HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

GeoGebran hyödyntäminen 9. luokan matematiikan valtakunnallisessa kokeessa

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro-Gradu tutkielma
Matematiikka
Marraskuu 2022

Liia Flinkman

Ohjaaja: Anne-Maria Ernvall-Hytönen

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet - Faculty	Laitos/Institution– Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä - Författare - Author

Liia Flinkman

Työn nimi - Arbetets titel

GeoGebran hyödyntäminen 9. luokan matematiikan valtakunnallisessa kokeessa

Oppiaine - Läroämne - Subject

Matematiikka

Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor	Aika - Datum - Year	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages
Pro-gradu tutkielma / Anne-Maria Ernvall-Hytönen	2022	43 s + Liitteet.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tavoitteet. Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, kuinka paljon yhdeksännen luokan matematiikan valtakunnallisia kokeita tulisi muuttaa, mikäli GeoGebra hyväksyttäisiin työvälineeksi kokeeseen. Kouluissa jatkuvasti käytetään yhä enemmän tietokoneita ja ohjelmistoja. Ylioppilaskokeet ovat sähköistyneet. On siis tärkeää kartoittaa, kuinka paljon valtakunnallisia kokeita pitäisi muuttaa, mikäli koe sähköistyisi tulevaisuudessa. Aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että GeoGebra parantaa oppimistuloksia, asenteita ja motivaatiota matematiikan opiskelussa. Kuitenkin on havaittu, että tarpeeksi haastavien tehtävien suunnittelu GeoGebralle on haastavaa sekä joidenkin komentojen syöttämistapa on vaikea oppilaille. Tässä tutkimuksessa lisäksi pohditaan, miltä osin osaaminen kehittyy ja toisaalta heikkenee, kun käytetään GeoGebraa tehtävien ratkaisemisessa.

Menetelmät. Tutkimuksessa tutkittiin kvalitatiivisesti ja kvantitatiivisesti vuosien 2012–2021 matematiikan valtakunnallisten kokeiden laskimellisia tehtäviä. Laadullisesti esitettiin joidenkin tehtävien ratkaisuja GeoGebra ohjelmistolla. Tutkimuksessa pohditaan, riittääkö oppilaan taidot realistisesti ratkaisemaan tehtäviä esitellyllä tavalla. Määrällisesti selvitettiin, kuinka suuri osa tehtävistä toimisi sellaisenaan GeoGebraa käyttäen.

Tulokset ja johtopäätökset. Yli puolet tehtävistä tulisi muuttaa, jos GeoGebra sallitaan välineeksi kokeeseen. GeoGebra heikentää mekaanisen laskutaidon kehittymistä, mutta kasvattaa muun muassa visualisointitaitoja. Laskimellisessa osassa kannattaa painottaa ratkaisun muita osia kuin mekaanisia laskuvaiheita kuten yhtälönratkaisua. Laskimettomassa osassa voidaan testata mekaaninen laskutaito.

Avainsanat – Nyckelord

Matematiikka, GeoGebra, valtakunnalliset kokeet

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

1 Johdanto

Matematiikan yhdeksännen luokan valtakunnallinen koe mittaa vuosittain oppilaiden osaamista kansallisella tasolla. Tällä hetkellä valtakunnalliset kokeet tehdään paperisina. Maailma kuitenkin sähköistyy koko ajan ja ohjelmistojen hyödyntäminen lisääntyy koko ajan kouluissa. Lisäksi matematiikan ylioppilaskirjoitukset sähköistyivät keväällä 2019 (Trötschkes, 2015). On siis mahdollista, että tulevaisuudessa yhdeksännen luokan matematiikan valtakunnalliset kokeet tehtäisiin sähköisinä ja GeoGebra ohjelmisto tulisi työvälineeksi kokeisiin. Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, kuinka paljon kokeita tulisi muuttaa, mikäli GeoGebra tulisi työvälineeksi kokeeseen. Lisäksi tutkimuksella voi arvioida, miten hyvin kokeet tällä hetkellä mittaavat ohjelmistojen hyödyntämistä, jota painotetaan opetussuunnitelmassa. Tutkimuksessa tarkastellaan vuosien 2012–2021 kokeiden laskimellisia tehtäviä kvalitatiivisesti sekä kvantitatiivisesti.

Tutkielma koostuu kuudesta luvusta. Toisessa luvussa tutustutaan, miten opetussuunnitelma suhtautuu sähköisiin työvälineisiin. Lisäksi kerrotaan vuosien 2012–2021 valtakunnallisista kokeista. Kappaleessa myös esitellään GeoGebra ohjelmiston hyötyjä ja haasteita opetuksessa ja oppimisessa. On tärkeää tietää, millaisia haasteita on hyvä huomioida, jos GeoGebran käyttö lisääntyisi niin opetuksessa kuin kokeissa. Kolmannessa luvussa esitellään tutkimuksen tavoitteita ja toteutustapa. Neljännessä luvussa esitellään tutkimustuloksia kvalitatiivisesti sekä kvantitatiivisesti. Luvussa esitellään, miten eri opetussuunnitelman sisältöalueiden tehtävät taipuvat GeoGebralla ja verrataan millaisia taitoja ja tietoja oppilas tarvitsee ratkaisussa ohjelmistolla ja kämmenlaskimella. Tutkimuksessa oletetaan, että oppilaat osaavat GeoGebran peruskäytön. Oletuksen pohjalta pohditaan, riittäisikö realistisesti oppilaiden tiedot ja taidot ohjelmistolla esitettyihin ratkaisuihin. Kvantitatiivisessa osassa esitellään, miten suuri osa tehtävistä voisi pysyä ennallaan, jos GeoGebra sallittaisiin työvälineeksi. Viidennessä luvussa pohditaan tutkimuksen luotettavuuteen liittyviä tekijöitä. Viimeisessä luvussa pohditaan, kuinka paljon kokeen tulisi muuttua aiempien lukujen pohjalta. Lisäksi pohditaan, miten osaaminen muuttuu ohjelmistoja käyttäessä.

2 Teoreettinen tausta

2.1 Opetussuunnitelma

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (OPS) on kuusi matematiikan sisältöaluetta, jotka ovat ajattelun taidot ja menetelmät, luvut ja laskutoimitukset, algebra, funktiot, geometria sekä tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys. Ajatteluntaitoihin ja -menetelmiin kuuluu muun muassa päässälaskut, vaihtoehtojen lukumäärä, todistaminen, vastausten päättely ja perusteleminen sekä ohjelmointi. Luvut ja laskutoimitukset -sisältöalueeseen kuuluu muun muassa peruslaskutoimitukset, murtoluvuilla laskeminen, prosenttilaskenta, potenssilaskuja ja neliöjuuren käsite. Algebraan kuuluu esimerkiksi muuttujilla laskeminen, lausekkeiden muodostaminen, ensimmäisen asteen ja vaillinaisen toiseen asteen yhtälön ratkaiseminen ja yhtälöparien ratkaiseminen. Funktioihin kuuluu suoraan ja kääntäen verrannollisuus, suorien ja paraabelien piirtäminen koordinaatistoon sekä nollakohtien määrittäminen. Geometriaan kuuluu muun muassa kuvioiden pinta-alojen ja piirien laskeminen, yksikkömuunnokset, kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien selvittäminen, suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia ja geometrista konstruoimista. Sisältöalueeseen tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys kuuluu esimerkiksi todennäköisyyksien laskeminen, tietojen analysointi, diagrammien tuottaminen ja tulkinta sekä keskiarvon ja tyyppiarvon laskeminen. (OPS 2014.)

2.1.1 Sähköiset työvälineet

Opetussuunnitelma kannustaa tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämiseen oppimisessa. Opetussuunnitelman mukaan oppilaan tavoitteena on kehittää oppimaan oppimisen taitoja. Yhtenä tällaisena taitona mainitaan teknologisten apuvälineiden hyödyntäminen. Yläasteella matematiikan työskentelytaitojen yhtenä tavoitteena on ohjata oppilasta hyödyntämään tieto- ja viestintäteknologiaa opiskelussa ja ongelmien ratkaisussa. (OPS, 2014.) Perusopetuksen päättöarvosanan kriteereissä (2020) arvosanan 9 eräänä kriteerinä on osata soveltaa tieto- ja viestintäteknologiaa tutkivassa työskentelyssä. Arvosanassa 8 puolestaan kriteerinä on osata käyttää tieto- ja viestintäteknologiaa matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen. Arvosanan 7 kriteerit oppilas saavuttaa, mikäli hän osaa käyttää omien tuotosten laatimiseen ja matematiikan opiskeluun soveltuvaa ohjelmistoa. Arvosanaan 5 riittää, kun oppilas tutustuu matematiikan oppimista tukevaan ohjelmistoon ja käyttää sitä ohjatusti.

2.2 Valtakunnalliset kokeet

Matematiikan 9. luokan valtakunnalliset kokeet ovat MFKA-Kustannus Oy:n vuosittain tuottama koe, joka mittaa oppilaiden osaamista kansallisella tasolla. Kokeet testaavat opetussuunnitelmaan asetettuja tavoitteiden ja sisältöjen saavuttamista. Kokeet sisältävät tehtäväpaketit, ohjeet opettajalle, ratkaisut ja pisteytyssuosituksen opettajalle, kaavakokoelman sekä arvosanataulukon. (MFKA, 2022.)

2.2.1 Valtakunnalliset 2012–2021

Kokeen tehtävät mittaavat opetussuunnitelman sisältöjä tasaisesti. Tehtävät ovat eri vaikeustasoisia. Vuosina 2020 ja 2021 kokeessa on myös ollut mukana ohjelmointitehtävä. Kokeet ovat usein jaettu kahteen eri osioon, joista ensimmäisessä ei saa käyttää laskinta, vaan oppilaan on tarkoitus laskea kaikki laskut päässä. Kyseisessä osiossa on usein tehtäviä, joihin riittää pelkkä vastaus sekä tehtäviä, joihin täytyy laittaa välivaiheita. Toisessa osiossa saa käyttää laskinta. Poikkeuksena oli 2018, jolloin laskinta sai käyttää kaikissa tehtävissä.

Kokeissa on aina ollut pakollisia tehtäviä ja jonkin verran tehtäviä, joista oppilaat saavat valita, mihin esittävät ratkaisun. Valinnanvaraisuuden määrä on jonkin verran vaihdellut eri vuosina. Vuosina 2012–2017 ja 2019 kokeessa oli kolme valinnaista tehtävää, joista oppilas teki vain yhden. Vuonna 2018 kokeessa oli myös kolme valinnaista tehtävää, mutta tällöin oppilas vastasi niistä kahteen. Oppilas sai valita kahdesta tehtävästä yhden tehtävän vuonna 2021. Vuoden 2020 kokeessa oli kaksi tehtäväparia, joista kummastakin valittiin yksi tehtävä.

2.3 GeoGebran hyödyt

Matematiikkaa voidaan opettaa hyvin monella eri tavalla. Opetussuunnitelma kannustaa hyödyntämään tieto- ja viestintäteknologiaa oppimisessa (OPS, 2014). Tietokoneiden käytöllä matematiikan opetuksessa on havaittu olevan positiivinen vaikutus oppimiseen, motivaatioon ja asenteisiin. Etenkin on havaittu, että geometrian osa-alueella teknologian hyödyntäminen parantaa oppimistuloksissa. (Higgins, Huscroft-D'Angelo & Crawford, 2019.) Geometrian opetuksessa voidaan hyödyntää dynaamista geometrian ohjelmistoa, kuten GeoGebraa, sillä se lisää oppilaiden päättelykykyä, visualisointitaitoja sekä edistää matemaattisten perusprosessien oppimista (Bhagar & Chang, 2015). Oppimisen ei tarvitse tapahtua yksin, sillä GeoGebra ohjelmisto luo mahdollisuuden yhteistoiminnalliselle oppimiselle (Wei & Ismail, 2010). GeoGebra on ilmainen ohjelmisto ja näin ollen sopii kaikille. Lisäksi se sopii erityisesti myös katvealueille, koska siihen ei tarvita internetyhteyttä. (Bhagat & Chang, 2015.)

2.3.1 GeoGebran vaikutus oppimistuloksiin

Chan & Leung (2014) toteavat meta-analyysissään dynaamisten geometristen ohjelmistojen käytön parantavan merkitsevästi oppimistuloksia geometriassa etenkin peruskoulutasolla. Useissa eri tutkimuksissa geometrian eri osa-alueilla, kuten monikulmioissa ja ympyröissä, on havaittu GeoGebran käytön parantavan oppimistuloksia. Kolmioiden geometrian oppimisessa GeoGebraa käyttäneet yläkoululaiset suoriutuivat paremmin kuin pelkän oppikirjan avulla oppineet (Doğan & İçel, 2011). Viidennen luokan nelikulmioiden geometriassa GeoGebran käyttämisellä opetuksella havaittiin saatavan paremmat oppimistulokset kuin käyttämällä matematiikan havainnollistusvälineitä tai pelkästään kynää ja paperia (Disbudak & Akyuz, 2019). Nelikulmioiden pinta-alojen opetuksessa GeoGebrasta oli selvästi hyötyä (Özçakir & Çakiroğlu, 2019). Dynaamista geometrian ohjelmistoa Geometer's Sketchpadia käyttäneet kuudesluokkalaiset oppilaat saivat merkittävästi parempia oppimistuloksia monikulmioiden luokittelussa ja yhdenmuotoisuudessa kuin pelkästään oppikirjaa käyttäneet (Erbas & Yenmez, 2011).

Monikulmioiden lisäksi esimerkiksi ympyröiden opettelussa GeoGebralla oppineet yläkouluryhmät suoriutuivat paremmin kuin perinteisellä tavalla opiskelleet ryhmät (Bhagar & Chang, 2015; Birgin & Topuz, 2021; Shadaan & Leong, 2013). Myös lukiotasolla GeoGebralla ympyröiden teorian opiskellut ryhmä suoriutui paremmin kuin kontrolliryhmä (Tay & Mensah-Wonkyi, 2018; Mthethwa, Bayaga, Bossé & Williams, 2020). Etenkin euklidisen geometrian oppimistulokset olivat huomattavasti parempia GeoGebraa käyttäneellä ryhmällä (Mthethwa ym. 2020). Korkeakoulutasollakin huomattiin GeoGebralla olevan myönteistä vaikutusta oppimistuloksiin (Sudihartinih & Purniati, 2019; Hussin, Yusoff, Mustaffa, & Mokmin, 2018).

Lisäksi on saatu parempia oppimistuloksia geometrisissa muunnoksissa; oppilaat suoriutuivat paremmin kuvioiden peilaamisessa ja kääntämisessä, kun käyttivät GeoGebraa (Mutlu & Söylemez, 2019). GeoGebra vaikutti myönteisesti erityisesti heikosti visuaalisesti ja spatiaalisesti taitavien oppilaiden oppimistuloksiin koordinaatiston geometriassa (Saha, Ayub & Tarmizi, 2010).

2.3.2 Muut hyödyt

GeoGebralla on havaittu paljon muitakin hyötyjä oppimistuloksien parantumisen lisäksi. On huomattu, että GeoGebran käyttö opetuksessa paransi oppilaiden päättely- ja visualisointitaitoja verrattuna perinteisellä kirjasta opetteluun (Bhagar & Chang, 2015). GeoGebraa hyödyntäneet lukio-opiskelijat onnistuivat ratkaisemaan paremmin ongelmia sekä perustelemaan ratkaisujaan kuin perinteisellä luentotavalla oppineet opiskelijat (Mthethwa ym., 2020). Oppilaat osasivat vastata paremmin avoimiin kysymyksiin kuin kontrolliryhmä (Turk & Akyuz, 2016). Lisäksi oppilaat muistivat pidemmän ajan jälkeen opittavat asiat paremmin kuin kirjan avulla oppineet (Birgin & Topuz, 2021; Doğan & İçel, 2011). GeoGebran käyttö auttoi heitä saamaan laskut oikein ja näin vähentävän pelkoa laskuvirheistä (Doğan & İçel, 2011; Poon, 2018).

GeoGebran käytännönläheisyys on ehdottomasti suuri hyöty. Opiskelu oli käytännönläheistä sekä helposti ymmärrettävää, minkä takia GeoGebralla opiskelu parantaa suoriutumista matematiikassa (Tay & Mensah-Wonkyi, 2018). Shadaan

& Leong (2013) toteavat, että GeoGebran hyödyllisyys piilee erityisesti sen käytännönläheisyydessä, jolloin oppijat ovat aktiivisia työskentelijöitä passiivisten kuuntelijoiden sijaan. Ohjelmisto mahdollistaa tutkivan oppimisen, jossa oppijat löytävät matemaattisia riippuvuuksia kokeilemalla (Özçakir & Çakiroğlu, 2019). Oppilaat olivat uteliaita ja halusivat kokeilla tehtäviin kuulumattomiakin toimintoja (Poon, 2018).

Useammassa tutkimuksessa on huomattu GeoGebran lisänneen oppilaiden kiinnostusta, asenteita ja motivaatiota matematiikan oppimista kohtaan (Turk & Akyuz, 2016; Doğan & İçel, 2011; Tay & Mensah-Wonkyi, 2018; Bhagar & Chang, 2015; Birgin & Topuz, 2021). GeoGebralla opiskelu oli oppilaiden mielestä kiinnostavaa (Tay & Mensah-Wonkyi, 2018). Tietokoneiden käyttö ja GeoGebra-ohjelmisto loivat innostavan oppimisympäristön ja oppilaat kokivat geometrian oppimisen mielekkäänä (Turk & Akyuz, 2016). GeoGebraa käyttäneet oppilaat toivoivat, että muissakin matemaattisissa aiheissa voitaisiin hyödyntää ohjelmistoa (Doğan & İçel, 2011). Myös yliopisto-opiskelijat kokivat, että GeoGebrasta on aidosti hyötyä ja sitä tulisi käyttää myös kouluissa (Sudihartinih & Purniati, 2019).

GeoGebralla opiskelu lisäsi oppilaiden ymmärrystä matematiikasta. Disbudak & Akyuz (2019) toteavat, että GeoGebran käyttäminen auttaa ymmärtämään nelikulmioiden luokittelua ja määritelmiä. Lisäksi oppilaiden ymmärrys riippuvuuksista ja eri muodoista lisääntyy ohjelmistoa käyttäen, sillä oppilaat voivat manipuloivat nelikulmioita GeoGebralla ja näin ollen pystyvät tutkimaan muutoksien vaikutusta esimerkiksi pinta-alaan. (Özçakir & Çakiroğlu, 2019.) Dynaamisen geometrian ohjelmisto rohkaisi oppilaita kertomaan ja perustelemaan ratkaisujaan. Mitä enemmän oppilaat käyttivät ohjelmistoa, sitä virheettömämpää matemaattista kieltä he käyttivät arkikielen sijaan. (Erbas & Yenmez, 2011.) Lisäksi oppilaat neuvoivat toisiaan tehtäviä tehdessä (Poon, 2018).

2.4 GeoGebran haasteet

Tässä kappaleessa esittelen kirjallisuudessa esiin tulleita haasteita. Osa GeoGebran haasteista liittyy GeoGebran käyttämiseen, appletteihin sekä ylipäätään sähköisten työvälineiden käyttämisen ongelmiin.

Haasteita liittyy myös GeoGebran käyttämiseen, sillä dynaamisen geometrian ohjelmisto on monimutkainen (Trouche, 2014). Osa GeoGebran komentojen syöttämistavoista eivät ole käyttäjäystävällisiä ja ovat haastavia etenkin niille oppilaille, joilla ei ole ohjelmointikokemusta (Wassie & Zergaw, 2019). Esimerkiksi GeoGebralla ei pysty automaattisesti esittämään epäjatkuvien funktioiden kuvaajia helposti (Wassie & Zergaw, 2019). Lisäksi osa oppilasta vetivät liukusäätimiä liian nopeasti, jolloin he eivät pystyneet näkemään pienintä yhteistä nimittäjää (Poon, 2018).

Opettaja voi luoda GeoGebran appletteja opetuksessaan, mutta niihin liittyy haasteita, jotka on hyvä huomioida opetuksen suunnittelussa. Applettien tulee olla interaktiivisia ja mahdollistaa oppilaiden luovuuden kehittyminen, jotta oppilaiden ymmärrys matematiikasta kasvaisi eniten (Ljajko & Ibro, 2013). Kuitenkin opettajaopiskelijat eivät kyenneet luomaan luovia ongelmia dynaamisella geometrian ohjelmalla (Öçal, Kar, Güler & Ipek, 2020). Opettajilla on siis haasteena luoda oikeanlaisia appletteja. Ljajko & Ibro (2013) kehottavat rakentamaan appletit siten, että oppilaat pystyvät itsenäisesti tutustumaan applettiin ilman opettajan avustusta.

GeoGebran eräänä haasteena on sähköisten työvälineiden luomat ongelmat, kuten sähkökatkot ja systeemiviat. Tällaisia tilanteita varten opettajan kannattaa luoda varasuunnitelma (Wassie & Zergaw, 2019). GeoGebra-sovellus ei vaadi internet-yhteyttä, mutta nettiyhteysongelmat estävät GeoGebran sisäänrakennetun käyttöoppaan käytön (Bhagat & Chang, 2015; Wassie & Zergaw, 2019). Nettiyhteysongelmat voivat luoda vielä suuremman ongelman. Osassa kouluissa voi olla käytössä Chrome Bookit, jolloin GeoGebrasta voi käyttää ainoastaan selainversiota. Tällöin GeoGebran käyttö vaatii toimivan nettiyhteyden ja näin ollen vika nettiyhteydessä estää ohjelmiston käytön kokonaan. Sähköisiä työvälineitä käytettäessä aina on riskinä, että ohjelmisto luo mahdollisuuden huijata opettajaa. Oppilaat voivat esimerkiksi pelata tietokoneella ja opettajan tullessa luokse vaihtaa GeoGebran näkyviin. (Trouche, 2014.)

3 Tutkimuksen toteutus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, miten matematiikan valtakunnallisten kokeiden tehtävät sujuvat GeoGebralla. Tutkimuksella voi arvioida, tuleeko kokeeseen paljonkin muutoksia, mikäli GeoGebra tulisi joskus välineeksi kokeisiin. Tietokoneohjelmistojen hyödyntäminen on yhä tärkeämpää ja valtakunnalliset kokeet pyrkivät mittaamaan opetussuunnitelmien sisältöjä. Tutkimuksella voidaan analysoida, miten kokeet tällä hetkellä mittaisivat ohjelmistojen hyödyntämistä.

Tutkimuksessa tutkitaan kvalitatiivisesti osaa tehtävistä. Tehtävät, jotka valikoituivat tähän tutkimukseen, ovat valittu kokeiden laskimellisesta osasta. Mikäli valtakunnalliset kokeet sähköistyisivät, niissä voisi yhä olla laskimeton osa, joten on mielekkäämpää tutkia juuri niitä tehtäviä, joissa voi hyödyntää laskinta. Tehtäviksi on valittu opetussuunnitelman eri sisältöalueiden sisältöjä mittaavia tehtäviä. Lisäksi tehtävien ratkaisujen yhteydessä pohditaan, onko teoriassa mahdollista, että yhdeksäsluokkalainen pystyisi ratkaisemaan ohjelmistolla omatoimisesti kyseisen tehtävän. Jos oppilaat saisivat käyttää GeoGebraa valtakunnallisessa kokeessa, he ovat todennäköisesti opiskelleet ohjelmiston käyttöä ainakin yläasteen matematiikan tunneilla ja ehkä jopa fysiikan ja kemian tunneilla. Tämän takia tutkimuksessa oletetaan, että oppilaille on opetettu GeoGebran peruskäyttö. Peruskäyttöä on esimerkiksi yhtälön ratkaiseminen, muuttujilla laskeminen ja kuvaajien piirtäminen. Geometrisista konstruoinneista voidaan olettaa oppilaan ainakin osaavan piirtää suoria, janoja ja kulmia.

Kvalitatiivisen tutkimuksen lisäksi tässä tutkimuksessa tutkitaan kvantitatiivisesti, miten suurta osaa tehtävistä tulisi muuttaa tulevaisuudessa, mikäli GeoGebra olisi välineenä ja miten suuri osa taas voisi säilyä ennallaan. GeoGebrasta hyötyviin tehtäviin laskettiin sellaiset tehtävät, jotka oppilaat ajallisesti ehtivät ratkaista ja ohjelmistosta saatu hyöty on vähintään puolet tehtävän pisteistä. Tutkimuksessa myös pohditaan, miten matematiikan osaaminen muuttuu GeoGebralla ratkaisemisessa. Millainen osaaminen vahvistuu ja millainen heikkenee?

4 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Tässä luvussa esitellään kvalitatiivisia ja kvantitatiivisia tuloksia. Alaluku 4.1keskittyy kvalitatiivisiin tuloksiin. Kyseisessä alaluvussa esitetään, miten opetussuunnitelman eri sisältöalueiden tehtäviä voidaan ratkaista GeoGebra ohjelmistolla. Alaluvussa pohditaan, millaisia taitoja ja tietoja oppilas tarvitsee ratkaisussaan. Puolestaan 4.2 alaluvussa esitellään, kuinka suuri osa tehtävistä voisi pysyä ennallaan, mikäli GeoGebra sallittaisiin apuvälineeksi matematiikan valtakunnalliseen kokeeseen. Lisäksi pohditaan, miten matematiikan osaaminen muuttuu ohjelmistolla ratkaistaessa.

4.1 Kvalitatiivinen analyysi

Tässä alaluvussa esitellään GeoGebralla ratkaistuja valtakunnallisten kokeiden tehtäviä sisältöalueittain. Ratkaisujen yhteydessä pohditaan, pystyykö yhdeksäsluokkalainen ratkaisemaan tehtävän sillä oletuksella, että oppilaat osaavat ohjelmiston perustoiminnot. Lisäksi kappaleessa pohditaan, millaisia taitoja ja tietoja oppilas tarvitsee ratkaisuissaan.

4.1.1 Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys

Valtakunnallisissa kokeissa on näkynyt tehtäviä, joissa oppilaan on tarkoitus laskea keskiarvo, mediaani tai tyyppiarvo annetusta aineistosta (2020, 2017, 2019). Alla kuva vuoden 2019 tehtävässä B1, jossa kysyttiin keskiarvoa ja mediaania (Kuva1).

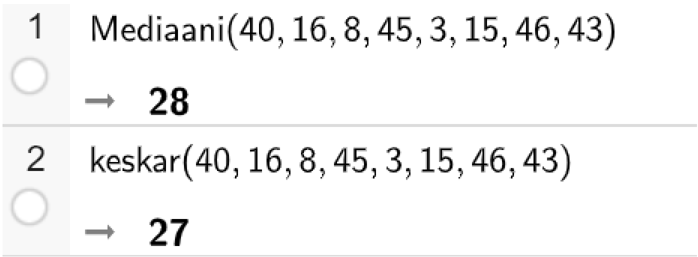
1. Aino ja Elias tulevat pikkubussilla huvipuistoon kuuden muun henkilön kanssa. Bussissa matkustavien iät ovat 40, 16, 8, 45, 3, 15, 46 ja 43 vuotta.
a) Laske bussissa matkustavien keski-ikä.

b) Määritä ikävuosien mediaani.

(2+2) **/ 4 p**

Kuva 1. Valtakunnallinen 2019 tehtävä B1 tehtävänanto

Tällöin oppilaan on täytynyt muistaa, mikä on keskiarvo ja mediaani ja miten ne voidaan selvittää. Vaikka heillä on ollut laskimet käytössä, heidän on pitänyt tietää oikea kaava keskiarvolle. GeoGebra mahdollistaa keskiarvon, mediaanin ja tyyppiarvon selvittämisen pelkästään luettelemalla numeroarvot. Vuoden 2019 tehtävän B1 voisi ratkaista GeoGebralla seuraavasti (Kuva 2).



Kuva 2. Valtakunnallinen 2019 tehtävä B1 ratkaisu GeoGebralla

GeoGebralla saatuun ratkaisuun riittää, kun oppilas osaa kirjoittaa keskiarvo tai mediaani, tällöin GeoGebra ehdottaa komentoja *keskar* ja *Mediaani*. GeoGebralla totta kai voi laskea myös vastaavasti kuin kämmenlaskimella, mutta GeoGebra antaa myös mahdollisuuden selvittää mediaanin, tyyppiarvon ja keskiarvon ilman, että tarvitsee ymmärtää, mitä kyseiset käsitteet tarkoittavat. Tehtävä on erittäin yksinkertainen sekä intuitiivinen ratkaista GeoGebraa hyödyntäen. Yhdeksäsluokkalaisen oppilas pystyy vaivatta ratkaisemaan tehtävän ohjelmistolla.

Vuonna 2012 valinnainen tehtävä 2 oli soveltava mediaaniin, tyyppiarvoon ja keskiarvoon liittyvä tehtävä, jossa GeoGebran hyödyntäminen ei juurikaan nopeuta tehtävän tekemistä (Kuva 3). Etenkin b-kohdassa oppilas ei voi pelkästään kokeilemalla löytää oikeaa vaihtoehtoa.

2. Millä arvosanoilla todistuksen keskiarvo on paras mahdollinen, kun todistuksessa on 11 arvosanaa, joiden

a) mediaani on 7? (3 p)

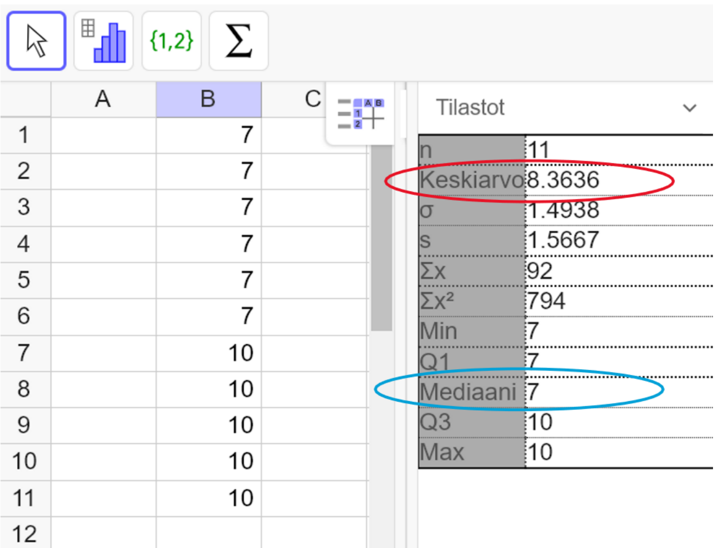
b) ainoa tyyppiarvo eli moodi on 7 ja todistuksessa on ainakin yksi 8? (3 p)

Perustele vastauksesi.

Kuva 3. Valtakunnallinen 2012 valinnainen tehtävä 2.

A-kohdassa oppilaan täytyy tietää, mitä mediaani tarkoittaa. Suuruusjärjestyksessä kuudennen arvosanan täytyy siis olla 7, tällöin 5 ensimmäistä arvosanaa saa olla enintään 7 ja viisi viimeistä arvosanaa vähintään 7. Jotta keskiarvo olisi suurin mahdollinen, niin viisi ensimmäistä arvosanaa täytyy olla mahdollisimman suuria, eli tässä tapauksessa 7. Myös jälkimmäiset viisi täytyy olla mahdollisimman suuria eli tässä tapauksessa 10. Tehtävässä oppilaan täytyy siis ymmärtää mediaanin ja keskiarvon käsite, jotta hän pystyy ratkaista tehtävän.

GeoGebralla voi luetella taulukkolaskentanäkymään 11 eri arvosanaa. Yhden muuttujan analyysillä oppilas saa näkyviin histogrammin ja halutessaan aineistoonsa liittyviä tilastoja. Tilastot näyttävät muun muassa mediaanin ja keskiarvon. Näin oppilas voi vaihtaa arvosanoja aineistossaan ja katsoa, millä arvosanoilla mediaani on 7 ja keskiarvo on mahdollisimman suuri (Kuva 4). Kuvassa 4 olen ympyröinyt punaisella keskiarvon ja mediaanin sinisellä selkeyttääkseni missä oppilas voi nähdä keskiarvon ja mediaanin tilastoissa. Kuitenkin on hyvä huomata, että tällainen kokeilu voi olla hyvin aikaa vievää etenkin, etenkin jos oppilas ei ymmärrä mikä mediaani on. Kyseisessä kokeessa oli 45 minuuttia aikaa tehdä 4 tehtävää. Näin ollen siis keskimäärin aikaa oli 11 minuuttia tehtävää kohden.



Kuva 4. Vuoden 2012 kokeen valinnaisen tehtävän 2 ratkaisu GeoGebralla.

B-kohdassa taas yksi arvosanoista on 8 ja oppilaan täytyy ymmärtää, että arvosanaa 7 täytyy olla eniten. Oppilaan tulee siis pohtia, miten loput 10 arvosanaa voidaan valita siten, että arvosanaa 7 on eniten ja arvosanat olisivat mahdollisimman suuria. Oppilas voisi esimerkiksi pohtia sopivia vaihtoehtoja ja laskea, millä keskiarvo on suurin. GeoGebran tilastot eivät kerro aineiston tyyppiarvoa. Oppilaan tulisi siis itse osata selvittää tyyppiarvo, mikäli ratkaisisi osatehtävän samalla tavalla kuin a-kohdassa kokeilemalla. GeoGebralla oppilaan on haastava perustella, että hänen saamansa ratkaisu on juuri se oikea ratkaisu. Kuitenkin malliratkaisussa riitti, että laski keskiarvojen suuruuksia, ei siis ollut pakko perustella yksikäsitteisyyttä. Näin ollen myös GeoGebralla voi löytää vastauksen, jolla saa täydet pisteet. Ajan riittäminen on suuri haaste kokeilemisessa, oppilaan on erittäin haastavaa ehtiä optimoida keskiarvo GeoGebralla. Jos oppilas nopeasti ehtii optimoida keskiarvon, hän ymmärtää, mitkä tekijät nopeuttavat optimointia ja millä tavoin numeroita kannattaa muuttaa. Tällöin oppilas vastauksessaan hyödyntää ohjelmistoa ongelmanratkaisussa, eikä ratkaisu oikeastaan ole huonompi kuin paperikokeessa pohdittuna. Vaikka tehtävän voikin ratkaista kätevästi kokeilemalla, tehtävä toimisi sähköisessä kokeessa samanlaisena, sillä ilman ymmärrystä tehtävän ratkaisu veisi paljon aikaa.

4.1.2 Funktiot

GeoGebra on erinomainen väline funktioiden käsittelyyn. Sillä voidaan piirtää kuvaajia. Pystymme selvittämään funktion arvon tietyssä kohdassa. Suoria voidaan piirtää esimerkiksi kahden pisteen avulla. Suorille pystytään piirtämään kohtisuoria ja yhdensuuntaisia suoria, jotka kulkevat tietyn pisteen kautta. Lisäksi GeoGebralla voidaan selvittää suoran kulmakerroin ja yhtälö. Useampana vuonna laskimellisessa osassa on ollut tehtäviä, joissa GeoGebrasta olisi ollut hyötyä (2012, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018). Vuoden 2013 valinnainen tehtävä 6 (Kuva 5) voidaan ratkaista käyttämällä GeoGebran taulukkolaskenta ja CAS-laskin näkymiä.

6. a) Päättele viereisen taulukon lukujen avulla funktion $f(x)$ lauseke.

b) Laske $f(-4) + g(-4)$, kun $f(x) = 2x + 7$ ja $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

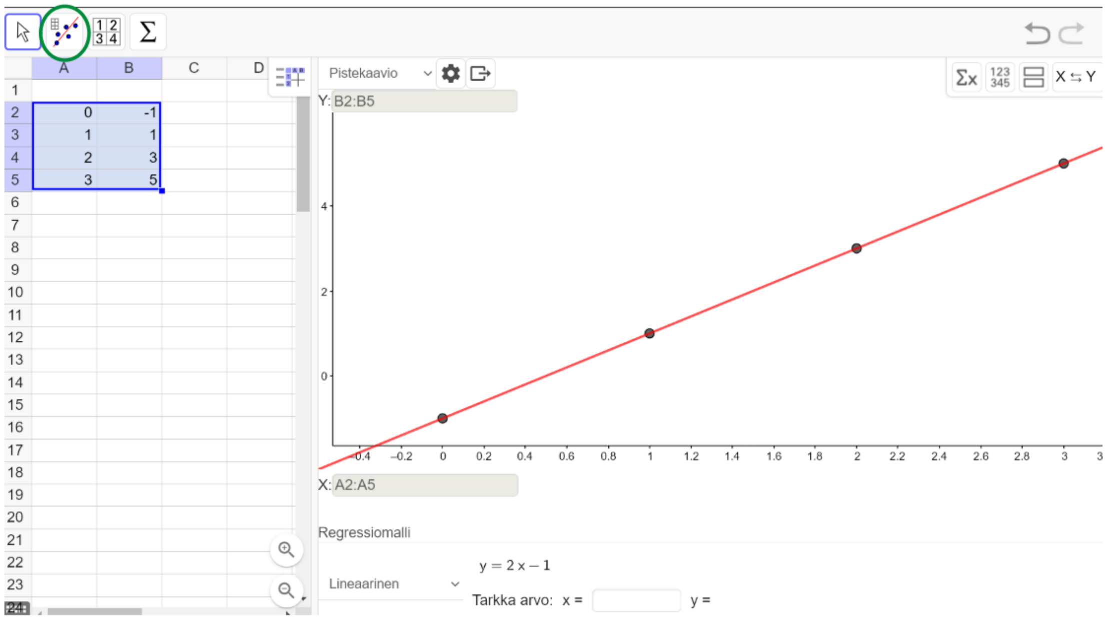
c) Määritä laskemalla, millä muuttujan arvolla funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ saavat saman arvon, kun $f(x) = 2x + 7$ ja $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

x	$f(x)$
0	−1
1	1
2	3
3	5

Kuva 5. Valtakunnallinen 2013 tehtävä 6

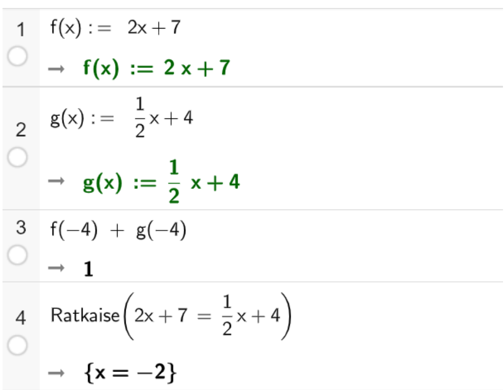
Tehtävän 6 a-kohdan voisi ratkaista syöttämällä taulukkolaskentanäkymään taulukon arvot. Taulukolle voidaan tehdä kahden muuttujan regressioanalyysi. Näin saadaan näkyviin erillinen ikkuna koordinaatistosta, johon on merkitty taulukon arvot pisteinä. Koordinaatistoon voidaan valita regressiomalliksi lineaarinen, jolloin ohjelma piirtää pisteiden kautta kulkevan suoran (Kuva 6). Ohjelma myös kertoo suoran yhtälön eli tässä tapauksessa $y = 2x - 1$. Oppilaan ei siis itse tarvitse osata muodostaa sen yhtälöä. Oppilaan tosin täytyy tietää, että regressiomalleista valitaan lineaarinen. Jos oppilas ei tiedä, että lineaarisella mallilla tarkoitetaan suoraa, hän voi päätyä valitsemaan oikean mallin kuvaajan sekä yhtälön perusteella kokeilemalla eri malleja.

Kysymykseksi nousee, pystyykö yläkoululainen ratkaisemaan tällä tavoin tehtävän. Oppilaalle on valmiiksi annettu taulukko, tällöin loogisin näkymävaihtoehto on taulukkolaskenta. Arvojen kopiointi näkymään ei pitäisi tuottaa ongelmia, mutta kahden muuttujan regressiomallin valinta voi olla haastavaa yhdeksäsluokkalaiselle. Kuitenkin kahden muuttujan regressiomallin kuvakkeessa (Kuvassa 6 ympyröity vihreällä) on punainen suora, jolloin se olisi järkevin vaihtoehdoista. Yläasteella yleisimpien funktioiden kuvaajat ovat suoria tai paraabeleja. Näin ollen yhdeksäsluokkalaisen voisi olettaa painavan oikeaa kuvaketta, sillä se muistuttaa heitä eniten funktioista. Tosin oppilas voisi myös painaa ”Luo pistelista” -painiketta, mitä kautta oppilas voisi itse piirtää suoran pisteiden välille ja myös päästä oikeaan lopputulokseen. Jos oppilas ei yhdistä mitään painiketta funktioon, niin hän voisi kokeilla painikkeita järjestyksessä ja katsoa millä valinnalla päätyy oikeaan näköiseen lopputulokseen. Siis oppilas voisi ratkaista tehtävän vaikkei suoranaisesti osaisikaan päätellä ratkaisua.



Kuva 6. A-kohdan ratkaisu GeoGebralla.

B-kohdassa oppilaan olisi tarkoitus sijoittaa x:n paikalle luku – 4 ja tämän jälkeen laskea lausekkeen arvo. GeoGebralla oppilas voi määrittää CAS-näkymään itselleen funktion f, jonka lauseke on $2x + 7$. Kun funktio on määritelty oikein, oppilas voi laskea funktion arvoja eri x:n arvoilla. Tässä tapauksessa oppilas voi syöttää $f(-4)$, jolloin ohjelma laskee arvoksi -1. Vastaavasti funktio g voidaan määrittää ja selvittää funktion arvo kohdassa - 4. GeoGebralla pystytään siis helposti laskemaan summa $f(-4) + g(-4)$ (Kuva 7). C-kohdan taas voi esimerkiksi ratkaista muodostamalla yhtälön, jonka GeoGebra ratkaisee vaivatta. Oppilaan täytyisi osata siis muodostaa yhtälö, mutta ei tarvitse osata ratkaista sitä, jos hänellä on ohjelmisto käytössä.



Kuva 7. B- ja c-kohdan ratkaisu GeoGebralla.

B-kohdassa funktion määrittämisen sijaan oppilas voisi esimerkiksi piirtää funktiot ohjelmistolla ja tulkita funktion arvon kohdassa $x = -4$. Totta kai oppilas voisi myös sijoittaa itse luvun -4 muuttujan x paikalle. Tällöin mekaanisen laskemisen hoitaisi laskin. Ratkaisu on varsin simppeli, yhdeksäs luokkalainen pystyy jollain esitetyistä kolmesta tavasta ratkaista tehtävän. C-kohdassa puolestaan yhtälöparin tai yhtälön ratkaisemisen sijaan oppilas voi piirtämällä ratkaista muuttujan x arvon. Oletuksena on, että oppilaat osaavat GeoGebran peruskäytön, johon kuuluu funktioiden piirtäminen ja yhtälönratkaisu. Oppilas pystyy vaivatta ratkaisemaan tehtävän.

GeoGebralla voi ratkaista myös erityyppisiä funktiotehtäviä. Vuoden 2017 tehtävässä 2 keskiössä on suoran kulmakerroin ja vakiotermi (Kuva 8). Tehtävässä oppilaan tulisi tietää kulmakertoimen sekä vakiotermin yhteys suoran yhtälössä ja kuvaajassa.

2. Tarkastellaan suoraa $y = -3x + 2$.

a) Mikä on suoran kulmakerroin? (1 p)

b) Onko piste (1, –2) suoralla? Perustele. (1 p)

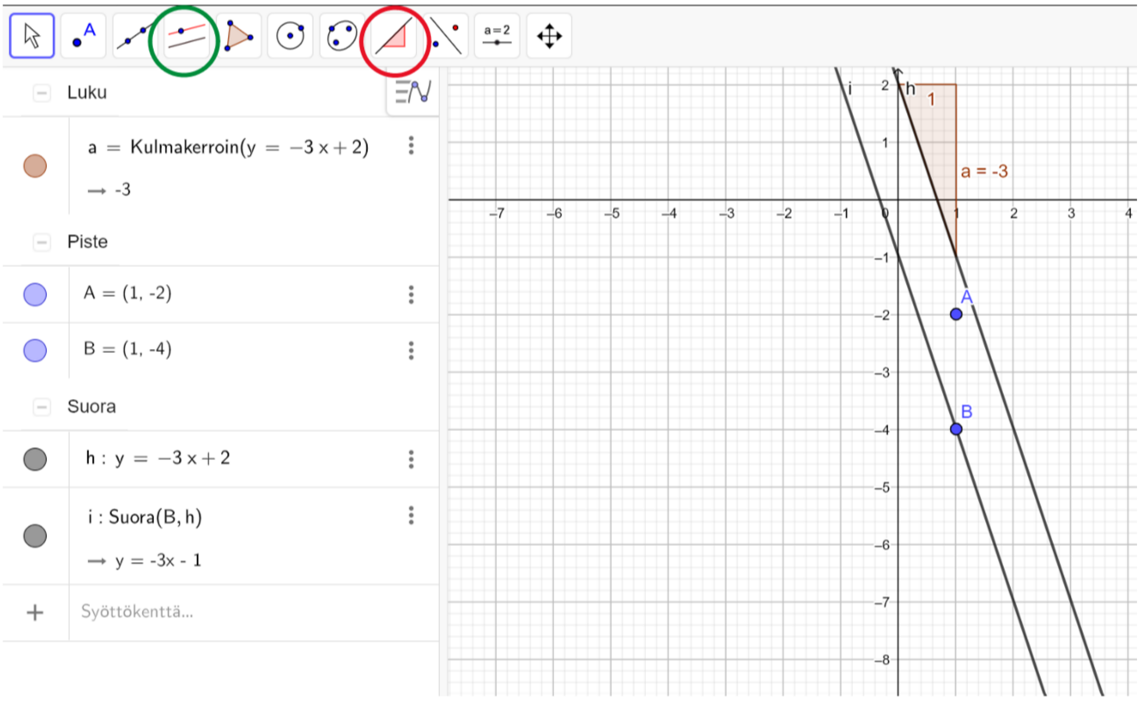
c) Piirrä suora, joka on yhdensuuntainen suoran $y = -3x + 2$ kanssa ja kulkee pisteen (1, –4) kautta. (2 p)

d) Määritä sellaisen suoran yhtälö, joka leikkaa y-akselin samassa pisteessä suoran $y = -3x + 2$ kanssa ja jonka kulmakerroin on 4. Perustele. (2 p)

Kuva 8. Vuoden 2017 tehtävä 2

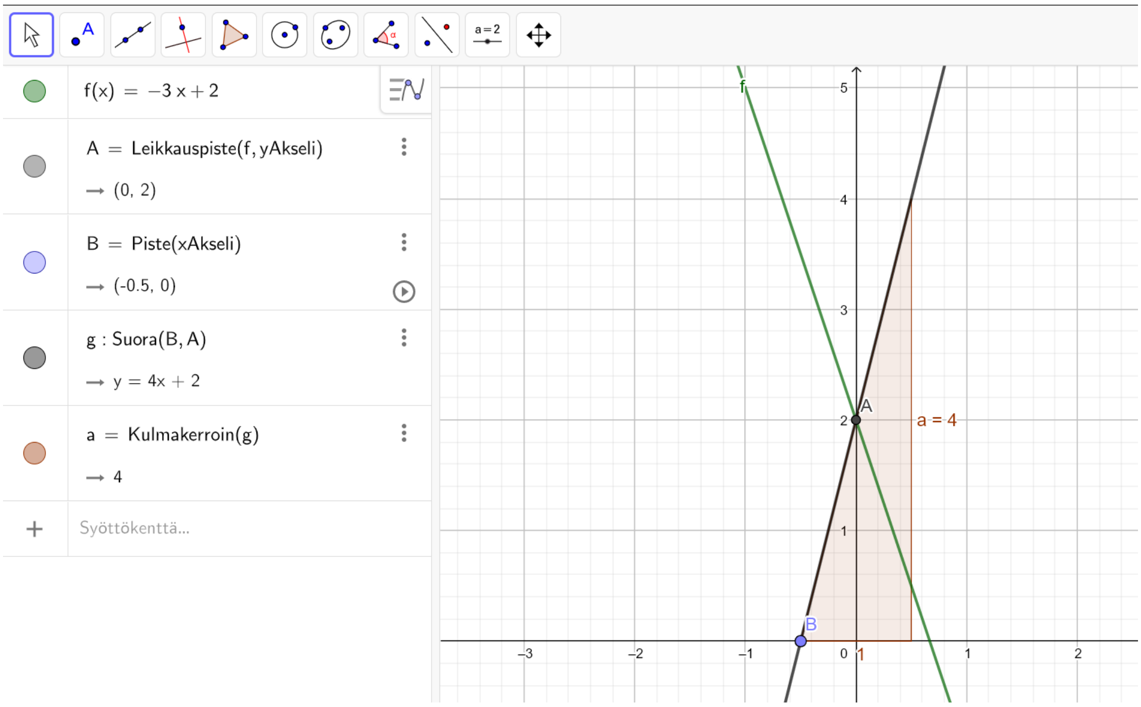
GeoGebralla voi “Kuvaajan piirtäminen” -näkymässä helposti piirtää suoran kirjoittamalla suoran yhtälön. Kyseisen suoran kulmakertoimen voi selvittää kirjoittamalla kulmakerroin, jolloin GeoGebra ehdottaa *Kulmakerroin*-komentoa. Sulkujen sisään voi kirjoittaa suoran nimen tai yhtälön. Komennon kirjoittamisen sijasta GeoGebrassa on vasemman ylärivin valikossa painike suorakertoimen selvittämiselle. Painike näkyy kuvassa 9 punaisella ympyröitynä. Painikkeen jälkeen tulee klikata hiiren painikkeella suoraa, jonka kulmakertoimen haluaa selvittää. A-kohdassa oppilas voi siis helposti GeoGebralla selvittää kulmakertoimen. Hänen ei siis tarvitse tietää, miten kulmakerroin näkyy suoran yhtälössä.

B-kohdassa oppilas voi piirtää kysytyn pisteen kirjoittamalla $(1, -2)$ tai ylävalikon ”Uusi piste” -painikkeen avulla, jolloin hän itse asettaa pisteen oikeaan kohtaan. Ensin mainitulla tavalla oppilaan ei tarvitse ymmärtää pisteen koordinaattien yhteyttä pisteen sijaintiin koordinaatistossa. Kuvasta hän voi katsoa, onko piste suoralla. Oppilaan ei siis tarvinnut osata itse piirtää suoraa eikä pistettä, mutta silti hän pystyy ratkaisemaan a- ja b-kohdan. C-kohdassa oppilas voi käyttää kuvassa 9 vihreällä ympyröityä painiketta, jolloin hänen täytyy valita yhdensuuntainen suora ja piste, jonka kautta uusi suora piirretään eli tässä tapauksessa piste $(1, -4)$. GeoGebra automaattisesti kertoo suoran yhtälön muodossa $ax + by = c$. Painamalla suoran viereisistä kolmesta pisteestä voi valita asetukset. Asetuksista Algebra-osiosta voi vaihtaa yhtälön muodoksi $y = kx + b$.



Kuva 9. Vuoden 2017 tehtävän 2 a-, b- ja c-kohtien ratkaisut GeoGebralla

D-kohdan oppilas voisi ratkaista pelkästään päättelemällä. Oppilaan tulisi tietää, että suoran yhtälössä kulmakerroin on x:n kertoimena sekä y-koordinaatti, jossa suora leikkaa y-akselin on vakioterminä. Näin ollen olisi helppo päätellä, että kyseisen suoran yhtälön täytyy olla $y = 4x + 2$. GeoGebralla kyseisen kohdan voisi ratkaista esimerkiksi piirtäen suoran kahden pisteen kautta (Kuva 10). Ensiksi täytyy piirtää tehtävän antama suora $y = -3x + 2$ kirjoittamalla suoran yhtälö. Tämän jälkeen voi laittaa pisteen A siihen pisteeseen, jossa suora leikkaa y-akselin, lisäämällä uuden pisteen itse tai käyttämällä painiketta ”leikkauspisteet”. Suoran piirtämiseen tarvitaan kaksi pistettä. Toinen piste B voidaan asettaa x-akselille painikkeella ”Piste objektilla”. Tällöin pistettä voi siirrellä x-akselilla haluamallaan tavallaan. Painikkeella ”Suora kahden pisteen kautta” saadaan piirrettyä suora. Nyt uuteen suoraan voidaan käyttää komentoa kulmakerroin, jolloin oppilas näkee kulmakertoimen. Oppilas voi nyt siirtää pistettä B niin, että kulmakerroin on haluttu 4. Kun oppilas löytää oikean kohdan pisteelle B, hänen täytyy muuttaa suoran muoto samalla tapaa kuin c-kohdassa. Näin oppilas löytää oikean vastauksen ilman, että hänen täytyy ymmärtää kulmakertoimen ja vakiotermin yhteyttä suoran yhtälöön.



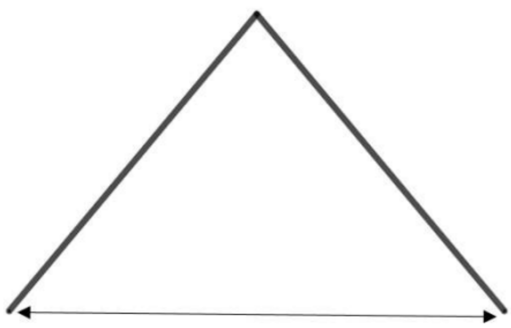
Kuva 10. D-kohdan ratkaisu GeoGebralla.

Kohdat a-c ovat intuitiivisia ja helppoja ratkaista laskinohjelmistolla. D-kohta on kinkkisempi. Tehtävässä kuitenkin mainitaan suora $y = -3x + 2$, jolloin on intuitiivista piirtää kyseinen suora. Lisäksi puhutaan siitä pisteestä, jossa edellä mainittu suora leikkaa y-akselin. Tällöin kyseisen pisteen merkitseminenkin on selkeästi seuraava askel, joka pitää tehdä. Erinäköiset liukusäätimet tai pisteet objektilla ovat GeoGebran vahvuuksia, sillä nämä mahdollistavat tutkivan oppimisen. Kokeileminen näin ollen pitäisi olla tuttua oppilaalle. Tutkiva oppiminen vaatii kärsivällisyyttä ja tarkkuutta liukusäätimiä säädeltäessä. Kulmakertoimen katsominen komennolla ei tuota vaikeuksia oppilaalle. Yhdeksäsluokkaisen on mahdollista ratkaista tehtävä ohjelmistolla.

4.1.3 Geometria

GeoGebra on erinomainen väline ratkaisemaan geometrian ongelmia. GeoGebran Geometrianäkymällä oppilas pystyy piirtämään tarkkoja mallikuvia. Näkymässä oppilas voi mitata työvälineitä käyttäen pituuksia, kulmia ja pinta-aloja. Näitä toimintoja hyödyntäen oppilaan on helpompi ratkaista valtakunnallisissa kokeissa esiintyneitä geometrian tehtäviä.

4. Liisa on ostanut agilityssä käytettävän A-esteen, joka on tasakylkisen kolmion muotoinen. Este asetettiin takapihalle niin, että se osuu maahan 50 asteen kulmassa. Yhden kyljen pituus on 2,5 m. Laske esteen ylös- ja alastulon välinen etäisyys maata pitkin.



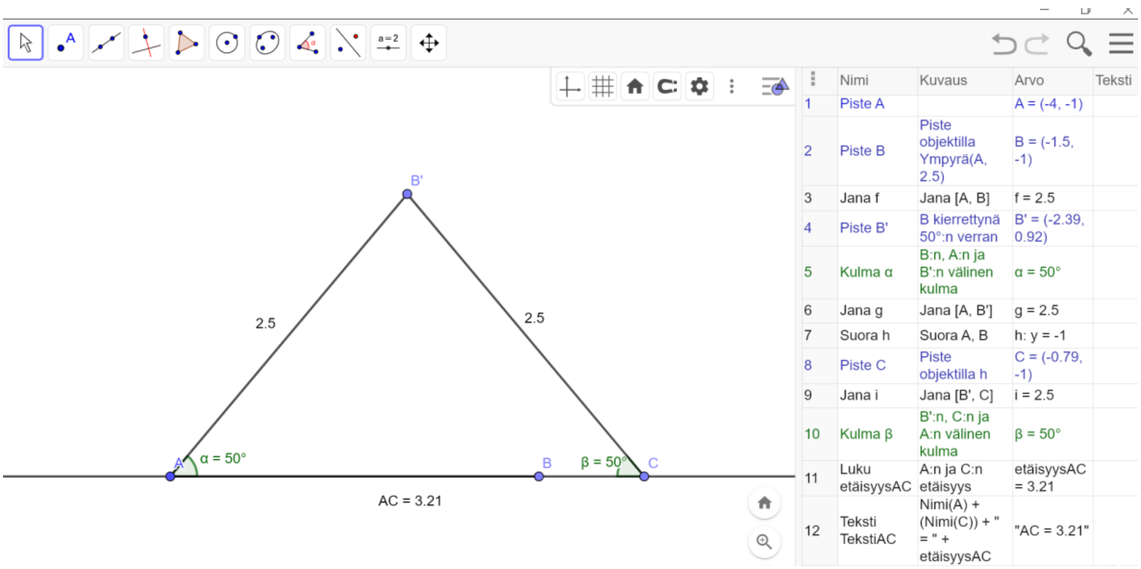
/ 3 p

Kuva 11. Vuoden 2020 tehtävän B4 tehtävänanto.

Esimerkiksi vuoden 2020 kokeen tehtävässä B4 oppilas voisi hyödyntää GeoGebraa (Kuva 11). Kokeessa oppilaan on täytynyt ensinnäkin ymmärtää, mikä kolmion kulmista on 50 astetta. Kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on voitu laskea käyttäen trigonometrisista funktioista kosinia. Yhtälöstä on saatu alkuperäisen kolmion kannan puolikas. Oppilaan on täytynyt siis vielä ymmärtää kertoa kahdella saamansa pituus. Lopuksi täytyy ymmärtää pyöristää saatu tulos kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen.

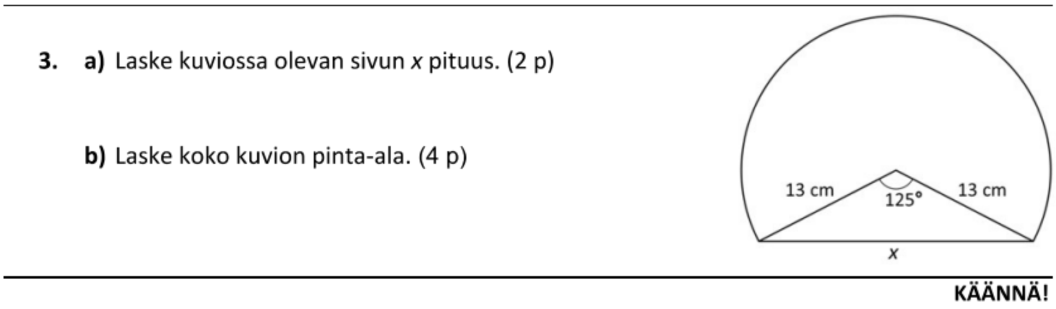
GeoGebralla tehtävän voisi tehdä piirtämällä tarkan mallikuvan ja mittaamalla kysytyn etäisyyden (Kuva 12). Aluksi kannattaa piirtää janan AB kiinteällä pituudella 2,5, sillä kun piirrämme 50 asteen kulman, niin kulman toisesta kyljestä tulee yhtä pitkä kuin ensimmäisestä. Näin saamme luotua samalla 50 asteen kulman sekä kolmion toisen kyljen. Lisäksi voisimme piirtää kolmion kannan selvittämistä helpottamaan suoran kulkemaan suoran A ja B kautta. Suoralle voimme asettaa pisteen C painikkeella piste objektilla. Täydennämme kolmion piirtämällä janan kolmion huipusta pisteeseen C. Nyt pistettä C voi liikutella ja etsiä kohdan, jolloin kuvio vastaa mallikuvaa. Oppilas voi joko mitata kulman B’CA suuruuden ja katsoa milloin se on 50 astetta. Vastaavasti oppilas voi katsoa, milloin janan B’C pituus on täsmälleen 2,5. Kun oppilas on siirtänyt pisteen C oikeaan kohtaan, hän voi mitata kysytyn etäisyyden ja ohjelmisto kertoo sen pituuden olevan 3,21.

Oppilaan täytyy siis GeoGebran ratkaisussa ymmärtää, mikä kulmista on 50 astetta. Lisäksi oppilaan tulisi lopuksi itse tajuta pyöristää ratkaisu kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen. Muuten ratkaisussa riittää, että oppilas piirtää tarkan kuvion ja käyttää näkymän tarjoamia painikkeita. Oppilaan ei tarvitse siis osata matemaattisesti ratkaista tehtävää tai edes ymmärtää, miten sen voisi ratkaista. Riittää, että hän kokeilemalla löytää oikean ratkaisun.



Kuva 12. Tarkan kuvan mallintaminen GeoGebralla vuoden 2020 tehtävässä B4.

Oppilaan taidot riittävät ratkaisemaan tehtävän, sillä tasakylkinen kolmio on helppo piirtää etenkin, kun tehtävänanossa on mallikuva, josta voivat ottaa mallia. GeoGebralla voi piirtää haastavampiakin kuvioita. Esimerkiksi vuoden 2017 tehtävä C3 segmentti voitaisiin ratkaista piirtämällä tarkka mallikuva (Kuva 13). A-kohdassa oppilaan on täytynyt käyttää trigonometrisista funktioista siniä, jotta on saanut selville puolikkaan keskuskolmion kannasta x. Oppilaan on tarvinnut ymmärtää piirtää korkeusjana, muodostaa oikea yhtälö, ratkaista yhtälöstä kannan puolikas ja kertoa saatu pituus kahdella. Lisäksi oppilaan totta kai täytyy ymmärtää, että korkeusjana puolittaa huippukulman. B-kohdassa puolestaan oppilaan on täytynyt ymmärtää laskea erikseen sektorin pinta-ala ja keskuskolmion pinta-ala. Sektorin pinta-alan kaava löytyy kaavakokoelmasta, mutta oppilaan täytyy ymmärtää, että sektoria vastaava keskuskulma onkin $360° - 125° = 235°$. Keskuskolmion pinta-alaa varten oppilaan on täytynyt ensin laskea keskuskolmion korkeus kosinilla. Lopuksi oppilaan täytyy laskea saamansa pinta-alat yhteen ja lopuksi pyöristää tulos kahden merkitsevän numeron tarkkuuteen.



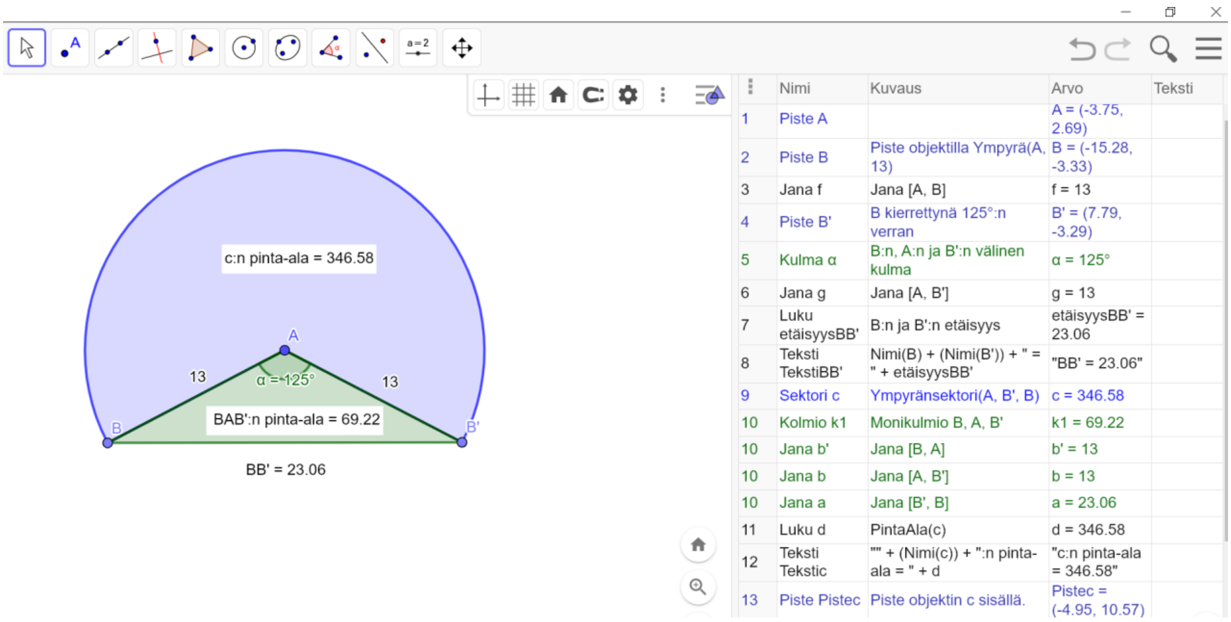
3. a) Laske kuviossa olevan sivun *x* pituus. (2 p)

b) Laske koko kuvion pinta-ala. (4 p)

Kuva 13. Vuoden 2017 tehtävä C3.

GeoGebralla puolestaan tehtävän voisi ratkaista piirtämällä (Kuva 14). A-kohta on helppo piirtää ohjelmistoa käyttäen. Ensiksi piirretään säde, jonka pituus on 13, käyttäen painiketta “jana kiinteällä pituudella”. Sitten piirrämme 125 asteisen keskuskulman painikkeella “Kulma: koko annetaan”. Nyt voimme piirtää janan pisteestä A pisteeseen B’. A-kohdassa kysyttiin siis pisteen B ja B’ etäisyyttä. Tämä voidaan mitata painikkeella etäisyys, jolloin ohjelma kertoo etäisyydeksi 23.06. B-kohtaa varten oppilaan täytyy piirtää sektori painikkeella “Ympyräsektori: keskipiste ja kaksi pistettä”. Lisäksi oppilaan kannattaa piirtää keskuskolmio painikkeella Monikulmio. Selkeyden takia olen kuvassa 14 vaihtanut sektorin värin siniseksi ja kolmion värin vihreäksi. Lopuksi oppilaan täytyy painikkeella Pinta-ala valita sekä sektori että kolmio. GeoGebra laskee siis kolmion ja segmentin pinta-alan oppilaan puolesta. Oppilaan täytyy enää laskea ne yhteen ja pyöristää oikeaan tarkkuuteen.

GeoGebrasta huolimatta oppilaan täytyy ymmärtää, että kuviossa täytyy laskea sekä keskuskolmion että sektorin pinta-ala. Oppilaan ei siis tarvitse osata GeoGebra ratkaisussa käyttää trigonometrisiä funktioita hyödyksi tai osata ratkaista yhtälöitä. Hänen ei tarvitse myöskään osata kolmion tai sektorin pinta-alojen kaavoja pinta-alojen selvittämiseksi. Oppilaan täytyy pelkästään piirtää tarkka kuva, joka ei vaadi tällä kertaa edes liikuteltavia osia.

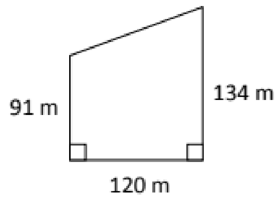


Kuva 14. Segmentin mallintaminen GeoGebralla vuoden 2017 tehtävässä C3.

Tehtävän C3 mallikuvan konstruoiminen oli monivaiheinen. Tässäkin tehtävänannossa on mallikuva, josta pystyy hahmottaa, mitä kaikkea konstruoimiseen tarvitaan. Keskuskolmion piirtäminen on erittäin helppoa, sillä janojen ja kulmien piirtäminen kuuluu peruskäyttämiseen. Mallikuvassa on jo piirretty erikseen sektori ja kolmio. Sektorista oppilaat tietävät keskipisteen ja kaksi pistettä. Näin ollen loogisin painike sektorin piirtämiseen on “Ympyräsektori: keskipiste ja kaksi pistettä”. Jos oppilas ei muista, että sektoriksi kutsutaan ympyrän osaa, jota rajaa kaksi sädettä, niin oppilas valitsee oikean painikkeen kuvakkeiden perusteella. Monivaiheisuudesta huolimatta tehtävän piirtäminen on mahdollista yhdeksäsluokkalaisen taidoilla.

Oppilas pystyy luomaan tarkan kuvan, vaikkei tehtävänannossa olisikaan valmiina mallikuvaa. Sanallisissa tehtävissä oppilas voi luoda tarkan kuvan, josta mittaa kysytyn asian. Tällöin hänen täytyy ymmärtää täysin, mitä tehtävänannossa kysytään ja mitä muita informaatioita tehtävässä kerrotaan. Vuoden 2016 valtakunnallista koetta tehneen oppilaan on täytynyt ymmärtää tehtävän C3 b-kohdassa tasakylkiseen kolmioon liittyviä ominaisuuksia, kuten kantakulmien olevan yhtä suuret (Kuva 15). Oppilaan on täytynyt kolmioiden kulmien summan avulla muodostaa yhtälö, josta hän ratkaisee kantakulman suuruuden. Tämän lisäksi hänen on täytynyt muistaa laskea myös huippukulman suuruus. Hänen on kannattanut piirtää mallikuva itselleen helpottamaan ymmärtämistä, mitä tietoja hän tarvitsee ja miten hän voi ne selvittää. Pinta-alaa varten hänen on täytynyt selvittää kolmion korkeus ja kanta trigonometristen funktioiden avulla.

3. a) Laske oheisen nelikulmion neljännen sivun pituus. (2 p)

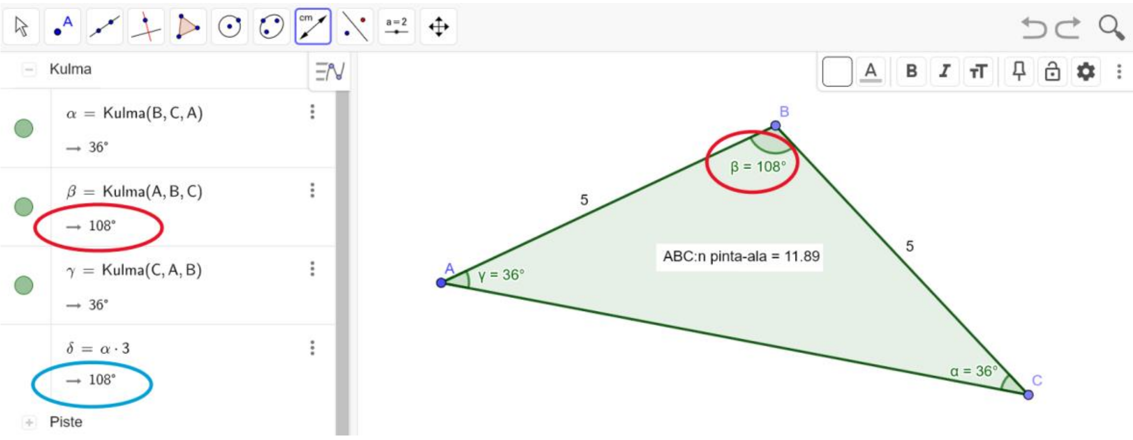


b) Tasakylkisen kolmion huippukulma on kolminkertainen kantakulmaan verrattuna. Kyljen pituus on 5,0 cm. Määritä kolmion kulmien suuruudet ja sen pinta-ala. (4 p)

Kuva 15. Vuoden 2016 tehtävän C3 tehtävänanto.

GeoGebralla oppilas voi ensin piirtää kaksi janaa kiinteällä pituudella 5,0 (Kuva 16). Tämän jälkeen hänen kannattaa Monikulmio-painikkeella muodostaa kolmio näistä kolmesta eri pisteestä. Kolmion kaikki kulmat tulee mitata painikkeella Kulma. Jos oppilas siirtää jotain kolmion kärkipisteistä, kaikki kolmion kulmien suuruudet vaihtuvat. Oppilas voi päässään laskea, milloin huippukulma on 3 kertaa kantakulman verran. Päässälasku voi olla työlästä, sillä GeoGebra kertoo kulman suuruuden kahden desimaalin tarkkuudella. Laskemista helpottamaan oppilas voi ottaa “kuvaajan piirtäminen” -näkymän. Komentoriville oppilas voi kirjoittaa $3 \cdot \alpha$. Näin ohjelma näyttää kuinka paljon on 3 kertaa kantakulma. Oppilas voi näin verrata, milloin tämän laskun suuruus (Kuvassa 16 sinisellä ympyröity) on yhtä suuri kuin huippukulman suuruus (Kuvassa 16 punaisella ympyröity). Lopuksi oppilas voi mittaamalla selvittää kolmion pinta-alan, kun on löytänyt oikeat kulmat kolmiolle. Lopuksi on muistettava pyöristää oikeaan tarkkuuteen ja pohdittava oikea yksikkö.

GeoGebra ratkaisussa oppilaan täytyy ymmärtää, että tasakylkisessä kolmiossa on kaksi kylkeä, jotka molemmat ovat pituudeltaan 5,0 cm. Hänen täytyy ymmärtää käsitteet kantakulma ja huippukulma. Jos oppilas ei tee apulaskua näkyviin, niin oikeiden kulmien selvittäminen voi olla äärimmäisen työlästä. Oppilaalla on mahdollisuus löytää oikea ratkaisu GeoGebralla ilman, että hän osaa muodostaa yhtälöä kolmion kulmien suuruudesta tai laskea kantaa sekä korkeutta trigonometrisilla yhtälöillä.



Kuva 16. Sanallisen tehtävän mallintaminen GeoGebralla vuoden 2016 tehtävän C3 b-kohdassa.

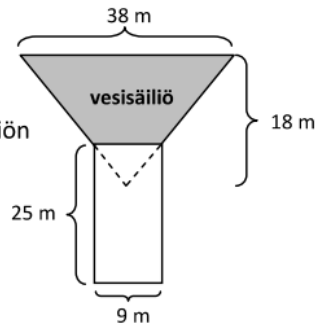
Edellä esitetyn ratkaisun piirtämisvaihe on helppo. Oikeiden kulmien löytäminen voi tuottaa haastetta oppilaille. Oppilaan laskiessa päässään hän nopeasti huomaan sen olevan työlästä. Tällöin oppilas harkitsee muitakin vaihtoehtoja ratkaisuun. GeoGebran muuttujilla, kuten kulmalla α, laskeminen kuuluisi olla tuttua oppilaille entuudestaan. Siis oppilaan on mahdollista ratkaista tehtävä esitetyllä tavalla.

Kaikkiin konstruoimisiin eivät oppilaiden taidot riitä. Esimerkiksi avaruusgeometrian tehtävissä voisi hyödyntää 3D-grafiikkanäkymää, mutta kyseisessä näkymässä on kolmiulotteinen koordinaatisto, joka ei kuulu opetussuunnitelmaan. Näin ollen näkymä on haastava oppilaille. Vuoden 2014 tehtävässä C3 yhdistyy tasokuvio geometria ja avaruusgeometria (Kuva 17). A-kohdan voisi esimerkiksi ratkaista yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Oppilaan tulisi muodostaa yhtälö ja ratkaista siitä kysytty pituus. B-kohdassa puolestaan lasketaan katkaistun kartion muotoisen vesisäiliön tilavuus. Oppilaan tulee siis ymmärtää vähentää ison kartion tilavuudesta pienen kartion tilavuus.

3. Vesitorni on malliltaan sellainen, että se muodostuu, kun suora ympyräkartio, jonka korkeus on 18 m ja pohjaympyrän halkaisija on 38 m, asetetaan ylösalaisin suoran ympyrälieriön sisään. Ympyrälieriön korkeus on 25 m ja pohjaympyrän halkaisija 9 m. Kuvassa näkyy rakennuksen poikkileikkaus.

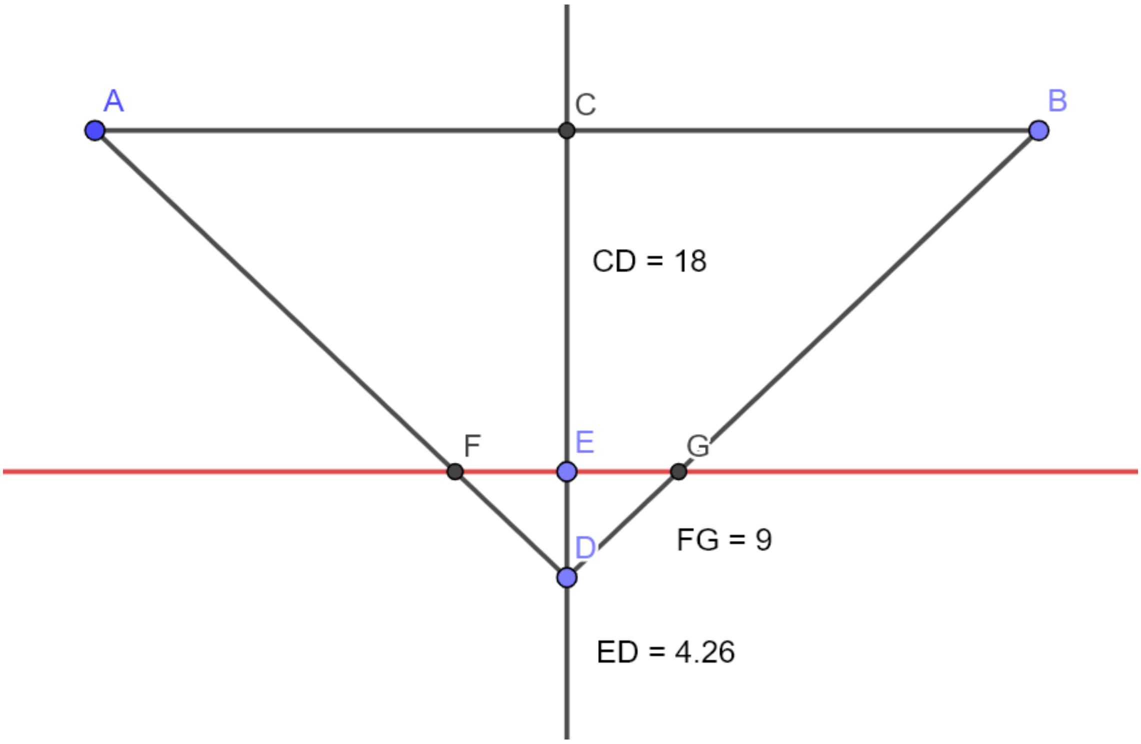
a) Laske, kuinka syvälle lieriön sisään kartio asettuu.

b) Laske harmaalla merkityn vesisäiliön tilavuus.



Kuva 17. Vuoden 2014 tehtävä C3.

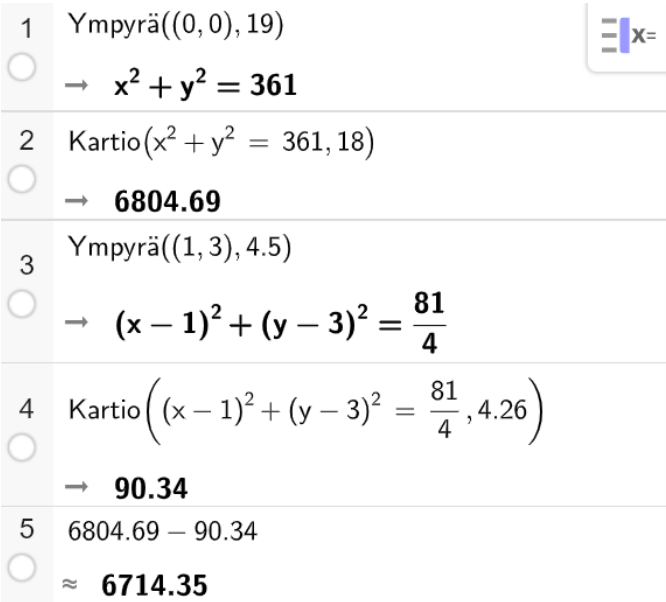
GeoGebralla voidaan piirtää vesitornin säiliön poikkileikkaus (Kuva 18). Ensin piirretään jana, jonka pituus on 38. Janalle kannattaa piirtää keskinormaali Keskinormaali-painikkeella. Keskinormaalille voi laittaa pisteen “Piste objektilla” -painikkeella. Pistettä siirretään sellaiseen kohtaan, että kolmion korkeudeksi tulee 18. Piirretään kolmion kyljet “Kahden pisteen välinen jana” -painikkeella. Vaihtoehtoisesti jos oppilas ymmärtää hyvin koordinaatistoa, niin hän voi valita kolmion kärkipisteille sopivat koordinaatit. Esimerkiksi pisteet $(-19, 0)$, $(19, 0)$ ja $(0, 18)$ muodostavat sopivan kolmion. Keskinormaalille kannattaa asettaa toinenkin piste, joka on se piste, josta alkaen säiliö on lieriön sisällä. Tähän pisteeseen piirretään alkuperäisen janan kanssa yhdensuuntainen suora Yhdensuuntainen-painikkeella. Kuvassa 18 tämä yhdensuuntainen suora on väritetty punaiseksi selkeyttämisen vuoksi. Ne pisteet, joissa kolmion kyljet ja yhdensuuntainen suora leikkaavat, merkitään käyttämällä esimerkiksi Leikkauspisteet-painiketta. Näiden kahden pisteen etäisyys mitataan. Tehtävänannon mukaan tämän pituuden pitäisi olla 9. Nyt keskinormaalilla olevaa pistettä voi siirtää ja etsiä sen kohdan, jossa kyseinen pituus on 9. Kun oppilas löytää oikean kohdan, hän voi mitata tehtävänannossa pyydetyn pituuden ja saada tulokseksi 4,26. Oppilas löytää piirtämällä kysytyn pituuden. Konstruoimisessa tosin on monta vaihetta, joten piirtäminen ei ole kovin nopea tapa ratkaista tehtävä.



Kuva 18. Vuoden 2014 tehtävän C3 a-kohdan ratkaisu GeoGebralla.

B-kohdassa oppilas voi kokeilla kirjoittaa GeoGebran CAS-näkymään kartio. Tällöin ohjelmisto ehdottaa komentoa *Kartio,* johon oppilaan tulee syöttää ympyrän yhtälö ja korkeus. GeoGebralla voi totta kai selvittää ympyrän yhtälön, mutta se ei kuulu opetussuunnitelmaan, joten oppilaalle yhtälö voi tuntua oudolta ja haastavalta. Oppilas voi kuitenkin kirjoittaa ympyrä, jolloin ohjelmisto tarjoaa komentoa *Ympyrä*, johon täytyy syöttää piste ja säteen pituus. Piste voi olla mikä tahansa piste. Kuvassa 19 on valittu isomman ympyrän keskipisteeksi origo ja pienemmän ympyrän piste (1,3), jotta näkyy, ettei keskipisteen valinnalla ole väliä. GeoGebra muodostaa tällä komennolla ympyrän yhtälön. Nyt oppilas voi sijoittaa komentokenttään komennon Kartio, jonka sisään syöttää kopioidun ympyrän yhtälön ja korkeudeksi 18. Oppilas tekee samat toimenpiteet pienemmälle kartiolle. Lopuksi oppilas vähentää ison kartion tilavuudesta pienen kartion tilavuuden. Lisäksi täytyy miettiä sopiva tarkkuus vastaukselle ja yksikkö. Oppilaan täytyy siis GeoGebran ratkaisussakin tajuta laskea erikseen kummankin kartion tilavuus ja lopuksi vähentää nämä toisistaan, mutta hänen ei tarvitse osata käyttää kartion tilavuuden kaavaa.

Oppilaan taidot tuskin riittäisivät tehtävän ratkaisemiseen, sillä ratkaisu on monivaiheinen ja siinä hyödynnetään opetussuunnitelmaan kuulumattomia sisältöjä. Koska sekä 3D-grafiikkanäkymän käyttö että komennot *Kartio* ja *Ympyrä* ovat yläkoululaiselle haastavia, avaruusgeometrian tehtävät sopisivat mainiosti valtakunnalliseen kokeeseen, jos GeoGebra olisi apuvälineenä.



Kuva 19. Vuoden 2014 tehtävän C3 b-kohdan ratkaisu GeoGebralla.

4.2 Kvantitatiivinen analyysi

Tässä alaluvussa tutkitaan määrällisesti valtakunnallisten kokeiden laskimellisten tehtävien toimivuutta, mikäli GeoGebra sallittaisiin välineenä. Aluksi alaluvussa 4.2.1 esitellään tarkemmin kokeiden rakennetta vuosittain. Tehtävien valinnan kriteerit esitellään alaluvussa 4.2.2. Erilaisia keinoja, jolla GeoGebra-ohjelmistosta voi hyötyä esitellään alaluvussa 4.2.3. Alaluvussa 4.2.4 puolestaan tutkitaan pelkästään laskimellisia tehtäviä ja esitellään, kuinka suuri osa niistä toimisi sellaisenaan GeoGebralla. Lopuksi alaluvussa 4.2.5 pohditaan, miltä osin matematiikan osaaminen kehittyy ja miltä osin heikkenee GeoGebraa käytettäessä.

4.2.1 Kokeiden rakenne

Matematiikan yhdeksännen luokan valtakunnallisissa kokeissa on ollut yhteensä 246 tehtävää vuosina 2012–2021. Näistä 79 tehtävässä on saanut käyttää laskinta. Valinnaiset tehtävät ovat aina olleet laskimellisessa osiossa eli näistä 79 tehtävästä on täytynyt ratkaista 61 tehtävää. Tässä tutkimuksessa keskitytään pelkästään laskimellisiin tehtäviin. Taulukossa 1 on eriteltynä, kuinka monta tehtävää on vuosittain ollut kokeessa sekä laskimellisessa osassa. Lisäksi taulukossa on kokeen maksimipisteet ja laskimellisen osan pisteet. Taulukkoon on merkitty, kuinka monessa tehtävässä sai käyttää laskinta ja suluissa oleva numero puolestaan kertoo, montako tehtävää oppilaan on täytynyt ratkaista.

Taulukko 1. Matematiikan valtakunnallisten 2012–2021 kokeiden pistemäärän erittely

Vuosi	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**yht.**
Tehtäviä yhteensä	28	28	28	27	27	27	19	22	20	20	246
Kokonais-pistemäärä	60	60	60	60	60	60	46	50	50	60	566
Laskintehtäviä	6 (4)	6 (4)	6 (4)	6 (4)	6 (4)	6 (4)	19 (18)	8 (6)	8 (6)	8(7)	79(61)
Pisteitä	24	24	24	24	24	24	46	18	16	20	244
Osuus kokonaispisteistä	40 %	40 %	40 %	40 %	40 %	40 %	100 %	36 %	32 %	33,3 %	43,1 %

Vuosina 2012–2017 kokeen rakenne pysyi suhteellisen samana. Kaikista tehtävistä saaduista pisteistä 43,1 % on tullut laskimellisista tehtävistä. Taulukosta 1 huomataan, että laskimellisista tehtävistä saatujen pisteiden osuus on ollut pääsääntöisesti korkeintaan 40 %. Poikkeuksena on vuosi 2018, jolloin koko kokeessa sai käyttää laskinta. Uusimmissa kokeissa laskimellisen osan painotus kokonaispisteissä on ollut laskussa. Vuonna 2020 laskimellisen kokeen osuus on ollut alimmillaan 32 prosentissa.

4.2.2 Tehtävien jaottelun kriteerit

Tässä alaluvussa esitellään kriteerit, joiden pohjalta päätetään, onko GeoGebrasta lisähyötyä ratkaisussa verrattuna kämmenlaskimeen. GeoGebrasta hyötyvien tehtävien tulee kaikkien noudattaa seuraavia kahta kriteeriä.

1. Oppilaan täytyy ehtiä ratkaista tehtävä GeoGebralla.
2. GeoGebrasta hyötyvä osa vastaa vähintään puolta tehtävästä saatavista pisteistä.

On ilmiselvää, että oppilaan täytyy ehtiä ratkaista tehtävä, jotta oppilas hyötyy ohjelmistosta kämmenlaskimeen verrattuna. Laskinohjelmistosta ei voi olla hyötyä, mikäli oppilas ei ajan puitteissa ehdi esittämään ratkaisua. Toisena kriteerinä on, että GeoGebralla hyötyvä osa vastaa vähintään puolia tehtävästä saatavia pisteitä malliratkaisun mukaan. Monissa tehtävissä GeoGebralla pystyi ratkaisemaan koko tehtävän. Kuitenkin joissakin tehtävissä GeoGebrasta oli hyötyä lähinnä yhtälön tai yhtälöparin ratkaisemisesta GeoGebralla. Kuitenkin yhtälön ratkaiseminen ei aina ole keskiössä tehtävässä. Esimerkiksi verrannon osaamista mittaavissa tehtävissä oikean verrantoyhtälön muodostaminen ja yksikkömuunnokset saattavat olla suuremmassa painoarvossa kuin itse verrantoyhtälön ratkaiseminen. Tällaiset tehtävät toimisivat silti myös sähköisessä kokeessa. Tehtävät luokiteltiin tässä tutkimuksessa siihen ryhmään, joissa GeoGebrasta ei juurikaan ollut apua, sillä mekaaninen laskeminen vastasi alle puolia pisteitä. Tällöin oppilaan pitäisi yhä ansaita suurin osa pisteistä omalla osaamisella ja ymmärtämisellä. Myös pienemmistä osista koostuneet tehtävät saatettiin tämän kriteerin perusteella luokitella niihin tehtäviin, joissa ohjelmistosta ei juurikaan hyödytty. Jos yhdessä kohdassa GeoGebrasta hyötyi paljon mutta muissa ei ollenkaan, hyötyvän osan painoarvo pisteytyksessä jäi pieneksi. Tällöin tehtävä yhä toimisi kokeessa, vaikka jokin osatehtävä helpottuisikin. Havainnollistan seuraavaksi tätä kriteeriä kahdella esimerkillä.

4.2.2.1 Esimerkki tehtävästä, jossa GeoGebrasta on vähäinen hyöty

5. **a)** Aki valmistaa suolaliuoksen niin, että hän mittaa 86 g suolaa ja 2,5 kg vettä. Mikä on syntyneen liuoksen suolapitoisuus prosentteina eli kuinka monta prosenttia liuoksen massasta on suolaa?

b) 4-prosenttinen suolaliuos tarkoittaa sitä, että liuoksen massasta 4 % on suolaa ja loput vettä. Kuinka monta grammaa vettä pitää lisätä 120 grammaan suolaa, jotta saadaan 4-prosenttinen suolaliuos?

Kuva 20. Vuoden 2015 tehtävän C5 tehtävänanto.

Vuonna 2015 tehtävässä C5 (Kuva 20) GeoGebrasta saatava hyöty jää vähäiseksi. A-osassa täytyy laskea suolapitoisuus jakamalla suolan määrä liuoksen kokonaismäärällä ja muuttaa saatu desimaaliluku prosenteiksi (Kuva 21). Oppilaan pitää osata laskea liuoksen kokonaismäärä, jotta pystyy ratkaisemaan tehtävän. Kyseisessä osassa oppilas voi laskea GeoGebralla mekaaniset laskut samalla tavalla kuin kämmenlaskimella. Oppilaan tulee yhä ymmärtää laskea tehtävä samalla tavalla. Näin ollen a-kohdassa GeoGebra ei tuo lainkaan lisähyötyä.

5. **a)** Aki valmistaa suolaliuoksen niin, että hän mittaa 86 g suolaa ja 2,5 kg vettä. Mikä on syntyneen liuoksen suolapitoisuus prosentteina eli kuinka monta prosenttia liuoksen massasta on suolaa?

2,5 kg = 2500 g	+ 0,5 p
Liuoksen kokonaismäärä 86 g + 2500g = 2586 g	+ 0,5 p
$\text{suolapitoisuus} = \frac{86\ \text{g}}{2586\ \text{g}}$	+ 1 p
$\approx 0{,}033 = 3{,}3\ \%$	+ 1 p
Vastaus: Liuoksen suolapitoisuus on 3,3 %.	
Jos laskettu 86 : 2500	1 p

Kuva 21. Vuoden 2015 tehtävän C5 a-kohdan malliratkaisu ja pisteytysohje.

B-osassa oppilaan kuuluu muodostaa suolapitoisuudelle yhtälö (Kuva 20). Suolapitoisuus lasketaan jakamalla suolan määrä liuoksen määrällä. Tehtävänannon mukaan valmistetaan neljäprosenttista suolaliuosta, jossa on 120 g suolaa. Liuoksen paino on veden ja suolan yhteispaino. Veden määrää voidaan merkitä muuttujalla x, jolloin yhtälöksi saadaan $\frac{120g}{x+120g} = 0{,}04$. Veden määrä saadaan selville ratkaisemalla yhtälö. Pisteytysohjeesta huomataan, että ristiin kertomisesta saadaan yksi piste (Kuva 22). Muuttujan x ratkaisemisesta ja vastauksen pyöristämisestä tulee toinen piste. GeoGebralla voitaisiin suoraan ratkaista yhtälö ilman ristiin kertomista. GeoGebran käyttämisestä hyötyisi kaksi pistettä. Koko tehtävästä voi saada 6 pistettä. Näin ollen GeoGebrasta hyötyvä osa on $\frac{1}{3}$, joka on vähemmän kuin puolet. Näin ollen tehtävä sopisi ohjelmistosta huolimatta kokeeseen!

b) 4-prosenttinen suolaliuos tarkoittaa sitä, että liuoksen massasta 4 % on suolaa ja loput vettä. Kuinka monta grammaa vettä pitää lisätä 120 grammaan suolaa, jotta saadaan 4-prosenttinen suolaliuos?

$\frac{120}{120+x} = 0{,}04$	+ 1 p
0,04x + 4,8 = 120	+ 1 p
x ≈ 2900 (g) (tai 2880 g)	+ 1 p

TAI

$\frac{120\ \mathrm{g}}{y} = 0{,}04$,	+ 1 p
josta liuoksen kokonaismassa *y* = 3000 g	+ 1 p
ja veden osuus (3000-120)g = 2880 g ≈ 2900 g	+ 1 p

Vastaus: 2900 g vettä (tai 2880 g vettä)

Kuva 22. Vuoden 2015 tehtävän C5 b-kohdan pisteytysohje.

4.2.2.2 Esimerkki, jossa GeoGebrasta hyötyvä osa vastaa vähintään puolta pisteistä

Vuoden 2019 valtakunnallisen kokeen B osan tehtävässä 6.II yhtälöparin ratkaisu vastaa valtaosaa tehtävästä saatavista pisteistä (Kuva 23).

II. Lucan luokka keräsi rahaa leirikoulua varten myymällä keksi- ja suklaarasioita. Yhdestä keksirasiasta luokka sai 2,40 euroa ja yhdestä suklaarasiasta 1,80 euroa. Yhteensä myyntituottoa kertyi 741,60 euroa. Laske, kuinka monta keksirasiaa ja kuinka monta suklaarasiaa luokka myi, kun yhteensä rasioita myytiin 342 kpl? **(4 p)**

Kuva 23. Vuoden 2019 tehtävän B6.II tehtävänanto.

Tehtävänannon perusteella oppilaan kuuluu muodostaa kaksi yhtälöä annettujen tietojen perusteella. Aluksi oppilaan täytyy merkitä keksirasioiden määrää muuttujalla x ja suklaarasioiden määrää muuttujalla y. Yhteensä rasioita myytiin 342 kappaletta, joten yhtälö on $x + y = 342$. Yhdestä keksirasiasta saadaan 2,40 € ja yhdestä suklaarasiasta saadaan 1,80 €. Kaikista myydyistä keksirasioista saadaan siis $2{,}40x$ ja kaikista suklaarasioista saadaan $1{,}80\mathrm{y}$. Lisäksi tiedetään, että 741,60 euron myyntituotto koostuu kaikkien suklaa- ja keksirasioiden yhteistuotosta. Tämä on yhtälönä $2{,}40x + 1{,}80y = 741{,}60$. Saaduista yhtälöistä muodostetaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} 2{,}40x + 1{,}80y = 741{,}60 \\ \qquad\quad x + y = 342 \end{cases}$$

Yhtälöparin voi ratkaista sijoitus- tai yhteenlaskumenetelmällä. GeoGebralla pystyy ratkaisemaan yhtälöparin suoraan yhdellä komennolla. Pisteytysohjeen perusteella yhtälöiden ja yhtälöparin muodostamisesta saa vain yhden pisteen (Kuva 24). Alemman yhtälön sijoittamisesta ylempään ja ratkaisemalla toisen muuttujista saa 1,5 pistettä. Yhden pisteen saa, kun selvittää toisen muuttujan sijoittamalla jo selvitetyn muuttujan toiseen yhtälöistä. Erillisestä vastauksesta saa 0,5 pistettä. GeoGebran vastauksessa molemmat yhtälöt ratkaistaan samalla komennolla. GeoGebran vastauksessa oppilaan täytyy kuitenkin itse osata muodostaa yhtälöt ja kirjoittaa erillinen sanallinen vastaus. GeoGebrasta hyötyvä osa vastaa siis ensimmäisen muuttujan selvittämistä ja toisen muuttujan selvittämistä. Näin ollen ohjelmistosta hyötyy 2,5 pisteen verran. Koko tehtävästä on mahdollista saada 4 pistettä. Näin ollen hyötyvä osa on $\frac{2{,}5}{4} = \frac{5}{8}$, joka on yli puolet tehtävästä saatavista pisteistä.

II. Lucan luokka keräsi rahaa leirikoulua varten myymällä keksi- ja suklaarasioita. Yhdestä keksirasiasta luokka sai 2,40 € ja yhdestä suklaarasiasta 1,80 €. Yhteensä myyntituottoa kertyi 741,60 €. Laske, kuinka monta keksirasiaa ja kuinka monta suklaarasiaa luokka myi, kun yhteensä rasioita myytiin 342 kpl?

Keksejä x kpl, suklaita y kpl

Keksien hinta $2{,}40 \cdot x$, suklaiden hinta $1{,}80 \cdot y$

$\begin{cases} 2{,}4x + 1{,}8y = 741{,}6 \\ x + y = 342 \end{cases}$ + 1 p

$\begin{cases} 2{,}4x + 1{,}8y = 741{,}6 \\ x = 342 - y \end{cases}$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään yhtälöön.

$2{,}4 \cdot (342 - y) + 1{,}8y = 741{,}6$

$820{,}8 - 2{,}4y + 1{,}8y = 741{,}6$

$-0{,}6y = -79{,}2 \;||: (-0{,}6)$

$y = 132$ + 1,5 p

$x = 342 - 132 = 210$ + 1 p

Vastaus: <u>Lucan luokka myi 210 keksirasiaa ja 132 suklaarasiaa</u>. + 0,5 p

1 p: Ratkaisutapa (muodostettu yhtälöpari tai yhtälö)

1,5 p: Toinen tuntematon ratkaistu

1 p: Molemmat tuntemattomat ratkaistu

0,5 p: Vastaus **/ 4 p**

Kuva 24. Vuoden 2019 tehtävän B6.II malliratkaisu ja pisteytysohje

4.2.3 Erilaisia tapoja hyötyä GeoGebrasta

GeoGebrasta voi olla monella tavalla hyötyä. Tähän on koottu esimerkkejä, miten ohjelmistosta voi hyötyä tehtävien ratkaisemisesta. GeoGebrasta on selvästi hyötyä, mikäli GeoGebrassa on jokin komento kuten *keskar* keskiarvon laskemiseen, mikä laskee kysytyn asian oppilaan puolesta. Komentoja voi joutua käyttämään useamman, mutta on tärkeää, että tehtävän ehtii ratkaista järkevässä ajassa ohjelmistoa käyttäen (Katso vuoden 2012 valinnaisen tehtävän 2 ratkaisu kappaleesta 4.1). Geometrian tehtävissä GeoGebrasta on hyötyä, jos oppilas voi piirtää tarkan kuvion ja mitata kysyttyjä pituuksia, kulmia ja pinta-aloja. Myös tehtävät, joissa liukusäätimellä voidaan selvittää oikeita arvoa, lasketaan GeoGebrasta hyötyviin tehtäviin.

Alla on listattuna, miten GeoGebrasta voisi esimerkiksi olla selvää hyötyä tehtävän ratkaisussa:

1. Komento ratkaisee oppilaan puolesta kysytyn asian.
2. Oppilaan piirtämästä kuviosta voi mitata esimerkiksi kysytyn pituuden, kulman tai pinta-alan.
3. Liukusäätimillä voi kokeilemalla löytää oikean ratkaisun.
4. Yhtälöparin- tai yhtälönratkaisu on huomattava osa tehtävää.
5. Jokin muu GeoGebran ominaisuuksia hyödyntävä ratkaisu

Etenkin kuvaajien piirtäminen, Cas-laskin, geometria ja taulukkolaskenta -näkymiä käyttämällä oppilas voi hyötyä GeoGebrasta. Avaruusgeometrian tehtäviä voi ratkaista käyttäen 3D-grafiikkanäkymää. Esimerkiksi pallojen, lieriöiden ja kartioiden tilavuuksia voi laskea näkymässä. Kuitenkin näkymä voi olla haastava oppilaille, sillä opetussuunnitelmaan ei kuulu kolmiulotteinen koordinaatisto. Esimerkiksi vuoden 2014 C3 tehtävä on mahdollista ratkaista GeoGebralla piirtämällä, mutta se on monimutkaista (Katso kuva 18). Lisäksi kartion tilavuus on mahdollista laskea komennolla Kartio (Katso kuva 19). Tämä vaatii, että syöttää ympyrän yhtälön, jonka GeoGebra totta kai voi muodostaa, mutta tällainen on haastavaa oppilaalle, sillä ympyrän yhtälö ei kuulu peruskoulun opetussuunnitelmaan. Yllä mainituista syistä avaruusgeometrian tehtävät sopivat yhä kokeeseen GeoGebrasta huolimatta.

4.2.4 Tulokset

Valtakunnallisten kokeiden jokainen laskimellinen tehtävä on jaettu GeoGebrasta hyötyviin tai ei juurikaan hyötyviin tehtäviin luvun 4.4.2 kriteerien perusteella. Kämmenlaskimia oppilaat ovat saaneet käyttää, joten selvitämme, kuinka monessa tehtävässä GeoGebrasta on jotain lisähyötyä. Taulukossa 2 on esitetty, kuinka monessa tehtävässä GeoGebrasta on hyötyä ja monessako ei juurikaan. Lisäksi on myös merkitty, kuinka suuri osuus tehtävämäärästä on laskintehtäviä. Liitteessä 1 on jaoteltu tarkemmin tehtävät GeoGebrasta hyötyviin ja ei juurikaan hyötyviin.

Taulukko 2. Laskintehtävien erittely GeoGebrasta hyötyviin ja ei juurikaan hyötyviin tehtäviin.

vuosi	Laskintehtäviä	Tehtäviä, joissa GeoGebrasta on hyötyä	Osuus laskintehtävistä	Tehtäviä, joissa GeoGebrasta ei juurikaan ole hyötyä	Osuus laskintehtävistä
2012	6	2	33,3 %	4	67,7 %
2013	6	4	67,7 %	2	33,3 %
2014	6	3	50 %	3	50 %
2015	6	2	33,3 %	4	67,7 %
2016	6	3	50 %	3	50 %
2017	6	4	67,7 %	2	33,3 %
2018	19	12	63,2 %	7	37,8 %
2019	8	4	50 %	4	50 %
2020	8	6	75 %	2	25 %
2021	8	3	37,5 %	5	62,5 %
yht.	79	43	54,4 %	36	45,6 %

Yli puolessa tehtävistä GeoGebrasta on ollut selvää lisähyötyä vuosien 2012–2021 valtakunnallisissa kokeissa. Näin ollen siis 45,6 % tehtävistä voisi pysyä entisellään, mikäli GeoGebra sallittaisiin apuvälineeksi kokeeseen. Vain kolmena vuotena on ollut enemmän sellaisia tehtäviä, jolloin GeoGebrasta ei juurikaan ollut hyötyä ratkaisussa. Siis seitsemänä vuotena GeoGebra on hyödyttänyt puolia tai enemmän tehtäviä. Vuosittain tarkasteltuna huomataan, että GeoGebrasta hyötyminen on vaihdellut paljon. Vähiten hyötyä GeoGebrasta oli vuosina 2012 ja 2015, jolloin kolmasosa tehtävistä hyötyi ohjelmiston ominaisuuksista. Eniten hyötyä puolestaan oli vuonna 2020, jolloin jopa 75 % tehtävistä pystyi ratkaisemaan GeoGebralla selvästi helpommin kuin perinteisemmillä välineillä.

4.2.5 Matematiikan osaamisen muuttuminen

GeoGebra muuttaa tehtävien ratkaisua ja siinä tarvittavia tietoja ja taitoja. Mekaaninen laskemisen ohjelmisto laskee oppilaan puolesta. Tällöin algebran osaaminen kehittyy heikommin kuin itse laskemalla. Kaavakokoelman takia oppilaiden ei tarvitse muistaa kaavoja ulkoa vaan heidän täytyy tietää ja ymmärtää, mitä kaavaa heidän tulisi käyttää ratkaisussaan. GeoGebra antaa mahdollisuuden, jossa oppilaan ei tarvitse käyttää kaavoja ollenkaan, vaan GeoGebran komennot ja painikkeet laskevat oppilaan puolesta. Oppilaat eivät siis tällöin osaa myöskään käyttää oikeita kaavoja ratkaisuissaan. Tosin oppilaiden ohjelmistojen hyödyntäminen kehittyy.

GeoGebra kuitenkin kehittää oppilaan ymmärrystä riippuvuuksista. Oppilaat voivat huomata pienten ja suurten muutosten vaikutuksen kokonaisuuteen. GeoGebralla oppilaat pystyvät luomaan tarkempia visualisointeja, joten heidän visualisointitaitonsa kehittyvät. Ongelmanratkaisutaidot painottuvat GeoGebraa käytettäessä, koska GeoGebra hoitaa mekaanisen laskemisen oppilaan puolesta. Ohjelmisto mahdollistaa esimerkiksi yhtälönratkaisun komennolla. Näin oppilas voi edetä tehtävässä ja osoittaa osaamista, vaikkei osaisikaan ratkaista yhtälöä ilman ohjelmistoa. Tosin oppilaan yhtälönratkaisutaidot eivät kehity yhtä hyvin kuin ilman ohjelmistoa kehittyisivät.

5 Luotettavuus

Tulosten luotettavuudessa tulisi ainakin ottaa huomioon, että pelkästään tutkija on jakanut tehtävät GeoGebrasta hyötyviin ja ei juurikaan hyötyviin tehtäviin. Jos tutkimus uusitaan, on suositeltavaa, että useampi henkilö jakaa tehtävät, jotta tulokset olisivat mahdollisimman luotettavat. Lisäksi kokeissa laskimellisia tehtäviä on ollut pääsääntöisesti 6–8, joista oppilas on ratkaissut vain 4–7. Yksittäisen vuoden prosenteissa saattaa olla epäluotettavuutta vähäisen tehtävämäärän takia. Vuonna 2018 laskinta sai käyttää koko kokeessa, jossa oli 19 tehtävää. Vuosi 2018 vaikuttaa enemmän kuin muut vuodet, kun tarkastellaan kaikkia tehtäviä kokonaisuutena.

Tutkimuksessa on esitetty mahdollisia ratkaisuja valtakunnallisiin tehtäviin GeoGebralla. Esimerkiksi tutkimuksessa on esitetty ratkaisuja, joissa on hyödynnetty GeoGebran liukusäädinominaisuuksia. Aiemmissa tutkimuksissa on kuitenkin havaittu, että oppilaat eivät vetäneet säätimiä tarpeeksi rauhallisesti, jotta löytäisivät oikean ratkaisun (Poon, 2018). Tutkimuksessa on esitetty pohdintaa, pystyisivätkö oppilaat ratkaisemaan tehtäviä ohjelmistolla esitetyillä tavoilla. Oletuksena tutkimuksessa on, että heille on opetettu GeoGebran peruskäyttö. Olisi tärkeää selvittää jatkotutkimuksena, riittävätkö suomalaisten yläasteikäisten oppilaiden taidot ja tiedot ratkaisemaan GeoGebralla tehtäviä, jos heille GeoGebra on ohjelmistona tuttu. Lisäksi olisi mielekästä saada tietää, kuinka paljon oppilaiden tulisi ensin käyttää ohjelmistoa, jotta he olisivat tarpeeksi harjaantuneita ratkaisemaan ongelmia GeoGebralla.

6 Pohdintaa

Tutkimuksen tuloksista voidaan nähdä, että yli puolet laskimellisista tehtävistä tulisi muuttaa, mikäli GeoGebra sallittaisiin apuvälineenä matematiikan valtakunnallisessa kokeessa. Jos koe halutaan pysyvän suhteellisen samanlaisena, niin mielekkäämpi väline kokeessa voisi olla esimerkiksi laskinohjelma nimeltä SpeedCrunch, joka on käyttöominaisuuksiltaan samankaltainen kuin nykyiset kokeessa sallitut kämmenlaskimet. On kuitenkin hyvä huomata, että GeoGebran takia tulevien muutosten ei kuitenkaan välttämättä tarvitse olla suuria. Esimerkiksi tehtävissä, joissa oppilas selvittää suoran yhtälöä, kulmakertoimeksi voisi harkita laittaa jonkun murtoluvun kuten $\frac{2}{3}$, joka on desimaalilukuna päättymätön. Tällöin GeoGebra ei näytä murtoluvun tarkkaa arvoa vaan pyöristetyn arvon desimaaliluvusta.

Tutkimuksessa huomattiin, että GeoGebralla ratkaisemisessa oppilaan ei tarvinnut osata mekaanisia laskutoimituksia tai tarvinnut tietää, mitä kaavoja hänen tulisi käyttää. Tämä laskee esimerkiksi oppilaan yhtälönratkaisutaitoa. Valtakunnallisen kokeen rakenne kuitenkin mahdollistaa mekaanisen laskutaidon arvioimisen laskimettomassa osassa. Laskimellisista tehtävistä on saatu 43,1 % kaikista pisteistä vuosien 2012–2021 valtakunnallisissa kokeissa. Laskimeton osa on siis ollut suuremmassa painoarvossa pääsääntöisesti. Laskimettomassa osassa voisi varmistaa mekaanisen laskutaidon. On hyvä huomata, että soveltavissa tehtävissä mekaaninen laskeminen, kuten yhtälön ratkaiseminen, ei välttämättä ole keskiössä. Yhtälönratkaisun osaamisen arviointi kannattaa varmistaa laskimettomassa osassa ja laskimellisten soveltavien tehtävien pisteohjeistuksessa painottaa ratkaisun muita osia.

Tutkimuksessa havaittiin, että GeoGebralla ratkaiseminen kehittää oppilaan visualisointitaitoja, sillä oppilas pystyy piirtämään todenmukaisempia mallikuvia; jopa täysin tarkkoja, joista oppilas voi mitata kysyttyjä etäisyyksiä, pinta-aloja ja kulmia. Myös aiemmissa tutkimuksissa on huomattu GeoGebran positiivinen vaikutus visualisointitaitoihin (Bhagar & Chang, 2015). Tutkimuksessa havaittiin myös, että avaruusgeometriaan liittyvät komennot, kuten Kartio, ovat haastavia oppilaille, sillä ympyrän yhtälö ei kuulu opetussuunnitelmaan. Wassie & Zergaw (2019) tukevat tätä tulosta, sillä he toteavat, että osa GeoGebran komentojen syöttämistavoista eivät ole käyttäjäystävällisiä ja ovat haastavia etenkin niille oppilaille, joilla ei ole ohjelmointikokemusta. Avaruusgeometrian tehtävät sopivat kokeiden laskimelliseen osaan GeoGebrasta huolimatta.

Koska opetussuunnitelma kannustaa hyödyntämään tieto- ja viestintäteknologiaa oppimisessa, olisi tärkeää myös arvioida oppilaiden valmiuksia käyttää ohjelmistoja tarpeenmukaisesti, johon GeoGebran hyödyntäminen sopisi hyvin (OPS, 2014). Aiempien tutkimuksien perusteella GeoGebraa kannattaisi hyödyntää opetuksessa, sillä se parantaa oppimistuloksia matematiikan eri osa-alueilla (Chan & Leung, 2014; Mutlu & Söylemez, 2019; Saha ym., 2010; Tay & Mensah-Wonkyi, 2018; Mthethwa ym., 2020; Bhagar & Chang, 2015; Birgin & Topuz, 2021; Shadaan & Leong, 2013; Doğan & İçel, 2011; Disbudak & Akyuz, 2019; Özçakir & Çakiroğlu, 2019; Erbas & Yenmez, 2011). Monissa tutkimuksissa on huomattu GeoGebran vaikuttaneen positiivisesti oppilaiden kiinnostukseen, asenteisiin ja motivaatioon matematiikan oppimista kohtaan (Turk & Akyuz, 2016; Doğan & İçel, 2011; Tay & Mensah-Wonkyi, 2018; Bhagar & Chang, 2015; Birgin & Topuz, 2021). Jos opettaja ottaa GeoGebran opetukseensa mukaan, opettajan täytyy varmistaa, että tehtävät ja appletit ovat tarpeeksi luovia (Ljajko & Ibro, 2013). Öçal ym. (2020) huomasivat, että opettajaopiskelijat eivät pystyneet keksimään tarpeeksi luovia tehtäviä GeoGebralla. Opettajan kannattaa harkita kokeiden laatimista niin, että GeoGebra olisi välineenä, sillä näin voisi arvioida yhtä päättöarvioinnin kriteeriä, jossa arvioidaan oppilaan taitoa hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa opiskelussaan.

Mikäli GeoGebra tulisi valtakunnalliseen kokeeseen työvälineeksi, sen käyttöä olisi harjoiteltu oppitunneilla yläkoulun ajan. Kokeiden laatimisessa voi siis olettaa oppilaiden osaavan käyttää vähintään GeoGebran perustoimintoja, eikä ohjelmisto olisi täysin tuntematon heille. GeoGebran opettaminen jo yläkoulussa valmistaisi oppilaita jatko-opintoihin, sillä GeoGebraa käytetään etenkin lukio-opinnoissa jo nykyään. Yhdeksäsluokkalaisen on mahdollista ratkaista suurin osan tässä tutkimuksessa esitytetyistä ratkaisuista, mikäli hänelle on opetettu peruskäyttö ohjelmistosta.

Paperisella kokeella on tiettyjä rajoitteita. Esimerkiksi ei voida analysoida isoja tilastoja, sillä oppilaan pitäisi laskimeen syöttää monia arvoja. GeoGebra mahdollistaa tilastotehtävien ratkaisemisen tilaston koosta huolimatta. Sähköisessä kokeessa ohjelmiston takia kokeeseen voisi suunnitella uudenlaisia tehtäviä, joita ennen ei ole ollut. GeoGebra mahdollistaa tutkivan oppimisen, myös koetilanteessa. Kokeilemalla voi keksiä, miten tehtävää kannattaisi lähteä ratkaisemaan. Ohjelmistolla kokeileminen on helpompaa ja nopeampaa kuin perinteisellä tavalla työskenneltäessä.

Lähteet

1. Birgin, O., & Topuz, F. (2021). Effect of the GeoGebra software-supported collaborative learning environment on seventh grade students' geometry achievement, retention and attitudes. *Journal of Educational Research*, *114(5)*, 474–494.
2. Bhagat, K. K., & Chang, C. Y. (2015). Incorporating GeoGebra into geometry learning-a lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics*. *Science & Technology Education*, *11*(1), 77–86.
3. Chan, K. K., & Leung, S. W. (2014). Dynamic geometry software improves mathematical achievement: Systematic review and meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research, 51(3)*
4. Disbudak, O., & Akyuz, D. (2019). The comparative effects of concrete manipulates and Dynamic Software on the geometry achievement of fifth-grade students. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 26 (1), 3–20.*
5. Doğan, M., & İçel, R. (2011). The role of dynamic geometry software in the process of learning: GeoGebra example about triangles. *International Journal of Human Sciences, 8(1).*
6. Erbas, A. K., & Yenmez, A. A. (2011). The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. Computers & Education, 57(4), 2462–2475.
7. Higgins, K., Huscroft-D'Angelo, J., & Crawford, L. (2019). Effects of technology in mathematics on achievement, motivation, and attitude: A meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research*, 57(2), 283–319.
8. Hussin, S., Yusoff, J. M., Mustaffa, S. S., & Mokmin, N. M. (2018). The effectiveness of using geogebra software in teaching angle in circle. Advanced *Journal of Technical and Vocational Education, 2(3), 1–6.*
9. Ljajko & Ibro (2013). Development of ideas in a GeoGebra – aided mathematics instruction. *Mevlana International Journal of Education.*

10. MFKA: Valtakunnalliset kokeet. 2022. Luettu 17.6.2022 osoitteessa: https://mfka.fi/kategoria/kokeet/valtakunnalliset-kokeet/
11. Mthethwa, M., Bayaga, A., Bossé, M. J., & Williams, D. (2020). GeoGebra for learning and teaching: A parallel investigation. *South African Journal of Education*, *40*(2), 1–12.
12. Mutlu, Y., Eğitim, & Fakültesi (2019). Using Geogebra Mathematics Software for Teaching Transformation Geometry to 8 th Grade Students.
13. *Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit* 2020. Opetushallitus, Helsinki.
14. OPS *(Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet)* 2014. 4. painos. Opetushallitus, Helsinki.
15. Poon, K. K. (2018) Learning fraction comparison by using a dynamic mathematics software – GeoGebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(3)2*
16. Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: Enlightening coordinate geometry learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8, 686–693.*
17. Shadaan, P., & Leong, K. E. (2013). Effectiveness of using GeoGebra on students' understanding in learning circles. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, *1*(4), 1–11.
18. Sudihartinih, E., & Purniati, T. (2019). Using GeoGebra to develop students understanding on circle concept. Journal of Physics: Conference Series, 1157
19. Tay, M. K., & Mensah-Wonkyi, T. M. (2018). Effect of using GeoGebra on senior high school students' performance in circle theorems. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, 14, 1–18.
20. Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. Teoksessa: Lerman, S. Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Dordrecht.
21. Trötschkes, R. 29.9.2015 Sähköisen yo-kokeiden aikataulu. Luettu 23.7.2022 osoitteesta: https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/06/01/sahkoisen-yo-kokeiden-aikataulu

22. Turk, H. S., & Akyuz, D. (2016). The effects of using dynamic geometry on eighth grade students’ achievement and attitude towards triangles. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 23(3), 95–102.*

23. Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019). Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(8)*

24. Wei, C. S. & Ismail, Z., (2010). Peer Interactions in Computer-Supported Collaborative Learning using Dynamic Mathematics Software. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8, 600-608*

25. Özçakir, B., & Çakiroğlu, E. (2019). Effects of dynamic geometry activities on seventh graders’ learning on area of quadrilaterals. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 20(2), 257–271.*

26. Öçal, M. F., Kar, T., Güler, G. & Ipek, S. A. (2020). Comparison of Prospective Mathematics Teachers' Problem Posing Abilities in Paper-Pencil Test and on Dynamic Geometry Environment in Terms of Creativity. *Journal of Research in Mathematics Education. 9(3).*

Liitteet

LIITE 1

Taulukossa esitetty jaottelu tehtäville sen mukaan, onko GeoGebrasta hyötyä kämmenlaskimeen verrattuna.

Vuosi	Tehtävien numerot, joissa GeoGebrasta on selvästi hyötyä	Tehtävien numerot, joissa GeoGebrasta ei juurikaan ole hyötyä verrattuna kämmenlaskimeen
2012	C1, C3	C2, C4, C5, C6
2013	C2, C4, C5, C6	C1, C3
2014	C1, C4, C5	C3, C6, C2
2015	C2, C3	C1, C4, C5, C6
2016	C3, C4, C6	C1, C2, C5
2017	C1, C2, C3, C5	C4, C6
2018	A5, B1, B2, B3, B4, B5, C1, C2, C3, C6, D7, D9	A1, A2, A3, A4, C4, C5, D8
2019	B1, B3, B4, B6.II	B2, B5, B6.I, B6.III
2020	B1, B3, B4, B5, B6, B8	B2, B7
2021	B3, B4, B7	B1, B2, B5, B6, B8