



www.relainep.ufpr.br



# AN ITERATED LOCAL SEARCH HEURISTIC FOR SOLVING THE VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH HETEROGENEOUS FLEET

## UMA HEURÍSTICA ILS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA HETEROGÊNEA

Naiara H. Vieira<sup>1</sup>✉, Fernanda dos R. Cota<sup>1</sup>, Aloísio de C. G. Júnior<sup>1</sup>, Helton C. Gomes<sup>1</sup>, Allexandre Fortes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Brasil

<sup>2</sup> Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ), São João Del-Rei, Brasil

✉ naiara.helena@aluno.ufop.edu.br

Recebido: 21 Outubro 2021 / Aceito: 05 Novembro 2021 / Publicado: 17 setembro 2022

**ABSTRACT.** The heterogeneous fleet vehicle routing problem (HFVRP) is a combinatorial optimization problem that, due to the variation in the vehicle capacity, instance amplitude and restrictions presents high computational complexity. The main goal of HFVRP is to determine the best possible set of routes that vehicles can travel between the depot and customers by observing the capacity of each vehicle. This paper presents an Iterated Local Search (ILS) approach adopted to solve the HFVRP. The initial solution is provided by the well known Clarke-Wright saving procedure. As local search, the moves two-opt and two-point were adopted to improve the solutions. Results when compared with the initial solution achieved up to 23% of improvement with running times below seven seconds. The method was applied over 27 benchmark instances, with the number of customers between 32 and 80.

**Keywords:** Vehicle routing, Heterogeneous fleet, Iterated Local Search

**RESUMO.** O problema de roteamento de veículos com frota heterogênea (PRVFH) é um problema de otimização combinatorial que, devido à variação na capacidade dos veículos, ao número de restrições e ao número de clientes a serem visitados, apresenta elevada complexidade computacional. O objetivo principal do PRVFH é determinar o melhor conjunto de rotas possível que os veículos possam percorrer entre o depósito e os clientes, observando a capacidade de cada veículo. O presente trabalho apresenta uma abordagem utilizando a meta-heurística *Iterated Local Search* (ILS) para resolução do PRVFH. A solução inicial é obtida pelo procedimento de economias (Clarke-Wright). Como métodos de busca local, foram adotados os movimentos *two-opt* e *two-point-move* para melhorar as soluções. Os resultados, quando comparados a solução inicial obtida usando a heurística de Clarke-Wright, chegaram a melhorias de até 23%, com tempos computacionais abaixo de sete segundos. O método foi aplicado a 27 instâncias encontradas na literatura e adaptadas para o problema com variação de 32 a 80 clientes.

**Palavras-chave:** Roteamento de veículos, Frota heterogênea, *Iterated Local Search*



## 1 INTRODUÇÃO

No campo da Pesquisa Operacional (PO), o problema de roteamento de veículos (PRV) é um dos mais conhecidos. Este problema baseia-se em situações reais vivenciadas em indústrias, transportadoras, empresas de transporte coletivo, coleta de lixo, enfim, o problema possui um vasto campo de aplicações. Na sua forma mais básica, o PRV é estudado considerando sua frota homogênea, ou seja, todos veículos têm a mesma capacidade de carga. No entanto, o foco deste trabalho é a resolução de uma variante do PRV onde a frota é heterogênea.

A constituição de uma frota de veículos heterogênea é uma prática muito comum nas empresas, haja visto que com o passar dos anos o modelo dos veículos, bem como sua capacidade, são alterados, mesmo que em pequena proporção. Esse é um dos motivos que levam a heterogeneidade da frota, além, é claro, de que certa variação na capacidade dos veículos se faz necessária para que seja possível reduzir gastos com demandas maiores ou menores.

O problema de roteamento de veículo com frota heterogênea (PRVFH) possui grande importância prática, conclusão identificada a partir da ampla variedade de estudos de caso encontrados na literatura. Trabalhos publicados sobre o PRVFH, e com bons resultados mediante sua aplicação, podem ser identificados em Li, Tian e Aneja (2010), Penna *et al.* (2013) e Coelho *et al.* (2016), dentre outros. A busca por ótimos resultados aplicados em casos reais instiga pesquisadores de todo o mundo a buscarem e elaborarem algoritmos cada vez mais eficientes e com custos satisfatórios.

Visto isso, este trabalho tem como meta o desenvolvimento de um algoritmo, baseado na meta-heurística Iterated Local Search (ILS), para a resolução do PRVFH. A solução inicial para o método foi obtida pela heurística das economias (Clarke-Wright). Na busca por uma melhor solução foram usadas duas estruturas de vizinhança: Two-opt e Two-point move. Para escapar dos ótimos locais, uma perturbação baseada na vizinhança do tipo Troca foi realizada. Visando a análise da eficiência do método proposto, as soluções obtidas por ele para as instâncias utilizadas foram comparadas com as soluções iniciais geradas e as soluções disponíveis na literatura, porém considerando a frota homogênea. Foram resolvidas 27 instâncias com variação de 32 a 80 clientes e de 5 a 10 veículos.

Este trabalho está estruturado em quatro seções. A seção atual introduz o tema de estudo. A Seção 2 apresenta o método abordado e sua importância, um modelo matemático e o



desenvolvimento teórico do algoritmo. A Seção 3 apresenta os resultados computacionais, com suas respectivas análises. Por fim, a Seção 4 traz as principais conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## 2 MÉTODO

Diversos problemas reais envolvem a otimização de rotas para um conjunto de veículos. Dessa forma, uma quantidade relevante de estudos foi realizada, com base na definição inicial do problema feita há 50 anos por Dantzig e Ramser (1959), e foram criadas diversas oportunidades de pesquisas e diferentes abordagens de resolução. Koç *et al.* (2016) estudaram o progresso e os desafios na pesquisa e estudo deste problema que representa um importante componente de vários sistemas de distribuição e transporte como coleta e entrega, tanto de produtos quanto de pessoas, distribuição de alimentos, coleta de lixo, entrega de correspondência, entre outros.

O PRV, apresenta um enunciado relativamente simples, onde suas restrições básicas consistem em: (a) cada cliente é visitado uma única vez por um único veículo; (b) cada rota é iniciada em um depósito e finalizada no mesmo e; (c) todas as demandas ou ofertas de todos os clientes devem ser satisfeitas. Seu objetivo busca reduzir os custos relacionados à operação ou distância percorrida. Porém, o PRV pertence à classe de problemas NP-Difícil, vez que ele é derivado do Problema do Caixeiro-Viajante e este é NP-Difícil (LENSTRA; KAN, 1981). Assim, devido a sua complexidade, em problemas com elevadas dimensões, o uso das heurísticas se torna mais apropriado (COELHO *et al.*, 2016).

Kytöjoki *et al.* (2007) afirmam que as heurísticas associadas ao PRV podem ser divididas entre três categorias diferentes, sendo elas, as heurísticas construtivas, as de refinamento e as meta-heurísticas. As heurísticas construtivas encontram soluções iniciais, que são melhoradas com a aplicação de heurísticas de refinamento. A etapa de refinamento realiza buscas locais a procura de melhores soluções, aperfeiçoando o valor da função objetivo. Já as meta-heurísticas são procedimentos destinados a encontrar uma nova solução aplicando-se em cada passo uma heurística subordinada. Os autores acrescentam que a maioria das meta-heurísticas para o PRV são baseadas em algumas heurísticas de construção e refinamento, ou seja, usam o princípio de busca local.

É possível perceber que, em problemas práticos de distribuição, os veículos disponíveis para atender a demanda dos clientes possuem capacidades diferentes em sua maioria. Dessa forma tem-se uma extensão do PRV descrita como problema de roteamento de veículos com



www.relainep.ufpr.br



frota heterogênea (PRVFH) afirma Penna *et al.* (2013). O PRVFH permite que os veículos possuam capacidades diferentes tornando-se um desafio para os gestores, pois as decisões de dimensionamento de frota levam em consideração a quantidade e os tipos de veículos a serem utilizados de acordo com sua capacidade.

Segundo Penna *et al.* (2013), é possível classificar o PRVFH considerando frota limitada ou ilimitada de veículos capacitados, onde cada veículo possui custos associados, a fim de atender um conjunto de clientes. Quando a frota é limitada todos os veículos disponíveis são predeterminados, bem como sua capacidade, e cabe ao problema encontrar melhores rotas que atendam a todos os clientes com os recursos disponíveis (TAILLARD, 1999). Já para os problemas que tratam de frotas ilimitadas, além de determinar a melhor rota, é necessário compor a frota de veículos, de modo que as restrições sejam satisfeitas (GOLDEN *et al.*, 1984).

Abordagens exatas e heurísticas já foram tratadas na literatura para solução do PRVFH. Choi e Tcha (2007) obtiveram bons resultados utilizando um algoritmo de geração de colunas, considerando o PRVFH com custos fixos e variáveis, e frota ilimitada e usando a abordagem de geração de colunas com janela de tempo. Um algoritmo baseado na formulação de particionamentos foi introduzido por Baldacci e Mingozzi (2009), onde o algoritmo utiliza três tipos de procedimentos de delimitação baseados em relaxação linear e Lagrangeana da formulação matemática, permitindo reduzir o número de restrições da formulação para que o problema resultante pudesse ser solucionado por programação linear inteira.

As abordagens heurísticas apresentadas na literatura para solucionar o PRVFH, com obtenção de soluções ótimas, foram implementadas por Li *et al.* (2007) ao utilizar uma variante determinística da heurística SA, e posteriormente Li, Tian e Aneja (2010), desenvolveram a heurística de programação de memória adaptativa multistart, onde são construídas múltiplas soluções provisórias que são melhoradas a cada iteração. Vale destacar ainda o desenvolvimento da heurística híbrida populacional desenvolvida por Liu (2013), que apresenta mecanismos para diversificação da população. Penna *et al.* (2013) afirmam que foram os primeiros a tratar o PRVFH utilizando a meta-heurística ILS, utilizando como método de busca local o Random Variable Neighborhood Descent (RVND). Diferentes operadores intra e inter rotas foram utilizados como estruturas de vizinhança. O trabalho foi capaz de encontrar soluções melhores que as da literatura para várias instâncias.

## 2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E MODELAGEM MATEMÁTICA



A formulação adotada foi proposta por Baldacci *et al.* (2008) e descreve o PRVFH como um grafo completo  $G = (N, A)$ , onde  $N = \{0, \dots, n\}$  é o conjunto de nós, sendo o nó 0 corresponde ao depósito. O conjunto  $\dot{N} = N \setminus \{0\}$  representa o conjunto de clientes. O conjunto de veículos  $V = \{1, \dots, v\}$ , onde existem  $v$  tipos diferentes de veículos disponíveis. Os parâmetros  $m^v$ ,  $t^v$  e  $Q^v$  representam a quantidade disponível, o custo fixo e a capacidade de cada veículo do tipo  $v \in V$ , respectivamente. O conjunto  $A = \{(i, j): 0 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$  denota o conjunto de arcos e seus respectivos custos são dados  $c_{ij}^v$ . O modelo tem dois conjuntos de variáveis  $x_{ij}^v$  e  $f_{ij}^v$ . A primeira,  $x_{ij}^v$  é igual a 1 se o arco  $(i, j)$  é utilizado pelo veículo  $v$ , 0 caso contrário. Já a variável  $f_{ij}^v$  representa a quantidade de fluxo de produto transportada pelo arco  $(i, j)$  e é não-negativa.

$$\min \sum_{v \in V} \left\{ \sum_{j \in N} t^v x_{0j}^v + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^v x_{ij}^v \right\} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^v \leq m^v \quad \forall v \in V \quad (2)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{j \in N} x_{ij}^v = 1 \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{i \in N} x_{ij}^v = 1 \quad \forall j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{i \in N} f_{ji}^v - \sum_{v \in V} \sum_{j \in N} f_{ij}^v = q_i \quad \forall i \in \dot{N} \quad (5)$$

$$q_j x_{ij}^v \leq f_{ij}^v \leq (Q^v - q_i) x_{ij}^v \quad \forall (i, j) \in A, \forall v \in V \quad (6)$$

$$f_{ij}^v \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall v \in V \quad (7)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall v \in V \quad (8)$$

A função objetivo (1) busca minimizar os custos relacionados ao uso de cada tipo de veículo e os custos de transporte. A restrição (2) limita em  $m^v$  unidades o número de partidas do depósito utilizando o veículo do tipo  $v$ . Juntas, as restrições (3) e (4) impõem que todo cliente deve ser visitado, garantindo a chegada e a partida de uma aresta utilizando o mesmo veículo  $v$ . O fluxo de produto no grafo é garantido pelas restrições (5), também chamadas de balanço de fluxo. O limite do fluxo através de cada aresta é limitado pela restrição (6). Por fim,



(7) e (8) definem o domínio das variáveis do modelo. Para este trabalho, os custos  $t^v$  são nulos e a disponibilidade de veículos  $m^v$  é igual a 1.

## 2.2 META HEURÍSTICA ILS APLICADA AO PRVFH

A meta-heurística ILS, apresentada em Lourenço *et al.* (2003), é baseada na ideia de que um procedimento de busca local pode ser melhorado gerando-se novas soluções de partida, as quais são obtidas por meio de perturbações na solução ótima local. Ele usa uma solução inicial, gerada randomicamente ou através de um método guloso, para iniciar sua busca por soluções em diferentes espaços. Assim, um método de busca local é aplicado a esta solução inicial, gerando uma solução ótima local corrente. Após isso, uma perturbação é aplicada para que a solução se afaste da depressão de atração deste ótimo local e permita assim a realização de uma nova busca em um novo espaço. Uma nova busca é realizada nesta solução intermediária. Ao fim da iteração, um critério de aceitação é aplicado para a avaliação e possível aceitação da mesma, decidindo qual será a próxima solução que sofrerá perturbação.

Através do procedimento apresentado na Figura 1 é notável que a meta-heurística está fundamentada em quatro procedimentos: geração da solução inicial, busca local, perturbação e critério de aceitação. A solução inicial é a primeira possibilidade de rota elaborada independente de quão boa seja. A função de busca local é tratada genericamente, ou seja, fica a critério do pesquisador definir que método será utilizado. Trata-se de métodos e movimentos a serem aplicados na solução inicial em busca de soluções ótimas. Posteriormente uma perturbação é aplicada à solução ótima com o objetivo de proporcionar maior espaço para busca de soluções ótimas, devendo aplicar movimentos diferentes dos utilizados na busca local. O critério de aceitação é aplicado para avaliar se uma solução será ou não aceita.

FIGURA 1 – META-HEURÍSTICA ILS



```
1 procedimento  $ILS(G(N,A))$ 
2    $S_0 \leftarrow SolucaoInicial()$ 
3    $S^* \leftarrow BuscaLocal(S_0)$ 
4   repita
5      $S' \leftarrow PerturbaSolucao(S^*)$ 
6      $S^{*'} \leftarrow BuscaLocal(S')$ 
7      $S^* \leftarrow CriterioAceitacaoSolucao(S^*, S^{*'})$ 
8   até que condição de parada seja encontrada
9   retorne a solução  $S$ 
10 fim  $ILS$ 
```

Fonte: Autores (2020)

### 2.2.1 Função de avaliação

As soluções obtidas pelo método são avaliadas pela função de avaliação (9). O conjunto  $R$  representa as rotas que atualmente participam da solução. Cada rota  $r \in R$  tem um custo  $c_r$  associado, e ele é contabilizado pela soma dos custos de transporte relativos às arestas que compõem esta rota, no caso,  $c_{ij}$ . Como exemplo, para uma dada rota  $r$ , no qual o veículo visita os clientes (nós) 1, 3, 7, 2. O custo seria igual a  $c_r = c_{01} + c_{13} + c_{37} + c_{72} + c_{20}$ .

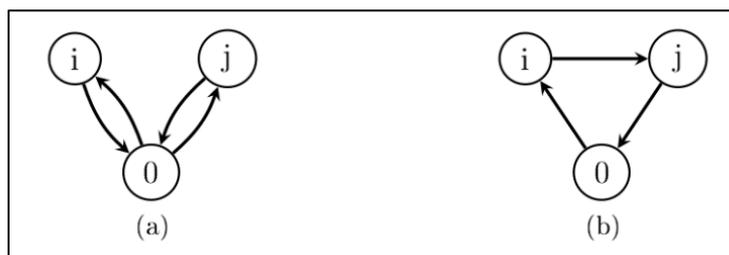
$$\min \sum_{r \in R} c_r \quad (9)$$

### 2.2.2 Solução inicial

Para obter a solução inicial, foi utilizada neste trabalho a heurística de economias, proposta por Clarke e Wright (1964). Este método foi criado com o intuito de fornecer soluções para o PRV e, é baseado no conceito de agrupar rotas e gerar determinada economia. Assim, o algoritmo respeita todas as restrições do PRV.

Inicialmente, constrói-se uma tabela simétrica, onde o custo de ir de um nó  $i$  para outro nó  $j$  é o mesmo de ir de  $j$  para  $i$ . O conceito básico da economia (*saving*) expressa o custo obtido por se juntar duas rotas em uma única, conforme mostrado na Figura 2, onde o nó 0 representa o depósito.

FIGURA 2 - ILUSTRAÇÃO DO CONCEITO DE ECONOMIA



Fonte: LYSGAARD (1997)

Conforme mostrado na Figura 2 (a), clientes  $i$  e  $j$  são visitados em rotas distintas. Uma alternativa seria visitar os dois clientes na mesma rota, por exemplo, na ordem  $i - j$ , como ilustrado na Figura 2 (b). Isto porque os custos de transporte são dados pela economia feita em se realizar a rota conforme Figura 2 (b) ao invés de duas rotas distintas como na Figura 2 (a).

Para explicitar o quanto a junção de duas rotas oferece, usa-se a notação do custo de traslado entre  $i$  e  $j$  como  $c_{ij}$  e o custo total de transporte como  $T_a$ , para a Figura 2 (a) tem-se:

$$T_a = c_{0i} + c_{i0} + c_{0j} + c_{j0}$$

Equivalentemente, para a Figura 2 (b), tem-se:

$$T_b = c_{0i} + c_{ij} + c_{j0}$$

Combinadas então as duas rotas, pode-se calcular a economia gerada pela junção,  $S_{ij}$ :

$$S_{ij} = T_a - T_b = c_{0i} + c_{i0} + c_{0j} + c_{j0} - (c_{0i} + c_{ij} + c_{j0}) = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$$

Observa-se que grandes valores de  $S_{ij}$  são atrativos, indicando que é interessante visitar os clientes  $i$  e  $j$  na mesma rota, sendo  $j$  visitado imediatamente após  $i$ . Existem duas versões do algoritmo, a sequencial e a paralela. Na sequencial, constrói-se exatamente uma rota por vez, enquanto que na paralela, mais de uma rota pode ser construída por vez.

O primeiro passo é calcular todas as economias, par a par, e ordená-las decrescentemente. Junto com esse passo, pode-se gerar somente pares  $i - j$  que respeitem o limite de capacidade da rota. Em sequência, do topo desta lista ordenada de pares de clientes  $i - j$ , um par é considerado por vez. Escolhido o par, verifica-se se ele pode ser adicionado ou não a alguma rota já existente sem exceder a capacidade.

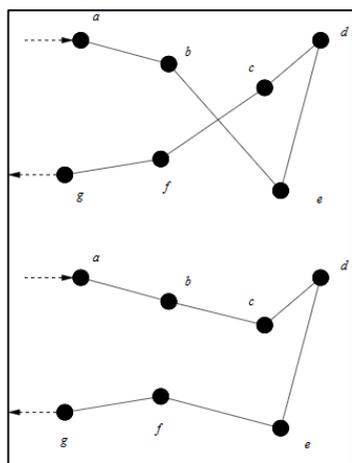
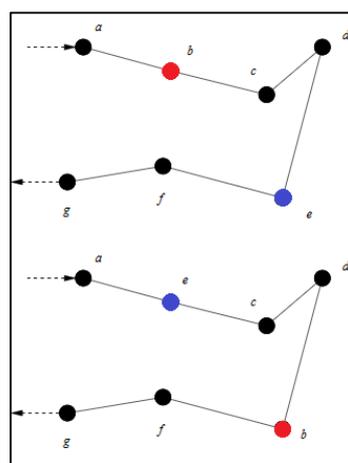
Este procedimento é repetido até que nenhum cliente possa mais ser adicionado à rota ou não existam mais economias na lista. Após isso, exclui-se todas as economias dos nós que participam desta rota, retorna-se ao topo da lista tomando um novo par  $i - j$  e a elaboração de uma nova rota é iniciada.



### 2.2.3 Busca local

Métodos de busca local são responsáveis pela geração de soluções melhores para o PRV. A busca local consiste na geração de novas soluções a partir de uma solução já existente, utilizando operações definidas como realocação de clientes em uma nova posição na rota ou removendo arestas existentes na solução e substituindo por novas arestas (GROËR *et al.*, 2010).

Neste trabalho, para a etapa de busca local, foram adotados os movimentos intra-rota *Two-opt* e *Two-point move*. O *Two-opt* remove duas arestas da solução e substitui por outras duas arestas ainda não utilizadas (Figura 3 (a), removendo as arestas cruzadas ( $b, e$ ) e ( $c, f$ ) e as substituindo por ( $b, c$ ) e ( $e, f$ )). Enquanto o *Two-point move* realiza a troca de posição de dois nós (Figura 3 (b), trocando na sequência de visitação os nós  $b$  e  $e$ ). Assim, ambos movimentos são classificados como intra-rota, pois a melhoria é buscada em apenas uma rota por vez, não havendo interação com as demais. Eles são executados até que não seja encontrada mais nenhuma melhoria.

FIGURA 3 (A) - MOVIMENTO *TWO-OPT*FIGURA 3 (B) - MOVIMENTO *TWO-POINT MOVE*

Fonte: Autores (2020)

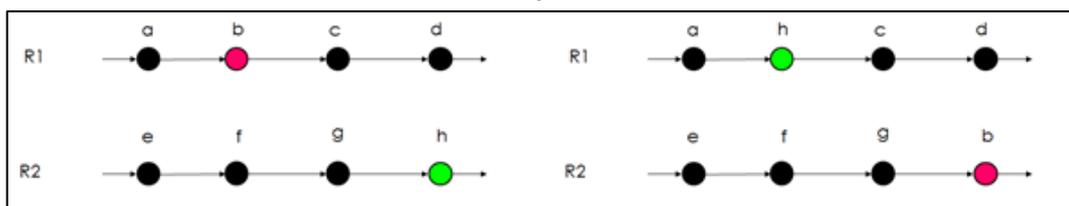
### 2.2.4 Perturbação

Para escapar dos ótimos locais, a meta-heurística ILS aplica perturbações na solução corrente. Assim, a perturbação deve ser efetiva, mas não “pequena” demais, ao ponto de não obter ganhos e deixar de explorar outros ótimos locais e nem tão “grande” ao ponto de desfazer os resultados da busca local. É importante também que ela realize movimentos diferentes dos realizados pela busca local (TALBI, 2009).



A perturbação da solução corrente, presente neste estudo, foi implementada segundo a estrutura de vizinhança *Troca* (Figura 4). A ideia é tentar trocar um cliente  $i$  pertencente a uma rota  $r_1$ , por um cliente  $j$ , pertencente a uma rota  $r_2$ . Isto sem violar a capacidade das rotas envolvidas na troca. Esta estratégia é utilizada para evitar que o algoritmo entre em ciclo e assim possa explorar outras regiões do espaço de soluções diferentes das buscas locais.

FIGURA 4 - PERTURBAÇÃO EFETUANDO TROCA



Fonte: Autores (2020)

### 2.2.5 Critério de aceitação

O critério de aceitação junto com o método de perturbação tem como função controlar o equilíbrio entre intensificação (seleção forte que aceita somente soluções de melhora) e diversificação (seleção fraca que aceita soluções sem dar atenção a qualidade) (TALBI, 2009). O critério, ao fim, decide qual solução será perturbada na próxima iteração, se será novamente a corrente ou a intermediária previamente gerada.

Para este trabalho, a função de aceitação, como sugerido por Lourenço *et al.* (2003), foi dividida nas partes de intensificação e diversificação. Para que uma solução seja aceita é estritamente necessário que o seu custo seja menor do que o custo da melhor solução encontrada até o momento. Caso não seja, um elemento randômico é utilizado, de forma a explorar novas depressões de atração em busca de uma solução melhor. Neste estudo, caso a nova solução encontrada fosse melhor do que a ótima corrente, ela era aceita como nova solução ótima corrente. Caso contrário, se ela fosse até 20% pior, ela poderia ser aceita como solução corrente para pesquisa na próxima iteração. Isto, sem descartar a solução ótima corrente. Este valor foi adotado, conforme calibragem, para escapar de ótimos locais e permitir a exploração de soluções mais distantes da atual.

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O algoritmo foi desenvolvido e executado usando a linguagem C/C++ em um computador com sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 LTS, processador Intel Core i5 e 4 GB de RAM.



Ao todo foram testadas 27 instâncias, com o número de clientes variando entre 32 e 80 e frota heterogênea de 5 a 10 veículos. As instâncias utilizadas foram adaptadas das instâncias propostas por Augerat *et al.* (1995) para uma frota homogênea, havendo apenas alteração aleatória na capacidade dos veículos. O número máximo de iterações para a meta-heurística ILS foi de 10000, sendo este valor calibrado durante o desenvolvimento do algoritmo. Para cada instância, 10 execuções do algoritmo foram realizadas, sendo os valores para a função de avaliação apresentados na Tabela 1 e, os tempos computacionais na Tabela 3. Os resultados foram comparados com o valor da solução inicial (FO) obtida usando a heurística de Clarke-Wright e com a solução ótima fornecida pela literatura para as instâncias-testes considerando a frota homogênea (HO). A distância  $\Delta\%$  foi calculada conforme a Equação (10), onde  $X$  representa o valor da solução inicial  $s_0$  ou da solução homogênea  $s^*$ .

$$\Delta\% = (X - \text{Mínimo})/X \cdot 100 \quad (10)$$

Cabe destacar que a intitulação das instâncias foram feitas seguindo o padrão A-n(número de clientes)-k(número de veículos). Assim quando se tem a instância A-n32-k5 trata-se de uma instância com 32 clientes e 5 veículos.

Analisando a Tabela 1, percebe-se que, para algumas instâncias, o método não conseguiu se afastar da solução inicial (coluna  $\Delta\%$  (FO)). Isto ocorreu para 5 das 27 instâncias. As demais instâncias obtiveram melhorias entre 0,06% e 23,02%. Quando comparados os resultados obtidos com o valor ótimo conhecido para o problema utilizando frota homogênea (coluna  $\Delta\%$  (HO)), a distância para os valores ótimos varia entre 17,47% e 74,60%. Para tornar a análise mais clara, estes resultados foram resumidos na Tabela 2. De forma geral, a melhoria média comparada à solução inicial foi de 5,43%, com mediana de 0,9%, o que sugere que o método tem baixa eficiência em atingir soluções melhores e mais distantes da inicial. Em relação às soluções com frotas homogêneas, a distância média ficou em 34% e mediana em 31,41%.

TABELA 1 - RESULTADOS PARA FUNÇÃO DE AVALIAÇÃO



Instância	s*	s0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média	Mínimo	Δ% (FO)	Δ% (HO)
A-n32-k5	784	1005	1005	1005	1001	1005	921	1005	1005	1005	1005	1005	997,00	921	8,36%	-17,47%
A-n33-k5	661	1028	932	847	900	816	865	934	872	909	921	899	904,27	816	20,62%	-23,45%
A-n33-k6	742	993	972	949	938	954	976	951	993	933	980	980	963,82	933	6,04%	-25,74%
A-n34-k5	778	931	927	918	931	931	931	931	927	929	913	931	926,45	913	1,93%	-17,35%
A-n36-k5	799	925	925	925	925	925	925	925	925	925	925	925	925,00	925	0,00%	-15,77%
A-n37-k5	669	840	840	840	840	840	840	840	840	840	840	829	840,00	840	0,00%	-25,56%
A-n37-k6	949	1215	1215	1215	1215	1215	1202	1215	1215	1215	1195	1215	1.211,27	1195	1,65%	-25,92%
A-n38-k5	730	1299	1064	1005	1051	1047	1026	1085	1044	1000	1006	1030	1.063,00	1000	23,02%	-36,99%
A-n39-k5	822	1287	1124	1111	1123	1135	1140	1128	1109	1119	1098	1137	1.138,73	1098	14,69%	-33,58%
A-n39-k6	831	1183	1183	1183	1183	1179	1183	1177	1183	1183	1183	1183	1.182,09	1177	0,51%	-41,64%
A-n44-k7	937	1259	1259	1259	1247	1240	1259	1259	1259	1259	1259	1252	1.256,18	1240	1,51%	-32,34%
A-n45-k6	944	1785	1471	1404	1498	1523	1458	1403	1495	1440	1445	1397	1.487,09	1403	21,40%	-48,62%
A-n45-k7	1146	1427	1427	1427	1427	1427	1427	1427	1424	1427	1427	1426	1.426,73	1424	0,21%	-24,26%
A-n46-k7	914	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1.212,00	1212	0,00%	-32,60%
A-n48-k7	1073	1554	1554	1554	1554	1554	1554	1540	1554	1554	1554	1554	1.552,73	1540	0,90%	-43,52%
A-n53-k7	1010	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1340	1.340,00	1340	0,00%	-32,67%
A-n54-k7	1167	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1522	1.522,00	1522	0,00%	-30,42%
A-n55-k9	1073	1428	1385	1428	1428	1428	1428	1428	1428	1428	1428	1428	1.424,09	1385	3,01%	-29,08%
A-n60-k9	1408	1817	1817	1817	1817	1817	1817	1817	1802	1817	1797	1797	1.815,64	1802	0,83%	-27,98%
A-n61-k9	1035	1663	1663	1663	1663	1622	1660	1663	1663	1663	1663	1663	1.659,00	1622	2,47%	-56,71%
A-n62-k8	1290	1812	1812	1812	1812	1812	1811	1812	1812	1812	1812	1812	1.811,91	1811	0,06%	-40,39%
A-n63-k9	1634	2097	2097	2097	2082	2097	2097	2097	2097	2097	2097	2097	2.095,64	2082	0,72%	-27,42%
A-n63-k10	1315	1715	1715	1715	1715	1715	1715	1715	1715	1715	1715	1713	1.715,00	1715	0,00%	-30,42%
A-n64-k9	1402	2546	2154	2162	2109	2152	2093	2105	2115	2072	2082	2131	2.153,36	2072	18,62%	-47,79%
A-n65-k9	1177	2562	2140	2104	2133	2124	2158	2125	2160	2055	2160	2102	2.166,09	2055	19,79%	-74,60%
A-n69-k9	1168	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1686	1.686,00	1686	0,00%	-44,35%
A-n80-k10	1764	2324	2324	2324	2324	2324	2324	2324	2324	2324	2318	2318	2.323,45	2318	0,26%	-31,41%

Fonte: Autores (2020)

TABELA 2 - RESUMO DOS RESULTADOS PARA FUNÇÃO DE AVALIAÇÃO

	Δ% (FO)	Δ% (HO)
<b>Média</b>	5,43%	-34,00%
<b>Mediana</b>	0,90%	-31,41%

Fonte: Autores (2020)

Os tempos computacionais dos algoritmos para as 10000 iterações foram todos abaixo dos 7 segundos, o que sugere grande velocidade de execução para o algoritmo utilizando a linguagem C/C++.

A Tabela 3 evidencia que o modelo proposto é bastante eficiente em relação ao tempo de execução, não exigindo assim grande esforço computacional. Todavia, para instâncias com mais de 55 clientes a média de execução superou 3 segundos chegando com média máxima de 6,028 segundos para instância com 80 clientes e 10 veículos.



TABELA 3 – TEMPOS COMPUTACIONAIS DOS ALGORITMOS

Instância	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média	Mínimo
A-n32-k5	1,218	1,179	1,134	1,152	1,122	1,141	1,152	1,136	1,144	1,123	1,150	1,122
A-n33-k5	1,238	1,285	1,202	1,434	1,366	1,314	1,423	1,265	1,413	1,258	1,320	1,202
A-n33-k6	1,425	1,463	1,386	1,491	1,499	1,459	1,640	1,420	1,690	1,401	1,488	1,386
A-n34-k5	1,293	1,363	1,367	1,538	1,507	1,294	1,354	1,300	1,477	1,387	1,388	1,293
A-n36-k5	1,358	1,408	1,344	1,423	1,453	1,355	1,482	1,382	1,380	1,432	1,402	1,344
A-n37-k5	1,418	1,426	1,435	1,642	1,593	1,412	1,411	1,403	1,408	1,420	1,457	1,403
A-n37-k6	1,652	1,801	1,665	1,740	1,814	1,677	1,608	1,593	1,737	1,593	1,688	1,593
A-n38-k5	1,501	1,648	1,737	1,497	1,564	1,449	1,475	1,484	1,445	1,453	1,525	1,445
A-n39-k5	1,541	1,576	1,658	1,478	1,602	1,452	1,477	1,449	1,460	1,451	1,514	1,449
A-n39-k6	1,755	1,911	1,911	1,724	1,813	1,753	1,683	1,678	1,696	1,680	1,760	1,678
A-n44-k7	2,150	2,156	2,028	1,978	2,097	1,965	1,964	1,934	1,956	2,128	2,035	1,934
A-n45-k6	2,252	2,150	2,004	2,026	2,130	1,995	2,045	2,162	2,005	2,035	2,080	1,995
A-n45-k7	2,449	2,334	2,216	2,301	2,407	2,243	2,255	2,241	2,232	2,277	2,296	2,216
A-n46-k7	2,561	2,475	2,340	2,441	2,376	2,355	2,361	2,375	2,324	2,346	2,395	2,324
A-n48-k7	2,539	2,772	2,402	2,408	2,437	2,399	2,562	2,430	2,594	2,444	2,499	2,399
A-n53-k7	3,124	2,865	2,663	2,825	2,717	2,670	2,681	2,705	2,651	2,689	2,759	2,651
A-n54-k7	3,036	3,057	2,720	2,734	2,786	2,705	2,777	2,719	2,743	2,752	2,803	2,705
A-n55-k9	3,884	3,650	3,669	3,452	3,423	3,417	3,419	3,427	3,399	3,392	3,513	3,392
A-n60-k9	3,834	3,747	3,378	3,351	3,412	3,374	3,439	3,350	3,344	3,353	3,458	3,344
A-n61-k9	3,993	4,433	3,907	3,859	4,082	3,892	3,849	3,890	3,915	3,973	3,979	3,849
A-n62-k8	3,760	3,895	3,957	3,588	3,770	3,612	3,648	3,600	3,572	4,865	3,827	3,572
A-n63-k9	4,306	4,622	4,495	4,236	4,250	4,284	4,199	4,182	4,158	8,955	4,769	4,158
A-n63-k10	4,673	5,027	4,699	4,717	4,528	4,602	4,530	4,542	4,562	6,201	4,808	4,528
A-n64-k9	4,112	4,372	4,129	4,057	4,003	3,976	4,034	4,114	4,000	4,300	4,110	3,976
A-n65-k9	4,303	4,990	4,274	4,287	4,303	4,205	4,251	4,333	4,369	4,227	4,354	4,205
A-n69-k9	4,746	4,958	4,600	4,578	4,606	4,565	4,531	4,798	4,636	4,571	4,659	4,531
A-n80-k10	6,131	6,498	5,884	6,017	5,963	6,020	5,939	5,919	6,056	5,856	6,028	5,856

Fonte: Autores (2020)

#### 4 CONCLUSÃO

O PRV ainda oferece enormes desafios teóricos e computacionais para pesquisadores, dado a sua ampla aplicabilidade a problemas reais e diversos. Dessa forma, diferentes abordagens podem oferecer grandes contribuições para resolução do problema.

Este estudo abordou o uso da meta-heurística ILS para resolver a variante do PRV, usando uma frota limitada e heterogênea (PRVFH). A solução inicial foi obtida pela heurística de Clarke-Wright e a cada iteração era refinada com uma busca local usando os movimentos *Two-opt* e *Two-point move*. Para escapar dos ótimos locais, uma perturbação baseada na vizinhança do tipo *Troca* foi realizada, sorteando duas rotas e remanejando clientes entre elas. Comparadas a solução inicial, melhorias de até 23% foram atingidas.

Como propostas para estudos futuros fica a implementação das demais heurísticas de refinamento apresentadas por Gröer (2010), além de diferentes e mais sofisticados métodos de perturbação, como exemplo, os adotados por Penna *et al.* (2013).



## REFERÊNCIAS

- AUGERAT, P. *et al.* **Computational Results with a Branch and Cut Code for the Capacitated Vehicle Routing Problem**, Research Report 949-M, Universite Joseph Fourier, Grenoble, France.
- BALDACCI, R. *et al.* **Routing a heterogeneous fleet of vehicles**. In *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3-27). Springer, Boston, MA, 2008.
- BALDACCI, R., & MINGOZZI, A. **A unified exact method for solving different class of vehicle routing problems**. *Mathematical Programming*, 120 (2), 347–380, 2009.
- CHOI, E., & TCHA, D. W. **A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem**. *Computers & Operations Research*, 34 (7), 2080–2095, 2007.
- CLARKE, G., & WRIGHT, J. W. **Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points**. *Operations Research*, 12(4), 568-581, 1964.
- COELHO, V. N. *et al.* **An ILS-based algorithm to solve a large-scale real heterogeneous fleet VRP with multi-trips and docking constraints**. *European Journal of Operational Research*, 250, 367-376, 2016.
- DANTZIG, G. B., & RAMSER, J. H. **The truck dispatching problem**. *Management Science*, 6(1), 80-91, 1959.
- GOLDEN, B. L. *et al.* **The fleet size and mix vehicle routing problem**. *Computers & Operations Research*, 11, 49–66, 1984.
- GROËR, C. *et al.* **A library of local search heuristics for the vehicle routing problem**. *Mathematical Programming Computation*, 2(2), 79-101, 2010.
- KOÇ, Ç. *et al.* **Thirty 14earch of heterogeneous vehicle routing**. *European Journal of Operational Research*, 249, 1-21, 2016.
- KYTÖJOKI, J. *et al.* **Na 14earch14te variable neighborhood 14earch heuristic for very large scale vehicle routing problems**. *Computers & operations research*, 34(9), 2743-2757, 2007.
- LENSTRA, J. K., & KAN, A. R. **Complexity of vehicle routing and scheduling problems**. *Networks*, 11(2), 221-227, 1981.
- LI, F. *et al.* **A record-to-record travel algorithm for solving the heterogeneous fleet vehicle routing problem**. *Computers & Operations Research*, 34, 2734–2742, 2007.
- LI, X., *et al.* **Na adaptive memory programming metaheuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem**. *Transportation Research PartE: Logistics and Transportation Review*, 46, 1111–1127, 2010.
- LIU, S. **A hybrid population heuristic for the heterogeneous vehicle routing problems**. *Transportation Research PartE: Logistics and Transportation Review*, 54, 67–78, 2013.
- LOURENÇO, H. R. *et al.* **Iterated local 14earch**. In *Handbook of metaheuristics* (pp. 320-353). Springer, Boston, MA, 2003.
- LYSGAARD, J. **Clarke & Wright's savings algorithm**. *Department of Management Science and Logistics, The Aarhus School of Business*, 44, 1997.
- PENNA, P. H. V. *et al.* **Na iterated local search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem**. *Journal of Heuristics*, v. 19, n. 2, p. 201–232. ISSN 1381-1231, 2013.



www.relainep.ufpr.br



TAILLARD, E. D. **A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet vehicler routing problem.** RAIRO (Recherche Opérationnelle / Operations Research),33,1–14, 1999.

TALBI, E. G. **Metaheuristics: from design to implementation** (Vol. 74). John Wiley & Sons, 2009.