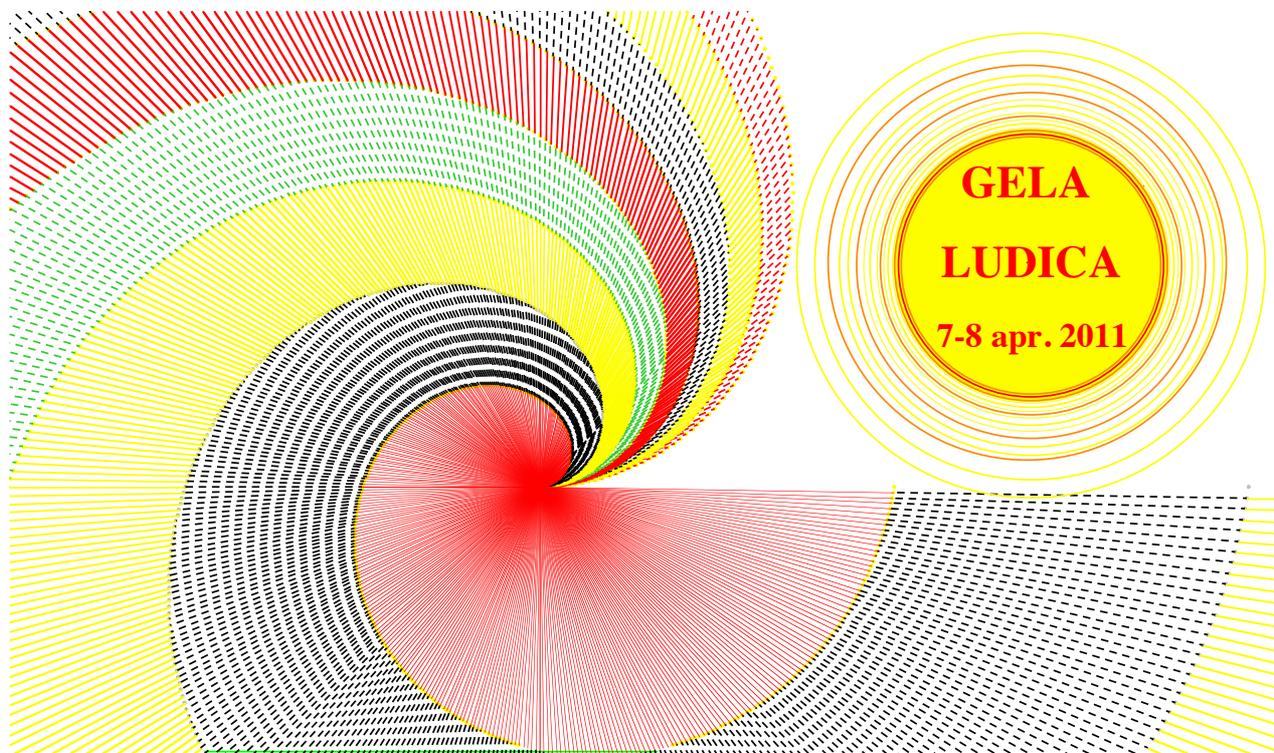


Matematica bella, semplice, a colori e in movimento

Mario Barra¹ *Dipartimento di Matematica, Università Sapienza di Roma*

Nutre la mente ciò che la rallegra S. Agostino



Riassunto

Partire dalla matematica e preoccuparsi di insegnarla allo studente o partire dallo studente per individuare quale matematica potrà giovare maggiormente allo studente e alla società?

Ragionare di più e calcolare di meno: più ragionamento infinitesimale e meno calcolo infinitesimale, più sviluppo delle facoltà cognitive e meno routine, più partecipazione attiva e meno esercizi esecutivi e ripetitivi, più linguaggi usuali per gli studenti e meno “lavagna e gesso” e maggiore possibilità di cogliere la bellezza con minore soggezione; in fondo anche Archimede, il più grande matematico della storia, ha imbrogliato.

Sviluppo delle immagini mentali e maggiore possibilità di memorizzazione: importanza del colore e del movimento. Cosa ne pensa la Medaglia Field Michael F. Atiyah.

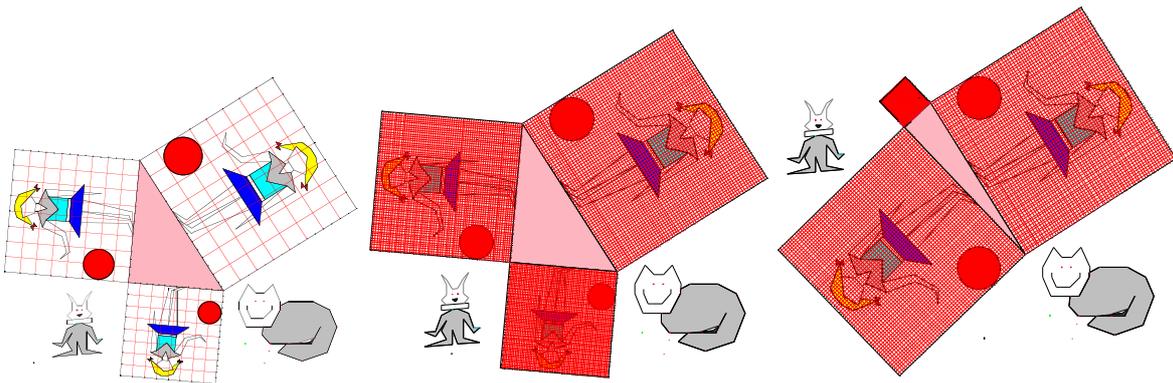
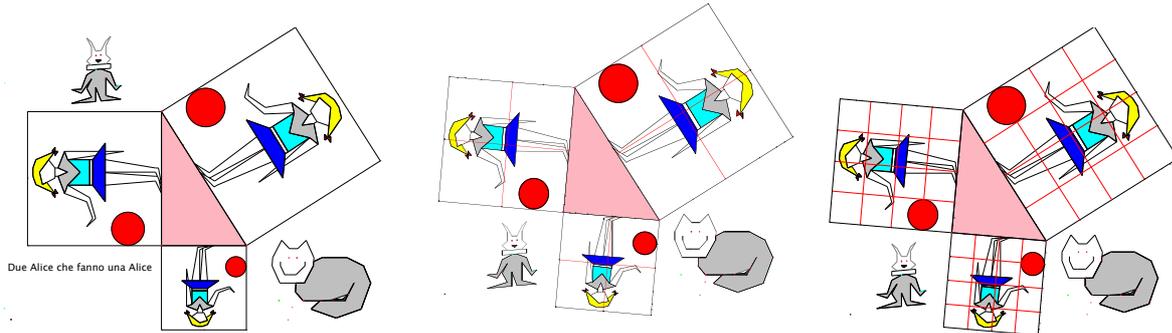
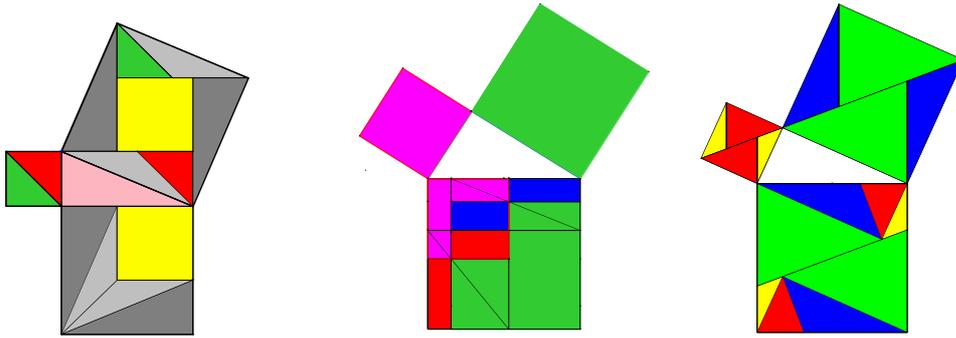
Gli argomenti, le parole e i metodi selezionati per favorire la ricerca matematica debbono necessariamente essere utili anche per la scuola?

La ricerca didattica deve preoccuparsi anche di semplificare l’insegnamento con nuovi metodi e risultati matematici originali?

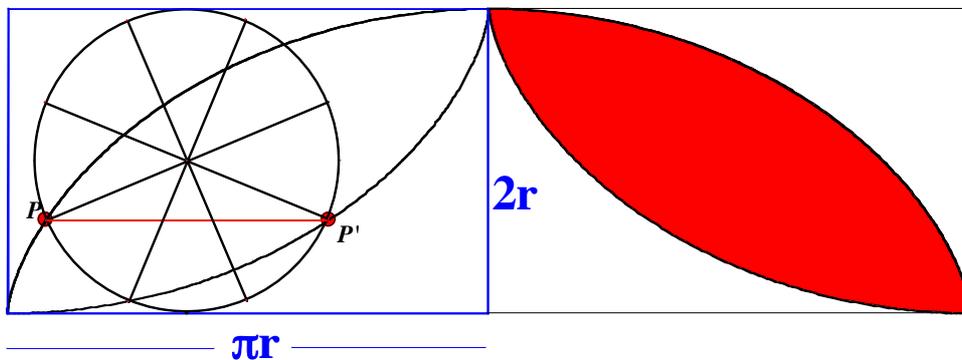
Una nuova trasformazione geometrica, due metodi originali per calcolare la somma delle potenze degli interi, un nuovo Triangolo Aritmetico per comprendere i più importanti concetti del Calcolo delle probabilità attraverso la somma dei dadi e alcune idee per visualizzare alcuni aspetti complessi e qualche loro proprietà. Cercare di far associare alla matematica sensazioni piacevoli, da ricercare.

¹ barra@mat.uniroma1.it

Teorema di Pitagora anche per introdurre il ragionamento infinitesimale

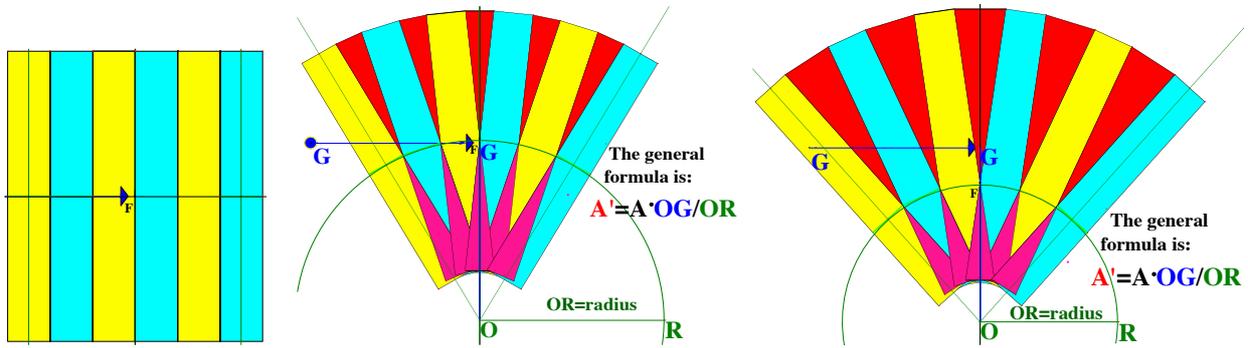


2. Più ragionamento infinitesimale dinamico e meno calcolo infinitesimale.

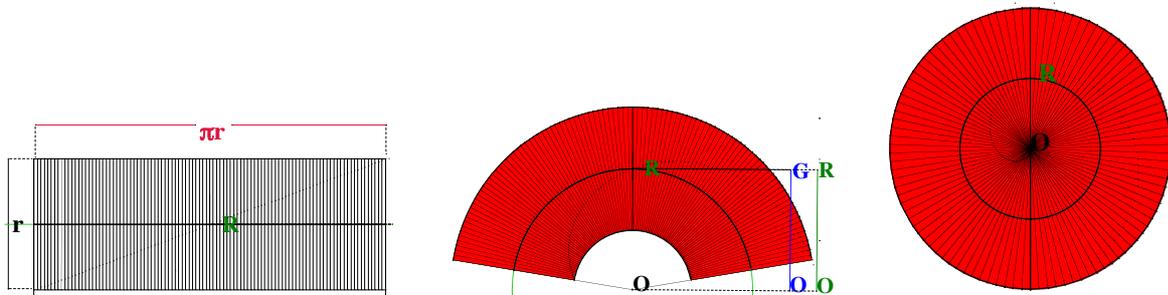


**Area = A = πr^2 = Area di un cerchio
segue: Area cicloide = area 3 cerchi**

Una nuova trasformazione non lineare semplice: aree di curve vecchie e nuove: cerchio, spirale, cicloide, cardioide, gigli, foglie, fiori matematici, ... ; nuova area = $A' = A \frac{OG}{OR}$

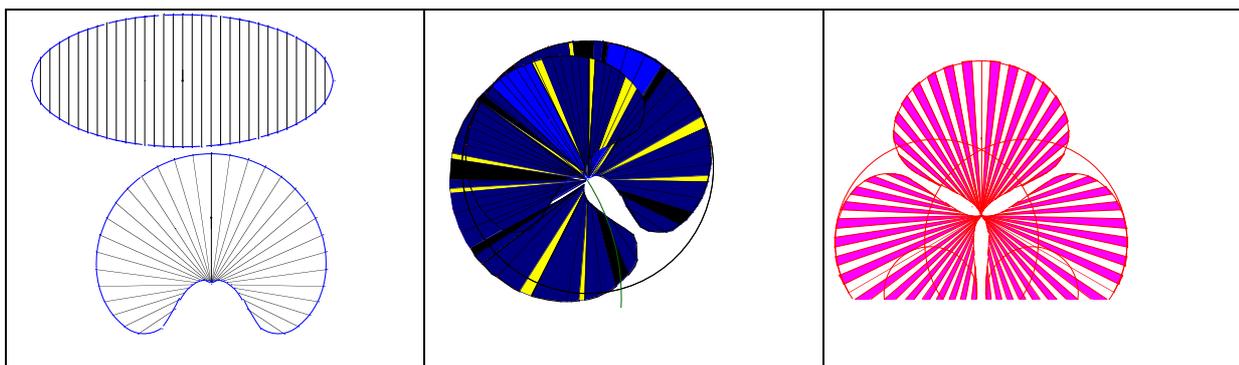
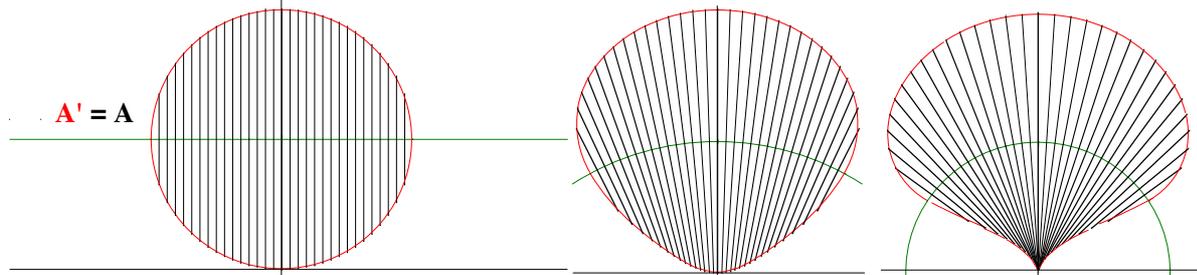


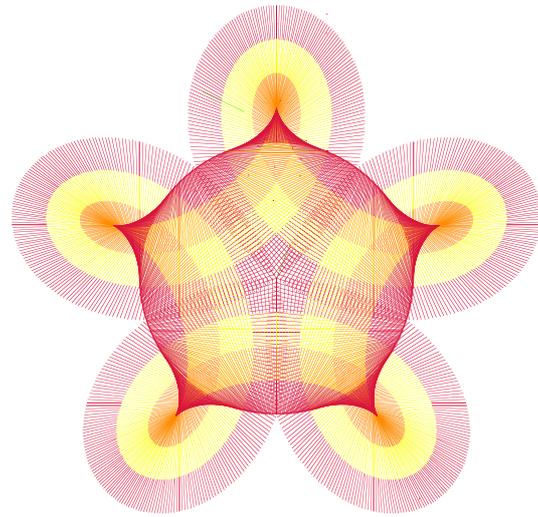
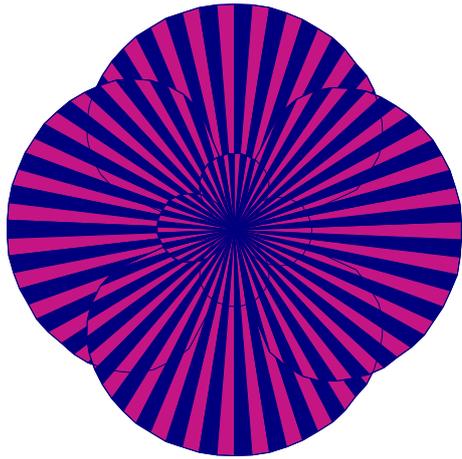
per trovare il perimetro (il bordo superiore si allunga come quello inferiore si stringe) e l'area di un cerchio



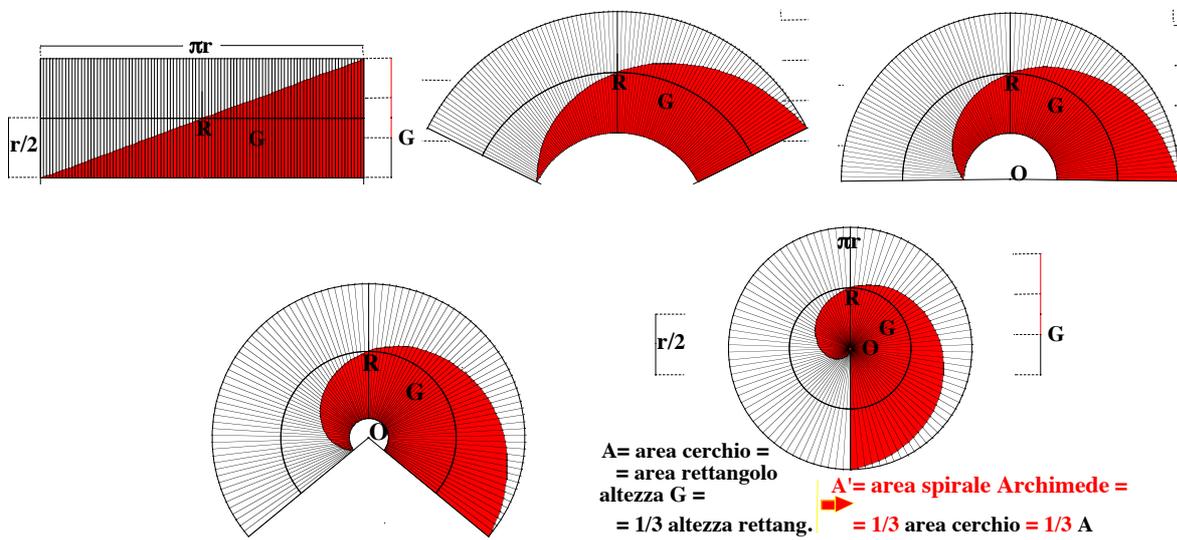
e l'area di nuove curve

$$r - \sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq r + \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow r - \sqrt{r^2 - a^2} \leq \rho \leq r + \sqrt{r^2 - a^2}$$



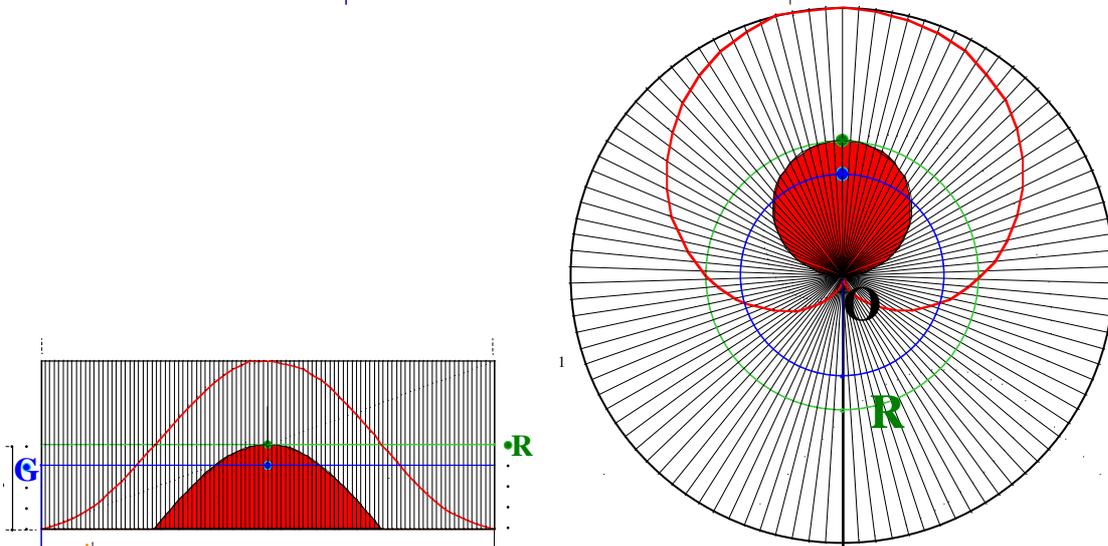


Dal triangolo \mathcal{T} alla spirale di Archimede

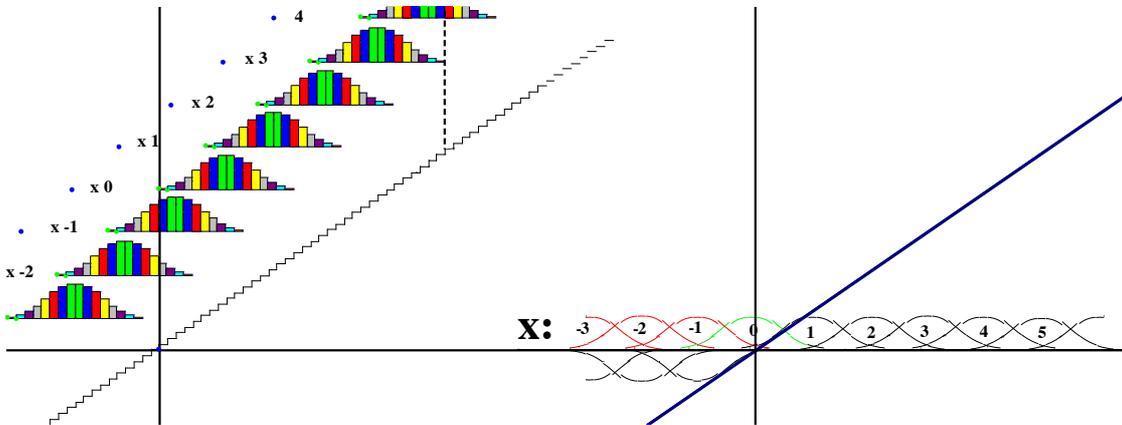
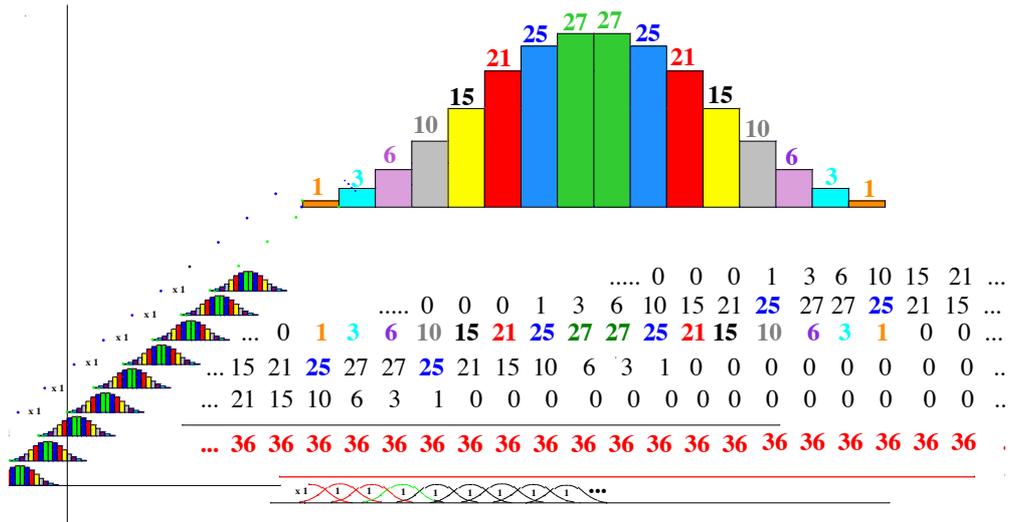


Dal seno alla cardioide

$$\text{Area Cardioide} = A' = A \cdot \frac{OG}{OR} = 8\pi r^2 \cdot \frac{3/4 \cdot 2r}{2r} = 6\pi r^2$$

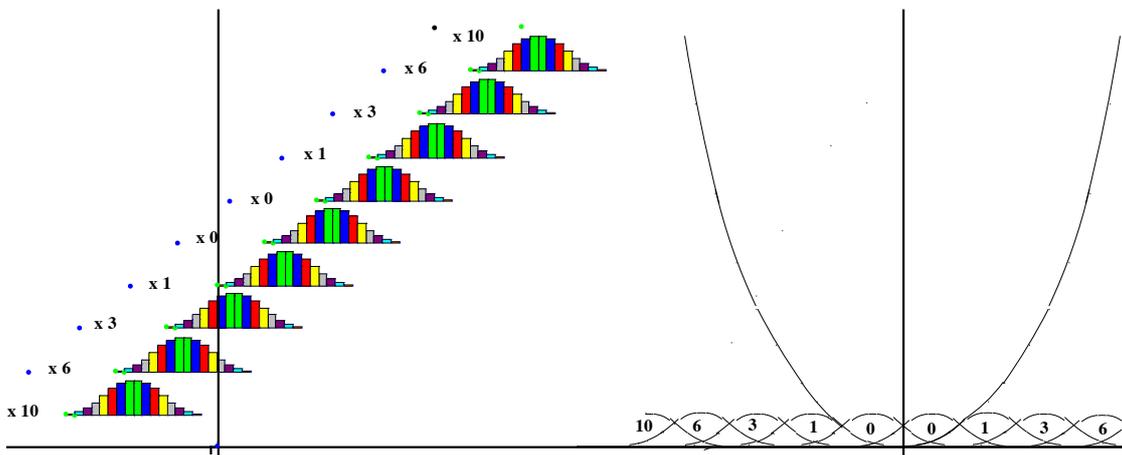


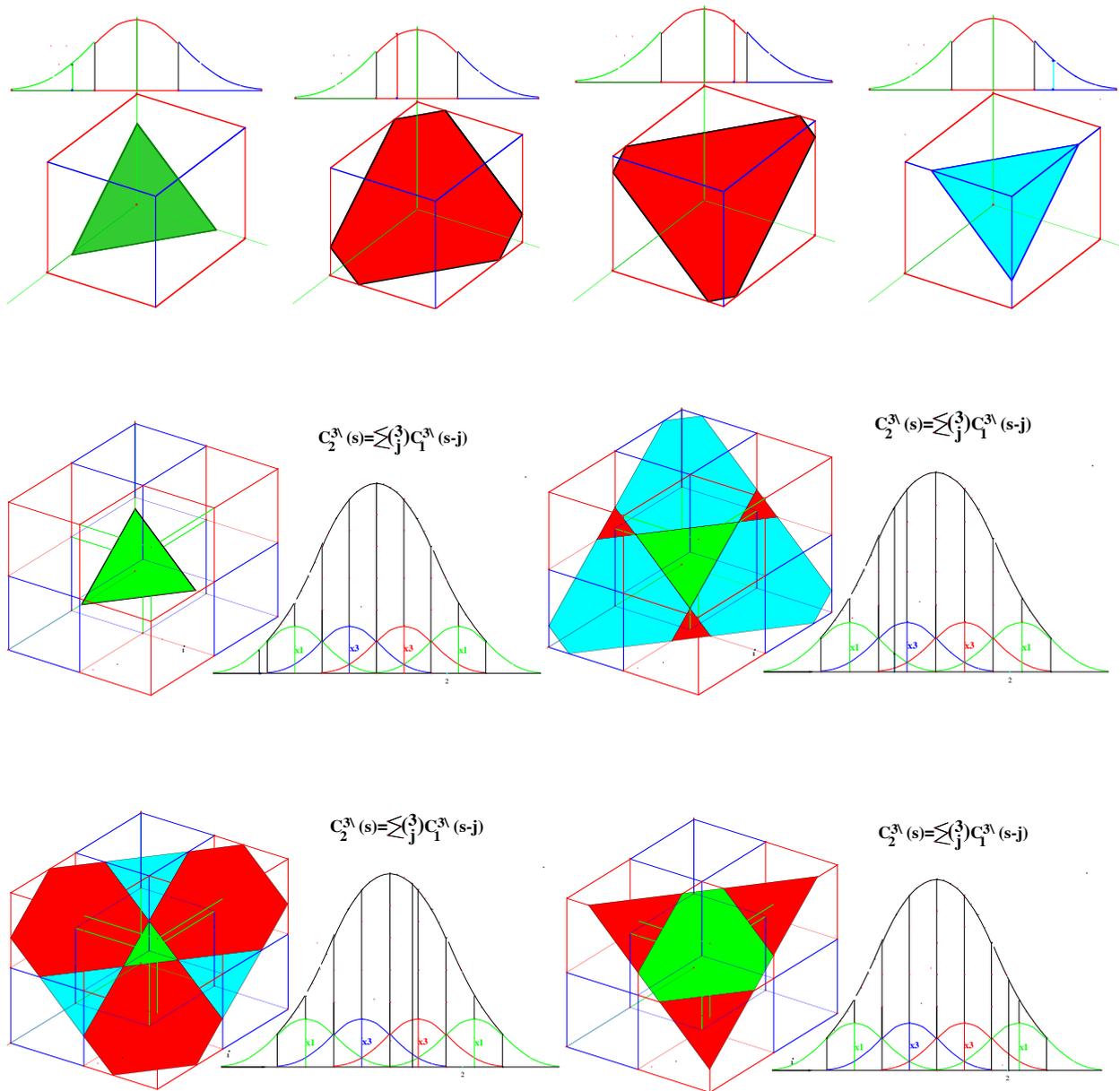
Sezioni del cubo: densità della somma di uniformi i. d., spline, ..., nuove proprietà:



10	6	3	1	(-1)	0	0																		
25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	0	0	...												
1	(1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	1	0	0	0	...			
...	0	2	(1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1						
...	0	3	(1	3	6	10	15	21	25	27	27	25												
...	0	4	(1	3	6	10																		

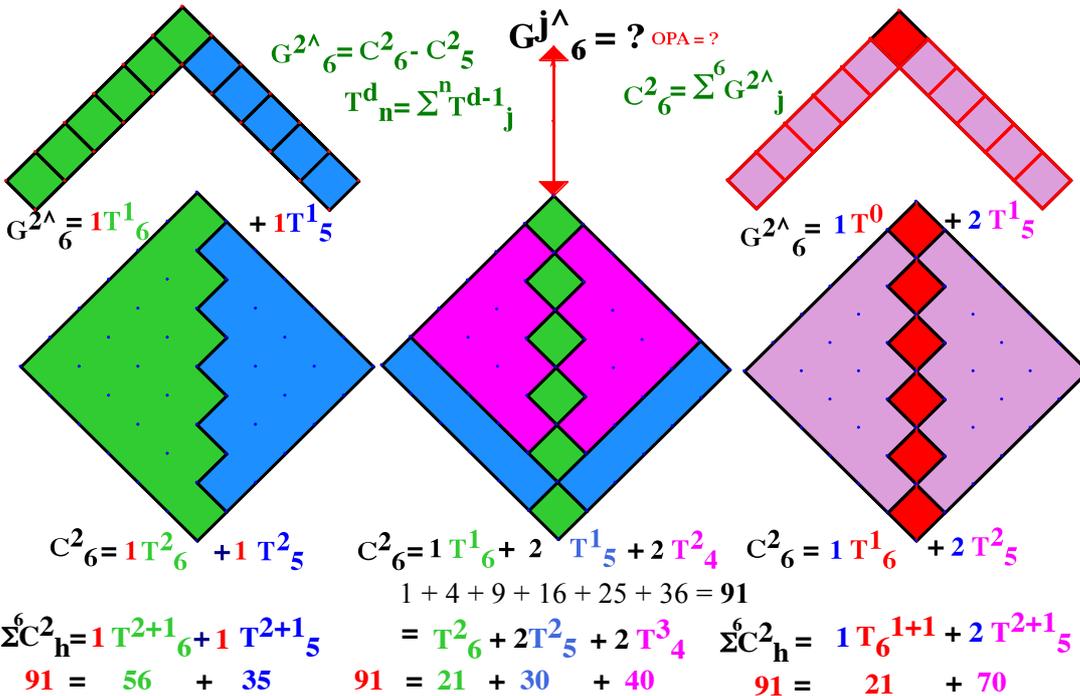
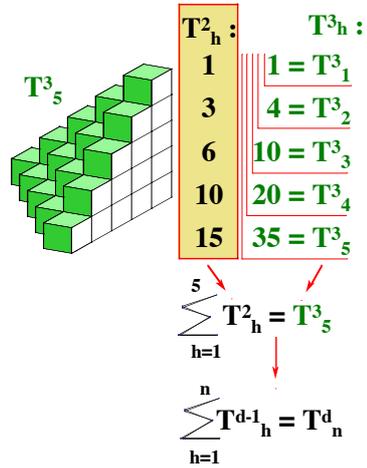
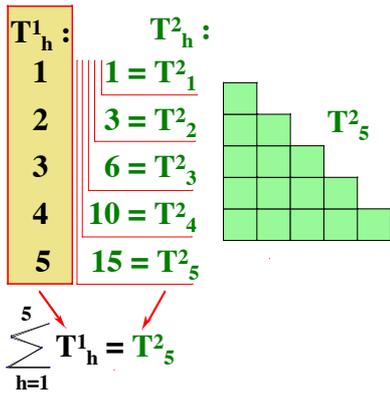
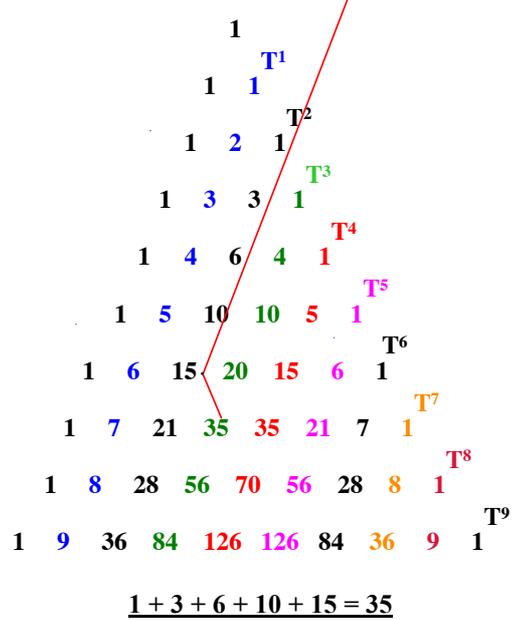
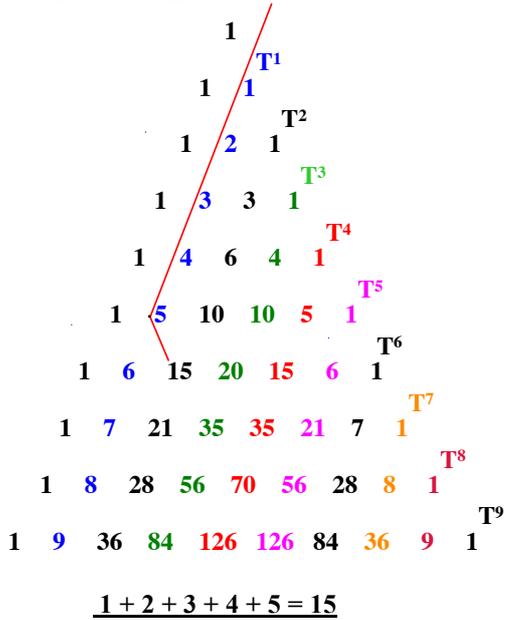
15 -9 -3 3 9 15 21 27 33 39 45 51 57 63 69 75 81 87 93 99 105 111 117

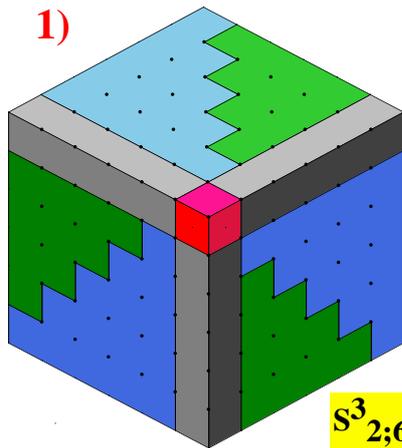




Le diverse parti del cervello umano funzionano a velocità differenti e gli oggetti vengono riconosciuti da una parte del cervello, mentre il moto viene rilevato da un'altra. Ciò significa che quando vediamo una persona in movimento, le due sezioni del cervello riconoscono separatamente moto e persona, mentre una terza parte unisce i due segnali... L'aspetto interessante è che le due zone del cervello funzionano a velocità sensibilmente diverse, e quella che riconosce il moto è molto più rapida. Immagino che l'origine di questa caratteristica sia sempre di carattere evolutivo: per un umano nella giungla è più importante riconoscere rapidamente se qualcuno si muove, piuttosto che riconoscere chi si muove - che sia una tigre, un leone o un serpente.

3. **Yes you can:** costruisci varie formule per sommare i quadrati e i cubi degli interi.
Per le potenze qualsiasi: metodi nuovi e nuovi numeri





$$G^{3\wedge}_6 = T^0 + 3T^1_5 + 3T^2_5 + 3T^2_4 = 91$$

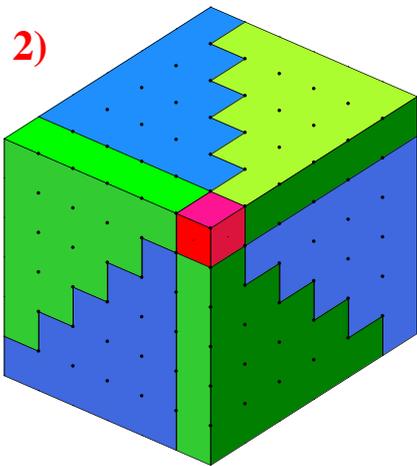
$$C^3_6 = T^1_6 + 3T^2_5 + 3T^3_5 + 3T^3_4 = 216 = \sum^6 G^{3\wedge}_h = 6 + 45 + 105 + 60 = 216$$

$$\sum^6 C^3_h = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = S^3_{1;6} = T^{1+1}_6 + 3T^{2+1}_5 + 3T^{3+1}_5 + 3T^{3+1}_4 = 21 + 105 + 210 + 105 = 441$$

$$S^3_{2;6} = \sum^6 S^3_{1;h} = T^{1+2}_6 + 3T^{2+2}_5 + 3T^{3+2}_5 + 3T^{3+2}_4 = 1 + 9 + 36 + 100 + 225 + 441 = 812 = 56 + 3 \cdot 70 + 3 \cdot 126 + 3 \cdot 56$$



$$S^3_{k;6} = \sum^6 S^3_{k-1;h} = T^{1+k}_6 + 3T^{2+k}_5 + 3T^{3+k}_5 + 3T^{3+k}_4$$



$$G^{3\wedge}_6 = T^0 + 6T^2_5 = 91$$

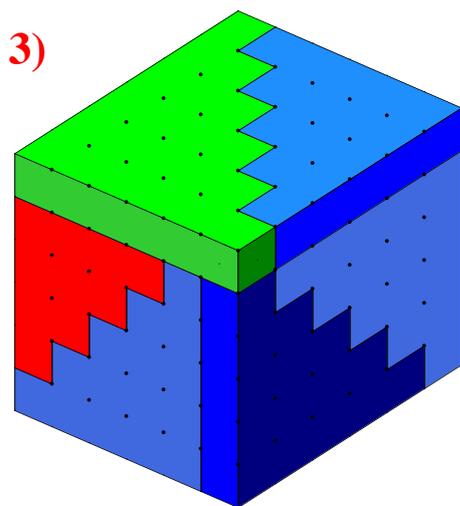
$$C^3_6 = T^1_6 + 6T^3_5 = 216 = \sum^6 G^{3\wedge}_h = 6 + 6 \cdot 35$$

$$S^3_{1;6} = T^{1+1}_6 + 6T^{3+1}_5 = 21 + 420 = 441$$

$$S^3_{2;6} = T^{1+2}_6 + 6T^{3+2}_5$$



$$S^3_{k;6} = T^{1+k}_6 + 6T^{3+k}_5$$



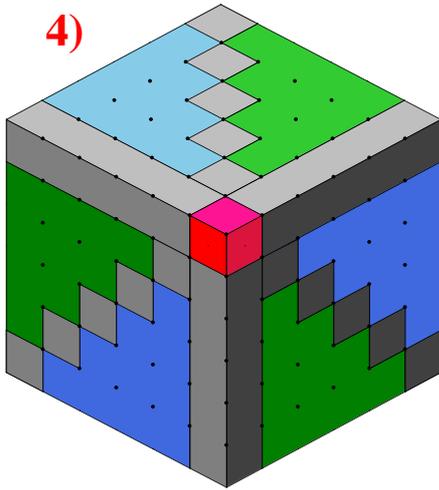
$$G^{3\wedge}_6 = 1T^2_6 + 4T^2_5 + 1T^2_4 = 91$$

$$C^3_6 = 1T^3_6 + 4T^3_5 + 1T^3_4 = \sum^6 G^{3\wedge}_h = 56 + 140 + 20 = 216$$

$$S^3_{1;6} = \sum^6 C^3_h = 1T^{3+1}_6 + 4T^{3+1}_5 + 1T^{3+1}_4 = 441 = 126 + 280 + 35$$

$$S^3_{k;6} = 1T^{3+k}_6 + 4T^{3+k}_5 + 1T^{3+k}_4$$

1, 4, 1 sono i Numeri Euleriani della terza riga: $1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



$$G^3_6 = 1T^0_6 + 6T^1_5 + 6T^2_4 = 91$$

$$C^3_6 = 1T^1_6 + 6T^2_5 + 6T^3_4 = 216 = \sum^6 G^3_h$$

$$= 6 + 90 + 120 = 216$$

$$\sum^6 C^3_h = 1T^{1+1}_6 + 6T^{2+1}_5 + 6T^{3+1}_4 = 441 =$$

$$= 21 + 210 + 210 = 441$$

$$S^3_{k;6} = 1T^{1+k}_6 + 6T^{2+k}_5 + 6T^{3+k}_4 \dots$$

I "box-numbers" $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[3]{6}$ e $\sqrt[3]{6}$, indicano che nel cubo C^3_6 ci sono rispettivamente: **1 tetraedro di dimensione 1**, T^1_6 , che contiene 6 cubetti allineati, **6 tetraedri a 2 dimensioni**, T^2_5 , che hanno spigoli (lati) di lunghezza 5, e **6 tetraedri a 3 dimensioni**, T^3_4 , che hanno spigoli di lunghezza 4.

I metodi illustrati in 3) e in 4) danno origine a dei modi nuovi per sommare le potenze degli interi in generale attraverso dei triangoli numerici strettamente collegati al significato geometrico illustrato nei due ultimi disegni precedenti: i **numeri Euleriani** e i **box-numbers** che indicano, in modo differente, i tetraedri contenuti in un ipercubo.

In tre dimensioni, in collegamento al materiale didattico:



Esempi

$$\begin{aligned}
 4^3 &= T_4^3 + 4 T_3^3 + T_2^3 = 20 + 40 + 4 = 64 \\
 4^4 &= T_4^4 + 11T_3^4 + 11T_2^4 + T_1^4 = 35 + 165 + 55 + 1 = 256 \\
 5^4 &= T_5^4 + 11T_4^4 + 11T_3^4 + T_2^4 = 70 + 385 + 165 + 5 = 625 \\
 &1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 1 + 16 + 81 + 256 + 625 = \mathbf{979} = \\
 &= T_5^5 + 11T_4^5 + 11T_3^5 + T_2^5 = 126 + 616 + 231 + 6 = \mathbf{979} \\
 &= \mathbf{1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \dots + 100^4} = T_{100}^5 + 11T_{99}^5 + 11T_{98}^5 + T_{97}^5
 \end{aligned}$$

Ancora piú in generale:

$C^d[n] = n^d = \sum_{s=0}^{d-1} \binom{d}{s} T_{n-s}^d$,² dove il numero euleriano:³ $\binom{d}{s}$ indica il numero di particolari tetraedri in d dimensioni, di spigolo $n-s$,⁴ e misura T_{n-s}^d , contenuti in $C^d[n]$.

Per sommare le potenze degli interi $1, 2$ o t volte, applicando la nota proprietá:

$\binom{d+n}{d} = T_n^d = \sum_1^n T_{n-1}^{d-1}$, $1, 2$ o t volte, si ottiene:

$$\sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=0}^{d-1} \binom{d}{s} T_{n-s}^{d+1}, \quad \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^m j^d = \sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=0}^{d-1} \binom{d}{s} T_{n-s}^{d+2}, \quad t \sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=0}^{d-1} \binom{d}{s} T_{n-s}^{d+t}$$

$C^d[n] = n^d = \sum_{s=1}^d \binom{d}{s} / T_{n-s+1}^s$,¹ $\forall n, d \in \mathbf{N}$, dove $\binom{d}{s} /$ rappresenta il n^0 dei tetraedri fattoriali di dimensione s e spigolo $n-s+1$,⁵ $T^s[n-s+1]$, contenuti in $C^d[n]$ e vale $\binom{d}{s} / = s \binom{d-1}{s-1} / + \binom{d-1}{s} /$, $\binom{0}{0} / = 1$, $\binom{d}{s} / = 0$ per $s > d$. Segue che, per sommare le potenze degli interi $1, 2$ o t

volte, applicando la nota proprietá: $\binom{d+n}{d} = T_n^d = \sum_1^n T_{n-1}^{d-1}$, $1, 2$ o t volte, vale:

$$\sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=1}^d \binom{d}{s} / T_{n-s+1}^{s+1}, \quad \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^m j^d = \sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=1}^d \binom{d}{s} / T_{n-s+1}^{s+2}, \quad t \sum_{j=1}^n j^d = \sum_{s=1}^d \binom{d}{s} / T_{n-s+1}^{s+t}$$

Data la relazione di ricorrenza indicata, risulta il triangolo dei box-numbers (giá noti con un significato differente):

² Il segno "=" dopo il simbolo di un poliedro indica la sua definizione cartesiana, la sua misura o la formula per calcolarla. Altri significati dei simboli: $n^{\leq} = n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)$, $n^{\geq} = n(n+1)(n+2)\dots(n+j-1)$, $n^{\leq} = (n-1)(n-2)\dots(n-j)$, $n^{\geq} = (n+1)(n+2)\dots(n+j)$.

³ $\binom{d}{s} = (1+s) \binom{d-1}{s} + (d-s) \binom{d-1}{s-1}$, $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 0$.

⁴ Il termine "spigolo" indica anche il lato di un triangolo. In generale vengono usati in dimensione qualsiasi i termini utilizzati nella terza dimensione.

⁵ Il termine "spigolo" indica anche il lato di un triangolo. In generale vengono usati in dimensione qualsiasi i termini usuali nella terza dimensione, salvo eccezioni.

	$\backslash_s^d=0/$	$\backslash_s^d=1/$	$\backslash_s^d=2/$	$\backslash_s^d=3/$	$\backslash_s^d=4/$	$\backslash_s^d=5/$	$\backslash_s^d=6/$	$\backslash_s^d=7/$	$\backslash_s^d=8/$
$\backslash_s^{d=0}/$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\backslash_s^{d=1}/$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\backslash_s^{d=2}/$	0	1	2	0	0	0	0	0	0
$\backslash_s^{d=3}/$	0	1	6	6	0	0	0	0	0
$\backslash_s^{d=4}/$	0	1	14	36	24	0	0	0	0
$\backslash_s^{d=5}/$	0	1	30	150	240	120	0	0	0
$\backslash_s^{d=6}/$	0	1	62	540	1560	1800	720	0	0
$\backslash_s^{d=7}/$	0	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0
$\backslash_s^{d=8}/$	0	1	254	5796	40824	126000	191700	141120	8!

Esempi

$$4^3 = T^1_4 + 6 T^2_3 + 6T^3_2 = 4 + 36 + 24 = 64$$

$$1^4 = T^1_1 = 1, 2^4 = T^1_2 + 14T^2_1 = 1 + 14 = 16, 3^4 = T^1_3 + 14T^2_2 + 36T^3_1 = 3 + 42 + 36 = 81$$

$$4^4 = T^1_4 + 14T^2_3 + 36T^3_2 + 24T^4_1 = 4 + 84 + 144 + 24 = 256$$

$$5^4 = T^1_5 + 14 T^2_4 + 36T^3_3 + 24 T^4_2 = 5 + 140 + 360 + 120 = 625$$

$$\sum_{j=1}^5 j^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979 = T^2_5 + 14T^3_4 + 36T^4_3 + 24T^5_2 = 15 + 280 + 540 + 144$$

$$\sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^n k^4 = 1 + 17 + 98 + 354 + 979 = 1449 = T^3_5 + 14 T^4_4 + 36T^5_3 + 24 T^6_2 =$$

$$= 35 + 14 \cdot 35 + 36 \cdot 21 + 24 \cdot 7 = 35 + 490 + 756 + 168$$

$$100^5 = T^1_{100} + 30 T^2_{99} + 150T^3_{98} + 240 T^4_{97} + 120 T^5_{96}$$

$$\sum_{k=1}^{100} k^5 = T^2_{100} + 30 T^3_{99} + 150T^4_{98} + 240 T^5_{97} + 120 T^6_{96}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \sum_{k=1}^n k^5 = T^3_{100} + 30 T^4_{99} + 150T^5_{98} + 240 T^6_{97} + 120 T^7_{96}$$

Dal collegamento dei due metodi, si scoprono 5 modi per sommare le potenze qualsiasi degli interi in collegamento con i numeri di Stirling di II specie:

$$1) 4^3 = T^1_4 + 6 T^2_3 + 6T^3_2 = 4 + 36 + 24 = 64$$

$$2) 4^3 = T^1_4 - 6 T^2_4 + 6T^3_4 = 4 - 60 + 120 = 64$$

$$3) 4^3 = T^0_4 + 7 T^1_3 + 12T^2_2 + 6 T^3_1 = 1 + 21 + 36 + 6 = 64$$

$$4) 4^3 = -T^0_5 + 7 T^1_5 - 12T^2_5 + 6 T^3_5 = -1 + 35 - 180 + 210 = 64$$

$$5) 4^3 = T^3_4 + 4 T^3_3 + T^3_2 = 20 + 40 + 4 = 64$$

$$1) 4^4 = T^1_4 + 14T^2_3 + 36T^3_2 + 24T^4_1 = 4 + 84 + 144 + 24 = 256$$

$$2) 4^4 = -T^1_4 + 14T^2_4 - 36T^3_4 + 24T^4_4 = -4 + 140 - 720 + 840 = 256$$

$$3) 4^4 = T^0_4 + 15 T^1_3 + 50T^2_2 + 60 T^3_1 + 24 \cdot 0 = 1 + 45 + 150 + 60 = 256$$

$$4) 4^4 = T^0_5 - 15 T^1_5 + 50T^2_5 - 60 T^3_5 + 24T^4_5 = 1 - 75 + 750 - 2100 + 1680 = 256$$

$$5) 4^4 = T^4_4 + 11T^4_3 + 11T^4_2 + T^4_1 = 35 + 165 + 55 + 1 = 256$$

$$1) 5^4 = T^1_5 + 14 T^2_4 + 36T^3_3 + 24 T^4_2 = 5 + 140 + 360 + 120 = 625$$

$$2) 5^4 = -T^1_5 + 14T^2_5 - 36T^3_5 + 24T^4_5 = -5 + 14 \cdot 15 - 36 \cdot 35 + 24 \cdot 70 = -5 + 210 - 1260 + 1680$$

$$3) 5^4 = T^0_5 + 15T^1_4 + 50T^2_3 + 60T^3_2 + 24T^4_1 = 1 + 60 + 300 + 240 + 24 = 625$$

$$4) 5^4 = T^0_6 - 15T^1_6 + 50T^2_6 - 60T^3_6 + 24T^4_6 = 1 - 90 + 1050 - 3360 + 3024 = 625$$

$$\begin{aligned}
5) \quad 5^4 &= T_5^4 + 11T_4^4 + 11T_3^4 + T_2^4 = 70 + 385 + 165 + 5 = 625 \\
1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 &= 1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 979 = \\
\sum I) &= T_5^2 + 14T_4^3 + 36T_3^4 + 24T_2^5 = 15 + 280 + 540 + 144 = 979 \\
&\dots = \dots \\
\sum 5) &= T_5^5 + 11T_4^5 + 11T_3^5 + T_2^5 = 126 + 616 + 231 + 6 = 979 \\
2\sum I) &= (1) + (1+16) + (1+16+81) + (1+16+81+256) + (1+16+81+256+625) = 1449 = \\
&= T_5^6 + 11T_4^6 + 11T_3^6 + T_2^6 = 210 + 924 + 308 + 7 = 1449 \\
\sum 5) &= 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \dots + 100^4 = T_{100}^5 + 11T_{99}^5 + 11T_{98}^5 + T_{97}^5
\end{aligned}$$

Di Archimede e di altri argomenti parleremo in un'altra occasione.

Bibliografia

- Barra M., 1975, The cycloid - A didactic Experience - A new proof, *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 93-98.
- Barra M., 1986, Knowing how to prove,
in - *Proceedings of the XXXVII, CIEAEM* (Leiden,1985), 206-215,
e in - *Proceedings of the IV-ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (Orleans,1986), pp. 175-183.
- Barra M., 1990, Il gioco della matematica, in D'Amore B. (ed), *Matematica, gioco e apprendimento*, Apeiron Editrice, pp. 19-27.
- Barra M., 1994, Being able to see in d-Dimensional Spaces, *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, (Modena 15-19 febbraio).
- Barra M., 1994, Esempi di creatività in matematica,
in - *Atti del convegno "Pensiero scientifico e creatività", Ancona, 17-19 marzo 1994, Quaderni di Innovazione e Scuola n.21, I.R.R.S.A.E.- Marche*, pp. 141-159.
e in - *Bollettino dei Docenti di Matematica*, Ufficio dell'Insegnamento Medio, n. 32, maggio 1996, Bellinzona, pp. 31-46.
- Barra M., 2001, Ipersolidi e altri argomenti, *Prog. Alice*, N. 5, Vol. 2, Ed. Pagine, pp. 191-246.
- Barra M., 2003, Utilità del software Cabri e dei suoi aspetti dinamici per collegare settori diversi della matematica e per scoprirne alcune nuove proprietà, *Atti del XVII Congresso UMI, Conferenze e Comunicazioni*, pp. 385-390.
- Barra M., 2003, Materiale didattico concreto e virtuale. Sviluppo delle capacità dimostrative attraverso le immagini e gli esperimenti mentali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 26 A-B, N. 6, pp. 655- 688.
- Barra M., Castagnola E., Paola D., Tomasi L., 2003, Tavola rotonda su "Modelli, visualizzazione e didattica", Paderno, Vol. 26 A-B, N. 6, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, pp. 689-702.
- Barra M., 2003, Manipulation of virtual objects and the dynamic aspects of Cabri for developing student's activities on geometry and probability, *Atti del convegno della CIEAEM 55 (International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching, Plock 2003)*.
- Barra M., 2004, The importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics classrooms and how this "participating environment" can improve mathematical learning and teacher's practice, *Acts of the 20th Panhellenic Conference on Mathematics Education, organized from the Hellenic Mathematical Society*, November 7, 8 and 9, 2003, pp. 649-659.
- Barra M., 2004, Una nuova trasformazione non lineare resa possibile dalle proprietà dinamiche di Cabri, gli avvolgimenti radiali. Baricentro di una sinusoide, area del cerchio, della spirale di Archimede, della Cardioide e di altre curve, determinati in

- modo nuovo. Fiori matematici, Atti delle Plenary Conferente di "CabriWord 2004", Roma 9 - 12 settembre, *Alice*, N.14, Vol. 5, Ed. Pagine, pp. 305-330.
- Barra M., 2004, Cabri e i suoi aspetti dinamici per calcolare in modo nuovo le misure della sfera, il volume del cono, le sezioni del cilindro e le aree della sinusoide e della "cordiforme". Applicazioni alla cartografia, *Progetto Alice*, N. 14, Vol. 5, Ed. Pagine, pp. 271-304.
- Barra M., 2004, Una nuova trasformazione non lineare resa possibile dalle proprietà dinamiche di Cabri, gli avvolgimenti radiali. Baricentro di una sinusoide, area del cerchio, della spirale di Archimede, della Cardioide e di altre curve, determinati in modo nuovo. Fiori matematici, *Alice*, N. 14, Vol. 5, Ed. Pagine, pp. 305-330.
- Barra M.: 2004, La regina della matematica: la Cicloide. Tre nuove dimostrazioni "senza parole" che la riguardano, "difficili" da capire senza Cabri. Baricentro della Cicloide. Come possono nascere le idee con Cabri, *Progetto Alice*, N. 14, Vol. 5, Ed. Pagine, , pp. 331-344.
- Barra M., 2004, Aspetti tecnici connessi con la visualizzazione di argomenti matematici, in *Percorsi di geometria dinamica*, Media Direct, , pp. 177-186.
- Barra M., 2005, Importance of the use of didactic, new technological materials in mathematics, in *Atti del Convegno CIEAEM 57, "Changes in Society: a Challenge for Mathematics Education"*
 Pubblicato su: http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_barra.pdf
http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_barra.pdf.
- Barra M., 2005, Alcuni problemi dell'insegnamento del calcolo delle probabilità: aspetti linguistici, negazione doppia e partizione di un evento. Collegamento fra probabilità e geometria analitica. Il pensiero del prof. Gaetano Fichera sulla matematica moderna, *Progetto Alice*, N. 18, Vol. 6, Ed. Pagine, pp. 391- 420.
- Barra M., 2006, Area di curve note o nuove calcolate con una nuova trasformazione non lineare, in *Atti del XXV Congresso UMI – CIIM, "Valutare in matematica "*, Siena, 27 - 29 ottobre 2005, *Notiziario dell'UMI, novembre 2006*, pp. 125 - 126.
- Barra M., 2006, Aspetti innovativi dei software di geometria dinamica in due e in tre dimensioni e loro utilità per l'insegnamento e per la ricerca in matematica, Atti del convegno nazionale *Sul rinnovamento dell'insegnamento della matematica*, a cura di Carmelo Di Stefano, Ghisetti e Corvi Editori, , pp. 209 – 240.
- Barra M., 2006, Insegnamento dinamico del calcolo delle probabilità seguendo le indicazioni di Bruno de Finetti, Relazione plenaria al *XXVI Congresso UMI – CIIM*, Reggio Emilia, 30/11- 2/12 2006, in rete in http://www.ciim26.unimore.it/abstract/abs_barra.pdf
- Barra M., 2007, Tavola rotonda sulla formazione matematica del cittadino nel terzo millennio alla luce dei moderni strumenti hardware e software, *Atti del II convegno Nazionale Matematica e Computer, Arcavacata di Rende, 23, 11, 2007*, Luigi Pellegrini Editore, pp.161-165
- Accascina G., Barra M., Bernardi C., Menghini M., 2006, Movimento, percezione e dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol.29A-B, N. 4, pp. 313-346
- Barra M., 2007, Innovative aspects of dynamic geometry software, *La matematica e la sua didattica*, Anno 21, n. 1, pp. 81-86.
- Barra M., 2008, Matematica e software di geometria dinamica seguendo le indicazioni scientifiche e didattiche di Bruno de Finetti, *Progetto Alice*, N. 26, Vol. 9, Ed. Pagine, pp. 191 – 230.
- Barra M., 2009, Problem-solving, fusionismo e traduzioni fra linguaggi diversi. Varie formule autocostruibili per sommare i quadrati o i cubi degli interi. Generalizzazioni originali per sommare le potenze degli interi attraverso i Numeri Euleriani e i "Box-Numbers", *Progetto Alice*, N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, pp. 65 - 96.

- Barra M., 2009, Numeri Euleriani, Box-numbers, Numeri di Stirling di seconda specie e Triangolo Aritmetico di Pascal per ottenere le somme delle potenze degli interi. Approfondimenti e collegamenti, *Alice*, N. 28, Vol. 10, Ed. Pagine, pp. 97- 115.
- Barra M., 2009, Cabri: sua importanza sociale tenendo presente varie indicazioni dei grandi della storia, il *fusionismo olistico*⁶ e alcune riflessioni su aspetti estetici e psicologici che si considerano importanti, *Progetto Alice*, N. 29, Vol. 10, Ed. Pagine, pp. 187-210.
- Barra M., 2009, Ragionamento o calcolo?, in *Pratiche matematiche e didattiche in aula*, a cura di D'Amore B. e Sbaragli S., Pitagora Editrice, Bologna, pp. 167-170.
- Barra M., 2009, Riflessioni sull'importanza sociale dei Dynamic Geometry Software (DGS) in collegamento con alcune indicazioni didattiche espresse da grandi scienziati, *Atti dell'8° CONVEGNO NAZIONALE Matematica, Formazione Scientifica e Nuove Tecnologie*, 20-22 febbraio 2009, Lamezia Terme (CZ), pp. 29-44.
- Barra M., 2009, Manipulation of virtual objects for the development of connections between geometry and probability as well as between the various dimensions of space. *Proceedings of Gordon's Bay Delta '09*, 7th Southern Right Delta (ΣΡΔ'09) Conference On The Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, Mathematics in a dynamic environment, 30 November – 4 December 2009, pp. 10- 25.
- Barra M., 2010, Rivoluzioni in atto: problemi e ricerca di soluzioni. Sviluppo della creatività. Importanza sociale e aspetti didattici dei Dynamic Geometry Software. Il pensiero di alcuni grandi maestri. *Fusionismo olistico*, in *Seminari di geometria dinamica*, a cura di Accascina G. e Rogora E., Ed. Nuova Cultura, Roma, pp. 63-98.
- Barra M., 2010, Ipercubi: scheda di auto-apprendimento di molte delle loro proprietà e collegamento con numerosi argomenti di matematica, *Progetto Alice*, N. 32, Vol. 11, Ed. Pagine, pp. 209-236.
- Barra M., 2010, Ipertetraedri: scheda di auto-apprendimento di molte delle loro proprietà e collegamento con numerosi argomenti di matematica, *Progetto Alice*, N. 32, Vol. 11, Ed. Pagine, pp. 237-282.
- Barra M., 2010, Tetraedri fattoriali $T^d!(s)$, *Progetto Alice*, N. 32, Vol. 11, Ed. Pagine, pp. 311-339.
- Barra M., 2010, Tetraedri regolari $T^d(s)$, *Progetto Alice*, N. 32, Vol. 11, Ed. Pagine,
- Barra M., 2010, Problemi delle rivoluzioni in atto e ricerca di soluzioni. Importanza sociale e aspetti didattici dei Dynamic Geometry Software (DGS). Sviluppo della creatività. Il pensiero di alcuni grandi maestri. Il *Fusionismo olistico*. Pubblicato su *Education 2.0* e scaricabile da:
http://www.educationduepuntozero.it/Temi/Didattica-e-apprendimento/2010/12/img/barra_all.pdf
- Barra M., 2011, A Geometrical Way to Sum Powers by Means of Tetrahedrons and Eulerian Numbers, *Cornell University Library*, <http://arxiv.org/abs/1103.4288>.

⁶ Si fa riferimento al *fusionismo* di Klein e di de Finetti, che collega le dimensioni dello spazio, il discreto e il continuo e tutte le discipline scientifiche. Il *fusionismo globale* o *olistico* intende considerare anche altre componenti dell'apprendimento. Barra M., 1995, Formule e teoremi per induzione naturale e "Fusionismo globale", in Jannamorelli B. (ed), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica*, Atti del II Sem. Internazionale di Did. della Mat., Sulmona, 30/III-1/IV/1995, Ed. Qualevita, pp. 165-192.