

Ensino

Astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de física: equação de estado e as estrelas anãs brancas

Astronomy as a playful tool for teaching physics: equation of state and white dwarf stars

Lara Maria Gatto¹, Dinalva Aires de Sales²

¹Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

²Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, RS, Brasil

RESUMO

Este trabalho se propõe a utilizar a interdisciplinaridade e a astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de física, despertando, assim, maior interesse nos discentes de graduação e pós-graduação das ciências exatas e da Terra, potencializando o processo de ensino-aprendizagem nas aulas da disciplina de Mecânica Estatística. O objetivo do referido foi discutir sobre as estrelas anãs brancas (WDS), que são o estágio final da evolução de uma estrela com até $8 M_{\odot}$, como o Sol, e são objetos de estudo interessantes por serem compactos, de alta densidade, e descritas como um gás de Fermi degenerado. Tem-se como motivação o interesse em aperfeiçoar o conhecimento, objetivando, desta forma, a obtenção da relação entre a massa e o raio das estrelas anãs brancas, assim como a classificação de uma amostra de 5 anãs brancas obtidas pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS), de acordo com o elemento químico que se dispõem em sua superfície. Ao final deste trabalho, foi possível concluir através da relação massa e raio das WDS que quanto maior a massa da estrela menor será o seu tamanho, e que em equilíbrio, esta deve possuir uma massa menor que $1,44 M_{\odot}$. Além disso, adicionou-se um relato de experiência da abordagem didática inovadora que usou a astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de Física na disciplina de mecânica estatística a nível de curso de graduação e mestrado.

Palavras-chave: Ensino de física; Interdisciplinaridade; Equação de estado; Anãs brancas; Limite de Chandrasekhar

ABSTRACT

This interdisciplinary work proposes the use of astronomy as a ludic tool to teach Physics, hence, to arouse the curiosity of undergraduate and graduate students from the program of Exact Sciences and the Earth courses, providing enhance on the teaching-learning process in Statistical Mechanics classes. The main goal of the present study is to discuss white dwarf stars (WDS), which are the final

stage of the evolution of a star like the Sun and up to $8 M_{\odot}$, since those are an interesting object of study because of their compact nature, high density, and, also, because they are eliminated as a degenerated fermi gas. Having as motivation and interest in the improvement of the knowledge regarding these objects, we aim to obtain the relationship between the mass and the radius of the white dwarf stars, as well as to classify a sample of 5 white dwarfs required by the Sloan Digital Sky Survey (SDSS), according to the chemical element that is destined for the surface. At the end of this work, we conclude through the mass and radius ratio of white dwarf stars that the greater the mass of the star, the smaller its size, and that in equilibrium it must have a mass less than $1.44 M_{\odot}$. In addition, we show a experiment reports of this teaching innovative that used astronomy as ludic tool to teach Physics in the subject of statistical mechanics at undergraduate and master's level.

Keywords: Teaching of physics; Interdisciplinarity; Equation of state; White dwarfs; Chandrasekhar limit

1 INTRODUÇÃO

A astronomia acompanha a história da humanidade desde a antiguidade, ela era utilizada de várias formas, como para medir a passagem do tempo, a fim de prever quais seriam as épocas de plantio e colheita, além de ser utilizada como um meio de navegação e orientação através das posições das estrelas no céu (Filho e Saraiva, 2017, p.1). A astronomia está presente em nosso cotidiano mesmo quando não a percebemos diretamente. O conhecimento de Astronomia desperta o interesse dos estudantes, pois contribui para a compreensão de acontecimentos do cotidiano, como os movimentos que o Sol aparenta fazer, as fases da Lua, as marés, as estações do ano ou, até mesmo, as viagens espaciais, dentre muitos outros assuntos (Lopes, 2000, p. 104).

A astronomia é uma área do conhecimento excelente para aplicarmos o conceito de interdisciplinaridade com o objetivo do ensino de ciências exatas e da Terra em vários níveis acadêmicos, pois vários fenômenos físicos e químicos ocorrem nos mais variados objetos astronômicos. A astronomia pode ser utilizada para motivar, contextualizar, contribuir e instigar um pensamento científico natural que já existe no ser humano, e não seria diferente para provocar um pensamento abstrato nos cursos de física licenciatura e/ou bacharelado.

A interdisciplinaridade pode ser definida como toda a interação existente entre duas ou mais disciplinas no âmbito do conhecimento, dos métodos e da aprendizagem destas. Assim, a interdisciplinaridade pode ser traduzida em atitudes e pela busca do conhecimento, o que também reflete a cultura do local e dos professores envolvidos (Fazenda, 2008, p. 162). De acordo com Lück (1995, p.64):

Interdisciplinaridade é o processo que envolve a integração e engajamento de educadores, num trabalho conjunto, de interação das disciplinas do currículo escolar entre si e com a realidade, de modo a superar a fragmentação do ensino, objetivando a formação integral dos alunos, a fim de que possam exercer criticamente a cidadania, mediante uma visão global de mundo e serem capazes de enfrentar os problemas complexos, amplos e globais da realidade atual (LÜCK, 1995, p. 64).

Nesse sentido, a interdisciplinaridade torna a aprendizagem mais atraente e contribui não só para uma melhor compreensão dos conteúdos de uma disciplina, como também para interligações dos assuntos abordados em diferentes áreas. Recentemente, Silva-Oliveira *et al.* (2020, p. 2) discutiu a importância da astronomia como uma ferramenta lúdica para o ensino das propriedades de gases ideais nas disciplinas de Física e Mecânica Estatística. O autor mostrou a lei de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann também descreve o com das velocidades das estrelas em aglomerados estelares.

De acordo com Farias e Barbosa (2017, p.7) a integração de diferentes áreas do conhecimento pode possibilitar uma abordagem mais complexa de temas que geralmente são trabalhados apenas de forma superficial durante aprendizagem. A astronomia e a astrobiologia contribuem para ensino mais contextualizado e integrado de temas da termodinâmica, como o estudo de temperaturas reais e efetivas e de pressão de planetas rochosos, e em quais condições eles poderiam abrigar vida, como ocorre na Terra (Farias e Barbosa, 2017, p. 7).

O Sol, e tudo o que o envolve, é um excelente tema para se trabalhar em sala de aula, pois, assim como a Lua, se trata de um dos astros mais presentes e notáveis em

nosso dia a dia. O fato de o Sol ser uma estrela gera margem para grandes debates, como qual seu real tamanho? Porque ele é tão quente? O que ocorre em seu interior? Qual o seu tempo de vida? Qual é o seu caminho evolutivo? Essas questões são respondidas por meio de algumas áreas da física: são elas a termodinâmica, a mecânica estatística e a física nuclear.

Uma estrela como o Sol possui um ciclo evolutivo, sendo assim no final de sua vida ele se tornará uma estrela anã branca (WDS, do inglês White Dwarf Star). Partindo do interesse em motivar a construção e o aperfeiçoamento do conhecimento acerca das WDS, este trabalho, realizado durante a disciplina de Mecânica Estatística do Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), tem como objetivo apresentar um estudo interdisciplinar entre a Mecânica Estatística e a Astronomia, provocando um pensamento lúdico nos alunos de graduação e de mestrado de cursos que possuem disciplinas relacionadas a termodinâmica e mecânica estatística.

Portanto, neste trabalho será apresentado um estudo da equação de estado e a relação entre a massa e o raio de uma estrela anã branca. Além disso, será realizado uma análise com dados espectroscópicos de uma amostra de 7 estrelas anãs brancas obtidas com o Sloan Digital Sky Survey (SDSS), a fim de classificá-las de acordo com suas características espectrais.

Este trabalho também pode ser uma atividade propícia para reduzir o distanciamento entre disciplinas e dos cursos de graduação e pós-graduação, visando aproximar de diferentes conteúdos, e transforma o aprendizado em uma experiência social, possibilitando, desta forma, a troca de conhecimento em diferentes níveis, seguindo a ideia de Vygostsky L.S. (1991, p. 87). Portanto, objetiva-se que neste estudo o aluno seja capaz de compreender o formalismo matemático da equação de estado aplicado a uma estrela anã branca na disciplina de mecânica estatística no final do curso de graduação e/ou mestrado, e ainda, que este possa ampliar o seu conhecimento acerca desse tipo de estrela.

2 ESTRELAS ANÃS BRANCAS

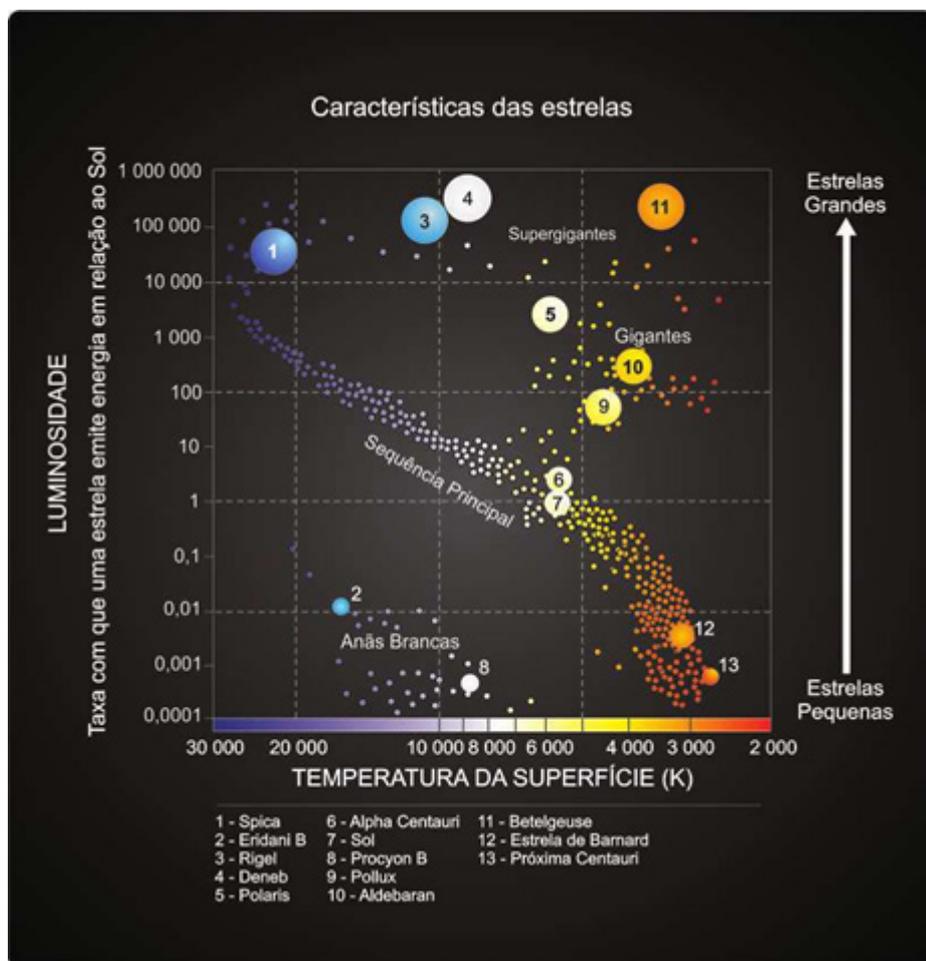
Estrelas nascem, crescem e morrem, e sua massa inicial é o que ditará qual caminho evolutivo que a mesma irá seguir no diagrama de Hertzsprung-Russell (ver Figura 1), também conhecido como diagrama HR (Russell, 1914, p.1). Estrelas como o Sol, de $1 M_{\odot}$, passam a maior parte da sua vida na sequência principal, transformando hidrogênio em hélio por meio de reações nucleares. Quando a estrela adquire energia suficiente para a queima do hélio, ela entra em sua fase de gigante vermelha, e esgotando todo seu hélio e hidrogênio as estrelas que possuem uma massa em torno de $1 M_{\odot}$ e $8 M_{\odot}$ encerram sua atividade nuclear, pois não conseguem queimar elementos mais pesados, como o carbono e o oxigênio. Chegando a esta fase de vida, elas começam a ejetar sua camada mais externa, formando uma nebulosa planetária e deixando para trás um núcleo composto praticamente de carbono e oxigênio, dando origem a uma estrela anã branca.

A primeira estrela Anã Branca a ser observada foi a Sirius β , em 1850, junto com Sirius ela constitui um sistema binário. Sirius β possui uma luminosidade de $0.027 L_{\odot}$, 10000 vezes menos luminosa do que Sirius α , uma massa de $0.98 M_{\odot}$, e uma temperatura na ordem de 10,000K, ou seja, seu raio deve ser extremamente pequeno. Como estrelas com essa temperatura superficial são brancas, esse tipo de estrela passou a ser chamado de anã branca. Anãs brancas são, portanto, de massa comparável à do Sol, mas de tamanho apenas ligeiramente maior do que o da Terra.

Como as anãs brancas já esgotaram seu combustível nuclear, elas não possuem uma fonte de energia nuclear que as mantenham luminosas por muito tempo, mas por serem o núcleo resultante da fase final de uma estrela do tipo Solar, são objetos inicialmente quentes. Portanto, as WDS continuam irradiando luz pelo processo de conversão de energia interna em radiação. Logo, ao não ter um processo de reposição de energia interna as WDS vão, lentamente, se resfriando, e quanto maior a massa, mais rápido elas resfriarão (Filho e Saraiva, 2017, p. 472). Além disso, dado que o

material no interior de uma anã branca é muito denso, elas não se comportam como gás ideal. Ao invés disso, elas são descritas como um gás degenerado de Fermi.

Figura 1 – Diagrama Hertzsprung-Russell (HR)



Fonte: (Filho e Saraiva, 2017, 194)

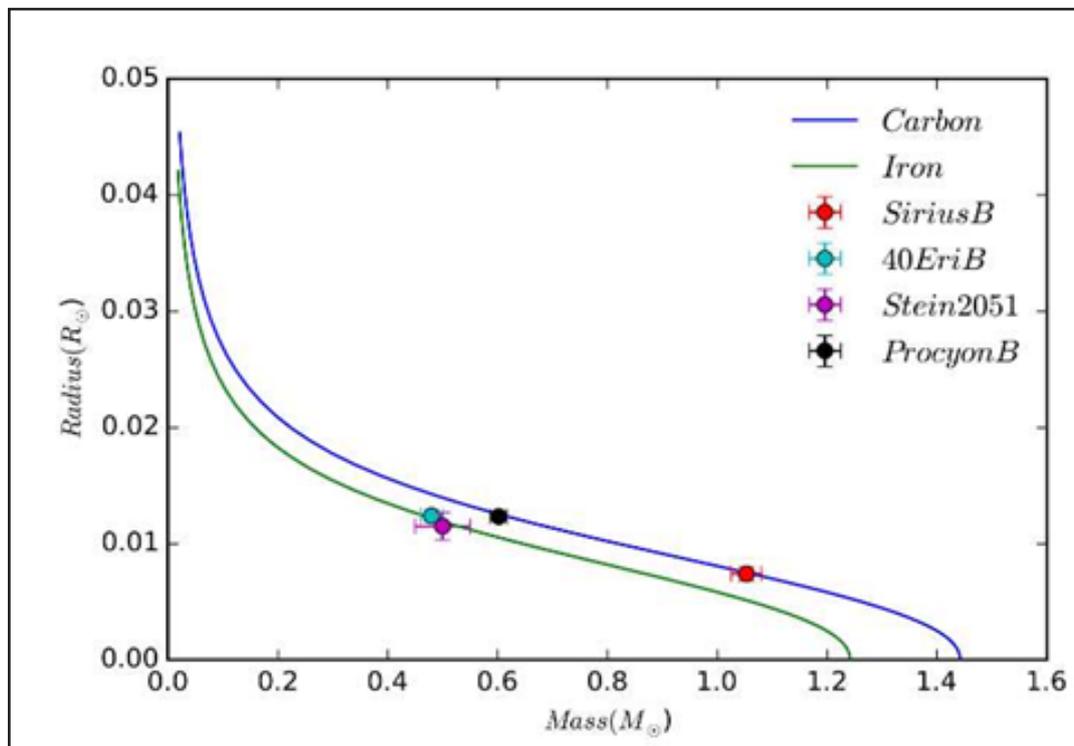
Legenda: Disponível em <http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/node2.htm>

É importante lembrar que, ao contrário de estrelas normais, que ao aumentarem sua massa aumentam seu tamanho (diâmetro), para as anãs brancas, quanto maior for sua massa menor será o seu diâmetro, como ilustrado na Figura 2. Portanto, há um limite superior para a massa de uma anã branca, para o qual o seu raio tende a zero. Este limite é chamado de limite de Chandrasekhar, em que o valor preciso do limite depende da composição química da estrela. A fórmula de Chandrasekhar é

$$M_{Ch} = \omega_3^0 \sqrt[2]{3\pi} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \quad (1)$$

onde \hbar é a constante de Planck reduzida, c é a velocidade da luz, G é a constante gravitacional universal, m_H é a massa do átomo de hidrogênio μ e é a massa molecular média por elétron, e $\omega_3^0 \approx 2.018236$ é a constante matemática relacionado a equação de Lane-Emden. A Figura 2 ilustra a relação entre a massa e o raio das anãs brancas, onde os pontos representam dados experimentais de WDS, em vermelho Sírius β , em turquesa 40EriB, em roxo Stein2051, e em preto Procyon, sobrepostos a modelos teóricos de núcleos compostos por Carbono (linha contínua azul) e Ferro (linha contínua verde). Verificou-se que SíriusB e ProcyonB se ajustaram melhor ao modelo de núcleo carbono, enquanto Stein 2051 e 40 Eri B se ajustaram melhor ao modelo de núcleo ferro.

Figura 2 – Variação da massa pelo raio de estrelas anãs brancas



Fonte: Lascelles (2016, p. 8)

Legenda: Os pontos representam dados experimentais de WDS, em vermelho SíriusB, em turquesa 40EriB, em roxo Stein2051, e em preto Procyon, sobrepostos a modelos teóricos de núcleos compostos por Carbono (linha contínua azul) e Ferro (linha contínua verde)

É possível perceber, por meio da relação massa-raio, o tamanho da estrela é determinado pelo equilíbrio entre a pressão interna do gás, que tende a fazer a estrela se expandir, e a pressão gravitacional, que tende a fazer a estrela colapsar. Em um gás degenerado, como o gás de elétrons, o aumento da densidade aumenta mais a pressão gravitacional do que a pressão interna do gás. Portanto, um acréscimo de massa a uma anã branca, originalmente em equilíbrio, faz com que a pressão gravitacional prevaleça sobre a pressão interna levando, conseqüentemente, a uma contração da estrela.

A diversidade das anãs brancas são definidas através dos elementos químicos que são encontrados em sua superfície. Dados espectroscópicos de estrelas anãs brancas revelam que a maioria contém uma superfície pura em hidrogênio e hélio, onde, acredita-se, que no seu núcleo contenha carbono e oxigênio. Portanto, este sistema de classificação realizado a mão (analisando as linhas de absorção de seu espectro eletromagnético na região do visível), reflete a composição superficial dessas estrelas. Em relação a notação, no sistema atual, a letra D indica uma estrela degenerada, e a segunda letra indica a primeira assinatura espectroscópica, no comprimento de onda do óptico, na atmosfera da estrela. As principais classificações estão listadas abaixo (Kawaler e Dahlstrom, 2000).

DA, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico composto principalmente por linhas de absorção da série de Balmer (H_{δ} , H_{γ} , H_{β} , H_{α}). É o tipo mais comum, cerca de 83% das estrelas anãs brancas são DA (Ourique, 2019, p. 22);

DB, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico composto principalmente por linhas de absorção de hélio (HeI);

DO, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico com linhas de absorção fortes de He II, mas com a presença de He I ou H;

DC, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico sem muitas linhas de absorção, um espectro contínuo;

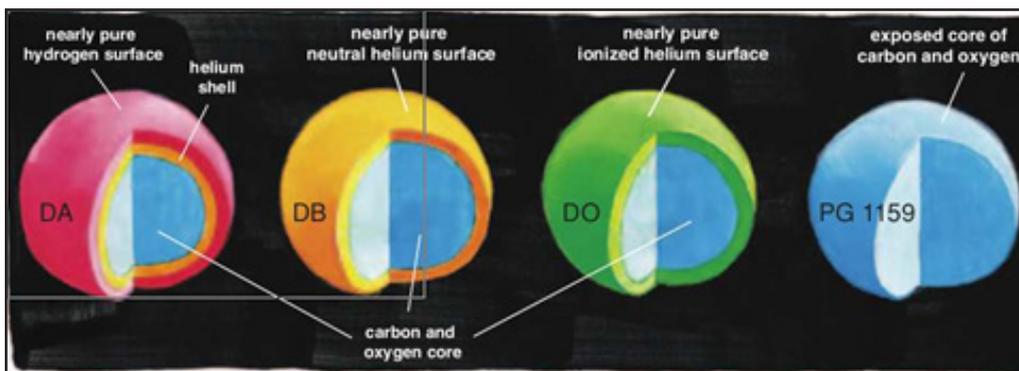
DZ, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico com linhas de absorção de elementos metálicos (Mg, Ca, Fe);

DQ, estrelas que possuem um espectro no intervalo do óptico com linhas de

absorção de carbono.

A Figura 3, é uma representação artística dos principais tipos de classificação: DA, DB e DO, respectivamente. Essa figura ilustra também a estrela PG-1159, um caso interessante de ser comentado, pois ela tem seu núcleo de carbono e oxigênio totalmente exposto.

Figura 3 – Representação dos tipos DA, DB, DO, e da estrela PG 1159



Fonte: Kawaler e Dahlstrom (2000, p. 3)

Legenda: Onde a cor rosa representa hidrogênio, o amarelo representa o hélio neutro, o verde representa o hélio ionizado e o azul representa o núcleo composto de carbono e oxigênio

Anãs brancas também podem ter uma mistura de elementos em suas superfícies e são nomeadas da seguinte forma: estrelas DAB contêm hidrogênio e hélio neutro, enquanto as estrelas DAO possuem hidrogênio e hélio ionizado.

3 ESTRELAS ANÃS BRANCAS E A MECÂNICA ESTATÍSTICA

Um modelo típico, embora um tanto idealizado, de uma estrela anã branca consiste em uma massa ($M \sim 10^{33}$ g) de hélio, com geometria esférica de densidade de massa $\rho \sim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ e temperatura $T \sim 10^7 \text{ K}$ Pathria e Beale (2011, p. 260). É importante lembrar que um gás com uma temperatura da ordem de $\sim 10^7 \text{ K}$ corresponde a uma energia térmica média por partícula da ordem de 10^3 eV , onde essa energia é muito maior que a necessária para ionizar um átomo de hélio. Assim, é possível concluir que, praticamente, todo o hélio dessas estrelas está em um estado

de ionização completo. Os constituintes microscópicos das WDS podem, portanto, ser considerados como N elétrons (cada um de massa m_e) e $\frac{1}{2} N$ núcleos de hélio (cada um de massa $\simeq 4m_p$). Assim, a massa das WDS é dada por:

$$M \simeq Nm_e + \frac{N}{2}4m_p \simeq N(m_e + 2m_p) \simeq 2Nm_p. \quad (2)$$

E a densidade eletrônica por:

$$n = \frac{N}{V} \simeq \frac{\frac{M}{2m_p}}{\frac{M}{\rho}} = \frac{\rho}{2m_p}. \quad (3)$$

O valor típico da densidade eletrônica em estrelas anãs brancas é em torno de $O(10^{30})$ elétrons por cm^3 . Obtemos, assim, o momento de Fermi do gás de elétrons, como:

$$p_f = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} h = O(10^{-17})g \cdot cm \cdot s^{-1} \quad (4)$$

A equação de estado para o interior degenerado de uma estrela anã branca pode ser derivada considerando-se a densidade de estado quântico, $g(p)$, definido no espaço de fase, como:

$$g(p) \cdot dp \cdot du = \frac{8\pi g'}{h^3} \cdot p^2 \cdot dp \cdot du. \quad (5)$$

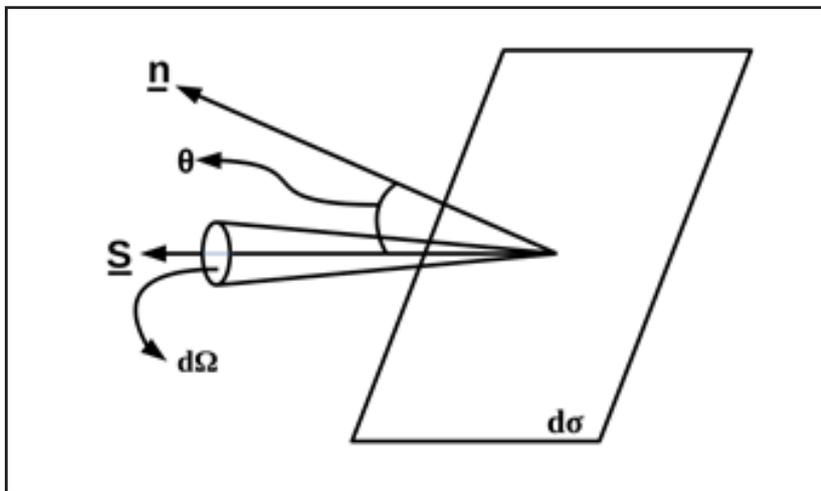
Isto inclui a degenerescência de dois elétrons de spins opostos. Considere que a distribuição de elétrons, ou seja, os férmions, entre os estados quânticos obedece a estatística de Fermi-Dirac, em que a ocupação média de um estado de energia ϵ é dada por:

$$f(\epsilon) = \frac{g'}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1}, \quad (6)$$

sendo, g' a degenerescência dos elétrons com o valor de $g'=2$.

Portanto, microscopicamente, a pressão é definida como o fluxo de momento através de uma superfície (S). Se considerarmos um elemento de área $d\sigma$ com uma normal n , podemos derivar uma expressão para a pressão, ao menos urar quantos elétrons passam pela área por segundo em um elemento de angulo sólido $d\Omega$, em uma direção \vec{S} , no intervalo de momento $p \rightarrow p + dp$ (ver Figura 4).

Figura 4 – Representação da geometria do fluxo de momento, S , através do elemento de superfície $d\sigma$



Fonte: Autores

Legenda: n , θ e $d\Omega$ representam o vetor normal, angulo entre normal e direção do fluxo de momento S e elemento de angulo sólido respectivamente

De acordo com $F(e)$, o número de densidade dos estados ocupados na vizinhança de do é dado por $g(p).dp$. Na direção de \vec{n} , cada elétron carrega um momento igual a $p \cdot \cos(\theta)$, através de uma área de superfície projetado $\cos(\theta) \cdot d\sigma$. Esse fator precisa ser considerado para todos os elétrons, portanto, ainda é necessário multiplicar pela velocidade dos elétrons u . Como a função de distribuição é isotrópica, a fração de elétrons passando em $d\Omega$ é igual a $d\Omega/4\pi$.

Para obtermos a pressão na superfície, dividimos por dw integrando em mais de um hemisfério e em todos os estados de momento, seguindo a equação:

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{p=0}^{\infty} \frac{8\pi p^3}{h^3} \frac{2}{e^{\frac{\epsilon(p)-\mu}{kt}} + 1} \cos^2(\theta) u(p) dp \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (7)$$

Integrando a parte angular da Equação (7), onde $d\Omega = \sin(\theta) d\omega d\phi$, $\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = 1/3$ e $\int_0^{2\pi} dp = 2\pi$, obtemos:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_{p=0}^{\infty} \frac{p^3 u(p) dp}{e^{\frac{\epsilon(p)-\mu}{kt}} + 1}. \quad (8)$$

Onde, $u(p)$ e $\epsilon(p)$ são, respectivamente, as expressões relativísticas da velocidade e energia de um estado de momento e μ é o potencial químico com dimensão de energia.

Quando todos os estados quânticos estão ocupados até algum momento i , e não há nenhum acima disso, o gás de elétrons é dito ser totalmente degenerado. O estado de ocupação mais alto é denotado por p_f e chamado de momento Fermi. A energia de Fermi corresponde a E_f , que equivale a uma temperatura zero no interior.

É importante ressaltar que essa condição é não-físico, e que, qualquer energia térmica promoverá elétrons para estados de maior momento. Na realidade, o interior de uma anã branca é apenas parcialmente degenerado e o equilíbrio hidrostático é mantido através de uma mistura complexa de pressão de degeneração e pressão térmica pequena, mas finita. Portanto, essa suposição simplifica muito a solução para a equação de estado, pois, nesse regime, a função de distribuição assume a seguinte forma:

$$\left\{ f(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \epsilon \leq \epsilon_f \\ 0, & \epsilon > \epsilon_f \end{cases} \right. \quad (9)$$

assim, a Equação 8 se resume a:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_f} p^3 u(p) dp. \quad (10)$$

Para obtermos a velocidade relativística das partículas será considerado a energia para partículas relativística, através da seguinte equação:

$$\varepsilon = m_e c^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c}\right)^2} - 1 \right]. \quad (11)$$

Como as velocidades das partículas são determinadas através da derivada das energias pelos momentos, obtemos:

$$u = \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{m_e c^2}{2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c}\right)^2}} \frac{2p}{(m_e c)^2} \quad (12)$$

$$u = c \frac{p/m_e c}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c}\right)^2}}. \quad (13)$$

Substituindo a expressão da velocidade acima na Equação 10, a expressão da pressão P do gás é:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_f} p^3 c \frac{p/m_e c}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_e c}\right)^2}} dp. \quad (14)$$

Para resolver a integral, realizamos uma mudança de variável, onde, $\omega = \frac{p}{m_e c}$, $dp = m_e c d\omega$ e $p^4 = \omega^4 m_e^4 c^4$, assim a Equação (14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} c m_e^4 c^4 \int_0^x p^3 \frac{\omega^4}{\sqrt{1 + \omega^2}} d\omega \quad (15)$$

Onde, x é chamado de parâmetro de relatividade e aparece amplamente nos cálculos de pressão de degeneração e determinado p como $x = \frac{p_f}{m_e c}$. Resolvendo a integral obtemos:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} m_e^4 c^5 \frac{1}{8} [x^2 \sqrt{x^2 + 1} (2x^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x)] \quad (16)$$

$$P = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} A(x), \quad (17)$$

onde:

$$A(x) = x^2 \sqrt{x^2 + 1} (2x^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x). \quad (18)$$

A Equação 18 é a expressão geral da pressão em todos os valores do parâmetro de relatividade, para o caso totalmente degenerado.

Podemos expressar a densidade numérica de elétrons como uma função do momento de Fermi p_f , integrando a densidade de estados no espaço de fase sobre todos os valores possíveis do momento ($p = 0 \rightarrow p_f$). Assim teremos:

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_{p=0}^{p_f} p^2 = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3 \quad (19)$$

$$n_e = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3. \quad (20)$$

Conseqüentemente é possível expressar a pressão em termos da densidade numérica de elétrons, mas antes de realizarmos esta mudança, podemos simplificar ainda mais a equação de estado ao considerar dois casos limitantes, sendo eles, os regimes não-relativístico ($x \rightarrow 0$) e relativístico ($x \rightarrow \infty$), através da função $A(x)$. Portanto, resultados assintóticos para $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$, são frequentemente úteis, eles são dados por:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{22}x^{11} + \dots, \quad x \rightarrow 0 \\
 A(x) &= 2x^4 - 2x^2 + 3\left(\ln 2x - \frac{7}{12}\right) + \frac{5}{4}x^{-2} + \dots, \quad x \rightarrow \infty
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

O parâmetro x é uma medida do momento dos elétrons nos estados de energia mais populosos e, portanto, mede a importância dos efeitos relativísticos. Nestes dois casos a equação geral de estado reduz-se às seguintes formas:

$$P = \begin{cases} \frac{8\pi m_e^4 c^5}{30h^3} x^5 & \text{se } x \rightarrow 0 \\ \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} x^4 & \text{se } x \rightarrow \infty \end{cases}
 \tag{22}$$

Substituindo o número de densidade de elétrons, teremos:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{h^2}{40m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \\
 P &= \frac{hc}{16} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Estas equações fornecem aproximações à equação de estado para configurações de estrelas completamente degeneradas, nos regimes não-relativístico e relativístico, respectivamente.

3.2 Massa das WDS

Na ausência da gravitação, faz-se necessário a presença de “paredes externas” para manter o gás de elétrons a uma densidade n . O gás irá exercer uma pressão $P(n)$ nas paredes e qualquer compressão ou expansão do gás implicará em uma realização de trabalho. Assumindo que a configuração seja esférica e considerando uma configuração de equilíbrio, uma alteração adiabática em V causará uma mudança no gás, dada por:

$$dE_0 = -P(n)dV = -P(R)4\pi R^2 dR \quad (24)$$

Agora, na presença da gravitação, não são necessárias as paredes externas, mas a mudança na energia do gás, como resultado de uma mudança no tamanho da esfera ainda será dada pela equação anterior (Equação 24).

A expressão de P, como uma função da densidade média n deverá agora levar em conta a não uniformidade do sistema. No entanto, a Equação 24 sozinha não nos dá mais a mudança na energia do sistema, se fosse o caso, o sistema se expandiria indefinidamente, nitidamente, até n e $P(n) \rightarrow 0$. Na verdade, temos agora uma mudança na energia potencial como dada por:

$$dE_g = \left(\frac{dE_g}{dR}\right) dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR. \quad (25)$$

Onde, M é a massa total do gás, G é a constante da gravitação e α é o número cujo valor exato depende da variação espacial de n dentro da esfera. Se o sistema está em equilíbrio, a mudança líquida a sua energia total ($E_0 + E_g$), para uma mudança infinitesimal de seu tamanho, deve ser igual a zero, assim:

$$E_0 + E_g = 0$$

$$E_0 + E_g = 0$$

$$-P(R)4\pi R^2 dR + \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR = 0 \quad (26)$$

$$\alpha \frac{GM^2}{R^2} = -P(R)4\pi R^2$$

$$P(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (27)$$

Podemos reescrever a variável x considerando que, logo $n = \frac{N}{V} = \frac{3N}{4\pi R^3}$

$$x = \left(\frac{9N}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R}, \quad (28)$$

e através da Equação 2, podemos dizer que $N = \frac{M}{2m_p}$, portanto:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{9M}{64m_p\pi^2} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R} = \left(\frac{9M\pi}{8.2^3 m_p \pi^3} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R} \\ x &= \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R}, \end{aligned} \quad (29)$$

onde, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Explicitando $A(x)$ na Equação 17, obtemos

$$A(x) = \frac{p_6 h^3}{\pi m_e^4 c^4}, \quad (30)$$

e substituindo a Equação 27 e a Equação 29, temos que:

$$\begin{aligned} A \left[\left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R} \right] &= \frac{\alpha GM^2}{4\pi R^4} \frac{6h^3}{\pi m_e^4 c^4} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = 12\pi\alpha GM^2 \frac{h^3}{2^3 \pi^3 m_e^4 c^4 R^4} \\ A \left[\left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c R} \right] &= \frac{12\pi\alpha GM^2}{m_e c R} \left(\frac{\hbar}{m_e c R} \right)^3. \end{aligned} \quad (31)$$

A Equação 31, estabelece uma correspondência entre a massa M e o raio R das estrelas anãs brancas, mais conhecido como, a relação massa-raio como mostrado na Figura 2. Analisando a Equação 31, obtemos algumas propriedades importantes, como: (i) relação entre a massa da estrela com a massa de prótons;

(ii) a relação entre o raio da estrela em termos do comprimento de onda Compton do elétron, e ; (iii) a relação entre a energia gravitacional da estrela descrita em termos da energia do elétron.

Por outro lado, por meio da Equação 31, não podemos expressar o raio da estrela como uma função explícita de sua massa, exceto em dois casos extremos. Para isso, consideramos que, desde $M \sim 10^{33}$, $m_p \sim 10^{-24} \text{ g}$, e $\frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-11}$, o argumento da função $A(x)$ será da ordem da unidade quando $R \sim 10^8$. Podemos, portanto, definir os dois casos extremos da seguinte forma:

$R \gg 10^8 \text{ cm}$, o que faz $x \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $A(x) \approx \frac{8}{5} x^5$, com o resultado

$$R \approx \frac{3 (9\pi)^{2/3} \hbar^2 M^{-1/3}}{40\alpha G m_e M_p^{5/3}} \propto M^{-1/3}. \quad (32)$$

$R \gg 10^8 \text{ cm}$, o que faz $x \rightarrow \infty$ e, portanto, $A(x) \approx 2x^4 - 2x^2$, com o resultado

$$R \approx \frac{(9\pi)^{1/3} \hbar}{2 m_e c} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}\right]^{1/2}. \quad (33)$$

Onde,

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha}\right)^{1/3} \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{m_p^2}. \quad (34)$$

Através disso, podemos concluir que quanto maior a massa da WDS menor será seu tamanho. Além disso, existe uma massa limitante M_0 , dada pela Equação 34, que corresponde ao tamanho de desaparecimento da estrela. Obviamente, para $M > M_0$, nossa relação massa-raio não possui qualquer solução real. Por esse motivo, podemos concluir também, que todas as WDS em equilíbrio devem ter uma massa menor que M_0 . Essa conclusão corrobora com as observações astronômicas (ver

diagrama HR mostrado na Figura 1).

Como discutido anteriormente, a massa máxima de uma WDS é dada pelo limite de Chandrasekhar, pois esse regime demonstra que, ao exceder o limite da massa, a pressão do estado do gás de elétrons (que surge do fato de os elétrons obedecerem ao princípio de exclusão de Pauli) não seria suficiente para apoiar a estrela contra a sua “tendência a um colapso gravitacional”. O valor numérico da massa limitante, dada pela Equação 33, é aproximadamente . Investigações detalhadas por Chandrasekhar levaram ao resultado:

$$M_0 = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_{\odot}. \quad (35)$$

Onde, M_{\odot} é a massa do Sol, que é aproximadamente 2×10^{33} g, e μ_e é o número que representa o grau de ionização do hélio. Por definição, $\mu_e = \frac{M}{N m_{He}}$. Adotando o valor aceito atualmente de $\mu_e \cong 2$, derivamos um resultado de $M_0 \simeq 1,44 M_{\odot}$. Ver também o trabalho de Evangelista (2019, p. 5).

4 ANÁLISE DE UMA AMOSTRA DE WDS USANDO DADOS DO SLOAN DIGITAL SKY SURVEY

Como discutido na Seção 2, as WDS podem ser classificadas conforme o elemento químico encontrado em sua superfície. Dados espectrográficos no comprimento de onda do óptico possuem assinaturas espectrais dos elementos químicos que estão presentes na superfície das estrelas, e são um ótimo método para realizar esta classificação.

Neste trabalho utilizaremos espectros obtidos pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS) para discutir as diferenças espectrais entre os principais tipos de WDS. Também utilizaremos as informações das magnitudes obtidas pelo SDSS.

O SDSS usa um telescópio Ritchey-Chrétien de 2.5m de diâmetro e uma distância focal de $f/5$, localizado no Observatório Apache Point, no sudeste do Novo México, um espelho secundário de 1,08 m e duas lentes corretoras resultam em um campo de visão livre de distorção de 3 (Gunn *et al.*, 2006, p. 4). Esses dados são nomeados seguindo a nomenclatura: SDSS JHHMMSS.ss+DDMMSS.ss. No primeiro conjunto (JHHMMSS.ss) temos a hora (HH), os minutos (MM) e os segundos (SS.ss). No segundo conjunto (DDMMSS.ss) temos o ângulo de inclinação do objeto (DD).

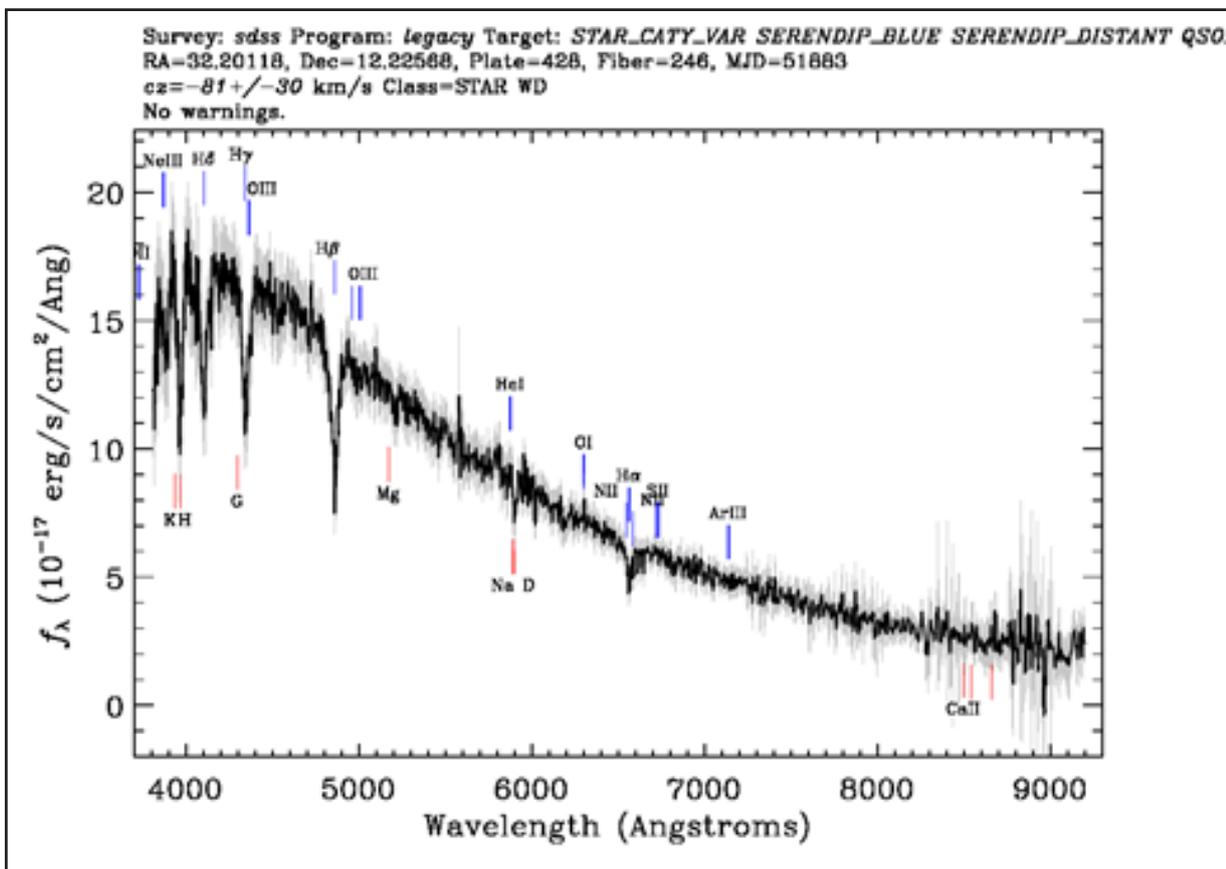
O SDSS utiliza o sistema fotométrico mais usado na atualidade, o ugriz, definido por Fukugita *et al.* (1996, p.1). Esse sistema compreende cinco bandas de cores que dividem toda a gama de corte do ultravioleta atmosférico a 3.000 \AA ao limite de sensibilidade dos CCDs de silício a 11.000 \AA em cinco bandas de passagem essencialmente não sobrepostas. Os cinco filtros têm as seguintes propriedades: u possui o pico a 3500 \AA com largura máxima até ao meio máximo de 600 \AA ; g está na banda do azul esverdeado, centrado em 4800 \AA com uma largura de 1400 \AA ; r é a banda de passagem vermelha centrada em 6250 \AA com uma largura de 1400 \AA ; V é um filtro vermelho centrado em 7700 \AA com uma largura de 1500 \AA ; e z é uma banda de passagem próxima do infravermelho centrada em 9100 \AA com uma largura de 1200 \AA ; onde a forma da função de resposta z em comprimentos de onda longos é determinada pela sensibilidade do CCD.

Foram utilizados dados públicos do Data Release 14 (DR14), que é o segundo lançamento de dados da quarta geração do SDSS (SDSS-IV). O DR14 contém observações do SDSS até julho de 2016. Para a nossa análise espectral utilizamos dados de 5 WDS, os espectros e as magnitudes apresentadas foram obtidos pelo SDSS e estão listados abaixo.

4.1 SDSS J020848.27+121332.6

Analisando o espectro obtido pelo SDSS do objeto SDSS J020848.27 + 121332.6, Fig. 5, observamos a presença de linhas de absorção intensas da série de Balmer do hidrogênio, são elas as linhas de H α (λ 6564Å), H β (λ 4862Å), H γ (λ 4341Å) e H δ (λ 4102Å). O que é característica de uma WDS do tipo DA.

Figura 5 – Espectro obtido pelo SDSS da WDS DA SDSS J020848.27+121332.6



Fonte: SDSS

Legenda: Linhas de emissão e absorção estão identificadas

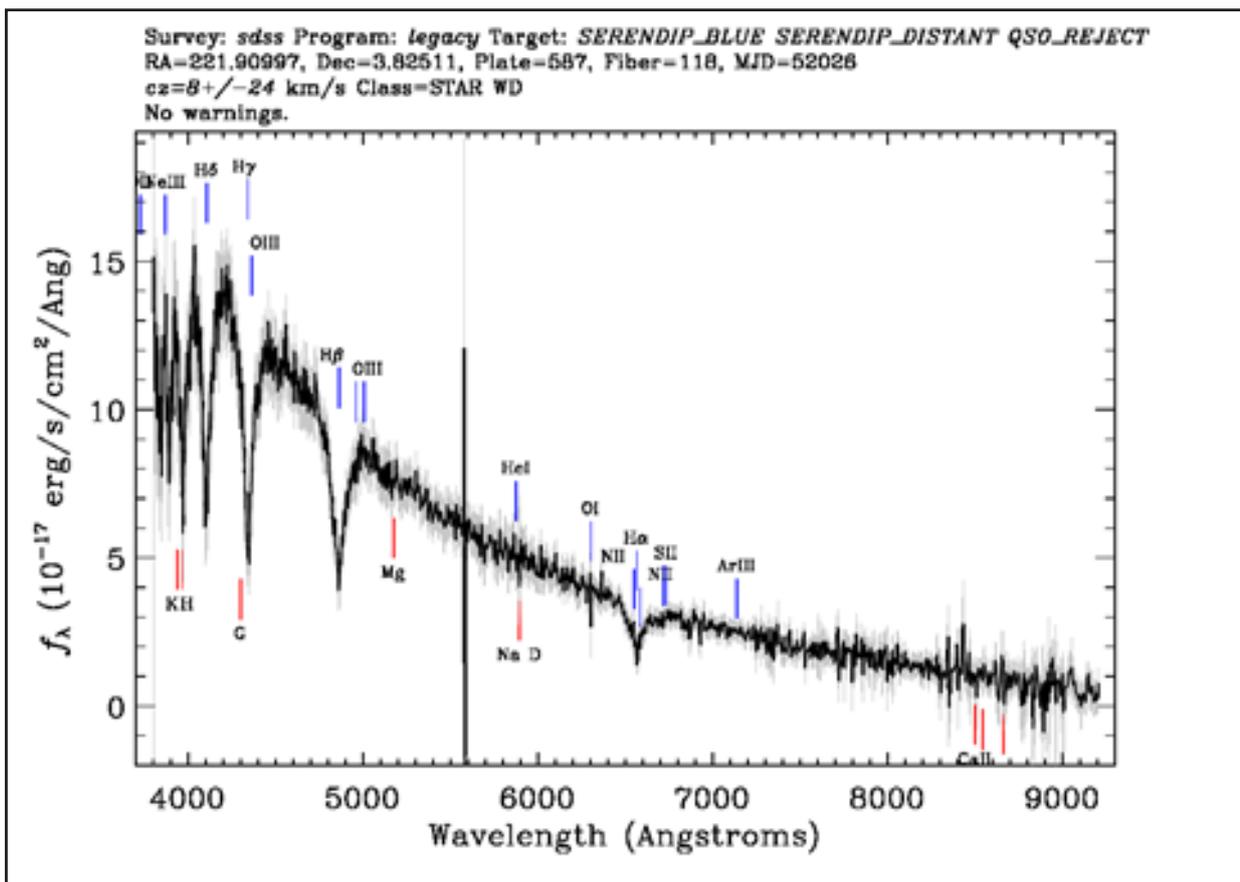
A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 18.7 \pm 0.02$ mag; $g = 18.72 \pm 0.01$ mag; $r = 18.95 \pm 0.01$ mag; $i = 19.15 \pm 0.02$ mag; e $z = 19.34 \pm 0.06$ mag.

4.2 SDSS J144738.39+034930.4

Como o objeto anterior, através o espectro obtido pelo SDSS do objeto SDSS

J144738.39 + 034930.4, Fig. 6, observamos que as grandes linhas de absorção presentes são correspondentes a série de Balmer do hidrogênio, são elas as linhas de H α (λ 6564Å), H β (λ 4862Å), H γ (λ 4341Å) e H δ (λ 4102Å). O que é característica de WDS do tipo DA.

Figura 6 – Espectro obtido pelo SDSS da estrela DA SDSS J144738.39+034930.4



Fonte: SDSS

Legenda: Linhas de emissão e absorção estão identificadas

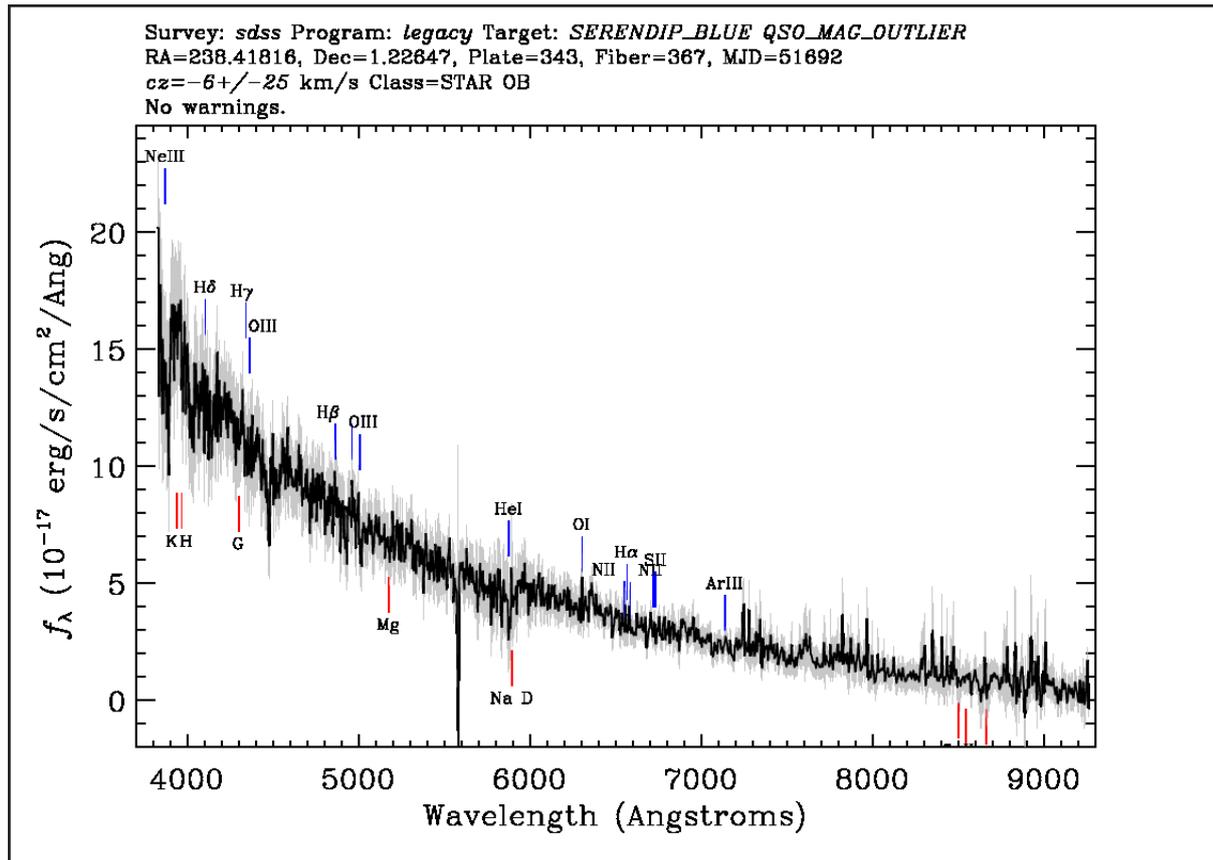
A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 23.62 \pm 0.62$ mag; $g = 19.28 \pm 0.01$ mag; $r = 19.51 \pm 0.01$ mag; $i = 19.72 \pm 0.02$ mag; e $z = 19.91 \pm 0.1$ mag.

4.3 SDSS J155340.35+011335.2

Analisando o espectro do objeto SDSS J155340.35 + 011335.2 obtido pelo SDSS, Fig. 7, vemos que ele não possui linhas de absorção intensas de hidrogênio

como os dois objetos anteriores, assim está estrela não é uma DA. Mas este No entanto, o objeto possui a linha de absorção de HeI ($\lambda 5876\text{\AA}$), o que é uma característica de uma WDS do tipo DB.

Figura 7 – Espectro obtido pelo SDSS da estrela DB SDSS J155340.35+011335.2



Fonte: SDSS

Legenda: Linhas de emissão e absorção estão identificadas

A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 19.38 \pm 0.03$ mag; $g = 19.3 \pm 0.01$ mag; $r = 19.50 \pm 0.02$ mag; $i = 19.67 \pm 0.03$ mag e $z = 19.93 \pm 0.14$ mag.

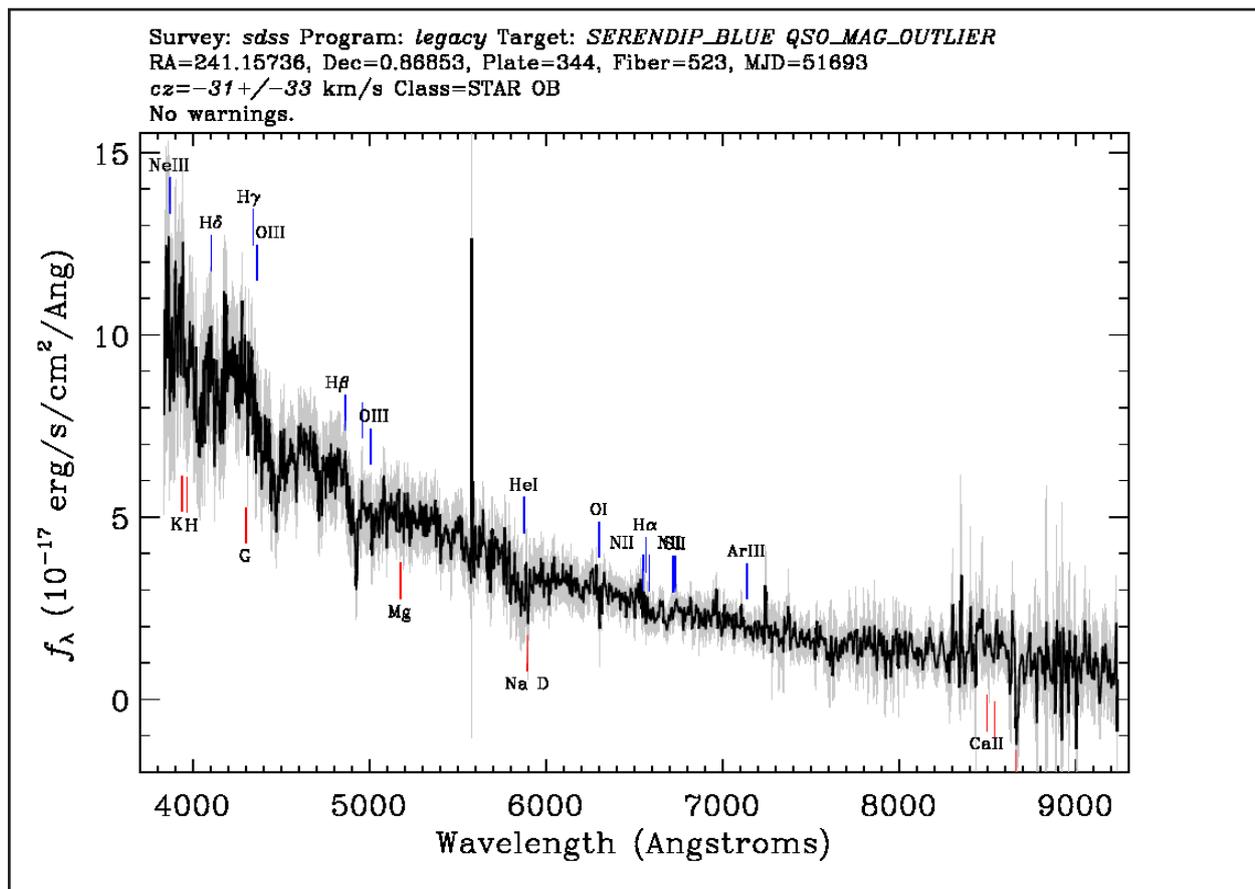
4.4 SDSS J160437.76+005206.6

Analisando o espectro do objeto SDSS J160437.76 + 005206.6 obtido pelo SDSS, Fig. 8, vemos que ele tem as mesmas características do objeto anterior, o espectro

possui a linha de absorção de HeI ($\lambda 5876\text{\AA}$). Assim, concluímos assim que esta estrela também se trata de é uma WDS do tipo DB.

A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 19.66 \pm 0.03$ mag; $g = 19.71 \pm 0.01$ mag; $r = 19.87 \pm 0.02$ mag; $i = 20.07 \pm 0.03$ mag; e $z = 20.05 \pm 0.13$ mag.

Figura 8 – Espectro obtido pelo SDSS da estrala DB SDSS J160437.76+005206.6



Fonte: SDSS

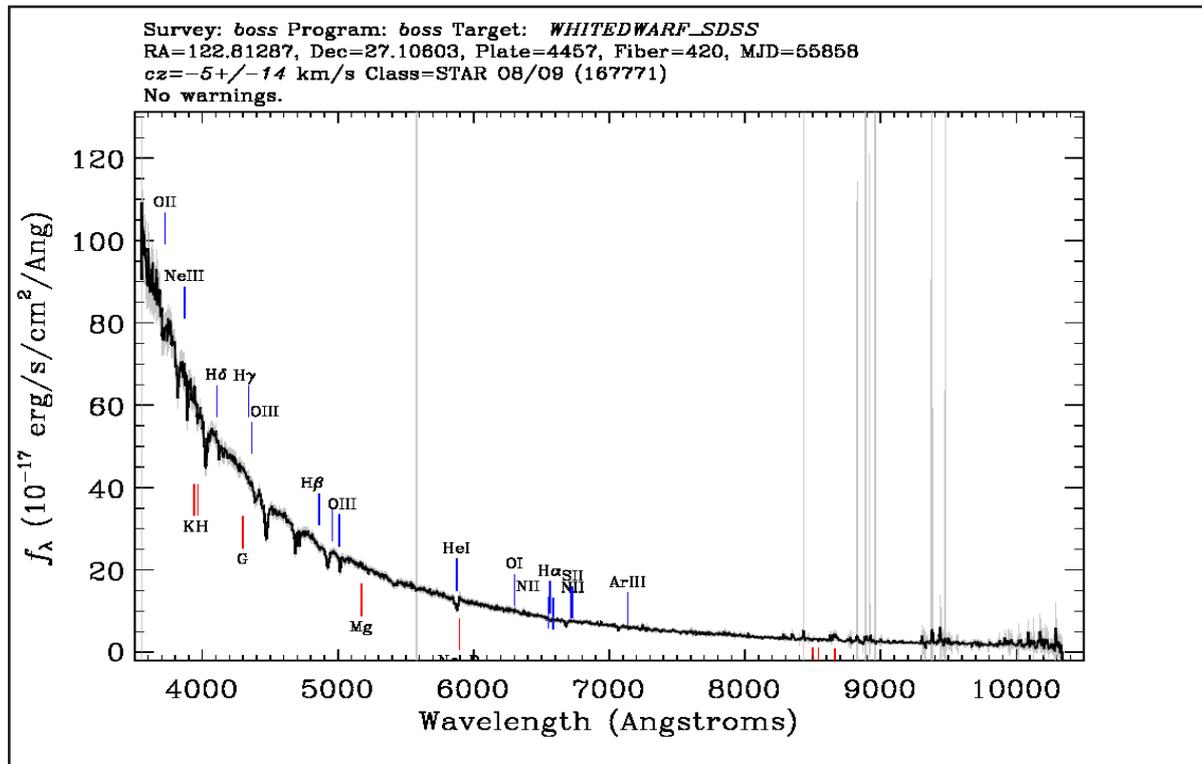
Legenda: Linhas de emissão e absorção estão identificadas

4.5 SDSS J081115.08+270621.8

Estudando o espectro da estrela SDSS J081115.08 + 270621.8, Fig. 9, obtido pelo SDSS, observamos que esta estrela tem características de uma WDS do tipo DO, pois possui linhas de absorção fracas das linhas de H e de He fracas.

A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 17.73 \pm 0.01$ mag; $g = 18.08 \pm 0.01$ mag; $r = 18.63 \pm 0.01$ mag; $i = 18.96 \pm 0.01$ mag; e $z = 19.37 \pm 0.8$ mag, respectivamente.

Figura 9 – Espectro obtido pelo SDSS da estrela DO SDSS J081115.08+270621.8



Fonte: SDSS

Legenda: Linhas de emissão e absorção estão identificadas

A magnitude desta estrela nas cinco bandas é: $u = 17.73 \pm 0.01$ mag; $g = 18.08 \pm 0.01$ mag; $r = 18.63 \pm 0.01$ mag; $i = 18.96 \pm 0.01$ mag; e $z = 19.37 \pm 0.8$ mag, respectivamente.

5 CONCLUSÕES

Um grande desafio para o ensino de Física na graduação e na pós-graduação é a demonstração da interdisciplinaridade entre os conteúdos ministrados pelas disciplinas. Quando buscamos usar a astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de Física estamos objetivando não apenas a necessidade de contextualizar os conteúdos, mas também de trazer formas empíricas de dados, neste caso, dados astrofísicos públicos, para trazer mais atenção dos discentes às aulas e proporcionar

a interação entre a graduação e a pós-graduação.

Portanto, este trabalho apresentou o estudo do conceito e o formalismo matemático da estrutura interna de WDS, explicitando a equação de estado, a relação massa e raio para essa classe de estrelas. Nesse estudo foi possível levar o discente a concluir que quanto maior é a massa da WDS, menor é o seu tamanho. Além disso, foi possível concluir que as WDS em equilíbrio devem ter uma massa menor que $< 1,44$, corroborando com dados observacionais.

Foi possível concluir também, através por meio dos dados públicos do SDSS, que as estrelas SDSS J020848.27 + 121332.6 e SDSS J144738.39 + 034930.4 possuem hidrogênio puro em sua superfície, características de uma WDS do tipo DA. Por outro lado, os objetos SDSS J155340.35 + 011335.2 e SDSS J160437.76 + 005206.6 possuem em sua superfície de hélio neutro propriedade de WDS do tipo DB. Além disso, o objeto SDSS J081115.08 + 270621.8 dispõe em sua superfície hélio ionizado característica de WDS tipo DO.

Relato de Autor X sobre a experiência inovadora da abordagem didática e interdisciplinar da disciplina de Mecânica Estatística da PPG-X que resultou neste produto:

Disciplinas formativas em cursos de pós-graduação em física normalmente compreendem os chamados pilares da física, que são, mecânica clássica, mecânica estatística, eletromagnetismo e mecânica quântica. Normalmente estas disciplinas são obrigatórias para a formação, mas muitas vezes estes conteúdos estão longe do que é aplicado ou estudado na pesquisa.

Considero fundamental um conhecimento mínimo básico (o que consta na ementa) em todas estas grandes áreas da física, mas quando ocorre a interdisciplinaridade entre o conteúdo da disciplina com o tema da pesquisa o aprendizado torna-se mais completo e mais agradável. Sem falar que por meio desta interdisciplinaridade, pode-se surgir um novo tópico a ser avaliado na pesquisa. Por este motivo, uma abordagem mista nos cursos de pós-graduação é a melhor opção.

No caso do curso de mecânica estatística, o estudo aprofundado da equação

de estado em estrelas anãs brancas me proporcionou uma experiência muito benéfica, onde pude compreender melhor o interior estelar, as características e peculiaridades das anãs brancas.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

EVANGELISTA, E. DE F. D. Dedução do limite de Chandrasekhar: uma abordagem didática dos trabalhos originais do autor. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s.l.], v. 41, n. 2, e20180167, 2019.

FARIAS, M. L. DE L. B.; MARCO AURÉLIO, A, b. Integrando o ensino de astronomia e termodinâmica: explorando a zona habitável no diagrama de fases da água. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s.l.], v. 39, n. 4, e4402-2, 2017.

FAZENDA, I. C. A. **O que é interdisciplinaridade**. Cortez editora, 2008

FUKUGITA, M.; ICHIKAWA, T.; GUNN, J. E.; DOI, M.; SHIMASAKU, K.; SCHNEIDER, D. P. The Sloan Digital Sky Survey Photometric System. *The Astronomical Journal*, [s.l.], v.111, n.4, p. 1748, 1996.

GUNN, J. E.; SIEGMUND, *et al.* The 2.5m Telescope of the Sloan Digital Sky Survey. **The Astronomical Journal**, [s.l.], v. 131, n.4, p. 2332-2359, abr. 2006.

KAWALER, S. D.; DAHLSTROM, M. White Dwarf Stars: The Remnants of Sunlike Stars, White Dwarfs Offer Clues to the Identity of Dark Matter and the Age of Our Galaxy. **American Scientist**, v. 88, n. 6, p. 498–507, nov./dec. 2000.

LASCELLES, A. A. **A Runge-Kutta Approach to Pro-bing the Structure of White Dwarf Stars**. United Kingdom: School of Physics and Astronomy, University of Southampton, 2016.

LOPES, A. C. **Conhecimento Escolar: Ciência e Cotidiano**. [S.l.], UERJ, 2000.

YOGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. [S.l.]: Martins Fontes, 1991.

LUCK, H. **Pedagogia Interdisciplinar: Fundamentos Teórico - Metodológicos**. [S.l.]: Editora Vozes, 2004.

OURIQUE, G. **Study of cool white dwarf stars**. 2019. 60p. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. **Statistical Mechanics**. 3.ed. [S.]: Elsevier, 2011. *E-book*.

RUSSELL, H. N. Relations Between the Spectra and Other Characteristics of the Stars. **Popular Astronomy**, [s.l.], v. 22, p. 275–294, 1914.

SILVA-OLIVEIRA, W.; SALES, D. A.; LAZO, M. J. Astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de física: teoria cinética dos gases através de aglomerados de estrelas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s.l.], v. 42, e20190054, 2020.

FILHO, K. DE S. O.; SARAIVA, M; DE F. O. **Astronomia e astrofísica**. Porto Alegre: Universidade/UFRGS, 2017.

Authorship contributions

1 – Lara Maria Gatto

Bacharela em Física, Mestre em Física e Doutoranda em Física

<https://orcid.org/0000-0002-8589-8264> • laragatto01@gmail.com

Contribuição: Escrita – primeira redação

2 – Dinalva Aires de Sales

Matemática, Mestre em Física, Doutora em Física

<https://orcid.org/0000-0002-3496-5711> • dinalvaires@gmail.com

Contribuição: Segunda redação

Como citar este artigo:

GATTO, L. M.; SALES, D. A. Astronomia como ferramenta lúdica para o ensino de física: equação de estado e as estrelas anãs brancas. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 44, e49, 2022. DOI: <https://doi.org/10.5902/217946066837>.