \quad \frac{1}{n-1};$$

y si ahora calculamos las mediaciones entre los tres últimos términos, obtenemos que

$$\frac{n-2}{n-1}, \quad \frac{2n-3}{2n-2}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \frac{1}{1}.$$

Por consiguiente, los tres primeros términos de B_{n+1}^* son

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n},$$

y los tres últimos

$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \frac{1}{1}.$$

Además, podemos ver que la distancia entre el primero y el segundo término de B_n^* es $\frac{1}{n}$, al igual que la distancia entre el penúltimo y el último término. Para ver que efectivamente la máxima distancia entre dos fracciones consecutivas de B_n^* es $\frac{1}{n}$ y que solo se alcanza en los extremos, suponemos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones consecutivas de B_n^* , con $n > 2$, $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$ y $\frac{c}{d} \neq \frac{1}{1}$, es decir, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no son los extremos. Esto es equivalente a ver que la desigualdad $bd > n$ siempre se cumple. Para ello, procedemos por inducción sobre n .

En B_3^* las posibles fracciones que tenemos son

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3},$$

en los dos casos posibles, el producto de los denominadores es 6, que es mayor que 3. Suponemos que es cierto para todo $n \geq 3$, se cumple.

Ahora, sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, dos fracciones consecutivas de B_{n+1}^* , esto quiere decir que o bien $\frac{a}{b}$ pertenece a B_n^* o bien $\frac{c}{d}$ pertenece a B_n^* . Entonces se tiene lo siguiente.

- i) Si $\frac{a}{b}$ pertenece a B_n^* , entonces existe una fracción $\frac{a'}{b'}$ perteneciente a B_n^* tal que $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ son consecutivas en B_n^* . Por lo tanto, $\frac{c}{d} = \frac{a+a'}{b+b'}$. Si $b' = 1$, quiere decir que $\frac{a'}{b'}$ es un extremo, por lo tanto

$$\frac{a}{b} = \frac{n-1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} = \frac{n}{n+1},$$

por lo que

$$bd = n(n+1) > n+1.$$

Si $b' \neq 1$, entonces $\frac{a'}{b'}$ no es un extremo. Por hipótesis de inducción $bb' > n$ y, por lo tanto

$$bd = b(b+b') = b^2 + bb' > n+1.$$

- ii) Si $\frac{c}{d}$ pertenece a B_n^* , entonces existe una fracción $\frac{c'}{d'}$ perteneciente a B_n^* tal que $\frac{c}{d}$ y $\frac{c'}{d'}$ son consecutivas en B_n^* . Por lo tanto, $\frac{a}{b} = \frac{c'+c}{d'+d}$. Si $d' = 1$, quiere decir que $\frac{c'}{d'}$ es un extremo, por lo tanto

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{n+1},$$

por lo que

$$bd = n(n+1) > n+1.$$

Si $d' \neq 1$, entonces $\frac{c'}{d'}$ no es un extremo. Por hipótesis de inducción $d'd > n$ y, por lo tanto

$$bd = (d+d')d = d^2 + d'd > n+1.$$

□

2.4. Sucesiones de Farey

Las sucesiones de Brocot están formadas por fracciones irreducibles, como ya hemos comentado. Dicho de otro modo, para cada número natural n , B_n es un subconjunto de las fracciones irreducibles que, puesto que es finito, tiene un denominador máximo. Esto nos lleva, de manera natural, a considerar las sucesiones llamadas de Farey.

Definición 2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$ llamamos *fracciones de Farey de orden n* al conjunto de fracciones irreducibles $\frac{a}{b}$ tales que $0 \leq a \leq n$ y $0 \leq b \leq n$, ordenado de forma creciente.

En el cuadro 2.2 podemos ver las sucesiones de Farey hasta orden cuatro.

$$\begin{aligned} F_0 &: \frac{0}{1} \quad \frac{1}{0} \\ F_1 &: \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0} \\ F_2 &: \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0} \\ F_3 &: \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0} \\ F_4 &: \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{1}{0} \end{aligned}$$

Cuadro 2.2: Sucesiones de Farey de orden ≤ 4 .

Al igual que en las sucesiones de Brocot, a veces, puede ser útil quedarse únicamente con las fracciones de Farey que pertenecen al intervalo $[0, 1]$. A esta subsucesión la denotaremos como F_n^* .

A continuación, estudiaremos una serie de resultados sobre las sucesiones de Farey.

Lema 2.12. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones consecutivas de F_n^* , entonces no puede ocurrir simultáneamente que $b = n$ y $d = n$.

Demostración. Supongamos que $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, con $1 \leq m < n$, son dos fracciones consecutivas de F_1^* . Observamos que la fracción $\frac{m}{n-1}$ está entre ambas, luego $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ no son consecutivas en F_n^* . \square

Teorema 2.13. *Sea $\frac{c}{d}$ una fracción en F_{n+1}^* que no está en F_n^* . Entonces, $\frac{c}{d}$ es la mediación de dos fracciones consecutivas en F_n^* . Además, dos fracciones consecutivas de F_n^* cumplen $cb - ad = 1$.*

Demostración. Para probar simultáneamente ambas afirmaciones procederemos por inducción sobre n . Es obvio que la propiedad se verifica para F_1^* . Supongamos que se cumple para $n \geq 1$ y comprobemos que se cumple para $n+1$. Los términos que aparecen al pasar de F_n^* a F_{n+1}^* tienen denominador $n+1$. Por el lema 2.12, cada fracción irreducible de la forma $\frac{c}{n+1}$, con $c \leq n+1$, está comprendida entre dos fracciones consecutivas de F_n^* , de forma que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{n+1} < \frac{a'}{b'}$$

con $1 \leq b, b' \leq n$. Como

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$$

los hechos de que $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ sean consecutivas en F_n^* y la fracción $\frac{a+a'}{b+b'}$ sea irreducible implican que

$$b + b' \geq n + 1.$$

Si

$$k = cb - a(n+1) \quad \text{y} \quad h = a'(n+1) - cb',$$

y, multiplicamos la primera ecuación por b' , la segunda la multiplicamos por b y las sumamos, se tiene que

$$(a'b - ab')(n+1) = kb' + bh.$$

Como $a'b - ab' = 1$, entonces, por hipótesis de inducción

$$n+1 = kb' + bh,$$

y al ser $n+1 \leq b' + b$, se tiene que $k = h = 1$. Por tanto, $b + b' = n + 1$. Finalmente, se tiene que

$$cb - a(n+1) = a'(n+1) - cb',$$

que conduce a $c(b+b') = (n+1)(a+a')$. Por tanto, $c = a + a'$. Finalmente, un par de fracciones consecutivas de F_{n+1}^* , o bien es un par de fracciones consecutivas en F_n^* , o bien está formado por una fracción de F_n^* y la mediación de esta con otra que es consecutiva en F_n^* . En el segundo caso, el lema 2.3 nos permite concluir el paso de inducción. \square

Notamos que como consecuencia inmediata de este teorema se tiene que si n es un número entero, con $n \geq 1$, entonces $F_n^* \subset B_n^*$. Este hecho nos da que toda fracción irreducible positiva aparecerá en una sucesión de Brocot B_n .

2.5. Relación entre la sucesión de Fibonacci y las sucesiones de Brocot

La sucesión de Fibonacci aparece en muchos aspectos de las matemáticas, las sucesiones de Brocot no son una excepción. A continuación se muestra una serie de resultados que relacionan las sucesiones de Brocot con la sucesión de Fibonacci.

Teorema 2.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Entonces el mayor denominador de las fracciones de B_n^* es f_{n+1} , y las fracciones contiguas a una que tenga denominador f_{n+1} tienen denominadores f_{n-1} y f_n . Además,*

- i) tal denominador aparece dos veces en B_n^* .*
- ii) Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones consecutivas en B_n^* , entonces $b \leq f_n$ y $d \leq f_{n+1}$, o viceversa.*

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción en n tanto para *i)* como para *ii)*. Vemos que para el caso $n = 3$ se cumple (ver cuadro 2.1). Un par de fracciones consecutivas en B_n^* origina dos pares de fracciones consecutivas en B_{n+1}^* . Concretamente, el par $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ origina dos pares en la secuencia

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{c}{d}.$$

Por hipótesis de inducción $b \leq f_n$, $d \leq f_{n+1}$, o viceversa. Por tanto,

$$b+d \leq f_n + f_{n+1} = f_{n+2}.$$

Como $f_n < f_{n+1}$ se cumple *ii)*. Además, el valor f_{n+2} se alcanza solo cuando $b = f_n$ y $d = f_{n+1}$ o viceversa. Como esto, por hipótesis de inducción sucede exactamente dos veces, *i)* también se cumple. \square

Nota 2. Para $n \geq 4$, las dos fracciones de B_n^* con denominador f_{n+1} tienen numeradores f_{n-1} y f_n . Se tienen las siguientes relaciones entre fracciones contiguas de B_n^* :

- i) si $n = 2k + 1$,*

$$\frac{f_{n-3}}{f_{n-1}} < \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} < \frac{f_{n-2}}{f_n}, \quad \frac{f_{n-1}}{f_n} < \frac{f_n}{f_{n+1}} < \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}.$$

- ii) si $n = 2k$,*

$$\frac{f_{n-2}}{f_n} < \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} < \frac{f_{n-3}}{f_{n-1}}, \quad \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} < \frac{f_n}{f_{n+1}} < \frac{f_{n-1}}{f_n}.$$

\triangleleft

Teorema 2.15. *Sea n un número natural. Entonces, la menor distancia entre dos fracciones consecutivas de B_n^* es $\frac{1}{f_n f_{n+1}}$.*

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción sobre n . Para el caso $n = 1$ es evidente, ya que $\frac{1}{f_1 f_2} = 1$ y las únicas fracciones de B_1^* son $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$. Ahora, supongamos que $n > 1$, por el teorema 2.14 existen dos fracciones consecutivas en B_n^* que tienen como denominador f_n y f_{n+1} . Aplicando el teorema 2.4 vemos que como son fracciones consecutivas, el valor absoluto de la diferencia entre ambas es $\frac{1}{f_n f_{n+1}}$.

Consideramos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de la sucesión B_n^* , entonces, por el teorema 2.14, necesariamente $b \leq f_{n+1}$ y $d \leq f_{n+1}$, ya que f_{n+1} es el mayor denominador de B_n^* .

Como $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son consecutivas en B_n^* , una de las dos fracciones tiene que pertenecer a B_{n-1}^* . Utilizando de nuevo el teorema 2.14 sabemos que el mayor denominador de la sucesión B_{n-1}^* es f_n . Por lo tanto,

$$bd \leq f_n f_{n+1} \implies \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{f_n f_{n+1}}.$$

□

Dada una sucesión C de fracciones, llamamos $M(C)$ al mínimo común múltiplo de sus denominadores.

Teorema 2.16. $M(B_n^*)$ es múltiplo del producto $f_{n-1} f_n f_{n+1}$, para todo $n \geq 2$.

Demostración. Por el teorema 2.14 sabemos que los denominadores f_{n-1} , f_n y f_{n+1} aparecen en la sucesión B_n^* y por el lema 1.1 podemos asegurar que f_{n-1} , f_n y f_{n+1} son primos dos a dos. Por lo que necesariamente, $M(B_n^*)$ tiene que ser múltiplo del producto de $f_{n-1} f_n f_{n+1}$. □

Para la prueba de los siguientes teoremas vamos a necesitar utilizar el siguiente resultado que se encuentra demostrado en [3].

Teorema 2.17. Existen dos constantes $C_1 > 1$ y $C_2 > 1$ tales que

$$C_2 e^n \leq M(F_n^*) \leq C_1 e^n.$$

A continuación, vamos a demostrar algunos resultados más que relacionan las sucesiones de Brocot con la sucesión de Fibonacci.

Teorema 2.18. Sea $M(B_n^*)$, $n \geq 2$, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que constituyen la sucesión de B_n^* , entonces existen dos constantes $A_1 > 1$ y $A_2 > 1$, tales que

$$A_2 \exp(n) \leq M(B_n^*) \leq A_1 \exp\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right).$$

Demostración. Observamos que $M(F_n^*) \leq M(B_n^*)$, ya que tal y como habíamos dicho en la sección anterior, $F_n^* \subset B_n^*$. Además, $M(F_n^*) \geq M(B_n^*)$, ya que anteriormente hemos demostrado que el mayor denominador de las fracciones de B_n^* es f_{n+1} y que

los denominadores de las fracciones contiguas son $f_n - 1$ y f_n . Esto nos indica que el producto de f_{n+1} , $f_n - 1$ y f_n divide a $M(B_n^*)$.

Así, aplicando la fórmula de Binet (1.1) al teorema 2.17 obtendríamos el resultado buscado. \square

Teorema 2.19. *Sea $M(B_n^*)$, $n \geq 2$, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que constituyen la sucesión de B_n^* , entonces existe una constante A tal que*

$$M(B_n^*) < A \exp\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Demostración. La demostración de este lema es consecuencia inmediata del teorema 2.18 y la desigualdad $1 + \sqrt{5} < 2\sqrt{5}$. \square

Capítulo 3

Aproximaciones con sucesiones de Brocot

En este capítulo veremos que las sucesiones de Brocot se pueden utilizar para conseguir buenas aproximaciones a números reales mediante fracciones con denominadores pequeños.

Para ello, necesitamos saber qué son las aproximaciones óptimas de primera y de segunda especie.

Definición 3.1. Sea $\xi \in \mathbb{R}$, la fracción irreducible $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ recibe el nombre de *aproximación óptima de primera especie* si se verifica

$$\left| \xi - \frac{c}{d} \right| \geq \left| \xi - \frac{a}{b} \right|$$

donde $\frac{c}{d}$ es diferente de $\frac{a}{b}$ y además, $d \leq b$.

Nota 3. Notamos que dado $q \in \mathbb{N}$, o bien hay una única aproximación de primera especie con denominador q o bien hay dos. En este segundo caso ξ es el punto medio de las dos aproximaciones. Por tanto, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi = \frac{a}{q}$, y las mencionadas aproximaciones son $\frac{a-1}{q}$ y $\frac{a+1}{q}$. \triangleleft

Definición 3.2. Sea $\xi \in \mathbb{R}$, la fracción irreducible $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ recibe el nombre de *aproximación óptima de segunda especie* si se verifica

$$|d\xi - c| \geq |b\xi - a|$$

donde $\frac{c}{d}$ es diferente de $\frac{a}{b}$ y además, $d \leq b$.

Además, toda aproximación óptima de segunda especie también lo es de primera. De hecho, si $\frac{a}{b}$ es una aproximación óptima de segunda especie y $\frac{c}{d}$ otra fracción tal que $0 < d \leq b$ se tiene que

$$\left| \xi - \frac{c}{d} \right| = \frac{1}{d} |d\xi - c| \geq \frac{1}{d} |b\xi - a| \geq \frac{1}{b} |b\xi - a| = \left| \xi - \frac{a}{b} \right|,$$

por lo tanto, $\frac{a}{b}$ es una aproximación óptima de primera especie.

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, vemos que $\frac{4}{3}$ es una aproximación óptima de primera especie de $\sqrt{2}$, pero no es de segunda especie.

Para comprobar que efectivamente $\frac{4}{3}$ es una aproximación de primera especie, observamos que $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, donde $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son dos fracciones de Brocot consecutivas (ver cuadro 2.1). El teorema 3.3, que veremos más adelante, nos asegura que $\frac{4}{3}$ es una aproximación óptima de primera especie de $\sqrt{2}$. No obstante, podemos comprobar que $\frac{4}{3}$ no es una aproximación óptima de segunda especie, pues $|2\sqrt{2} - 3| < |3\sqrt{2} - 4|$. Y, por lo tanto, no se cumple la definición de aproximación óptima de segunda especie.

Definición 3.3. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. El intervalo $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ con $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ está expresado en *forma estándar* si $bc - ad = 1$. Así, un intervalo se dice *estándar* si admite una expresión estándar.

Considerando todo lo que hemos visto hasta el momento, todo intervalo formado por dos términos consecutivos de una sucesión de Brocot o de Farey es un intervalo estándar.

Lema 3.1. Sea $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ un intervalo expresado en forma estándar. Supongamos que $d \neq 0$. Sea $\frac{h}{k} \in (\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ una fracción. Entonces:

i) $k \geq b + d$.

ii) Si $k = b + d$, entonces $h = a + c$.

Demostración. Probamos, en primer lugar que, si $\frac{h}{k}$ es un punto interior del intervalo estándar, entonces $k \geq \max\{b, d\}$. Se tiene

$$\min \left\{ \frac{h}{k} - \frac{a}{b}, \frac{c}{d} - \frac{h}{k} \right\} < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}.$$

Por tanto,

$$bd \leq \max \left\{ \frac{bk}{hb - ak}, \frac{dk}{ck - dh} \right\}.$$

Puesto que $hb - ak$ y $ck - dh$ son enteros,

$$bd \leq \max\{bk, dk\},$$

que da inmediatamente el resultado requerido.

La fracción $\frac{h}{k}$ cumple necesariamente una de estas tres opciones

$$\frac{h}{k} = \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{h}{k} \in \left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d} \right) \quad \text{o} \quad \frac{h}{k} \in \left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d} \right).$$

Si estamos en el primer caso, el lema queda demostrado ya que se cumplen ambas condiciones.

En los otros casos, puesto que los intervalos involucrados también están expresados en forma estándar, el resultado ya probado nos da

$$k > \max\{b, d, b+d\} = b+d.$$

□

Corolario 3.2. Sea $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ un intervalo estándar. Entonces existe un n para el que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos términos consecutivos de la sucesión de Brocot de orden n .

Demostración. Sea n el menor número en el que aparecen simultáneamente $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en la sucesión de Brocot B_n . Una de las fracciones, digamos $\frac{c}{d}$ no está en B_{n-1} y, en consecuencia es la mediación de dos fracciones $\frac{e}{f}$ y $\frac{g}{h}$.

Supongamos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no son fracciones consecutivas de B_n . Entonces $\frac{e}{f}$ es interior al intervalo $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$. Por el lema 3.1,

$$f > b + d.$$

Puesto que $d = f + h$, obtenemos que

$$b + h < 0.$$

Esta contradicción prueba el resultado. Notamos que la demostración en el caso en que $\frac{a}{b}$ no está en B_{n-1} es exactamente la misma, intercambiando los roles de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, y los de $\frac{e}{f}$ y $\frac{g}{h}$. \square

Este resultado nos proporciona un algoritmo para calcular todas las aproximaciones óptimas de primera especie de un número real $\xi \geq 0$. De hecho, identificaremos estas aproximaciones como fracciones de Brocot.

Teorema 3.3. Sea $\xi > 0$ un número real y $n > \xi$ un entero. Entonces la fracción de B_n más cercana a ξ es una aproximación óptima de primera especie de ξ . Si ξ equidista de dos fracciones de B_n , la aproximación óptima de primera especie es la de menor denominador. Si ambos denominadores coinciden, ambas son aproximaciones óptimas de primera especie.

Recíprocamente, si $\frac{a}{b}$ es una aproximación óptima de primera especie de un número real $\xi \geq 0$, existe un $n \geq \xi$ tal que $\frac{a}{b} \in B_n$ y, ningún otro término de B_n está más próximo a ξ .

Demostración. Si ξ es una fracción de B_n , el resultado del teorema es obvio. Si no, $\xi \in (\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ con $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de B_n . Así, cualquier fracción $\frac{h}{k}$ más cercana a ξ que a las dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ deberá cumplir que $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$. Entonces, el lema 3.1 nos asegura que $k \geq b + d > \max\{b, d\}$ y por lo tanto, la fracción de entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ más cercana a ξ verifica la definición de aproximación óptima de primera especie.

El recíproco es una consecuencia directa de la definición de aproximación óptima de primera. \square

Ejemplo 3.1. Usando el teorema 3.3 vamos a calcular aproximaciones de primera especie de dos números, uno racional y otro irracional.

1. Sea $\xi = \frac{18}{79}$. Cogemos como primer intervalo $I_1 = [\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$. Observamos que la fracción $\frac{18}{79}$ está más próxima a $\frac{0}{1}$, por lo que $S_1 = 0$. Ahora, calculamos la mediación de los extremos del intervalo, que es $\frac{1}{2}$ y comprobamos a que intervalo pertenece

ξ . Es decir, si $\xi \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$ o $\xi \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{0}\right)$. Vemos que ocurre el primer caso por lo que $I_2 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$. De nuevo, calculamos que extremo del intervalo se encuentra más cerca de $\frac{18}{79}$. En este caso vuelve a ser $\frac{0}{1}$ y entonces $S_2 = 0$. Este proceso se repite hasta encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_k = \xi$. En el cuadro 3.1 podemos ver los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{llll}
I_1 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right) & \Rightarrow & S_1 = 0; & I_2 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right) & \Rightarrow & S_2 = 0 \\
I_3 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}\right) & \Rightarrow & S_3 = \frac{1}{3}; & I_4 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}\right) & \Rightarrow & S_4 = \frac{1}{4} \\
I_5 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) & \Rightarrow & S_5 = \frac{1}{4}; & I_6 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{4}\right) & \Rightarrow & S_6 = \frac{2}{9} \\
I_7 = \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{13}\right) & \Rightarrow & S_7 = \frac{3}{13}; & I_8 = \left[\frac{5}{22}, \frac{3}{13}\right) & \Rightarrow & S_8 = \frac{5}{22} \\
I_9 = \left[\frac{5}{22}, \frac{8}{35}\right) & \Rightarrow & S_9 = \frac{5}{22}; & I_{10} = \left[\frac{5}{22}, \frac{13}{57}\right) & \Rightarrow & S_{10} = \frac{13}{57} \\
I_{11} = \left[\frac{18}{79}, \frac{13}{57}\right) & \Rightarrow & S_{11} = \frac{18}{79} & & &
\end{array}$$

Cuadro 3.1: Aproximaciones de primera especie de $\frac{18}{79}$.

Por lo tanto, $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \frac{5}{22}$ y $\frac{13}{57}$ son aproximaciones óptimas de primera especie de $\frac{18}{79}$.

- Sea $\xi = 1 + \sqrt{2}$. Para este caso vamos a seguir el mismo proceso que en el ejemplo anterior. Sin embargo, como ahora ξ es un número irracional no podemos encontrar un k natural tal que $\xi = S_k$. Por lo que haremos un total de diez iteraciones.

$$\begin{array}{llll}
I_1 = \left[\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right) & \Rightarrow & S_1 = 2; & I_2 = \left[\frac{2}{1}, \frac{5}{2}\right) & \Rightarrow & S_2 = \frac{5}{2} \\
I_3 = \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right) & \Rightarrow & S_3 = \frac{7}{3}; & I_4 = \left[\frac{12}{5}, \frac{5}{2}\right) & \Rightarrow & S_4 = \frac{12}{5} \\
I_5 = \left[\frac{12}{5}, \frac{17}{7}\right) & \Rightarrow & S_5 = \frac{12}{5}; & I_6 = \left[\frac{12}{5}, \frac{29}{12}\right) & \Rightarrow & S_6 = \frac{29}{12} \\
I_7 = \left[\frac{41}{17}, \frac{29}{12}\right) & \Rightarrow & S_7 = \frac{41}{17}; & I_8 = \left[\frac{70}{29}, \frac{29}{12}\right) & \Rightarrow & S_8 = \frac{70}{29} \\
I_9 = \left[\frac{70}{29}, \frac{99}{41}\right) & \Rightarrow & S_9 = \frac{70}{29}; & I_{10} = \left[\frac{70}{29}, \frac{169}{70}\right) & \Rightarrow & S_{10} = \frac{169}{70}
\end{array}$$

Cuadro 3.2: Aproximaciones de primera especie de $1 + \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $2, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{41}{17}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}$ y $\frac{239}{99}$ son aproximaciones óptimas de primera especie de $1 + \sqrt{2}$.

◇

Si comparamos las aproximaciones a números reales que proporcionan las sucesiones de Brocot con las que proporcionan las aproximaciones asociadas a fracciones conti-

nuas, notamos que estas últimas proporcionan aproximaciones de segunda especie (ver [21]). A continuación, damos condiciones que aseguran que las fracciones de Brocot son aproximaciones de segunda especie.

Lema 3.4. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $d \neq 0$ dos fracciones consecutivas de B_n , y sea ξ un número real tal que $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$. Entonces:

i) Si $\frac{h}{k} < \frac{a}{b} < \xi$ y $k < b$, se tiene que $k\xi - h > b\xi - a$.

ii) Si $\xi < \frac{c}{d} < \frac{h}{k}$ y $k < d$, se verifica que $h - k\xi > c - d\xi$.

Demostración. Tenemos dos casos diferentes:

i) Si $\frac{h}{k} < \frac{a}{b}$, con $k < b$, entonces

$$\begin{aligned} ak &> bh, \\ -ak &< -bh, \\ ab - ak &< ab - bh, \\ \frac{a}{b} &< \frac{a-h}{b-k}. \end{aligned}$$

Como todas las fracciones comprendidas entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tienen denominadores mayores o iguales que $b + d$, tenemos que

$$\frac{c}{d} \leq \frac{a-h}{b-k},$$

luego tenemos que $\frac{a}{b} < \xi < \frac{a-h}{b-k}$ y manipulado esta desigualdad obtenemos la cadena de desigualdades equivalentes,

$$\begin{aligned} (b-k)\xi &< a-h, \\ b\xi - k\xi &< a-h, \\ b\xi - a &< k\xi - h. \end{aligned}$$

ii) Si $\frac{c}{d} < \frac{h}{k}$, con $k < d$, entonces

$$\begin{aligned} ck &< dh, \\ ck - cd &< dh - cd, \\ c(k-d) &< d(h-c), \\ \frac{c}{d} &< \frac{c-h}{d-k}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\frac{c-h}{d-k} < \xi$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} c-h &< (d-k)\xi, \\ c-h &< d\xi - k\xi, \\ k\xi - h &< d\xi - c, \\ h - k\xi &> c - d\xi. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.5. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $d \neq 0$ dos fracciones consecutivas de la sucesión de Brocot de orden n , B_n , y sea ξ un número real tal que $\xi \in (\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$. Entonces $\frac{a+c}{b+d}$ es una aproximación óptima de segunda especie si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

- i) $\frac{2a+c}{2b+d} < \xi < \frac{a+c}{b+d}$,
- ii) $\frac{a+c}{b+d} < \xi < \frac{a+2c}{b+2d}$.

Demostración. Vamos a considerar dos posibles casos:

- i) Sea $\frac{a}{b} < \xi < \frac{a+c}{b+d}$, donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+c}{b+d}$ son dos fracciones consecutivas de la sucesión B_{n+1} . Gracias al teorema 3.3 sabemos que una de ellas es una aproximación de primera especie. Supongamos que es $\frac{a+c}{b+d}$.

Veamos que para que sea también de segunda especie basta que se cumpla:

$$b\xi - a > a + c - (b + d)\xi. \quad (3.1)$$

Si $\frac{h}{k} < \frac{a}{b}$ con $k \leq b$, por el lema 3.4 se cumple $k\xi - h > b\xi - a$. Por otro lado, si $\frac{h}{k} > \frac{a}{b}$ con $b \leq k \leq b + d$, entonces

$$\xi - \frac{h}{k} > \xi - \frac{a}{b} \implies \frac{k\xi - h}{k} > \frac{b\xi - a}{b} \geq \frac{b\xi - a}{k} \implies k\xi - h \geq b\xi - a.$$

Ahora, la ecuación (3.1) se cumple si

$$b\xi - a - a - c + b\xi + d\xi = (2b + d)\xi - (2a + c) > 0 \iff \frac{2a + c}{2b + d} > \xi.$$

- ii) Sea $\frac{a+c}{b+d} < \xi < \frac{c}{d}$. Suponemos que $\frac{a+c}{b+d}$ es aproximación de primera especie. Para que además sea también de segunda especie, con argumentos similares al apartado i), se tiene que cumplir que

$$c - d\xi > (b + d)\xi - (a + c). \quad (3.2)$$

Ahora, la ecuación (3.2) se cumple si

$$c - d\xi - b\xi - d\xi + a + c = a + 2c - \xi(b + 2d) > 0 \iff \xi < \frac{a + 2c}{b + 2d}.$$

□

Ejemplo 3.2. Utilizando los mismos datos que en el ejemplo 3.1, veamos cuáles son las aproximaciones óptimas de segunda especie.

1. Sea $\xi = \frac{18}{79}$. Aplicando el teorema 3.5 vemos que las aproximaciones óptimas de segunda especie de ξ son

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{3}{13} \quad \text{y} \quad \frac{5}{22}.$$

2. Sea $\xi = 1 + \sqrt{2}$. Como en este caso ξ es un número irracional vamos a ver cuáles de las aproximaciones óptimas de primera especie calculadas en el ejemplo 3.1 son también aproximaciones óptimas de segunda especie. Aplicando el teorema 3.5 vemos que las aproximaciones óptimas de segunda especie de ξ son

$$\frac{5}{2}, \quad \frac{12}{5}, \quad \frac{29}{12}, \quad \frac{70}{29} \quad \text{y} \quad \frac{169}{70}.$$

◇

3.1. Teorema de Hurwitz

Dirichlet demostró en 1842 que, dado un irracional ξ existen infinitas fracciones (irreducibles) $\frac{p}{q}$ tales que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Como siempre, la solución de un problema lleva al planteamiento de otro. En este caso, nos preguntamos por la constante más pequeña tal que para todo número irracional ξ hay infinitas fracciones $\frac{p}{q}$ que cumplen

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

Naturalmente, tal constante óptima podría no existir, pues el conjunto de tales constantes podría ser abierto. Adolf Hurwitz demostró que existe, y la encontró.

Lema 3.6. *No existen números naturales a y b tales que tanto (a, b) como $(a, a + b)$ satisfacen la condición*

$$x^2 + y^2 \leq \sqrt{5}xy.$$

Demostración. El conjunto D de puntos de coordenadas positivas que verifican esta condición es el limitado por las semirrectas

$$y = r_1(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x, \quad y = r_2(x) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x, \quad x \geq 0.$$

Para ser precisos,

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, r_1(x) \leq y \leq r_2(x)\}.$$

Por tanto el conjunto de puntos,

$$D_1 = \{(x, y) : (x, x + y) \in D\},$$

está limitado por dos semirrectas, cuya pendiente se obtiene restando una unidad a las anteriores,

$$y = r_3(x) = \frac{\sqrt{5}-3}{2}x, \quad y = r_4(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x.$$

En consecuencia, los puntos $(x, y) \in D \cap D_1$ son los puntos de la semirrecta

$$y = r_4(x) = r_1(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x.$$

Puesto que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es un número irracional, $(0, 0)$ es el único punto de coordenadas enteras en esta recta. □

Teorema 3.7 (Hurwitz, 1891). *Sea ξ un número irracional. Entonces, existen infinitas fracciones $\frac{p}{q}$ tales que*

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \quad (3.3)$$

Demostración. Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de B_n tales que $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$ y sea $\frac{a+c}{b+d}$ la mediación de ambas. En primer lugar, vamos a probar que si tomamos como $\frac{p}{q}$ alguna de estas tres fracciones: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ o $\frac{a+c}{b+d}$ entonces la desigualdad (3.3) se cumple.

Podemos distinguir dos casos: $\xi < \frac{a+c}{b+d}$ o $\xi > \frac{a+c}{b+d}$. A continuación, analizaremos el primer caso ya que el otro es análogo.

Supongamos que ninguna de las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{a+c}{b+d}$ satisface la desigualdad (3.3). Esto quiere decir que

$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \quad \frac{a+c}{b+d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}. \quad (3.4)$$

Tenemos que tener en cuenta que por el teorema 2.4 se cumple que $bc - ad = 1$, pues $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son consecutivas en B_n . Ahora, sumamos las dos primeras desigualdades de (3.4) y obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}b^2} \leq \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+c)b - (b+d)a}{(b+d)b} = \frac{1}{(b+d)b}.$$

Esto se puede expresar como

$$(b+d)^2 + b^2 \leq \sqrt{5}b(b+d). \quad (3.5)$$

Ahora, sumamos la primera y la tercera desigualdad de (3.4) y obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{5}d^2} + \frac{1}{\sqrt{5}b^2} \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}.$$

De donde se consigue

$$d^2 + b^2 \leq \sqrt{5}bd. \quad (3.6)$$

Aplicando el lema 3.6 vemos que (3.5) y (3.6) no pueden darse a la vez. Esto demuestra que una de las tres fracciones verifica la desigualdad opuesta.

Por último, observemos que cuando ξ es irracional, entonces, al aumentar el valor de n , los pares $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ varían. Esto produce que existan infinitos números racionales que verifiquen

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

tal y como afirma el teorema. \square

La misma técnica que hemos utilizado para demostrar el teorema de Hurwitz mediante fracciones de Brocot permite demostrarlo usando aproximaciones por fracciones continuas. Para ser precisos, se tiene el siguiente resultado, que puede consultarse en [21].

Teorema 3.8. *Sea $\xi = \langle q_0, q_1, q_2, \dots \rangle$ una fracción continua simple infinita y $\frac{P_n}{Q_n}$ sus convergentes. Entonces de cada tres convergentes consecutivos de ξ , al menos uno cumple*

$$\left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}Q_n^2}.$$

Nota 4. El teorema de Hurwitz es óptimo en el sentido que existe ξ irracional tal que la mejor constante que se puede obtener es $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ese número es $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el número áureo (ver [21]). \triangleleft

El teorema 3.8 prueba que hay infinitas fracciones $\frac{p}{q}$ que cumplen la desigualdad (3.3) ya que $Q_n < Q_{n+1}$ para todo $n > 0$.

Otro resultado interesante sobre la aproximación de números irracionales mediante los convergentes $\frac{P_n}{Q_n}$ es el siguiente:

Teorema 3.9. *Sea $\xi = \langle q_0, q_1, q_2, \dots \rangle$ una fracción continua simple infinita y $\frac{P_n}{Q_n}$ sus convergentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

$$i) \frac{1}{Q_n Q_{n+2}} \leq \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n+1})} < \left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

ii) *Sea $\frac{h}{k}$ un número racional con $k < Q_{n+1}$. Entonces*

$$\frac{h}{k} \neq \frac{P_n}{Q_n} \implies |\xi k - h| > |\xi Q_n - P_n|, \quad n \geq 0.$$

La demostración del teorema 3.9 se puede encontrar en [21].

Capítulo 4

Sucesión de signos y la función de González Quijano

En 1915, el matemático e ingeniero de caminos español Pedro Miguel González Quijano (1870–1958) utilizó las sucesiones de Brocot para definir una función real, continua, estrictamente creciente y no derivable en infinitos puntos. Para poder definir la función de González Quijano necesitamos utilizar la sucesión de signos. Es por eso, que en la siguiente sección explicaremos qué es y cómo se relaciona con las sucesiones de Brocot.

4.1. Sucesión de signos

En el capítulo anterior hemos visto cómo las sucesiones de Brocot permitían conseguir aproximaciones óptimas de un número real ξ . Si en lugar de fijarnos en los valores de estas aproximaciones almacenamos el proceso seguido, obtendremos una sucesión de ceros y unos a la que llamaremos *sucesión de signos*.

Definición 4.1. Sea $\xi \geq 0$ un número real, definimos la *sucesión de signos* asociada a ξ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\omega_0(\xi) &= 0, \\ \omega_1(\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones consecutivas de la sucesión de Brocot de orden n , con $n \geq 2$. Entonces,

$$\omega_{n+1}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right). \end{cases} \quad (4.2)$$

Tal y como se hace habitualmente con las expresiones decimales en base dos de números reales denotaremos la sucesión de signos por yuxtaposición. Es decir, escribiremos

$$\omega_0(\xi)\omega_1(\xi)\cdots\omega_i(\xi)\cdots$$

en lugar de $(\omega_i(\xi))_{i=0}^{\infty}$. Otra convención que tomaremos es expresar como cadena finita aquellas sucesiones de signos que terminan con una cola infinita de ceros, eliminando de la expresión esa cola de ceros. Notamos que una sucesión de signos es una cadena finita si y solo si ξ está en una sucesión de Brocot. Naturalmente, esto sucede si y solo si ξ es un número racional.

A continuación, mostraremos algunos ejemplos de cómo calcular la sucesión de signos de diferentes números, tanto racionales como irracionales.

Ejemplo 4.1. Considerando los mismos datos utilizados en los ejemplos 3.1 y 3.2, vamos a calcular la sucesión de signos para $\xi = \frac{18}{79}$ y $\xi = 1 + \sqrt{2}$.

1. Sea $\xi = \frac{18}{79}$. Sabemos que $\omega_0 = 0$ y que como $\xi \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$, entonces, $\omega_1 = 0$. Ahora, calculamos los siguientes términos de la sucesión de signos usando la igualdad (4.2).

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) \end{cases} \implies \omega_2 = 0.$$

$$\omega_3(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \implies \omega_3 = 0.$$

Repetiendo este proceso hasta que ξ sea el extremo izquierdo del segundo intervalo de (4.2), obtenemos que la sucesión de signos de $\xi = \frac{18}{79}$ es $\omega\left(\frac{18}{79}\right) = 000001101001$.

2. Sea $\xi = 1 + \sqrt{2}$. Sabemos que $\omega_0 = 0$ y que como $\xi \in \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$, entonces, $\omega_1 = 1$. Ahora, calculamos los siguientes términos de la sucesión de signos usando la igualdad (4.2).

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{2}{1}, \frac{1}{0}\right) \end{cases} \implies \omega_2 = 1.$$

$$\omega_3(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \left[\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right), \\ 1, & \text{si } \xi \in \left[\frac{3}{1}, \frac{1}{0}\right) \end{cases} \implies \omega_3 = 0.$$

A diferencia del ejemplo anterior, esta sucesión de signos es infinita ya que al ser ξ un número irracional, nunca va a aparecer como extremo del intervalo. Así, si repetimos este proceso varias veces más vemos que $\omega(1 + \sqrt{2}) = 01100110011001100\dots$

◇

Gracias al siguiente resultado, cuya demostración es inmediata, podemos relacionar la sucesión de signos con las sucesiones de Brocot.

Teorema 4.1. *Sea la sucesión de signos asociada a la fracción $\frac{a}{b}$*

$$\omega\left(\frac{a}{b}\right) = \omega_0\left(\frac{a}{b}\right)\omega_1\left(\frac{a}{b}\right)\dots\omega_m\left(\frac{a}{b}\right). \quad (4.3)$$

Entonces, se tiene que

$$b_{m,k} = \frac{a}{b},$$

donde k es el valor obtenido de la expresión (4.3) expresado en base 2.

A continuación, presentamos un ejemplo de cómo están relacionadas las sucesiones de Brocot con la sucesión de signos.

Ejemplo 4.2. Usando el teorema 4.1 vamos a ver en qué posición se encuentra la primera aparición de $\xi = \frac{18}{79}$ en las sucesiones de Brocot. En el ejemplo 4.1 hemos calculado que $\omega\left(\frac{18}{79}\right) = 000001101001$. Por lo tanto, $m = 11$ y $k = 1101001_{(2)} = 105$. Esto nos dice entonces que $b_{11,105} = \frac{18}{79}$, es decir, aparece por primera vez en la sucesión de Brocot de orden 11 en la posición 105. \diamond

Los siguientes resultados relacionan la sucesión de signos de una fracción con su desarrollo en fracción continua. Notamos que esto da una relación entre las aproximaciones con sucesiones de Brocot y las aproximaciones mediante fracciones continuas.

Teorema 4.2. *Sea n un número natural par y $\langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$ el desarrollo en fracción continua de un número racional $\frac{a}{b} \geq 0$. Entonces*

$$\omega\left(\frac{a}{b}\right) = 01\dots^{(q_0)}\dots 10\dots^{(q_1)}\dots 0\dots 1\dots^{(q_n)}\dots 1.$$

Esto significa que $\omega\left(\frac{a}{b}\right)$ está formado por un cero, por q_0 unos, q_1 ceros, \dots

Demostración. Primero tenemos que tener en cuenta que por la ecuación (1.6), sabemos que la sucesión de los convergentes de orden par es estrictamente creciente y la sucesión de los convergentes de orden impar es estrictamente decreciente.

Por la forma en la que se ha definido la sucesión de signos se tiene

$$\frac{a}{b} \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right), \quad \frac{a}{b} \in \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right), \dots, \frac{a}{b} \in \left[\frac{q_0}{1}, \frac{1}{0}\right).$$

Es decir, el numerador del extremo izquierdo del intervalo se va incrementando hasta que alcanza el valor de q_0 . Además, considerando la definición de la recurrencia (1.5) tenemos que

$$\frac{q_0}{1} = R_0 = \frac{P_0}{Q_0},$$

es decir, el convergente de orden 0 coincide con el número de unos. Ahora, proseguimos con el siguiente número de ceros

$$\frac{a}{b} \in \left[\frac{P_0}{P_1}, \frac{P_0+1}{Q_0}\right), \quad \frac{a}{b} \in \left[\frac{P_0}{Q_0}, \frac{2P_0+1}{2Q_0}\right), \dots, \frac{a}{b} \in \left[\frac{P_0}{Q_1}, \frac{q_1P_0+1}{q_1Q_0}\right),$$

es decir,

$$\frac{q_1 P_0 + 1}{q_1 Q_0} = R_1 = \frac{P_1}{Q_1}.$$

Procediendo del mismo modo, para el convergente de orden n tenemos que

$$\frac{a}{b} \in \left[\frac{P_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right), \quad \frac{a}{b} \in \left[\frac{2P_{n-1} + P_{n-2}}{2Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right), \dots,$$

$$\frac{a}{b} \in \left[\frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right),$$

es decir,

$$\frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = R_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Luego obtenemos el resultado buscado. \square

Ejemplo 4.3. Usando el teorema 4.2 vamos a calcular el desarrollo en fracción continua de ξ a partir de su sucesión de signos.

1. Sea $\xi = \frac{18}{79}$ y sea $\omega\left(\frac{18}{79}\right) = 000001101001$ su sucesión de signos. Observamos que después del primer 0 de la sucesión no hay unos, esto quiere decir que $q_0 = 0$. Después, hay 4 ceros seguidos, por lo que $q_1 = 4$. Si continuamos de la misma forma veremos que el desarrollo en fracción continua de $\frac{18}{79}$ es $\langle 0, 4, 2, 1, 1, 2, 1 \rangle$.
2. Sea $\xi = 1 + \sqrt{2}$ y sea $\omega(1 + \sqrt{2}) = 01100110011001100\dots$ su sucesión de signos. Observamos que después del primero 0 de la sucesión de signos hay 2 unos, esto quiere decir que $q_0 = 2$. Después, hay 2 ceros seguidos, por lo que $q_1 = 2$. Continuando con este proceso veremos que el desarrollo en fracción continua de $\xi = 1 + \sqrt{2}$ es $\langle 2, 2, 2, 2, \dots \rangle = \langle 2, \bar{2} \rangle$.

\diamond

El siguiente corolario (cuya demostración es inmediata) nos asegura que, dado un número racional $\frac{a}{b} \geq 0$ podemos saber de forma directa en qué sucesión de Brocot aparece por primera vez y en qué lugar de la misma aparece dicha fracción simplemente conociendo el desarrollo en fracción continua de la misma.

Corolario 4.3. Sea $\langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$ el desarrollo en fracción continua de un número racional $\frac{a}{b} \geq 0$. Entonces, si $(b_{m,k})_{k=0}^{2^m}$ es la m -ésima sucesión de Brocot,

$$\frac{a}{b} = b_{m,k}$$

donde

$$\begin{aligned} m &= q_0 + q_1 + \dots + q_n, \\ k &= 01 \dots^{(q_0)} \dots 10 \dots^{(q_1)} \dots 0 \dots 1 \dots^{(q_n)} \dots 1_{(2)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Además, cuando $\frac{a}{b} < 1$, ocurre que $q_0 = 0$.

El corolario 4.3 nos da que el número de pasos necesarios para determinar la primera aparición de una fracción $\frac{a}{b}$ en la sucesión de Brocot es el mismo que el número de pasos para encontrar su desarrollo en fracción continua. Esto quiere decir que su orden es el mismo que el orden del algoritmo de la división de Euclides para hallar el $\text{mcd}(a, b)$. La demostración de este resultado se puede consultar en [3].

4.2. La función de González Quijano

En 1915, P. M. González Quijano utilizó las sucesiones de Brocot para definir una función en el intervalo $[0,1]$ que fuera continua y no derivable en infinitos puntos. En [13] se recoge el trabajo de González Quijano. A partir de este, en [3] se define la función G de González Quijano

$$G : [0, +\infty) \cup \left\{ \frac{1}{0} \right\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$\xi \longmapsto G(\xi),$$

del siguiente modo

$$G(\xi) = \begin{cases} \sum_{k \geq 0} \frac{w_k(x)}{2^k} & \text{si } \xi \in [0, +\infty), \\ 1 & \text{si } \xi = \frac{1}{0}, \end{cases} \quad (4.5)$$

donde $\{w_k(\xi)\}$ es la sucesión de signos asociada a ξ .



Figura 4.1: Pedro Miguel González Quijano.

Ejemplo 4.4. En el ejemplo 4.1 hemos calculado que la sucesión de signos de $\xi = \frac{18}{79}$ es $\omega\left(\frac{18}{79}\right) = 000001101001$. Entonces, aplicando la función G , definida en (4.5) obtenemos que

$$G\left(\frac{18}{79}\right) = \frac{0}{2^0} + \frac{0}{2^1} + \cdots + \frac{0}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} = \frac{105}{2048}.$$

◇

Lema 4.4. *La función de González Quijano, $G(\xi)$, cumple las siguientes propiedades:*

- i) Si $\xi \in [b_{n,k}, b_{n,k+1})$, entonces $G(\xi) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$. Además, $G(b_{n,k}) = \frac{k}{2^n}$.
- ii) $G\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - G\left(\frac{b}{a}\right)$.
- iii) Si $a \leq b$, $G\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2} - G\left(\frac{b-a}{b}\right)$.
- iv) $G\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$; $G(n) = \frac{2^n-1}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- v) $G(\xi)$ es estrictamente creciente.
- vi) Si $a, b \in \mathbb{N}$ se tiene

$$G(a+b) = G(a) + G(b) - G(a)G(b),$$

$$G\left(\frac{1}{a+b}\right) = G\left(\frac{1}{a}\right) + G\left(\frac{1}{b}\right).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la definición y de las simetrías de los corolarios 2.8 y 2.10. \square

Teorema 4.5. Sea $\langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$ el desarrollo en fracción continua de un número racional $\frac{a}{b} \geq 0$. Entonces

- i) $G\left(\frac{a}{b}\right) = 0, 1 \dots^{(q_0)} \dots 10 \dots^{(q_1)} \dots 0 \dots 1 \dots^{(q_n)} \dots 1_{(2)}$.
- ii) $G\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{s_i}}$, con $s_i = \sum_{j=0}^i a_j$.

Demostración. La primera parte es una consecuencia inmediata del corolario 4.3. Para la segunda parte tenemos que

$$G\left(\frac{a}{b}\right) = 0, 1 \dots^{(q_0)} \dots 10 \dots^{(q_1)} \dots 0 \dots 1 \dots^{(q_n)} \dots 1_{(2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{q_0}}\right) + \left(\frac{1}{2^{q_0+q_1+1}} + \dots + \frac{1}{2^{q_0+q_1+q_2}}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{q_0+q_1+\dots+q_{n-1}+1}} + \dots + \frac{1}{2^{q_0+q_1+\dots+q_{n-1}+q_n}}\right).$$

Podemos observar que cada bloque de sumandos entre paréntesis es una serie geométrica. Recordemos que la suma de una serie geométrica finita viene dada por la siguiente fórmula

$$\sum_{k=0}^n ar^k = a \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \right). \quad (4.6)$$

En nuestro caso, $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Aplicando la fórmula (4.6) al primer bloque tenemos que $n = q_0$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{q_0}} = \sum_{k=1}^{q_0} \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{q_0+1}} \right) - 1$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{q_0+1}} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{q_0+1}} \right).$$

Aplicando este mismo procedimiento al resto de bloques obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} G\left(\frac{a}{b}\right) &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{q_0+1}}\right) + 2\left(\frac{1}{2^{q_0+q_1+1}} - \frac{1}{2^{q_0+q_1+q_2+1}}\right) + \cdots \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{2^{q_0+\cdots+q_{n-1}+1}} - \frac{1}{2^{q_0+\cdots+q_n+1}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{q_0}} + \frac{1}{2^{q_0+q_1}} - \frac{1}{2^{q_0+q_1+q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{q_0+\cdots+q_{n-1}}} - \frac{1}{2^{q_0+\cdots+q_n}} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{s_i}}, \end{aligned}$$

donde $s_i = \sum_{j=0}^i a_j$. □

Ejemplo 4.5. En el ejemplo 4.4 hemos calculado que $G(\frac{18}{79}) = 0,00001101001_{(2)}$. Aplicando el teorema 4.5, podemos obtener el desarrollo en fracción continua de $\frac{18}{79}$ de forma inmediata. Vemos por lo tanto que

$$\frac{18}{79} = \langle 0, 4, 2, 1, 1, 2, 1 \rangle.$$

◇

Lema 4.6. Sea m un entero positivo y $\frac{a}{b} \geq 0$ una fracción, entonces

$$G\left(m + \frac{a}{b}\right) = G(m) + \frac{1}{2^m} G\left(\frac{a}{b}\right).$$

Demostración. Sea $\langle q_0, q_1, \dots, q_n \rangle$ el desarrollo en fracción continua de $\frac{a}{b}$, con n un número par. Entonces por el teorema 4.5 se tiene que

$$G\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{s_i}}, \quad \text{con } s_i = \sum_{j=0}^i a_j.$$

Además, si aplicamos las propiedades de las fracciones continuas sabemos que

$$m + \frac{a}{b} = \langle q_0 + m, q_1, \dots, q_n \rangle.$$

Por lo tanto, combinando ambas igualdades y aplicando las propiedades del lema 4.4 conseguimos

$$\begin{aligned} G\left(m + \frac{a}{b}\right) &= 1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{m+s_i}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + \left(\frac{1}{2^m} - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{m+s_i}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{2^m} \left(1 - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2^{s_i}}\right) \\ &= \left(\frac{2^m - 1}{2^m}\right) + \frac{1}{2^m} G\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= G(m) + \frac{1}{2^m} G\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

□

Lema 4.7. Sea $\frac{a}{b}$ una fracción tal que $0 \leq a < b$, entonces

$$G\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}G\left(\frac{a}{b-a}\right).$$

Demostración. Primero, vamos a utilizar la segunda propiedad del lema 4.4

$$G\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - G\left(\frac{b}{a}\right) = 1 - G\left(1 + \frac{b-a}{a}\right).$$

Ahora, aplicamos la igualdad que nos asegura el lema 4.6

$$1 - G\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = 1 - \left(G(1) + \frac{1}{2}G\left(\frac{b-a}{a}\right)\right).$$

Por último, sabiendo que $G(1) = \frac{1}{2}$ y volviendo a aplicar la segunda propiedad del lema 4.4, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 - \left(G(1) + \frac{1}{2}G\left(\frac{b-a}{a}\right)\right) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}G\left(\frac{b-a}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - G\left(\frac{b-a}{a}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}G\left(\frac{a}{b-a}\right). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.8. La función $G(\xi)$ es continua y biyectiva de $[0, \infty)$ en $[0, 1]$.

Demostración. En primer lugar, vamos a ver que $G(\xi)$ es continua. Dados $\xi_0 \in (0, \infty)$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $n > 1 - \log_2 \epsilon$, y f_n el correspondiente término de la sucesión de Fibonacci. Entonces, si $\xi \geq 0$ se verifica que $|\xi - \xi_0| < \frac{1}{f_n f_{n+1}}$. Por el teorema 2.15 y el lema 4.7 se tiene que tanto ξ , como ξ_0 están en el mismo intervalo estándar de B_n , o en su defecto, en dos intervalos contiguos. Por lo tanto,

$$|G(\xi) - G(\xi_0)| < 2\frac{1}{2^n} < 2\frac{1}{2^{1-\log_2 \epsilon}} = \epsilon.$$

Puesto que G es continua y creciente, para ver que es biyectiva basta ver que $G(0) = 0$ y $\lim_{\xi \rightarrow \infty} G(\xi) = 1$. No obstante, damos una demostración que permite identificar la preimagen de cada número en $[0, 1]$.

Por un lado, $G(\xi)$ es inyectiva por ser estrictamente creciente. Por otro lado, tenemos que probar que es suprayectiva. Para ello, consideramos un número real, α , tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. Al expresar α en base dos, tendremos una sucesión de ceros y unos. Vamos a considerar que q_0 es el número de unos que siguen a la coma (puede ocurrir que $q_0 = 0$), q_1 es el número de ceros que siguen justo después, q_2 es el número de ceros que siguen a

la sucesión de ceros anterior y así sucesivamente. De esta forma, podemos representar α como la secuencia q_0, q_1, q_2, \dots , sin ambigüedad.

Entonces, vemos que $G^{-1}(\alpha)$ viene dada por la fracción continua:

$$\langle q_0, q_1, q_2, q_3, \dots \rangle = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}. \quad (4.7)$$

□

Para saber qué fracción ocupa el lugar k en B_n tenemos que calcular la expresión en binario de $\frac{k}{2^n}$, ya que $G\left(\frac{k}{2^n}\right) = b_{n,k}$ y luego, aplicamos la fórmula (4.7).

Ejemplo 4.6. Vamos a ver cuál es la fracción que se encuentra en el lugar $b_{4,4}$, es decir, la fracción que se encuentra en la posición 4 de la sucesión de Brocot de orden 4. Tenemos que $k = 4$ y que $n = 4$,

$$\frac{4}{2^4} = \frac{1}{4} \implies \omega\left(\frac{1}{4}\right) = 001 \implies G\left(\frac{1}{4}\right) = 0,01_{(2)}.$$

Gracias a esto sabemos que la fracción que ocupa el lugar $b_{4,4}$ es la misma que la que ocupa el lugar $b_{2,1}$. Si ahora utilizamos el resultado que nos da la función de González Quijano para saber cuál es su desarrollo en fracción continua, obtenemos que

$$b_{2,1} = \langle 0, 1, 1 \rangle = \frac{1}{2}.$$

Ahora, vamos a ver qué fracción ocupa el lugar $b_{3,1}$, es decir, la fracción que se encuentra en la posición 1 de la sucesión de Brocot de orden 3. Tenemos que $k = 1$ y que $n = 3$,

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \implies \omega\left(\frac{1}{8}\right) = 0001 \implies G\left(\frac{1}{8}\right) = 0,001_{(2)}.$$

Ahora, calculamos el desarrollo en fracción continua a partir de la función de González Quijano

$$b_{3,1} = \langle 0, 2, 1 \rangle = \frac{1}{3}.$$

◇

Corolario 4.9. Sea $\xi \geq 0$ un número real, entonces

i) $G(\xi) = 1 - \left(\frac{1}{\xi}\right).$

ii) $G(m + \xi) = G(m) + \frac{1}{2^m}G(\xi)$ con $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la segunda propiedad del lema 4.4, del lema 4.6 y de que $G(\xi)$ sea continua. □

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo nos vamos a centrar en dos de las aplicaciones que tienen las sucesiones de Brocot: el cálculo de engranajes y la ecuación de Pell. También existen más aplicaciones que se pueden encontrar en [3].

5.1. Cálculo de engranajes

Consideramos un sistema de transmisión del movimiento más sencillo que el engranaje: la rueda de fricción. En la figura 5.1 se muestran dos ruedas de radio r_1 y r_2 que están en contacto tangencial. Si la rueda de radio r_1 tiene un movimiento rotatorio con velocidad angular constante ω_1 , las leyes de la mecánica afirman que este movimiento rotatorio se transmite al segundo eje en sentido contrario y con velocidad angular constante ω_2 . La relación entre ambas viene dada por la expresión $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, de donde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (5.1)$$

El cociente entre las velocidades angulares indica la relación de transmisión de movimiento entre las dos ruedas de fricción y la igualdad (5.1) expresa la proporcionalidad inversa de los radios de las ruedas respecto de estas velocidades.

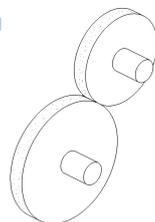


Figura 5.1: Dos ruedas de fricción acopladas.

Sin embargo, esta descripción es puramente teórica ya que en la práctica un eje patinaría sobre el otro. Para evitar este problema, se fija a cada eje una rueda dentada,

de manera que cada diente de una de ellas encaje exactamente con cada diente de la otra, tal y como podemos ver en la figura 5.2.

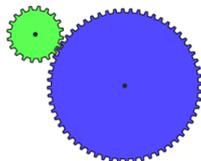


Figura 5.2: Dos ruedas dentadas acopladas.

De esta forma, si denotamos por n_1 y n_2 a los números de dientes de las ruedas con radios r_1 y r_2 respectivamente, podemos observar que cuando la rueda de n_1 dientes haya completado una revolución, la otra rueda del par habrá girado $\frac{n_1}{n_2}$ vueltas. Así, si la rueda de n_1 dientes gira con una velocidad angular ω_1 y la rueda de n_2 dientes gira con una velocidad angular ω_2 se tiene que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.2)$$

En lo anterior hemos descrito el ejemplo más simple de ruedas dentadas, sin embargo, en muchos casos no solo nos interesan dos ruedas sino que nos interesan varias ruedas dentadas conectadas entre sí, esto es lo que conocemos como tren de engranajes. Las aplicaciones que tienen los trenes de engranajes son muy diversas ya que son utilizados desde los mecanismos de los relojes hasta los cambios de marchas de un coche.

En la figura 5.3 podemos observar que la rueda dentada con n_a dientes se conecta a la rueda de n_b dientes. Fijada al eje de giro de esta última rueda, se encuentra otra rueda dentada de n_c dientes y se engrana a otra rueda dentada de n_d dientes.

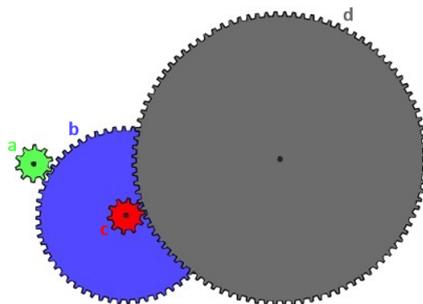


Figura 5.3: Tren de engranajes.

En este caso, considerando que $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ y ω_d son las velocidades angulares asociadas a las ruedas con n_a, n_b, n_c y n_d dientes respectivamente. Tenemos que

$$\frac{\omega_a}{\omega_d} = \frac{\omega_a \omega_b \omega_c}{\omega_b \omega_c \omega_d} = \frac{n_b n_d}{n_a n_c}. \quad (5.3)$$

Ahora, supongamos que, utilizando engranajes, necesitamos construir un sistema con una determinada relación de transmisión, la cual se expresa a través de una fracción irreducible $\frac{M}{N}$. Naturalmente, engranando dos ruedas dentadas con M y N dientes cada una se alcanzaría esta relación. Sin embargo, M o N pueden ser números muy grandes y la construcción de engranajes que poseen un determinado número de dientes puede escaparse de las posibilidades tecnológicas. Así, para los fines prácticos podemos calcular aproximaciones y fabricar, por ejemplo, dos ruedas dentadas de P y Q dientes, donde $P \ll M$ y $Q \ll N$, de forma que la relación de transmisión de $\frac{P}{Q}$ sea próxima a $\frac{M}{N}$.

Ahora, suponiendo que M y N son enteros muy grandes y queremos aproximar la relación de transmisión $\frac{M}{N}$ mediante otra relación de la forma $\frac{P}{Q}$ donde Q , el denominador, está prefijado y es mucho menor que N . Esto significa que la construcción de un engranaje con Q dientes es factible a la hora de su fabricación. Para ello, es claro que tenemos que minimizar el error $\left| \frac{M}{N} - \frac{P}{Q} \right|$, por lo que el numerador P será la solución a nuestro problema,

$$\min_{P \in \mathbb{Z}} \left| \frac{M}{N} - \frac{P}{Q} \right|.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{M}{N} - \frac{P}{Q} \right| = \frac{|NP - MQ|}{NQ},$$

y que M , N y Q se han prefijado, es equivalente a

$$\min_{P \in \mathbb{Z}} |NP - MQ|. \quad (5.4)$$

Sabemos que existe solución al problema (5.4) ya que el conjunto $\{|NP - MQ| : P \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto no vacío de enteros no negativos y tiene, por tanto, un primer elemento debido a la buena ordenación de \mathbb{N} .

Para encontrar la solución utilizamos el algoritmo de la división. Existen a y r enteros únicos tales que $0 \leq r < N$ y

$$MQ = Na + r. \quad (5.5)$$

De la igualdad (5.5) obtenemos de igual forma

$$MQ = N(a + 1) - (N - r). \quad (5.6)$$

Así, si elegimos $P = a$ o $P = a + 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |NP - MQ| &= \begin{cases} |Na - MQ| & \text{si } P = a, \\ |N(a + 1) - MQ| & \text{si } P = a + 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} r & \text{si } P = a, \\ N - r & \text{si } P = a + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

y entonces la solución P^* al problema (5.4) viene dada por

$$P^* = \begin{cases} a & \text{si } \min\{r, N - r\} = r, \\ a + 1 & \text{si } \min\{r, N - r\} = N - r. \end{cases} \quad (5.7)$$

De forma que el error cometido en la aproximación de la relación de transmisión $\frac{M}{N}$ por $\frac{P^*}{Q}$ viene dada por

$$\left| \frac{M}{N} - \frac{P^*}{Q} \right| = \frac{|NP^* - MQ|}{NQ} = \frac{\min\{r, N-r\}}{NQ} \leq \frac{1}{2Q}. \quad (5.8)$$

Este método nos da la mejor aproximación con denominador prefijado de la relación de transmisión $\frac{M}{N}$ dada. A continuación, vamos a mostrar un ejemplo de aplicación concreta de este método.

Ejemplo 5.1. Dada la relación de transmisión

$$\frac{M}{N} = \frac{82013}{10624},$$

calcular la mejor aproximación con denominador $Q = 17$ y $Q = 11$. Observamos que el número $M = 82013$ es primo y por lo tanto, no podemos fabricar un tren de engranajes con menor número de dientes en cada rueda que tenga la misma relación de transmisión. Entonces, si aplicamos el método anterior obtenemos que para $Q = 17$

$$\begin{aligned} 82013 \cdot 17 &= 1394221 = 10624 \cdot 131 + 2477, \\ 82013 \cdot 17 &= 1394221 = 10624 \cdot 132 - 8147. \end{aligned}$$

Aplicando entonces las igualdades (5.7) y (5.8), obtenemos que la mejor aproximación es $\frac{P^*}{Q} = \frac{131}{17}$. Donde el error viene dado por

$$\left| \frac{82013}{10624} - \frac{131}{17} \right| = \frac{2477}{180608} \simeq 0,13715. \quad (5.9)$$

Si realizamos el mismo procedimiento para $Q = 11$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 82013 \cdot 11 &= 902143 = 10624 \cdot 84 + 9729, \\ 82013 \cdot 11 &= 902143 = 10624 \cdot 85 - 897, \end{aligned}$$

obteniendo así que la mejor aproximación para este caso es $\frac{P^*}{Q} = \frac{85}{11}$ y el error viene dado por

$$\left| \frac{82013}{10624} - \frac{85}{11} \right| = \frac{897}{116864} \simeq 0,007675. \quad (5.10)$$

Así, comparando los errores obtenidos en (5.9) y (5.10) vemos que el sistema con menor número de dientes proporciona una mejor aproximación a la transmisión deseada. \diamond

Del ejemplo 5.1 podemos sacar como conclusión que este método no proporciona, en general, la solución tecnológica más simple ni la más aproximada.

A continuación, vamos a mostrar algunos ejemplos para el cálculo de aproximaciones de relaciones de transmisión entre engranajes. En el primer ejemplo que vamos a ver se utilizan las fracciones continuas y en los dos siguientes vamos a utilizar la función de González Quijano y las sucesiones de Brocot.



(a) Charles. E.L. Camus



(b) Christian Huygens

Ejemplo 5.2. El matemático y astrónomo Christian Huygens (1629-2695) construyó en 1682 un planetario automático, es decir, un modelo a escala del sistema solar movido por un mecanismo de relojería.

Un planetario automático consiste en un sistema de ruedas dentadas que dotan de movimiento a los planetas. Sin embargo, es necesario que se respeten las relaciones existentes entre los tiempos de revolución de cada uno de los planetas. En [7] podemos encontrar los cálculos para encontrar la aproximación de la relación entre los periodos de la Tierra y Saturno. Sin embargo, nosotros vamos a calcular la relación entre los periodos de la Tierra y Marte. En [22], se considera que la relación de transmisión entre estos dos planetas es

$$\frac{M}{N} = \frac{188089}{100000}.$$

Es claro que es casi imposible construir un engranaje con tal número de dientes. Para solucionar este problema vamos a intentar aproximar esta relación de transmisión mediante una fracción más manejable que nos permita fabricar ruedas dentadas de menos de 150 dientes. A continuación, vamos a aplicar el algoritmo de la división de Euclides a los enteros M y N ,

$$188089 = 100000 \cdot 1 + 88089,$$

$$100000 = 88089 \cdot 1 + 11911,$$

$$88089 = 11911 \cdot 7 + 4712,$$

$$11911 = 4712 \cdot 2 + 2487,$$

$$4712 = 2487 \cdot 1 + 2225,$$

$$2487 = 2225 \cdot 1 + 262,$$

$$2225 = 262 \cdot 8 + 129,$$

$$262 = 129 \cdot 2 + 4,$$

$$129 = 4 \cdot 32 + 1.$$

De aquí, obtenemos que su desarrollo en fracción continua es $\langle 1, 1, 7, 2, 1, 1, 8, 2, 32, 4 \rangle$. Ahora, vamos a calcular los diferentes convergentes.

$$\frac{P_0}{Q_0} = 1, \quad \frac{P_1}{Q_1} = 2, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{15}{8}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{32}{17}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{47}{25},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{79}{42}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{679}{361}, \quad \frac{P_7}{Q_7} = \frac{1437}{764}, \quad \frac{P_8}{Q_8} = \frac{46663}{24809}.$$

Si tomamos como aproximación el convergente $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{679}{361}$, el error cometido es

$$\left| \frac{188089}{100000} - \frac{679}{361} \right| < 0,0000035.$$

Además, la fracción $\frac{679}{361}$ factoriza como $\frac{7 \cdot 97}{19 \cdot 19}$, lo que nos permite construir ruedas dentadas con un número de dientes mucho más pequeño. Si hubiéramos escogido el convergente $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{1437}{764}$, tendríamos el mismo problema que al inicio, ya que esta fracción se puede factorizar como $\frac{3 \cdot 479}{4 \cdot 191}$, por lo que las ruedas seguirían teniendo un excesivo número de dientes. \diamond

Los ejemplos 5.3 y 5.4 fueron propuestos por Charles Camus (1699-1768), un matemático y mecánico francés, en [10].

Ejemplo 5.3. Hallar el número de dientes y láminas de las ruedas y piñones de una máquina que, siendo accionada por un piñón montado sobre la rueda del minuterero de un reloj, haga que una rueda describa una revolución completa en 29 días, 12 horas, 44 minutos y $\frac{16}{5}$ segundos.

En primer lugar, calculamos la relación de transmisión, es decir, la relación entre las velocidades angulares

$$\frac{M}{N} = \frac{60 \cdot 60}{20 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 + 12 \cdot 60 \cdot 60 + 44 \cdot 60 + \frac{16}{5}} = \frac{1125}{797326}.$$

La solución exacta del problema sería fabricar un engranaje simple cuya rueda conductora tenga 1125 dientes y cuya rueda conducida tenga 797326 dientes. Esto no es factible, por lo que tenemos que buscar una aproximación de la fracción anterior cuyo numerador y denominador se puedan factorizar en factores menores que 125, para poder así, construir un tren de engranajes que aproxime nuestra relación de transmisión original.

Para ello, vamos a aplicar la función de González Quijano a $\frac{M}{N}$. Para poder calcularlo veamos el siguiente fragmento de código

```

1 def desarrollo_GQ(num, den):
2     #Definimos una lista vacia donde iremos completando la sucesion de
3     #ceros y unos.
4     lista=[]
5     #Seguimos el mismo proceso que se emplea para hallar el mcd entre dos
6     #numeros por el algoritmo de las diferencias. Escribimos un 1 cuando al
7     #numerador se le resta el denominador y un 0 cuando al denominador se
8     #le resta el numerador.

```

```

5 while num!=0:
6     if num < den:
7         lista.append(0)
8         den=den-num
9     else:
10        lista.append(1)
11        num=num-den
12 return lista

```

Código 5.1: Código en Python para calcular el desarrollo de González Quijano.

Nota 5. Los fragmentos de código que aparecen a lo largo de esta memoria son documentos realizados en la plataforma de Google Colaboratory. Esta plataforma es un producto de Google Research y permite que todos los usuarios de Google puedan escribir y ejecutar código arbitrario de Python en el navegador. ◁

Por lo tanto, aplicando la función de González Quijano a $\frac{M}{N} = \frac{1125}{797326}$ obtenemos

$$G\left(\frac{1125}{797326}\right) = 0,0\dots^{(708)} \dots 0100100011110110111.$$

Ahora, vamos a suponer que queremos una aproximación cuyo error sea menor que 10^{-10} . Para ello, aplicamos la función de González Quijano a la cota superior y a la cota inferior.

$$G\left(\frac{1125}{797326} + 10^{-10}\right) = 0,0\dots^{(708)} \dots 01001000111110\dots^{(30)} \dots 0110\dots^{(17)} \dots 01\dots,$$

$$G\left(\frac{1125}{797326} - 10^{-10}\right) = 0,0\dots^{(708)} \dots 01001000111100111110111101\dots^{(12)} \dots 101\dots$$

Para disminuir el tamaño de los enteros que intervienen en las fracciones truncamos los desarrollos de las cotas y calculamos la función inversa de estos valores truncados.

$$G^{-1}\left(0,0\dots^{(708)} \dots 0100100011111\right) = \frac{79}{55990},$$

$$G^{-1}\left(0,0\dots^{(708)} \dots 010010001111\right) = \frac{64}{45359}.$$

En el siguiente fragmento de código se muestra un función que nos permite calcular la fracción asociada a la función de González Quijano.

```

1 from sympy.ntheory.continued_fraction import continued_fraction_reduce
2
3 def lista_a_fraccionfrac_continua(lista):
4     k=0
5     w=[]
6     for j in range(0, len(lista)+1):
7         w.append(0)
8     w[0]=lista[0]

```

```

9  if lista[0]==1:
10     w[0]=1
11  else:
12     k=k+1
13     w[1]=1
14  for i in range(1,len(lista)):
15     if lista[i]==lista[i-1]:
16         w[k]=w[k]+1
17     else:
18         k=k+1
19         w[k]=w[k]+1
20  return continued_fraction_reduce(w[0:k+1])

```

Código 5.2: Código en Python que transforma el desarrollo de González Quijano en fracción.

Ahora tenemos que encontrar las fracciones cuyo numerador y denominador se puedan descomponer como un producto de factores menores que 125 y que estén entre las cotas calculadas. Las soluciones propuestas en [3] son

$$\frac{365}{258688} = \frac{5 \cdot 73}{2^7 \cdot 43 \cdot 47},$$

$$\frac{222}{157339} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 37}{7^2 \cdot 13^2 \cdot 19},$$

$$\frac{1881}{1333129} = \frac{3^2 \cdot 11 \cdot 19}{7 \cdot 43^2 \cdot 103}.$$

Finalmente, la solución que da Camus en [10] es

$$\frac{222}{157339} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 37}{7^2 \cdot 13^2 \cdot 19} = \frac{6}{91} \cdot \frac{6}{91} \cdot \frac{37}{114},$$

de tal forma que las ruedas dentadas que tenemos que construir tienen un número de dientes mucho más pequeño que los de la relación de transmisión original. El error cometido en la aproximación es

$$\left| \frac{1125}{797326} - \frac{222}{157339} \right| < 2,39 \cdot 10^{-11}.$$

Este mismo ejemplo lo podríamos haber resuelto utilizando fracciones continuas, siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo 5.2. Aplicando el algoritmo de la división de Euclides podemos ver que el desarrollo en fracción continua de $\frac{1125}{797326}$ es $(0, 708, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 2, 1, 3)$. Y, calculando los convergentes obtenemos

$$\frac{P_0}{Q_0} = 0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{708}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{709}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{3}{2126}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{4}{2835},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{15}{10631}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{64}{45359}, \quad \frac{P_7}{Q_7} = \frac{79}{55990}, \quad \frac{P_8}{Q_8} = \frac{222}{157339}, \quad \frac{P_9}{Q_9} = \frac{301}{213329}.$$

Podemos observar que la mayoría de ellos, factorizan como producto de primos demasiado grandes, sin embargo, vemos que el convergente $\frac{P_8}{Q_8}$ es el mismo que la solución propuesta por Camus. Luego, hemos llegado a la misma solución que con el desarrollo de González Quijano. \diamond

Ejemplo 5.4. Hallar el número de dientes y láminas de las ruedas y piñones de una máquina que, siendo accionada por un piñón colocado en la rueda horaria, haga que una rueda describa una revolución completa en un año normal, que consta de 365 días, 5 horas, 49 minutos.

En primer lugar, calculamos la relación de transmisión, es decir, la relación entre las velocidades angulares

$$\frac{M}{N} = \frac{12 \cdot 60}{365 \cdot 24 \cdot 60 + 5 \cdot 60 + 49} = \frac{720}{525949}.$$

La solución exacta del problema sería fabricar un engranaje simple cuya rueda conductora tenga 720 dientes y cuya rueda conducida tenga 525949 dientes. Esto no es factible, por lo que tenemos que buscar una aproximación de la fracción anterior cuyo numerador y denominador se puedan factorizar en factores menores que 125, para poder así, construir un tren de engranajes que aproxime nuestra relación de transmisión original. \diamond

Con el código de 5.1 obtenemos la expresión que resulta al aplicar la función de González Quijano a $\frac{M}{N}$.

$$G\left(\frac{720}{525949}\right) = 0,0\dots^{(730)}\dots 0110\dots^{(15)}\dots 01000000111.$$

Ahora, vamos a suponer que queremos una aproximación cuyo error sea menor que 10^{-10} . Para ello, aplicamos la función de González Quijano a la cota superior y a la cota inferior.

$$G\left(\frac{720}{525949} + 10^{-10}\right) = 0,0\dots^{(730)}\dots 0110\dots^{(15)}\dots 010000111110111011\dots,$$

$$G\left(\frac{720}{525949} - 10^{-10}\right) = 0,0\dots^{(730)}\dots 0110\dots^{(15)}\dots 0100000000001011\dots$$

Ahora, al igual que en el ejemplo anterior, para que las fracciones resultantes no queden demasiado grandes vamos a truncar los desarrollos de las cotas y calcular la inversa de la función usando el código de 5.2

$$G^{-1}\left(0, 0 \dots^{(730)} \dots 0110 \dots^{(15)} \dots 01\right) = \frac{33}{24106},$$

$$G^{-1}\left(0, 0 \dots^{(730)} \dots 0110 \dots^{(15)} \dots 0100001\right) = \frac{163}{119069}.$$

Ahora tenemos que encontrar las fracciones cuyo numerador y denominador se puedan descomponer como un producto de factores menores que 125 y que estén entre las cotas calculadas. Las soluciones propuestas en [3] son

$$\frac{2337}{1707143} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 41}{29 \cdot 37^2 \cdot 43},$$

$$\frac{1085}{792576} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 31}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 43},$$

$$\frac{1248}{911645} = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 13}{5 \cdot 7^2 \cdot 61^2},$$

$$\frac{1376}{1005147} = \frac{2^5 \cdot 43}{3^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 71},$$

$$\frac{2255}{1647243} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 41}{3^3 \cdot 13^2 \cdot 19^2},$$

$$\frac{196}{143175} = \frac{2^2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 83},$$

$$\frac{1273}{929907} = \frac{19 \cdot 67}{3^3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 101},$$

$$\frac{1403}{1024870} = \frac{23 \cdot 61}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^4}.$$

Finalmente, la solución que da Camus en [10] es

$$\frac{196}{143175} = \frac{2^2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 83} = \frac{8}{83} \cdot \frac{7}{69} \cdot \frac{7}{50},$$

de tal forma que las ruedas dentadas que tenemos que construir tienen un número de dientes mucho más pequeño que los de la relación de transmisión original. El error cometido en la aproximación es

$$\left| \frac{720}{525949} - \frac{196}{143175} \right| < 5,32 \cdot 10^{-11}.$$

Ahora, vamos a intentar resolver este mismo ejemplo usando fracciones continuas. Observamos que el desarrollo en fracción continua de $\frac{720}{525949}$ es $\langle 0, 730, 2, 15, 1, 6, 3 \rangle$. Y, calculando los convergentes

$$\frac{P_0}{Q_0} = 0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{730}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1461}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{31}{22645}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{33}{24106}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{229}{167281}.$$

A continuación, vamos a factorizar los cuatro últimos convergentes

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1461} = \frac{2}{3 \cdot 487}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{31}{22645} = \frac{31}{5 \cdot 7 \cdot 647},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{33}{24106} = \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 17 \cdot 709}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{229}{167281} = \frac{229}{409^2}.$$

Podemos ver que ninguno de los convergentes se puede descomponer como producto de primos menores que 125, por lo que en este caso, las aproximaciones que nos ofrecen las fracciones continuas no son adecuadas a nuestros propósitos.

5.2. Ecuación de Pell

5.2.1. Contexto histórico

La búsqueda de soluciones enteras de la ecuación cuadrática $x^2 - ay^2 = 1$, también conocida como ecuación de Pell, ha sido un tema importante que se enmarca dentro del estudio de las ecuaciones diofánticas.

Euler (1707–1783) atribuyó el primer estudio serio de las soluciones no triviales de la ecuación de la forma $x^2 - ay^2 = 1$, con $x \neq 1$ e $y \neq 0$, a John Pell (1611–1685). Sin embargo, no hay evidencias de que Pell hubiera planteado la solución de tales ecuaciones. Probablemente deberían haber recibido el nombre de ecuaciones de Fermat, ya que Fermat fue uno de los primeros en estudiar las soluciones no triviales de muchas ecuaciones importantes.

No obstante, las ecuaciones de Pell han tenido una larga historia que puede remontarse a los griegos. En primer lugar, fue Arquímedes (siglo III a.C) quien planteó el llamado problema del ganado [16]. Este problema resultó ser complejo y tardó casi dos mil años en resolverse. Unos años más tarde que Arquímedes, Teón de Esmirna (70–135 d.C) aproximó $\sqrt{2}$ mediante fracciones $\frac{x}{y}$, donde x y y son soluciones enteras de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$. En general, si $x^2 = ay^2 + 1$, entonces $x^2/y^2 = a + 1/y^2$. Por lo tanto, para y grande se consigue una buena aproximación de \sqrt{a} .

Más adelante, Diofanto de Alejandría (siglo III d.C) propuso la solución entera $x = 2m^2 + 1$, $y = 2m$ para el caso en el que $a = m^2 + 1$.

Las ecuaciones de Pell también las podemos encontrar en las matemáticas hindúes. En el siglo IV, el matemático indio Baudhayana observó que $x = 577$ e $y = 408$ es solución de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$ y usó la fracción $\frac{577}{408}$ como aproximación de $\sqrt{2}$. En el siglo VII, Brahmagupta consideró soluciones a la ecuación de Pell $x^2 - 92y^2 = 1$, siendo $x = 1151$ e $y = 120$ la solución más pequeña que encontró. En el siglo XII, el matemático hindú Bhaskara encontró la mínima solución entera positiva a la ecuación de Pell $x^2 - 61y^2 = 1$. Esta solución era $x = 1766319049$ e $y = 226153980$.

En 1657, Fermat (1607–1665) afirmó sin pruebas que si a es entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces la ecuación de Pell $x^2 - ay^2 = 1$ tiene un número infinito de soluciones. La demostración de este resultado la dio Lagrange (1736–1813) en 1770.

A continuación, vamos a ver cómo podemos encontrar todas y cada una de las soluciones a esta ecuación.

5.2.2. Resolución de la ecuación

Nuestro objetivo es, dado un entero a estudiar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 - ay^2 = 1, \quad (5.11)$$

donde el par (x, y) es la incógnita. Por supuesto, podemos limitarnos a estudiar soluciones (x, y) formadas por enteros no negativos.

Comenzamos nuestro estudio resaltando que el par $(x, y) = (1, 0)$ es una solución, que podemos considerar trivial. Notamos también que si a es un entero negativo, $(1, 0)$ es la única solución. Por tanto, podemos limitarnos a considerar el caso en que a es un entero positivo. A continuación, vemos que también podemos suponer que a no es un cuadrado perfecto.

Si a es un cuadrado perfecto quiere decir que $a = n^2$. Consideramos $x \neq 1$ e $y \neq 0$. Entonces

$$x^2 - ay^2 = x^2 - n^2y^2 = x^2 - (ny)^2 = 1.$$

Sin embargo, no existen dos enteros diferentes de 0 y 1 cuya diferencia de cuadrados sea uno. Por lo tanto, tal y como habíamos afirmado, cuando a es un cuadrado perfecto, la única solución es la trivial.

El teorema que viene a continuación nos proporciona una forma de encontrar las infinitas soluciones enteras de la ecuación de Pell a partir de la llamada solución fundamental, siempre y cuando a no sea un cuadrado perfecto. La demostración a este teorema la podemos encontrar en [1].

Teorema 5.1. *Sea a un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces la ecuación*

$$x^2 - ay^2 = 1 \quad (5.12)$$

tiene infinitas soluciones enteras no negativas. Además, existe una solución (x_1, y_1) , llamada solución fundamental, a partir de la cual la solución general, excluyendo la trivial, viene dada por la ecuación recursiva

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1x_n + ay_1y_n, \\ y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n. \end{cases} \quad (5.13)$$

La expresión recursiva (5.13) nos da de manera sencilla que las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son crecientes. Por tanto, la solución fundamental (x_1, y_1) es aquella solución no trivial para la que la segunda componente toma un valor mínimo.

Sin entrar a demostrar el teorema 5.1, remarcamos que el método principal para determinar la solución fundamental a la ecuación de Pell (5.12) utiliza fracciones continuas.

Para ello, hay que escribir el desarrollo en fracción continua simple de \sqrt{a}

$$\sqrt{a} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}} = \langle q_0, q_1, q_2, \dots \rangle$$

donde $q_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ y q_1, q_2, \dots es una sucesión periódica de enteros positivos construida tal y como se explica en la sección 1.2. Notamos que $q_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$ y que esta fracción continua es periódica. En concreto

$$\sqrt{a} = \langle q_0, \overline{q_1, \dots, q_i, \dots, q_m, 2q_0} \rangle.$$

Además, $(q_1, \dots, q_i, \dots, q_m)$ es capicúa.

Consideramos el k -ésimo convergente

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} = \langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_k \rangle,$$

de esta fracción continua. Sabemos que P_k y Q_k son primos entre sí.

La mínima solución fundamental de la ecuación de Pell resulta ser

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (P_{m-1}, Q_{m-1}) & \text{si } m \text{ es par,} \\ (P_{2m-1}, Q_{2m-1}) & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases} \quad (5.14)$$

A continuación, vamos a ver algunos ejemplos que usan fracciones continuas para calcular las soluciones de la ecuación de Pell.

Ejemplo 5.5. Para encontrar la solución fundamental de la ecuación de Pell

$$x^2 - 8y^2 = 1, \quad (5.15)$$

tenemos que poner $\sqrt{8}$ como fracción continua. Para ello, utilizamos el método que hemos descrito en el ejemplo 1.2.

$$\begin{array}{lll} q_0 = \lfloor \sqrt{8} \rfloor, & \sqrt{8} = 2 + \frac{1}{\xi_1}, & \xi_1 = 1,207106781\dots; \\ q_1 = \lfloor \xi_1 \rfloor, & \xi_1 = 1 + \frac{1}{\xi_2}, & \xi_2 = 4,828427125\dots; \\ q_2 = \lfloor \xi_2 \rfloor, & \xi_2 = 4 + \frac{1}{\xi_3}, & \xi_3 = 1,207106781\dots; \\ q_3 = \lfloor \xi_3 \rfloor, & \xi_3 = 1 + \frac{1}{\xi_4}, & \xi_4 = 4,828427125\dots \end{array}$$

Si continuamos con el proceso anterior vemos que el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{8}$ es $\langle 2, \overline{1, 4} \rangle$. Observamos que el periodo tiene longitud $m = 2$, como m es par, estamos

en el primer caso de la igualdad (5.14). Por lo tanto, $(x_1, y_1) = (P_1, Q_1)$, donde P_1 y Q_1 son los convergentes de orden uno

$$\frac{P_1}{Q_1} = \langle 2, 1 \rangle = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}.$$

Así que, $(x_1, y_1) = (3, 1)$. Podemos ver que se verifica la ecuación (5.15) ya que $3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$. Y además, es claro que $(3, 1)$ es la solución entera positiva cuya componente y es mínima, esto quiere decir que es solución fundamental. A continuación podemos plantear la solución general de la ecuación que viene dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n, \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n. \end{cases} \quad (5.16)$$

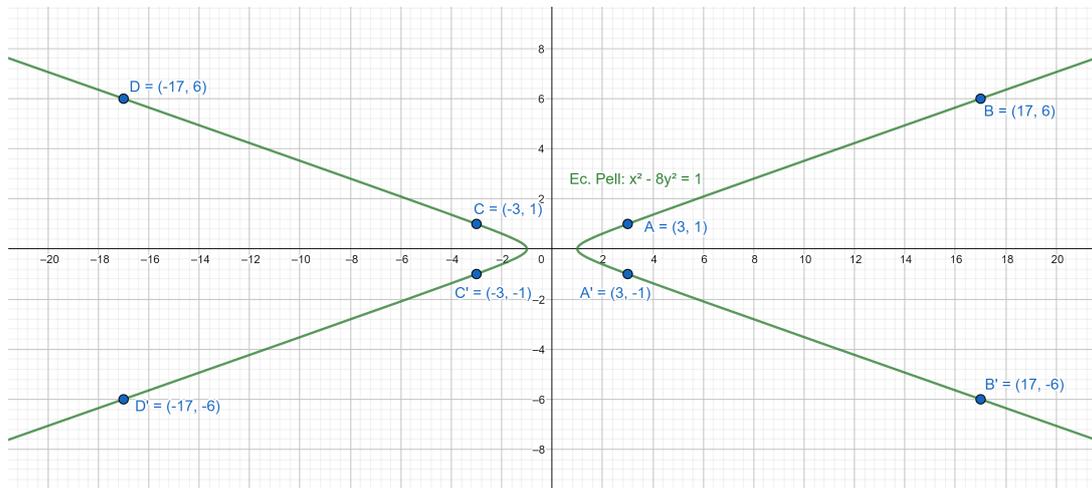


Figura 5.4: Representación de las soluciones de la ecuación de Pell $x^2 - 8y^2 = 1$.

◇

Ejemplo 5.6. Para encontrar la solución fundamental de la ecuación de Pell

$$x^2 - 17y^2 = 1, \quad (5.17)$$

tenemos que poner $\sqrt{17}$ como fracción continua.

$$\begin{aligned} q_0 &= \lfloor \sqrt{17} \rfloor, & \sqrt{17} &= 4 + \frac{1}{\xi_1}, & \xi_1 &= 8,123105626\dots; \\ q_1 &= \lfloor \xi_1 \rfloor, & \xi_1 &= 8 + \frac{1}{\xi_2}, & \xi_2 &= 8,123105626\dots; \end{aligned}$$

Por lo tanto, el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{17}$ es $\langle 4, \bar{8} \rangle$. Observamos que el periodo tiene longitud $m = 1$, como m es impar, estamos en el segundo caso de la

igualdad (5.14). Por lo tanto, $(x_1, y_1) = (P_1, Q_1)$, donde P_1 y Q_1 son los convergentes de orden uno

$$\frac{P_1}{Q_1} = \langle 4, 8 \rangle = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

Así que, $(x_1, y_1) = (33, 8)$. Podemos ver que se verifica la ecuación (5.15) ya que $33^2 - 17 \cdot 8^2 = 1$. Ahora, tenemos que comprobar que la componente y es mínima y entonces tendremos la solución fundamental que necesitamos. Como queremos que las soluciones a la ecuación sean enteros no negativos podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$x^2 - 17y^2 = 1 \implies x^2 - 1 = 17y^2 \implies (x+1)(x-1) = 17k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.18)$$

esto quiere decir que, o bien $x+1$ es múltiplo de 17 o bien lo es $x-1$. El menor valor que puede tomar x para que $x+1$ sea múltiplo de 17 es $x=16$, sin embargo, esta solución no proporciona una solución entera para y en la ecuación (5.17). Si tomamos $x=18$ obtenemos el menor valor para el cual $x-1$ es múltiplo de 17, no obstante, nos encontramos con el mismo problema que en el caso anterior. El siguiente valor de x que hace que $x+1$ sea múltiplo de 17 es $x=33$, que es el valor obtenido en nuestra solución. Esto nos indica que $(x_1, y_1) = (33, 8)$ es la solución fundamental que buscábamos.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación viene dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = 33x_n + 136y_n, \\ y_{n+1} = 8x_n + 33y_n. \end{cases} \quad (5.19)$$

◇

A continuación, vamos a ver cómo resolver la ecuación de Pell (5.12) usando fracciones de Brocot. Para ello, necesitamos saber qué significa que el periodo de $G(a)$ es capicúa.

Definición 5.1. Se dice que $G(\frac{a}{b})$ es *capicúa* si la parte no entera de su desarrollo binario (tomando los ceros necesarios) es capicúa.

Veamos algunos ejemplos para entender la definición anterior.

Ejemplo 5.7. Los siguientes desarrollos son capicúas:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{2}{7}\right) &= 0,00011 = 0,00011000, \\ G\left(\frac{3}{11}\right) &= 0,000101 = 0,000101000, \\ G(3) &= 0,111. \end{aligned}$$

◇

Ahora, para resolver la ecuación de Pell (5.12), donde a es un número natural que no es un cuadrado perfecto, vamos a utilizar la función de González Quijano, $G(\sqrt{a})$.

Debemos tener en cuenta que si a es un número natural que no es cuadrado perfecto, entonces aplicando el teorema 4.5 al desarrollo en fracción continua de \sqrt{a} escrito

anteriormente obtenemos que la expresión en base dos de $G(\sqrt{a})$ es periódica pura, de periodo capicúa que empieza y acaba en uno.

Combinando el teorema 4.2 con el teorema 5.1 obtenemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - ay^2 = 1$ se obtienen calculando la inversa G^{-1} de los números entre 0 y 1 que se obtienen tomando una cantidad finita de periodos de $G(\sqrt{a})$. Los valores de x son los denominadores de las fracciones calculadas y los de y se obtienen dividiendo los correspondientes numeradores por a .

Ejemplo 5.8. Para resolver la ecuación $x^2 - 8y^2 = 1$, tenemos que calcular el desarrollo de González Quijano de $\sqrt{8}$.

$$G(\sqrt{8}) = 0, \overline{11011}$$

Ahora, cogemos un periodo y calculamos la inversa de la función de González Quijano

$$G^{-1}(0, 11011) = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Tal y como hemos dicho antes, el valor de x viene dado por el denominador de la fracción calculada y el valor de y viene dado por la división entre el numerador y el valor de a , en nuestro caso, $a = 8$. Por lo tanto, la solución correspondiente es $x = 3$ e $y = \frac{8}{8} = 1$.

Repetimos el mismo proceso cogiendo dos periodos en vez de uno.

$$G^{-1}(0, 1101111011) = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{48}{17}.$$

La solución correspondiente es $x = 17$ e $y = \frac{48}{8} = 6$. Si repetimos este proceso más veces iremos encontrando las diferentes soluciones de la ecuación de Pell (5.15). \diamond

Ejemplo 5.9. Para resolver la ecuación $x^2 - 17y^2 = 1$, tenemos que calcular el desarrollo de González Quijano de $\sqrt{17}$.

$$G(\sqrt{17}) = 0, \overline{111100000001111}.$$

Ahora cogemos el primer periodo y calculamos la inversa de la función de González Quijano

$$G^{-1}(0, 111100000001111) = 4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4}} = \frac{136}{33}.$$

Por lo tanto, la solución correspondiente es $x = 33$ e $y = \frac{136}{17} = 8$. Y como en el ejemplo anterior, si seguimos repitiendo el proceso encontraremos las diferentes soluciones de la ecuación de Pell (5.17). \diamond

Conclusiones

A lo largo de la memoria hemos desarrollado la teoría necesaria para que en el último capítulo podamos tener una aplicación práctica de la misma. Esta ha sido una de las partes que más me ha gustado del trabajo. Considero que esto es un aspecto muy importante, ya que a veces se tiene mucho conocimiento teórico, pero no se sabe cómo aplicarlo a problemas del mundo real. En este caso, la aplicación de las sucesiones de Brocot al cálculo de engranajes me ha parecido muy interesante. Además, hemos visto como algunas veces es mejor utilizar las sucesiones de Brocot y otras veces es mejor utilizar las fracciones continuas en función de los datos del problema propuesto.

Otro aspecto que me gustaría destacar es que la realización de esta memoria ha supuesto un gran reto para mí. Nunca antes me había enfrentado a un trabajo de estas dimensiones. También hay que tener en cuenta la dificultad que tiene la redacción de un texto matemático, ya que escribir de manera clara y precisa para que el lector lo entienda es una tarea complicada.

De igual forma, haber tenido la oportunidad de aprender un poco más sobre L^AT_EX ha sido muy interesante, ya que considero que es una herramienta elemental a la hora de redactar cualquier texto de carácter matemático.

Bibliografía

- [1] T. ANDREESCU, D. ANDRICA y I. CUCUREZEANU, *An introduction to Diophantine equations*, Birkhäuser Verlag, New York, 2010.
- [2] C. ALSINA y C. BURGUÉS, «Los misterios de la fracción prohibida», *SUMA*, **56**, págs. 39–42, 2007.
- [3] M. BENITO y J. J. ESCRIBANO, *Sucesiones de Brocot*, Editorial Santos Ochoa, Logroño, 1998.
- [4] M. BENITO y J. J. ESCRIBANO, «Resolución de tres problemas propuestos en olimpiadas matemáticas con la ayuda de la función de González Quijano.», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, **51**, págs. 26–34, 1999.
- [5] M. BENITO y J. J. ESCRIBANO, «Una introducción a las fracciones continuas», *SUMA*, **30**, págs. 59–64, 1999.
- [6] M. BENITO y J. J. ESCRIBANO, «An Easy Proof of Hurwitz’s Theorem», *The American Mathematical Monthly*, **109**, nº10, págs. 916–918, 2002.
- [7] L. R. BERRONE, «Engranajes y mejores aproximaciones racionales», *Revista de Educación Matemática*, **13**, págs. 10–29, 1999.
- [8] N. BESKIN, *Fracciones maravillosas*, Editorial MIR, Moscú, 1987.
- [9] A. BROCOT, *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode*, Horloger, París, 1764.
- [10] M. CAMUS, *Cours de mathématique*, troisième édition, Ballard, Paris, 1998.
- [11] R. CRETNEY, «The origins Euler’s early work on continued fractions», *Historia Mathematica*, **41**, págs. 139–156, 2014.
- [12] E. FERNÁNDEZ y M. BANZO, «El problema de Arquímedes del rebaño de reses», *SUMA*, **31**, págs. 67–72, 1999.
- [13] P. M. GONZÁLEZ QUIJANO, «Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo», *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Valladolid. Tomo III, Sección de Ciencias Matemáticas*, págs. 69–117, 1916.

-
- [14] R. L. GRAHAM, D.E. KNUTH y O. PATASHNIK, *Concrete mathematics*, Sixth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [15] H. L. KENG, *Introduction to number theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [16] M. MURILLO, «Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades», *Revista digital matemática, educación e internet*, **15**, nº2, 2015.
- [17] C. D. OLDS, *Continued fractions*, Third Edition, Random House, New York, 1963.
- [18] A. S. POSAMENTIER e I. LEHMANN, *The fabulous Fibonacci numbers*, Prometheus Books, New York, 2007.
- [19] K. H. ROSEN, *Elementary number theory and its applications*, Sixth Edition, Pearson, 2011.
- [20] M. STERN, «Ueber eine zahlentheoretische Funktion», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **55**, págs. 193–220, 1860.
- [21] J. L. VARONA, *Recorrido por la teoría de números*, segunda edición, Electolibris y Real Sociedad Matemática Española, 2019.
- [22] A. L. VILLACAMPA, «Aplicaciones de las fracciones continuas», *Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona*, **1**, págs. 1–35, 2009, disponible en <https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2019n01.pdf>