Trazado de curvas equidistantes y su aplicación en la resolución de problemas de tangencias.

IV. Lugares geométricos de las equidistancias entre tres entidades simples. Justificación del tipo de curvas obtenidas

José Luis Lapaz Castillo
ESEIAAT. Departament d'Enginyeria Gràfica i de Disseny (UPC)

Bernat Faura López de Haro
ESEIAAT. Departament d'Enginyeria Gràfica i de Disseny (UPC)

Cesc Mestres-Domènech
ESEIAAT. Enginyeria de Projectes i de la Construcció (UPC)

ESEIAAT. Enginyeria Gràfica i de Disseny (UPC)

Resumen

Esta comunicación recupera una ponencia presentada con motivo del II Congreso de Expresión Gráfica en la Ingeniería, celebrado en junio de 1990 en La Rábida (Huelva).
El texto se ha articulado en 4 partes:
I. Lugares geométricos de las distancias a una entidad simple.
II. Lugares geométricos de las equidistancias entre 2 entidades simples
III. Lugares geométricos de las equidistancias entre 3 entidades simples. Resolución por reducción al caso de dos entidades.
IV. Lugares geométricos de las distancias y equidistancias a entidades simples. Justificación del tipo de curvas obtenidas.
Lo expuesto a continuación se corresponde con la Parte IV.

Abstract

This communication retrieves a paper presented on the occasion of the II Congress of Graphic Expression in Engineering, held in June 1990 in La Rábida (Huelva).

It has been divided into 4 parts:

I. Previous Concepts. Geometric place of the distances to a simple entity.
II. Geometric places of the equidistance between 2 simple entities
III. Geometric places of the equidistance between 3 simple entities. Resolution by reduction to the case of two entities.
IV. Geometric places of distances and equidistance to simple entities. Justification of the type of curves obtained.

What follows corresponds to the Part IV.

1. Conceptos previos

Distancia mínima (Dm) de un punto a una circunferencia.

Es el segmento PA medio radialmente. Además, forma parte del lugar geométrico (l.g.) de los centros de las circunferencias tangentes exteriormente a 0 y que pasan por A.

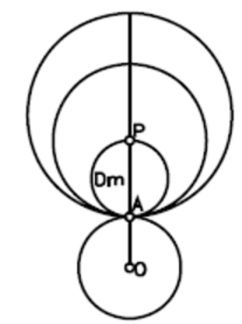


Figura 1

Distancia máxima (DM) de un punto a una circunferencia.

Es el segmento PB medido radialmente. Forma parte del l.g. de los centros de las circunferencias tangentes interiormente a 0 y que pasan por B.

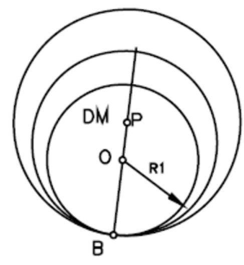


Figura 2

2. Análisis de las curvas equidistantes

Punto/Recta

El punto A pertenece a la curva equidistante de la recta y del punto, si y sólo si, PA=AB. Como todos los puntos de la curva cumplen la propiedad de igualdad de distancias, estamos ante una cónica conocida, la parábola, con las siguientes propiedades:

FOCO: punto P

DIRECTRIZ: recta r

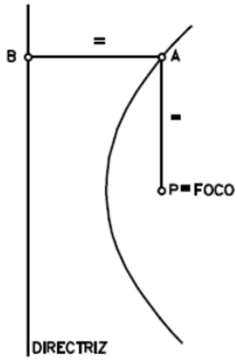


Figura 3

Circunferencia/Recta

El punto P pertenece a la curva equidistante de la circunferencia 0 y de la recta r, si y sólo si, Dm= PA= PB, siendo:

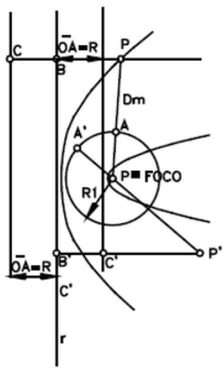
$$PA = PO - R$$

$$PO = PB + R \qquad (1)$$

La ecuación (1) nos da la condición que cumplen los puntos pertenecientes a una parábola con las siguientes propiedades:

FOCO: centro de la circunferencia 0.

DIRECTRIZ: recta paralela a r desplazada a la izquierda una distancia igual a R.



Análogamente, se demuestra que para la

Figura 4

distancia máxima obtenemos otra parábola con las siguientes propiedades:

FOCO:centro de la circunferencia 0.

DIRECTRIZ: recta paralela a r desplazada a la derecha una distancia igual a R.

Circunferencia/Punto

Punto exterior a la circunferencia

El punto A pertenece a la curva equidistante de la circunferencia 0 y del punto P, si y sólo si, Dm = AB = PA, siendo AB = AO - R. De aquí se deduce que:

$$PA = AO - R$$

$$AO - PA = R \qquad (2)$$

De igual forma, la ecuación (2) se cumple para cualquier punto de la curva, con lo que se demuestra que la curva equidistante es un ramal hiperbólico con las siguientes propiedades:

FOCOS: centro 0 y punto P.

EJE REAL: radio R.

Análogamente, se demuestra que para la distancia máxima obtenemos el otro ramal hiperbólico de ecuación idéntica a la anterior, pero en valor absoluto.

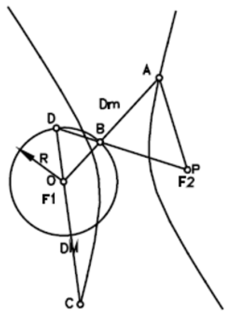


Figura 5

Punto interior a la circunferencia

El punto A pertenece a la curva equidistante de la circunferencia y del punto P, si y sólo si, PA = AB = Dm. Además:

$$AB = R - OA$$
$$PA = R - OA$$

De donde:

$$PA + OA = R \qquad (3)$$

La ecuación (3) cumple la condición de los puntos pertenecientes a una elipse, con las siguientes propiedades:

FOCOS: centro 0 y punto P.

EJE MAYOR: radio R.

De igual forma, trabajando con la distancia máxima, obtenemos la misma ecuación.

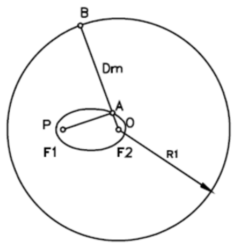


Figura 6

Circunferencia/Punto

a) Ambas exteriores entre sí:

El punto P pertenece a la curva equidistante de las 2 circunferencias, si y sólo si:

$$\begin{aligned} &Dm\ (PA) = Dm\ (PB) \\ &PA = PO1 - R1 \\ &PB = PO2 - R2 \end{aligned}$$

de donde:

$$PO1 - R1 = PO2 - R2$$

$$PO1 - PO2 = R1 - R2 \qquad (4)$$

La ecuación (4) nos da los puntos pertenecientes a un ramal hiperbólico con las siguientes propiedades:

FOCOS: centros de las circunferencias.

EJE REAL: diferencia de radios.

Análogamente, si trabajamos con las distancias máximas a ambas circunferencias, obtenemos, en valor absoluto, idéntica ecuación, que nos definirá el otro ramal hiperbólico.

De igual forma, si tomamos distancias cruzadas respecto de las circunferencias, obtenemos la siguiente igualdad:

$$PO1 - PO2 = R1 + R2 \qquad (5)$$

La ecuación (5), nos dará también, puntos pertenecientes a otro ramal hiperbólico con las siguientes propiedades:

FOCOS: centros de las circunferencias.

EJE REAL: suma de radios.

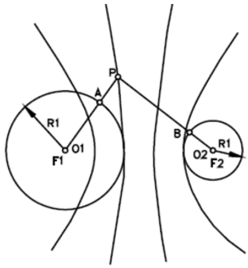


Figura 7

b) Circunferencias secantes entre sí

La demostración es idéntica a los casos anteriores. Las curvas obtenidas son una elipse y una hipérbola, con las siguientes propiedades:

ELIPSE:

FOCOS: centros de las circunferencias.

EJE MAYOR: suma de radios.

HIPERBOLA:

FOCOS: centros de las circunferencias.

EJE REAL: diferencia de radios.

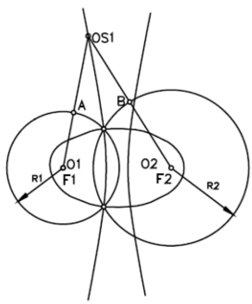


Figura 8

c) Una circunferencia interior a la otra

La demostración es idéntica a los casos anteriores. Las curvas obtenidas son 2 elipses, con las siguientes propiedades:

FOCOS: centros de las circunferencias.

EJE MAYOR: suma de radios para una de las elipses y diferencia de radios para la otra.

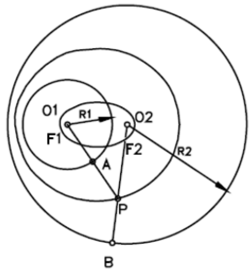


Figura 9

Para la demostración de las ecuaciones paramétrico-cartesianas de las cónicas partiremos de 2 circunferencias-dato:

Una de ellas, de radio r fijo y con centro en el punto (r,0), o no sobre el eje de coordenadas.

La otra, de radio R móvil, con centro de posición variable, pero sobre el eje de las "x", o no, que a veces estará en el semieje (+) y otras sobre el semieje (-).

Obtendremos ecuaciones de la forma:

$$y^2 = r_o\, x - px^2$$

Siendo: r_o = radio de curvatura de la cónica.

P = excentricidad.

(r_o, p) más los 2 parámetros que definirán la cónica. Se tratará de encontrar un valor en función de los radios r y R (datos de partida).

Procedimiento:

1º) Fijamos el origen de coordenadas.

2º) Situamos las circunferencias

3º) Trazamos los arcos con centro en los centros de las circunferencias dadas con incrementos o decrementos δ, dependiendo del tipo de cónica a obtener.

4º) Establecemos las respectivas relaciones geométricas, obteniendo la ecuación que regirá cada curva.

5º) Se obtiene el valor de los parámetros r_o y p.

Casos posibles

a) Casos generales: Ambas circunferencias pasan por el origen de coordenadas y tienen su centro en x.

No tiene sentido estudiarlos (son los mismos casos que antes)

Igual, pero con una de las circunferencias desplazada.

b) Casos particulares: sólo una circunferencia pasa por el origen.

Cónicas: A partir de 2 datos: 2 circunferencias o 2 rectas o circunferencia y recta.

Interior/Interior: Para pasar de ELIPSE <-> HIPERBOLA, basta con cambiar el signo de uno de los radios. La circunferencia es un caso particular de ambas: (p=1)

Si $p = 1$ » $4Rr = (R+r)^2$ » $R^2 + r^2 + 2Rr$ » $R^2 + r^2 - 2Rr = 0$ » $R=r$

$y^2 = 2rx - x^2$ CIRCUNFERENCIA

CIRCUNFERENCIA INT/ INT= EXT/EXT

$\Delta = 0$ » los incrementos tomados son nulos.

$p = 1$ » Excentricidad unitaria.

La parábola también es otra degeneración: una de las circunferencias tiene radio:

lin $y^2 = 4rx$ PARABOLA » $y^2 = 4rx$ EXTERIOR

$\gamma = x$ » Incrementos de valor independiente del r dado.

$p = 0$ » Excentricidad de valor nulo.

Conclusiones

1ª) Cuando los 2 datos -curva abierta (hipérbola, parábola)- recta son exteriores (excluyentes) entre sí, el l.g. es infinito (recta, hipérbola, parábola).

DATOS:

CIRCUNFERENCIA/CIRCUNFERENCIA

RECTA/CIRCUNFERENCIA

CIRCUNFERENCIA/CIRCUNFERENCIA

2ª) Cuando uno de los 2 datos es interior al otro, la **solución está perfectamente acotada**: curva cerrada (elipse, circunferencia) o segmento.

DATOS:

CIRCUNFERENCIA/ CIRCUNFERENCIA

Referencias

Lapaz, J (1990). Tema 6: Trazado de curvas equidistantes y su aplicación en la resolución de problemas de tangencias. Concurso-oposición TEU-272, EUETI de Terrassa, mayo de 1990, 1-24.

Lapaz, J., & Morón, M. (1990). Trazado de curvas equidistantes y su aplicación en la resolución de problemas de tangencias. Actas del II Congreso de Expresión Gráfica en la Ingeniería, La Rábida (Huelva), 1, 2 y 3 de junio de 1990, 105-131.