

A Thurstone módszer alkalmazása sporteredmények elemzésére a 2020/2021-es női kézilabda Bajnokok Ligája példáján

The Application of the Thurstone Method For Evaluating Sports Results – Presenting on the EHF Women Handball Championship

Gyarmati László, Mihálykóné Orbán Éva, Mihálykó Csaba

Pannon Egyetem, Műszaki Informatikai Kar, Matematika Tanszék

Absztrakt: Ebben a tanulmányban sporteredmények kiértékelésének egy lehetséges módját mutatjuk be. Az alkalmazott Thurstone módszer a mérkőzések eredményeit páros összehasonlítások eredményeinek fogja fel. Az egyes csapatok teljesítményeit véletlen mennyiségeknek tekinti, amiknek a várható értékét maximum likelihood módszerrel becsüli. A becsült várható értékek sorrendje adja a csapatok sorrendjét. A módszer előnye, hogy nem csak körmérkőzés és nem csak egyforma számú lejátszott mérkőzés esetén működik; figyelembe veszi az ellenfél erősségét; alkalmas különböző csoportok összefésülésére, valamint további mérkőzések eredményeinek előrejelzésére. A módszert az EHF női kézilabda Bajnokok Ligája eredményein keresztül illusztráljuk. Megmutatjuk, hogy a csoportkörökben ténylegesen lejátszott mérkőzések eredményeit figyelembe véve az erősségek megadhatók. Az A csoport legerősebbje a Metz Handball, a hivatalos eredménnyel szemben, míg a B csoport legerősebbje a Győri Audi KC lett. Előre jeleztük a legjobb nyolc csapatot és a Final Four résztvevőit, felhasználva a csoportkörök eredményeit és a csoportbeli legjobbaknak a másik csoportbeli leggyengébbek elleni egy-egy győztes meccsét. Végezetül megállapíthatjuk, hogy a módszer helyesen jelezte előre a Vipers Kristiansand kupagyőzelmét.

Kulcsszavak: páros összehasonlítás; valószínűség számítási háttér; csoportok összefésülése; előrejelzés

Abstract: In this paper a possible method for evaluation of sports results is presented. The applied Thurstone method considers the results of the matches as the results of paired comparisons. Performances of the teams are random variables, and their expectations are estimated by maximum likelihood method. Ranking of the expectations provides ranking of the teams. The advantages of the method are the followings: it works without the requirement of equal numbers of matches, takes into consideration the strength of the opponents, and it is suitable for interweaving different groups and forecasting further results. Use of the method is illustrated through the results of the Women's EHF Champions League. We present that ranks of the groups can be set up based on the played matches. The best team of Group A is Metz Handball, opposite to the official result; the best team of Group B is Győri Audi KC. Participants of the Quarter Final and the Final Four are forecasted based on the results in the group phase and on the results of the best teams against the weakest teams in the other groups. Finally, the method correctly predicts the winner of the Cup, namely the Vipers Kristiansand.

Keywords: paired comparisons; probabilistic background; interweaving different groups; forecasting

Bevezetés

Szinte minden sportág esetében készülnek rangsorok, világranglisták különböző célból. Van, amikor ez alapján kvalifikálhatnak versenyzők különböző világversenyekre, van, amikor a versenyeken történő kiemelések alapjául szolgálnak, de a tornák végeredményei is rangsorolásokon alapulnak. A sorrendeket számos különböző módon lehet megállapítani. A tornákon leggyakrabban csoportkörökben szerzett pontok eredményeinek és egyes kieséses szakaszok mérkőzéseinek kombinálásával születik meg a végső sorrend. Más esetekben a mérkőzések eredményeit páros összehasonlítások eredményeinek fogják fel és a kiértékeléseket páros összehasonlítási módszerekkel valósítják meg. Legismertebb példa erre a sakkozók Élő-féle pontrendszere, amely során a versenyzők egymás elleni párharcainak eredményeire alapozó statisztikai módszert alkalmaznak (Élő, 1974). Élő Árpád alapfeltevése az volt, hogy egy sakkjátékos teljesítménye egy valószínűségi változó. Ennek a várható értéke adja meg a versenyző átlagos teljesítményét, ami azonban időben, más játékosok ellen elért eredményei hatására változik, és a várható érték változását átkonvertálják aktuális Élő-pontokká. De alkalmazták már a páros összehasonlításokat sakktornák elemzésére (Csató, 2017; Mihálykóné és Mihálykó, 2021), szumó versenyzők rangsorolására (Araki, Hirose és Komaki, 2019), gradiens módszerrel kombinálva futballbajnokságok kiértékelésére és előrejelzésre (Lasek és Gagolewski, 2021), illetve (Mihálykóné, Mihálykó és Gyarmati, 2021), vagy tenisz örökranglista készítésére is (Bozóki, Csató és Temesi, 2016). Kézilabda sportágra nem találtunk alkalmazást, csak említést az alkalmazhatóságra, ám mi most cikkünkben megmutatjuk, hogy valóban hatékonyan használható ekkor is, és ezzel bővítjük az így elemzett sportágak körét.

A leggyakrabban alkalmazott páros összehasonlítási módszer az AHP (Analytic Hierarchy Process), amely Saaty nevéhez kötődik (Saaty, 1990). A módszert rendkívül gyakran alkalmazzák a döntésemelvényben, de egyéb területeken is. Egy közelmúltban megjelent elektronikus könyv például a hivatkozásaiban számtalan példát mutat alkalmazására (Munier és Hontoria, 2021). A módszer kiindulópontja egy páros összehasonlítási mátrix, amelynek elemei azt mutatják meg, hogy az indexeknek megfelelő *i*-edik és *j*-edik összehasonlítandó objektumok közül az elől lévő hányszor

jobb a másodiknál. Általánosan elfogadott értékek az 1, 3, 5, 7, 9 és reciprokaik, de más értékekkel is lehet dolgozni. A mátrixnak a leggyakrabban alkalmazott kiértékelési módszere a sajátvektor módszer. A mátrix domináns sajátértékéhez tartozó sajátvektor minden koordinátája pozitív, így ezt a vektort egyre normálva megkapjuk a kiértékelte objektumok súlyát, a koordináták sorrendjéből pedig az objektumok sorrendjét. Nagy előnye a módszernek, hogy sok opciót enged a döntésre. Hátránya, hogy akkor ad jó sorrendet, ha az összehasonlítások eredménye közel konzisztens. Sportmérkőzések esetén azonban gyakori a körbeverés, ami elrontja a konzisztenciát. Továbbá a kiértékelési módszer megköveteli, hogy minden objektum minden másikkal össze legyen hasonlítva, amely sportversenyek esetén sokszor nem teljesül. Ennek a problémának a kiküszöbölésére kidolgozott kiértékelési módszer a logaritmus legkisebb négyzetek módszere (LLSM) (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010), amely lehetővé teszi a kiértékelést nem teljes összehasonlítások esetén is. Ezzel a módszerrel adtak örökranglistát teniszezők esetére a szerzők, megoldva azt a problémát, hogy egyes világklasszisok más-más időszakban versenyeztek és így soha nem is tudtak játszani egymással (Bozóki, Csató és Temesi, 2016). A kiindulás az LLSM esetében is egy páros összehasonlítási mátrix, amelynek elemei azt az információt tartalmazzák, hogy az egyik objektum hányszor jobb a másikkal (például az említett cikkben a két összehasonlított játékos egymás elleni győzelmei és vereségei számának hányadosaként számolva a mátrix kapcsolódó elemét). Azonban ez az érték nehezen definiálható például akkor, ha az egyik mindig legyőzi a másikat. Amennyiben viszont az említett, egyoldalú eredményeket adó összehasonlításokat önkényesen módosítjuk vagy elhagyjuk, akkor az információt mesterségesen átalakítjuk vagy elveszítjük, aminek következtében torzítunk az eredményen (és így a rangsoron), ugyanis az eredmény a mátrixelemek értékének függvénye.

A fenti problémák mindegyikét kiküszöböli egy más háttérű, Thurstone által javasolt, szintén páros összehasonlítások eredményeinek kiértékelésére alkalmas módszer, amely a kiértékelendő objektumokhoz látens valószínűségi változókat rendel (Thurstone, 1927). A kiértékelés eredménye a valószínűségi változók különbségétől függ. A modellt Mosteller továbbfejlesztette (Mosteller, 1951), és

az általa használt, normális eloszlású valószínűségi változókkal, egyenlő szórásokkal dolgozó modell Thurstone-Mosteller modell néven vált ismertté és leggyakrabban alkalmazottá. A modell relatív gyakoriságokat felhasználva legkisebb négyzetek módszerével becsli a paramétereket. Hátránya volt a modellnek, hogy csak két opciót enged meg (jobb/rosszabb). Normális eloszlás helyett logisztikus eloszlást alkalmaztak a látens valószínűségi változók különbségére a Bradley-Terry modellben (Bradley és Terry, 1951), s ezt általánosították három opcióra (rosszabb/egyforma/jobb) (Davidson, 1970), ezáltal alkalmassá vált például sakkversenyek kiértékelésére. Maximum likelihood becslést alkalmazva a logisztikus eloszlás esetén az exponenciális függvénynek köszönhetően még három opció alkalmazásakor is a paraméterek becsült értéke explicit módon kifejezhető, azonban a szimulációs eredmények szerint a normális eloszlás alkalmazása számos esetben realisabb eredményekhez vezet (Anderson, 2015).

Thurstone eredeti elképzelését 2019-ben általánosítottuk kettőnél több opció esetére, ezáltal többlet-információk is figyelembe vehetőkké váltak. A Thurstone-Mosteller modelltől eltérően mi a becslést maximum likelihood módszerrel véghezvük. Így lehetőséget kapunk statisztikai tesztek végrehajtására is. A módszer arra is alkalmas, hogy segítségével előrejelzést adjunk azáltal, hogy jövőbeli összehasonlítások eredményeire valószínűséget számolhatunk. Ezek a lehetőségek nem adóttak az AHP és az LLSM esetén. A módszerhez szervesen hozzátartozik a maximumhely egyértelműségének biztosítása, erre (bizonyos esetekben sajnos csak bonyolultan megadható) elégséges feltételeket fogalmaztunk meg és bizonyítottunk (Orbán-Mihálykó, Mihálykó és Koltay, 2019a, Orbán-Mihálykó, Mihálykó és Koltay, 2019b, Mihálykóné, Mihálykó és Kajtár, 2019; Mihálykó, Mihálykóné és Gyarmati, 2021).

Számos további módszer létezik, köztük az átlagpontoszám módszer, amit összehasonlításra mi is fogunk alkalmazni. González-Díaz és szerzőtársai számos kétopciós módszert elemeztek a tulajdonságaik alapján (González-Díaz, Hendrickx és Lohmann, 2014), és a Bradley-Terry modell maximum likelihood becsléssel kombinált formáját találták a legelőnyösebbnek, annak ellenére, hogy az átlagpontoszám módszer természetes módon adódik és a legtöbb axiomatikus tulajdonságot teljesítette

a vizsgált módszerek közül. Azonban komoly problémának érzékelték azt, hogy ez a módszer nem veszi figyelembe, hogy a pontokat milyen (gyengébb vagy erősebb) ellenféllel szemben szerezték meg. Mihálykóné és társai egy cikkükben vizsgálták a Thurstone módszer több kategóriára általánosított, általános szigorúan log-konkáv sűrűségfüggvényrel rendelkező látens valószínűségi változókat alkalmazó modell axiomatikus tulajdonságait, és hasonló kedvező tulajdonságokat bizonyítottak, mint González-Díaz és társai, ráadásul a modelljükkel az előbb említett problémát is kiküszöbölték (Orbán-Mihálykó, Mihálykó és Koltay, 2019b).

Ebben a publikációban a Thurstone módszer fent említett általánosított változatát alkalmaztuk az EHF női kézilabda Bajnokok Ligája (BL) kiértékelésére. Fontos motivációnk volt, hogy a Covid19 járvány miatt a mérkőzések egy része elmaradt, s az allokált pontok erősen befolyásolták a csoportkörök eredményét és a további párosításokat is. Tekintve, hogy a módszer használható nem teljes összehasonlítások esetére, segítségével lehetséges rangsort állítani olyan esetben is, amikor a versenyzők/capatok egy része nem is játszott egymással. Mivel a módszer sztochasztikus háttérű, lehetőséget ad arra, hogy megbecsüljük annak valószínűségét, hogy egy jövőbeli párharc kimenetele milyen eredménnyel fog zárulni, ezáltal használható későbbi mérkőzések eredményeinek előrejelzésére. A kézilabda BL eredményeinek kiértékelése arra is lehetőséget ad, hogy bemutassuk, miképp lehet egymástól független csoportokba tartozó csapatok összefésült sorrendjét meghatározni néhány, más-más csoportba tartozó csapat egymás elleni eredménye alapján. Itt gondolunk például arra, ha a csoportkör után két (vagy több) csoportból a továbbjutó csapatok a kieséses szakaszban találkoznak egymással és néhány ilyen mérkőzés alapján a csoportok összes csapatát összefésülhetjük egy közös rangsorba. Amennyiben ezt a szerzett pontszámok vagy az átlagpontoszámok alapján tennénk meg, akkor egyszerűen bele lehet gondolni, hogy különböző erősségű csoportok esetén könnyen fals eredményhez jutnánk, ezért nem érdemes ezek alapján összefésülést csinálni.

Az alkalmazott módszer

Mint korábban említettük, a Thurstone módszer azon alapszik, hogy minden egyes kiértékelni kívánt objektumhoz látens valószínűségi változót

rendelünk, aminek a várható értékét becsüljük az összehasonlítások eredményei alapján.

Amikor két objektumot összehasonlítunk, akkor arról döntünk, hogy az összehasonlítás eredménye melyik kategóriába esik. Ezek a kategóriák a következők lehetnek: jobb, egyforma, rosszabb (esetleg egyéb további kategóriák, például lényegesen jobb, lényegesen rosszabb). Sport esetében ez azt jelenti, hogy például két összehasonlítandó csapat egymással való összehasonlításának az eredménye az, hogy egy adott mérkőzés során melyik csapat győzött, esetleg a mérkőzés döntetlenel végződött. Amelyik csapat győzött, az az adott összehasonlítás esetében jobbnak minősült, a másik rosszabbnak. Döntetlenkor egyformának bizonyultak. Bevezethetők a lényegesen jobb, lényegesen rosszabb kategóriák is, például, ha bizonyos gólkülönbség feletti lett az összecsapás eredménye. Ez finomabb kategorizálást jelent és általában emiatt pontosabb eredményt ad. Mi ezt a változatot fogjuk használni majd a kézilabda BL eredményeinek kiértékelésekor.

Vegyünk n csapatot, amelyeket szeretnénk sorba rendezni és erősségüket számszerűsíteni. Feltételezzük, hogy a csapatok teljesítménye az egyes mérkőzések során valamilyen mértékben véletlen. A mérkőzés eredményét a két csapat véletlentől függő teljesítménye eltéréseinek aktuális értéke határozza meg. A csapatok átlagos erősségét m_1, m_2, \dots, m_n -nel jelöljük, s ezeket a várható értékeket becsüljük. A becsült értékek sorrendje adja majd meg a csapatok (erő)sorrendjét.

Számításaink során kézilabda mérkőzéseket értékelünk. A csapatok egymással való összehasonlításai (egymás elleni mérkőzéseik) során öt döntési opciót/kategóriát engedünk meg: lényegesen rosszabb, rosszabb, egyforma, jobb, lényegesen jobb, annak megfelelően, hogy nagy vereség, vereség, döntetlen, győzelem vagy nagy győzelem lett a mérkőzés eredménye az egyik csapat szempontjából tekintve. Itt a nagy vereség/nagy győzelem alatt a 7, vagy annál nagyobb gólkülönbségű vereséget/győzelmet értettük. (Nyilván ez a határ szubjektíven, a szerzők elgondolása alapján lett meghúzva, ezen lehetne vitatkozni, hiszen valamelyest befolyásolja az erősségeket és a sorrendet, azonban tapasztalatunk azt mutatja, hogy a lényeges trendeket nem, így most ebből a szempontból nem vizsgáljuk a módszer működését.)

Mintának tekintjük a mérkőzések eredményeinek összességét. A módszer lényege, hogy felírjuk az aktuális minta (az eredmények összessége) kialakulásának valószínűségét, az ún. likelihood függvényt, s ezt, illetve ennek logaritmusát maximalizáljuk a paraméterekben és így becsüljük meg azokat (*Prékopa*, 1972). Ahhoz, hogy a módszert alkalmazhassuk és a likelihood becslés egyértelmű eredményt adjon, bizonyos feltételeknek eleget kell tennie a bemeneti adatoknak (esetünkben az egymás elleni mérkőzések eredményeinek). A módszerünk matematikai leírása, és a vele a kapcsolatos állításaink (sportbeli alkalmazásokkal) megtalálhatók korábbi publikációinkban (*Mihálykóné, Mihálykó és Kajtár*, 2019; *Orbán-Mihálykó, Mihálykó és Koltay*, 2019a; *Orbán-Mihálykó, Mihálykó és Koltay*, 2019b; *Mihálykó, Mihálykóné és Gyarmati*, 2021). A konkrét számolásokat numerikus optimalizálással C# nyelven írt program segítségével végeztük.

A módszer előnyeit a bevezetésben röviden összefoglaltuk, a konkrét alkalmazásban látni fogjuk, hogy ezek az előnyök maradéktalanul fennállnak.

A módszer hátránya, hogy a maximum likelihood becslés, ezáltal a végső kiértékelés numerikus optimalizáláson alapszik, ami csak számítógépes háttérrel valósítható meg. Így a csapatok számára az az információ, hogy bizonyos eredményt elérve hova kerülnek a rangsorban, egyszerű számolgatással nem elérhető. Továbbá, mivel a módszer egy komplex rendszernek tekinti az egész versenyt, így azt is figyelembe veszi, hogy egy adott csapat által elért eredmény gyengébb vagy erősebb csapat ellen született. Ez utóbbi tulajdonság nem megszokott a sztenderd sportbeli kiértékelésekben, és emiatt esetenként a szereplők számára nehezen érthető és elfogadható, bár a kiértékelés eredményét még hitelesebbé teszi.

Eredmények

Az előbb felvázolt módszert alkalmaztuk a női kézilabda Bajnokok Ligája eredményeinek kiértékelésére. A mérkőzések eredményeit a <https://ehfcl.eurohandball.com/women/2020-21/standings/> honlapról töltöttük le.

A női kézilabda BL-ben először két csoportban folynak a mérkőzések. Itt körmérkőzéses rendszer van, majd innen továbbjutva egyenes kieséssel

menetelnek a döntőig a csapatok. A 2020/21-es idényben azonban a koronavírus következtében nem sikerült megrendezni egyes mérkőzéseket, így azok eredményeit játék nélkül eldöntötték, a pontokat 10:0-s gólkülönbséggel odaítélték a „véetlen” csapatnak, többször a tényleges erőviszonyokkal ellentétesen. Itt azért is írtuk a véetlen szót idézőjelben, mert sokszor a másik csapat sem tehetett érdemben arról, hogy a mérkőzést az adott időben és helyen nem lehetett lejátszani. Az A csoportban így elmaradt hat (több, mint 10 %-a a meccseknek!), a B csoportban négy mérkőzés. Azonban az odaítélt pontok megváltoztatták a csapatok sorrendjét az A csoportban, felborítva ezzel a csoportban a valós erőssorrendet. Ennek hatása azonban továbbgyűrűzött, mert a kiesési szakaszban nem a tényleges erőssorrend szerint történt a párosítás, ami kiemelten érintette a Vipers Kristiansand csapatát (illetve ellenfeleit).

A csapatok rangsora a csoportokban

Először a csoportkörök mérkőzéseinek eredményei alapján határozzuk meg a csapatok sorrendjét és erősségét külön-külön a csoportokban.

Az 1. táblázatban az A csoport eredményei láthatók, ahol az „Összes mérkőzés alapján” elnevezésű oszlopban található az összes mérkőzésen a csapatok által szerzett pontszámok. Ez tartalmazza a ténylegesen lejátszott meccsek mellett a pandémia miatt nem lejátszott, de a „véetlen” csapatnak odaítélt pontokat is. Eszerint alakult ki a hivatalos EHF eredmény is. A „Tényleges mérkőzések alapján” elnevezésű oszlop tartalmazza a ténylegesen lejátszott meccsek alapján szerzett pontokat, az átlagpontszámot (a ténylegesen lejátszott mérkőzések alapján szerzett pontok és a ténylegesen lejátszott mérkőzések számának arányát), továbbá a Thurstone módszer szerint számolt erősséget. Azért is érezzük fontosnak az átlagpontszám feltüntetését a pontszám mellett, mivel az egyes csapatok különböző számú mérkőzést játszottak, ami befolyásolta a ténylegesen szerzett pontjaik számát. Ezáltal így egy másik bevett páros összehasonlítási módszerrel, az átlagpontszám módszerrel is összevethettük a Thurstone módszert. Ugyanezen értékeket a B csoport esetében a 2. táblázatban találjuk.

1. táblázat Az A csoport csapatainak pontjai, átlagpontszámai és erősségei

Hivatalos sorrend		Összes mérkőzés alapján	Tényleges mérkőzések alapján		
Helyezés	Csapatnév		Pontszám	Átlagpontszám	Becsült erősség (m _i)
1	Rostov-Don	21	19	1,584	1,477
2	Metz Handball	20	18	1,384	1,576
3	CSM Bucuresti	17	13	1,084	1,191
4	FTC-Rail Cargo Hungaria	16	16	1,142	1,193
5	Vipers Kristiansand	16	14	1,272	1,541
6	Team Esbjerg	12	10	0,770	1,276
7	RK Krim Mercator	7	7	0,538	0,412
8	SG BBM Bietigheim	3	3	0,250	0

2. táblázat A B csoport csapatainak pontjai, átlagpontszámai és erősségei

Hivatalos sorrend		Összes mérkőzés alapján	Tényleges mérkőzések alapján		
Helyezés	Csapatnév		Pontszám	Átlagpontszám	Becsült erősség (m_i)
1	Győri Audi ETO KC	24	24	1,714	2,601
2	CSKA	23	23	1,642	2,035
3	Brest Bretagne Handball	17	17	1,308	2,017
4	Odense Håndbold	13	13	0,928	1,248
5	Buducnost	12	12	0,858	1,203
6	SCM Ramnicu Valcea	10	6	0,600	0,367
7	BV Borussia 09 Dortmund	9	7	0,584	0,798
8	HC Podravka Vegeta	4	2	0,154	0

Megjegyezzük, hogy a módszer erősségek közötti különbségeket határoz meg, így becsült erősségként minden táblázatban az utolsó helyezettek képesti eltérés szerepel. Az egyszerűség kedvéért a mindenkor utolsó csapat várható értékét nullának tekintettük.

A csoportok összefűlése

A szurkolók hagyományos „játéka”, hogy két párhuzamosan futó csoportot és csapataikat összehasonlítják, melyik az erősebb, illetve mely csapatok hogyan viszonyulnak egymáshoz. Ez több szempontból fontos kérdés, és matematikailag alátámasztott módon fogjuk megválaszolni, megmutatva, hogy lehetséges megbízható módon összefűlni a két csoport nyolc-nyolc csapatát.

Közvetlenül a csoportkör után az EHF szakértői is elemezték és sorrendbe állították a szerintük legjobb nyolc csapatot, amivel egyúttal direkt módon megadták azt is, hogy a nyolcaddöntő párosításai esetében mely csapatokat tartják a továbbjutóknak (lásd <https://ehfcl.eurohandball.com/women/2020-21/news/en/gyor-top-power-ranking-going-into-play-offs/>). Ezt fogjuk hivatalos EHF rangsornak és előrejelzésnek nevezni.

Ahhoz, hogy a két csoport összefűlését a

Thurstone módszer meg tudja valósítani, szükség van a két csoport csapatai között valamilyen „összekötő” eredményre. Enélkül ugyanis nincsen semmilyen információnk a két csoport csapatainak egymáshoz viszonyított erősségére vonatkozóan, mivel korábban a csoportkör során nem volt mérkőzés a két csoport között. Az összefűlés érdekében így a minimálisan szükséges, korábban említett „összekötő” mérkőzéseknek az SG BBM Bietigheim - Győri Audi ETO KC és a HC Podravka Vegeta – Rostov-Don párharcok első meccseit választottuk. Tettük ezt azért, hogy így az EHF szakértőinek rendelkezésére álló eredményekhez képest csak minimális számú és ráadásul előre borítékolható további eredményt használtunk fel a csoportok összefűléséhez, ezáltal lényegében ugyanabból az eredményhalmazból dolgoztunk, mint az EHF szakértői. Felhasználva az említett két mérkőzés eredményét, kiszámítottuk a 16 csapat sorrendjét és az erősségeiket, és a 3. táblázatban megadtuk azokat. Hangsúlyozzuk, hogy a csoportkörök mérkőzésein túl mindössze ez a további két, a különböző csoportok csapatai között lejátszott mérkőzés elég volt ahhoz, hogy helyes rangsort lehessen adni a 16 csapatra vonatkozóan!

3. táblázat Az EHF ranglista és a Thurstone módszerrel számított sorrend és erősségek a 16 csapatra

	EHF szakértői ranglista	Thurstone módszerrel kapott ranglista és a becsült erősségek	
Helyezés	Csapatnév	Csapatnév	m_i
1	Győri Audi ETO KC	Győri Audi ETO KC	2,866
2	CSKA	CSKA	2,227
3	Rostov-Don	Brest Bretagne Handball	2,216
4	Metz Handball	Metz Handball	2,211
5	FTC-Rail Cargo Hungaria	Vipers Kristiansand	2,170
6	Brest Bretagne Handball	Rostov-Don	2,160
7	CSM Bucuresti	Team Esbjerg	1,917
8	Odense Håndbold	FTC-Rail Cargo Hungaria	1,861
9	-	CSM Bucuresti	1,860
10	-	Odense Håndbold	1,387
11	-	Buducnost	1,336
12	-	RK Krim Mercator	1,132
13	-	BV Borussia 09 Dortmund	0,911
14	-	SG BBM Bietigheim	0,701
15	-	SCM Ramnicu Valcea	0,429
16	-	HC Podravka Vegeta	0

A legjobb nyolc közé jutó csapatok és a Final Four csapatainak előrejelzése

Első lépésként azt mutatjuk be, hogy milyen sikerrel volt előre jelezhető, hogy mely csapatok kerülnek a legjobb nyolc közé. A 4. táblázatban látható az első nyolc közé ténylegesen bejutott csapatok, az EHF előrejelzése szerinti, illetve a Thurstone módszer által a 3. táblázat alapján való előrejelzés szerint az első nyolcba jutó csapatok listája. Ehhez szükséges informá-

ció a nyolcaddöntő sorsolása. Ez, és a további fordulók párosításai, valamint a mérkőzések eredményei az 5. táblázatban láthatók. Vastag kiemeléssel a továbbjutó csapatokat jelöltük. A Thurstone módszert használva minden egyes páros esetében a 3. táblázatban található ranglista szerint előbb álló csapat továbbjutását jeleztük előre. A 4. táblázatban a vastag kiemelés a sikeresen előre jelzett csapatokat jelöli.

4. táblázat A legjobb nyolc közé jutott és az előre jelzett csapatok listája

A legjobb 8 közé jutott csapatok	EHF ranglista szerint a legjobb 8 közé várt csapatok	A Thurstone módszer szerint a legjobb 8 közé várt csapatok
Győri Audi ETO KC	Győri Audi ETO KC	Győri Audi ETO KC
CSKA	CSKA	CSKA
Rostov-Don	Rostov-Don	Brest Bretagne Handball
Metz Handball	Metz Handball	Metz Handball
Vipers Kristiansand	FTC-Rail Cargo Hungaria	Vipers Kristiansand
Brest Bretagne Handball	Brest Bretagne Handball	Rostov-Don
CSM Bucuresti	CSM Bucuresti	FTC-Rail Cargo Hungaria
Buducnost	Odense Håndbold	CSM Bucuresti

5. táblázat A nyolcaddöntők, a negyeddöntők és az elődöntők párosításai és a mérkőzések eredményei

Nyolcaddöntők	Negyeddöntők	Elődöntők
SG BBM Bietigheim Győri Audi ETO KC 20:37; 28:32	Buducnost Győri Audi ETO KC 19:30; 21:24	Győri Audi ETO KC Brest Bretagne Handball 23:23 (hétméteresekkel 2:4)
Buducnost FTC-Rail Cargo Hungaria 22:19; 28:29		
BV Borussia 09 Dortmund Metz Handball 0:10, 0:10 (nem lejátszott)	Brest Bretagne Handball Metz Handball 34:24; 26:26	
Team Esbjerg Brest Bretagne Handball 27:33; 27:30		
Vipers Kristiansand Odense Håndbold 35:36; 30:26	Vipers Kristiansand Rostov-Don 34:27; 23:23	Vipers Kristiansand CSKA 33:30
HC Podravka Vegeta Rostov-Don 20:29; 24:42		
RK Krim Mercator CSKA 25:20; 21:27	CSM Bucuresti CSKA 32:27; 19:24	
SCM Ramnicu Valcea CSM Bucuresti 24:33; 27:21		

A legjobb négy közé kerülő csapatok előrejelzéséhez is a 3. táblázatot használjuk. A negyeddöntő párosításait is figyelembe véve (lásd. 5. táblázat) megadtuk a legjobb négy közé kerülő csapatokat (mindig a 3. táblázatban előrébb állót jeleztük továbbjutónak).

A legjobb négy közé jutó csapatok listája, az EHF ranglistája alapján előre jelzett, illetve a Thurstone módszer szerint az első négy közé várt csapatok listája a 6. táblázatban látható (a vastag kiemelés itt is a sikeresen előre jelzett csapatokat jelöli):

6. táblázat A legjobb négy közé jutott és előre jelzett csapatok listája

A legjobb 4 közé jutott csapatok	EHF ranglista szerint a legjobb 4 közé várt csapatok	A Thurstone módszer szerint a legjobb 4 közé várt csapatok
Győri Audi ETO KC	Győri Audi ETO KC	Győri Audi ETO KC
CSKA	CSKA	CSKA
Brest Bretagne Handball	Rostov-Don	Brest Bretagne Handball
Vipers Kristiansand	Metz Handball	Vipers Kristiansand

A Final Four eredményeinek előrejelzése

A Final Four (F4) párharcainak az eredményeit is előre jeleztük. Ehhez azonban már a negyeddöntő mérkőzéseit is felhasználtuk. Most viszont csak a legjobb nyolc csapat egymás elleni összes, a negyeddöntővel bezárólag, lejátszott mérkőzésének eredményét vettük figyelembe. Ezt tettük ré-

sztint azért, mert így csak fele annyi csapat súlyát kell meghatározni, amelyek ráadásul az igazán erős csapatok, valamint azért is, mert a mérkőzések egy jó része időben közelebb zajlott a F4-hoz, így várhatóan nagyobb az előre jelző erejük. Az így kapott sorrend és az erősségek a 7. táblázatban láthatók.

7. táblázat A csapatok várható értékei a Thurstone módszer esetén csupán a legjobb nyolc csapat meccseinek figyelembevételével

Helyezés	Csapatnév	m_i
1	Vipers Kristiansand	1,397
2	Győri Audi ETO KC	1,380
3	CSKA	0,735
4	Rostov-Don	0,666
5	Brest Bretagne Handball	0,582
6	Metz Handball	0,039
7	CSM Bucuresti	0,015
8	Buducnost	0

Sajnos, kizárólag az első négy csapat egymás elleni eredményeit figyelembe véve a Thurstone módszer nem tudott volna sorrendet adni, mert a Vipers a másik három csapat egyikével sem játszott, így nem lehetett tovább szűkíteni a kört.

A legjobb nyolc csapat eredményei alapján előre jelezhetjük a F4 csapatainak végső sorrendjét. A

7. táblázatbeli rangsor szerint előrébb állót tekintettük helyezésben előbbre kerülőnek. Figyelembe véve az elődöntő sorsolását (lásd. 5. táblázat), a Thurstone módszer segítségével, illetve az EHF ranglistája alapján jósolt helyezések a 8. táblázatban találhatóak.

8. táblázat Az első négy csapat jósolt sorrendje az EHF ranglista és a legerősebb 8 csapat eredményei alapján számoltak szerint

	Végső sorrend	EHF ranglista szerint a F4 végső sorrendje	Thurstone módszer szerint a F4 végső sorrendje
1	Vipers Kristiansand	Győri Audi ETO KC	Vipers Kristiansand
2	Brest Bretagne Handball	CSKA	Győri Audi ETO KC
3	Győri Audi ETO KC	Brest Bretagne Handball	CSKA
4	CSKA	Vipers Kristiansand	Brest Bretagne Handball

Látható, hogy a Thurstone módszer azt jelzi előre, hogy a Vipers Kristiansand megnyeri a Bajnokok Ligáját, s ez az előrejelzés helyesnek bizonyult!

Megjegyezzük, hogy az EHF ranglistát a végső sorrend előrejelzéséhez csak a teljesség kedvéért vettük számításba. Nyilvánvaló, hogy mivel ez a rangsor csupán a csoportkörök eredményei alapján született, így jóval korlátozottabb érvényességgel bír a végső helyezések tekintetében és ezért hátrányban van a későbbi eredményeket is felhasználó Thurstone módszerrel szemben.

Pusztán csak a végső sorrend előrejelzésénél természetesen többet is tudunk mondani: az egyes párharcok kimenetelének a valószínűségeit is meg

tudjuk becsülni. Ezt korábban is meg tudtuk tenni, csak nem láttuk olyan érdekesnek, hogy általánosan be is mutassuk. Most azonban mivel a F4-ről van szó, különösen érdekes!

A 9. táblázat az elől álló csapat továbbjutási esélyét mutatja az elődöntőben, a 10. táblázatban pedig az esetleges döntők esetén az elől álló csapat győzelmének valószínűsége látható. Amint az kiolvasható a 9. és 10. táblázatból, ezen előrejelzés szerint is a Vipers Kristiansand csapatának volt a legnagyobb esélye arra, hogy a BL-t megnyerje. (Megjegyezzük, hogy a fogadóirodák a Vipers Kristiansandot a végső nyeresi esély szerint általában a harmadik helyre tették csak a F4 előtt.)

9. táblázat Az elődöntőből való továbbjutás esélyei

Elődöntő meccsei	Az elől álló csapat esélye a döntőre
Győri Audi ETO KC - Brest Bretagne Handball	0,747
Vipers Kristiansand – CSKA	0,788

10. táblázat Az esetleges döntő (illetve a bronzmeccs) kimenetelének esélyei

Az esetleges döntő/bronzmeccs	Az elől álló csapat esélye a győzelemre
Brest Bretagne Handball - Vipers Kristiansand	0,208
Győri Audi ETO KC – CSKA	0,741
Győri Audi ETO KC - Vipers Kristiansand	0,493
Brest Bretagne Handball – CSKA	0,439

Értelemszerűen, ha a 10. táblázat első párosítása valósul meg a döntő tekintetében (mint történt ténylegesen), akkor a második párosítás a bronzmeccs, amennyiben pedig az első meccs lett volna a bronzmérkőzés, akkor a második párosítás lett volna a döntő. A harmadik, negyedik párosítások esetén is ugyanez a helyzet állt volna fenn. Az F4

tényleges eredményei a 11. táblázatban láthatók, amihez annyi megjegyzés kívánkozik, hogy a Győri Audi ETO KC - Brest Bretagne Handball mérkőzésen a hosszabbítás 23:23-as eredménye után a Brest a hétméteres párbajban 4:2-re nyert és így jutott a döntőbe.

11. táblázat A F4 tényleges eredményei

Elődöntő meccsei	Eredmények
Győri Audi ETO KC - Brest Bretagne Handball	23 : 23
Vipers Kristiansand – CSKA	33 : 30
Bronzmérkőzés	
Győri Audi ETO KC – CSKA	32 : 21
Döntő	
Brest Bretagne Handball - Vipers Kristiansand	28 : 34

Az eredmények részletes elemzése és a következtetések

Az előző, Eredmények fejezetben bemutattuk a Thurstone módszer segítségével számolt sorrendeket, erősségeket és előrejelzéseket. Ebben a fejezetben a kiszámolt értékeket, a kapott sorrendeket elemezzük, hasonlítjuk a hivatalos eredményhez és az átlagpontoszámhoz, és megokoljuk az eltéréseket. Az elemzések során arra is rávilágítunk, miért ad realisabb eredményt a Thurstone módszer a hivatalos kiértékelési módszernél.

Az elemzés során a fejezetben az Eredmények fejezet alfejezeteinek sorrendjét követjük.

A csapatok csoportbeli rangsorának meghatározásakor az 1. táblázat alapján látható, hogy az A csoportban a le nem játszott meccsek következtében odaítélt pontok legnagyobb nyertese a CSM Bucuresti csapata volt. Ennek köszönhetően két csapatot is megelőzött az „Összes” szerint a „Ténylegeshez” képest a pontszám és az átlagpontoszám alapján, erősség alapján pedig három hellyel került előbbre. A Vipers Kristiansand pedig a fő vesztese lett a pontok odaítélésének, így a tényleges meccsek alapján számolt erősségek, illetve az átlagpontoszám szerinti helyezéshöz képest hárommal, illetve kettővel hátrébb csúszott az „Összes” szerinti sorrendben. A későbbi mérkőzések alapján ki is derült, hogy tényleges erő tekintve jobb az őt a hivatalos eredmény szerint jócskán megelőző Rostov-Donnál. Megfigyelhető az is, hogy a tényleges meccsek alapján számolt átlagpontoszám szerinti, illetve az erősségek szerinti sorrend sem egyezik meg. Például ez utóbbi szerint már a csoportban is megelőzi a Vipers Kristiansand a Rostov-Dont! Ennek az eltérésnek az oka az, hogy a Thurstone módszer azt is figyelembe veszi, hogy milyen erős-

ségű csapatok ellen szerezte meg pontjait egy adott csapat, míg az átlagpontoszámnál ez nem számít. Ez a Thurstone módszernek egy komoly előnye! Legkevesebé a hivatalos rangsor és Thurstone módszer szerint számolt sorrend hasonlít egymásra, a helyezésszámok közti eltérések alapján számolva közöttük helyezkedik el az átlagpontoszám szerint számolt sorrend.

A 2. táblázat megmutatja, hogy a B csoportban, részint azért, mert kevesebb volt az odaítélt mérkőzés, részint azért, mert azok eredménye sokkal kiegyenlítettebb módon alakult, sorrendváltozás csak egyetlen helyen történt. A hivatalos sorrendben és az átlagpontoszám szerint számolva hatodik és hetedik két csapat helyet cserélt, amikor az erősség szerinti sorrendet határoztuk meg.

Az 1. és a 2. táblázatot tanulmányozva látható, hogy a Thurstone módszer egy kivételével (a CSKA, illetve a Brest esetében csak nüansznyi különbséget mutatott ki, de a Brest elleni két győzelme okán is mégis egyértelműen a CSKA a második) mindig mindkét csoportban meggyőző módon meg tudta határozni a ténylegesen lejátszott meccsek alapján az erősségek szerint az első kettő és az utolsó kettő csapatot. Ennek az eredeti versenykiírás szerint lett volna jelentősége, mert aszerint a csoportok első két helyezettje rájátszás nélkül bekerült volna a legjobb nyolcba, míg az utolsó kettő kiesett volna és csak a 3-6. helyezettek küzdöttek volna meg a nyolc közé kerülésért.

A csoportok összefésülésekor a 3. táblázatban feltűnő, hogy az EHF ranglistán a Vipers Kristiansand nem fért be a legjobb nyolc közé, míg a Thurstone módszer szerint ötödik a sorban (és megelőzi az EHF ranglista szerint harmadik helyezett Rostov-Dont). Hasonlóképp a Brest Bretagne Handball csapatát is jóval előbbre rangsorolja a

Thurstone módszer, mint az EHF ranglista. Épp ellenkezőleg, az FTC-Rail Cargo Hungaria az EHF szerint igen jó helyezésű (ötödik), azonban a Thurstone módszer szerint csak nyolcadik helyen áll. Mint később kiderült, a Vipers Kristiansand és a Brest Bretagne Handball bekerült a legjobb nyolc közé, sőt a döntőbe is, előbbi végül a kupát is elnyerte, míg az FTC csapata a legjobb nyolc csapat közé sem került be.

Jól látható, hogy az EHF-nek sikerült nagyjából ugyanolyan összerőségű A és B csoportba beosztani a 16 csapatot, ugyanis a Thurstone módszer szerinti 16-os rangsorban az A csoportbeli csapatok helyezési sorszámainak átlaga közel áll a B csoportéhoz (8,13 illetve 8,88). Érdekes megfigyelni, hogy ez azonban az első nyolc csapat esetében már nem érvényes, ugyanis ott az A csoport csapatainak az átlagos helyezésszáma jóval több, mint a B csoport csapataié (6 illetve 2). Az EHF ranglista szerint ezek a számok 4,75, illetve 4,25, vagyis az EHF szakértői jóval kiegyenlítettebbnek értékelték a két csoport élmezőnyét. A helyezésszámok azt is mutatják, hogy a B csoport csapatai inkább szétváltak egy erősebb és egy gyengébb blokkra, míg az A csoportbeliek kevésbé. Ugyanezt láthatjuk a csoportkörökön belüli eredmények alapján becsült erősségek esetén a legjobb és a legrosszabb csapatok közti különbségek szerint is (1,576 illetve 2,601). Egyébként ez az első nyolc csapat közötti B csoportot jellemző fölény már előrevetítette azt is, hogy a F4-ba a B csoport csapatai fognak nagyobb számban bekerülni, ahogy az történt is.

A Thurstone módszer segítségével igen hatékonyan tudtuk előre jelezni a nyolcaddöntőből és a negyeddöntőből továbbjutó csapatokat is (4., illetve 6. táblázat). Amint a 4. táblázat alapján látható, mind az EHF, mind a Thurstone módszer által megadott lista pontatlan, de míg a hivatalos EHF előrejelzés két helyen is hibázott, addig a módszerünk csak egy helyen. A Buducnost továbbjutását az FTC-Rail Cargo Hungaria ellen egyik módszer sem volt képes előre jelezni, azonban az EHF előrejelzés a Vipers Kristiansand győzelmét sem látta előre. Megjegyezzük, hogy az FTC és a Buducnost a 3. táblázatban a Thurstone szerinti sorrendben nincs nagyon távol egymástól, és viszonylag nagy esély (0.3) volt arra, hogy a Buducnost jut tovább. Mint emlékeztetés, nagyon éles küzdelemben dőlt el a továbbjutás sorsa. Ezzel szemben az EHF szakértői az FTC-t a rangsorukban a csoportkör-

ben a Buducnostot megelőző Brest és Odense elé helyezték, vagyis lényegesen jobbnak gondolták a Buducnostnál.

Amint a 6. táblázatból kiolvasható, a Thurstone módszer a negyeddöntőből mind a 4 továbbjutót jól jelezte előre, míg az EHF előrejelzés csak kettőt tudott jól megjósolni.

A 9., 10. és 11. táblázat alapján jól látható, hogy a modellünk helyesen adta meg a Bajnokok Ligája győztesét, továbbá a F4-ban lejátszott 4 mérkőzésből 3-nak az eredményét is jól jelezte előre. Azon az egy mérkőzésen pedig, amikor ez nem sikerült, nagyon kiegyenlített játék mellett (és másfél perccel a rendes játékidő letelte előtt egygólos vezetéskor a rendes játékidő letelte előtt egygólos vezetéskor kihagyott hétméteres, valamint az utolsó másodpercekben kihagyott ziccer után) a hosszabbítás 23:23-as döntetlenjét követően hétméterekkel kapott csak ki a Győri Audi ETO KC csapata a Brest Bretagne Handball csapatától. Feltehetőleg más, korábbi eseményekre visszavezethető tényezők is hatással voltak a győri csapatra, talán ezért sem tudott olyan jól szerepelni az elődöntőben, mint az várható volt tőle. Viszont a bronzmeccs eredménye megmutatta, hogy jogos volt a CSKA elleni előrejelzésben szereplő jelentős esélybeli különbség.

Mindezek alapján megállapítható, hogy a Thurstone módszer nagyon hatékonyan képes a jövőbeli mérkőzések eredményét előre jelezni, számszerűsítve is a mérkőzések kimeneteleinek valószínűségét. Ez értékes többletinformációt jelent a szakértőknek, a sportfogadásokban résztvevőknek, és általában a szurkolóknak.

Összegzés

A bemutatott eredmények azt támasztják alá, hogy a Thurstone módszer széleskörűen, jól alkalmazható sportversenyek elemzésére olyan esetekben, amikor egymás elleni párharcokban alakulnak ki az eredmények (például futballban, kézilabdában, vízilabdában stb.).

A BL eredményeinek elemzésekor a módszer a következőkben bizonyult előnyösnek:

A pandémia miatt nem lejátszott meccsek nélkül is meg lehetett határozni a csapatok erősségét és sorrendjét, amik reálisabbnak mutatkoztak, mint az odaítélt pontok alapján kialakult hivatalos sorrend szerintiek.

A Thurstone módszerrel kezelni tudtuk a (lényegében független) csoportok csapatainak együttes

rangsorolását, és ezt az A és B csoportok rangsor szempontjából történő összefésülésénél jól fel lehetett használni.

A Thurstone módszer alkalmasnak bizonyult arra, hogy a kieséses szakaszban előre jelezzük a párharcok kimeneteleit.

Végezetül segítségével előrejelzést tudtunk adni a női kézi Bajnokok Ligája első négy csapatának sorrendjére, az elődöntők, a bronzmeccs és a döntő eredményeire a mérkőzések esélyeit számszerűsítve. A módszer helyesen jelezte előre a Vipers Kristiansand kupagyőzelmét.

A fenti előnyök általánosan is érvényesek. A módszer segítségével lehetséges rangsort állítani olyan más esetekben is, amikor a versenyzők különböző számú mérkőzést játszanak, valamint a versenyzők/capatok egy része nem is játszik egymással (például svájci rendszerű vagy részben kieséses versenyek). Mivel a módszer sztochasztikus háttérű, lehetőséget ad arra, hogy megbecsülje egy jövőbeli párharc lehetséges kimeneteleinek valószínűségeit, ezáltal alkalmas későbbi mérkőzések eredményeinek előrejelzésére. Egymástól független csoportokba tartozó csapatok összefésült sorrendjét is meg lehet határozni a módszerrel, akár kevés, más-más csoportba tartozó csapat egymás elleni eredménye alapján, például egy futball Európa-bajnokság esetében.

Ez a tulajdonság felhasználható nemzeti kézilabda/futball bajnokságok csapatainak összefésülésére nemzetközi kupamérkőzések eredményei segítségével egy következő kutatás keretében, ezáltal megválaszolható lehet az a kérdés, hogy melyik bajnokság a legerősebb.

Köszönetnyilvánítás

A publikáció elkészítését, megjelenését támogatta az Innovációs és Technológiai Minisztérium a Tématerületi Kiválósági Program keretében az NKFIH-843-10/2019 sz. támogatói okirat alapján. A támogatást a szerzők ezúton is köszönik. A szerzők továbbá köszönetet mondanak az EFOP-3.6.1-16-2016-00015 számú projekt anyagi támogatásáért.

Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválósági Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

1. Anderson, A. (2015): A Monte Carlo comparison of alternative methods of maximum likelihood ranking in racing sports, *Journal of Applied Statistics* 42.8, 1740-1756.
2. Araki, K., Hirose, Y. és Komaki, F. (2019): Paired comparison models with age effects modeled as piecewise quadratic spline, *International Journal of Forecasting* 35.2, 733-740.
3. Bradley, R. A. és Terry, M. E. (1952): Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons, *Biometrika*, 39.3/4, 324-345.
4. Bozóki S., Csató L. és Temesi J. (2016): An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis player, *European Journal of Operational Research* 248.1, 211-218.
5. Bozóki, S., Fülöp, J. és Rónyai, L. (2010): On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling* 52.1-2, 318-333.
6. Csató, L. (2017): On the ranking of a Swiss system chess team tournament, *Annals of Operations Research* 254.1, 17-36.
7. Davidson, R. R. (1970): On extending the Bradley-Terry model to accommodate ties in paired comparison experiments. *Journal of the American Statistical Association* 65.329, 317-328.
8. Élő Á. (1978): *The rating of chessplayers, past and present*. Arco Pub.
9. González-Díaz, J., Hendrickx, R. és Lohmann, E. (2014): Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods, *Soc. Choice Welfare* 42.1, 139-169.
10. Lasek, J. és Gagolewski, M. (2021): Interpretable sports team rating models based on the gradient descent algorithm, *International Journal of Forecasting* 37.3, 1061-1071.
11. Mihálykóné Orbán, É., Mihálykó, Cs. és Kajtár, P. (2019): Általánosított Thurstone-módszer alkalmazásokkal, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 36.2, 255-262.
12. Mihálykóné Orbán, É. és Mihálykó, Cs. (2021): Thurstone módszer általánosítása előnyök figyelembe vételére, *Szigma* 52.1, 49-62.

13. Mihálykó, Cs., Mihálykóné Orbán, É. és Gyarmati L. (2021): Thurstone módszer általánosításai, *Alkalmazott Matematikai Lapok* (elfogadva)
14. Mosteller, F. (1951): Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika* 16. 3–9.
15. Munier, N. és Hontoria, E. (2021): Uses and Limitations of the AHP Method. Management for Professionals. Ebook. <https://www.springer.com/gp/book/9783030603915>
16. Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C. és Koltay, L. (2019a): A generalization of the Thurstone method for multiple choice and incomplete paired comparisons, *Central European Journal of Operations Research* 27.1, 133-159.
17. Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C. és Koltay, L. (2019b): Incomplete comparisons in case of multiple choice and general log-concave probability density functions. *Central European Journal of Operations Research* 27.2, 515-532.
18. Prékopa A. (1972): *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*. Műszaki Kiadó. Budapest.
19. Thurstone, L. L. (1927): A law of comparative judgement. *Psychol. Rev.* 34.4, 273-286.
20. Saaty, T. L. (1990): How to make a decision: the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research* 48.1, 9-26.
21. <https://ehfcl.eurohandball.com/women/2020-21/standings/> (letöltés dátuma 2021. június 10.) EHF Champions League Standings | EHF
22. <https://ehfcl.eurohandball.com/women/2020-21/news/en/gyor-top-power-ranking-going-into-play-offs/> (letöltés dátuma 2021. április 15.) Győr top power ranking going into play-offs Worthen, M.G.F & Baker, A (2016) Pushing up on the Glass Ceiling of Female Muscularity: Women's Bodybuilding as Edgework, *Deviant Behavior*, 37:5, 471-495, DOI: 10.1080/01639625.2015.1060741