

DLR-IB-FA-BS-2022-138

**Gradientenbestimmung für die
Formoptimierung
von Flügelstrukturen**

Masterarbeit

Lennart Tönjes



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2022-138

Gradientenbestimmung für die Formoptimierung von Flügelstrukturen

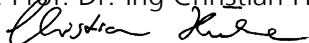
Zugänglichkeit:

Stufe 1 Allgemein zugänglich: Der Interne Bericht wird elektronisch ohne Einschränkungen in ELIB abgelegt. Falls vorhanden, ist je ein gedrucktes Exemplar an die zuständige Standortbibliothek und an das zentrale Archiv abzugeben.

Braunschweig, Mai, 2022

Der Bericht umfasst: 74 Seiten

Abteilungsleiter: Prof. Dr.-Ing Christian Hühne



Autor: *Lennart Tönjes*



Autor 2 / Betreuer: Sascha Dähne



Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt



Gradientenbestimmung für die Formoptimierung von Flügelstrukturen

Masterarbeit

Technische Universität Braunschweig

Vorgelegt von:

B. Sc. Lennart Tönjes

Betreut durch:

Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne (IMA TU Braunschweig)

M. Sc. Sascha Dähne (DLR Braunschweig)

M. Sc. Hendrik Traub (IMA TU Braunschweig)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt habe. Textpassagen, die wörtlich oder dem Sinn nach auf Publikationen oder Vorträgen anderer Autoren beruhen, sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Braunschweig, 05.05.2022

Lennart Tönjes

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
1.1	Lightworks	2
1.2	Vorgehensweise	2
1.3	Ziel dieser Arbeit	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Strukturoptimierung.....	5
2.2	Optimierungsalgorithmus – MMA.....	8
2.3	Entwurfsvariablen	10
2.3.1	Strukturelle Parameter	10
2.3.2	Geometrische Parameter	11
2.4	Restriktionen	13
2.4.1	Strukturelle Restriktionen	14
2.4.2	Geometrische Restriktionen.....	16
2.5	Gradienten.....	20
2.5.1	Finite Differenzen	21
2.5.2	Gradienten durch komplexe Schrittweite	22
2.5.3	Automatische Differenzierung	24
2.5.4	Modulare Gradienten	26
2.6	Flügelaufbau und Panelgeometrie	29
2.6.1	Flügelaufbau	29
2.6.2	Beullänge	31
2.6.3	Materialorientierung	32
2.7	FE-Modellierung	33
3	Implementierung.....	35
3.1	Initialisierung mit FE-Datei	35
3.2	Initialisierung mit CPACS-Datei.....	38
3.2.1	CPACS.....	38
3.2.2	FE-Netz	40
3.2.3	FE-Modell Generierung	49
4	Optimierungen	51
4.1	Strukturoptimierung.....	52
4.2	Formoptimierung	55
4.3	Kombinierte Form- Strukturoptimierung	56
4.4	Verifizierung der Ergebnisse.....	58

5	Fazit	61
5.1	Zusammenfassung.....	61
5.2	Aussicht	62
6	Literaturverzeichnis.....	64
A	Optimierungsergebnisse	66

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Schema einer Cybermatrix [1]	1
Abbildung 2: Mögliche Cybermatrix des lightworks-Frameworks [1]	2
Abbildung 3: Verschiedene Optima am Beispiel einer Zielfunktion.....	6
Abbildung 4: Ablauf einer Optimierung [2]	8
Abbildung 5: Annäherung einer Funktion f an einem Entwicklungspunkt x durch den MMA-Algorithmus	9
Abbildung 6: Mögliche Designvariablen an einem Flügel [8]	12
Abbildung 7: Druckbelastung an einem rechteckigen Laminat [10]	15
Abbildung 8: Geometrische Restriktionen am Beispiel eines Flügels [12]	17
Abbildung 9: Bestimmung der Dicke t bei der Punktdickenrestriktion	19
Abbildung 10: UML-Klassendiagramm der geometrischen Restriktionen	20
Abbildung 11: Relative Abweichung der finiten Differenzen über der Schrittweite	22
Abbildung 12: Vergleich der relativen Abweichungen von finiten Differenzen gegenüber komplexer Schrittweite	24
Abbildung 13: Grafische Darstellung der Vorwärtsmethode	25
Abbildung 14: Grafische Darstellung der Rückwärtsmethode	25
Abbildung 15: Modulare Darstellung der Restriktionsberechnung im lightworks-Prozess	26
Abbildung 16: Innere Komponenten eines Flügels [16]	29
Abbildung 17: Komponenten eines versteiften Panels	30
Abbildung 18: Zwei mögliche Rippenorientierungen eines Flügels. Links orthogonal zu den Holmen, rechts parallel zur Flugrichtung. [16]	31
Abbildung 19: Berechnung der Beullängen [17]	32
Abbildung 20: Materialorientierungen am Beispiel von Oberschalenpaneele	33
Abbildung 21: Hierarchischer Aufbau von Objekten in FE-Dateien	36
Abbildung 22: Paneele am Flügelkasten, getrennt durch Rippen.	37
Abbildung 23: Prozess von der FE-Datei bis hin zur Optimierung.....	38
Abbildung 24: Flügel ohne innere Struktur	39
Abbildung 25: Flügel mit Rippen und Holme.....	39
Abbildung 26: Flügelkasten aus Ober-, Unterschale, Rippen und Holme	40
Abbildung 27: Links: strukturiertes Netz. Rechts: unstrukturiertes Netz	42
Abbildung 28: Vernetzung von zwei Kanten mit transfiniten Punkten	43
Abbildung 29: Strukturierte Vernetzung eines Flügelkastens	45
Abbildung 30: Änderung der Profilhöhe eines Flügelkastens	46
Abbildung 31: Änderung der Profilhöhe durch Skalierung von Knotenpunkten	48
Abbildung 32: Prozess von einer CPACS-Datei bis hin zur Optimierung	50
Abbildung 33: Restriktionswerte durch die aufgebracht Lasten aus Tabelle 1 am Flügelkasten und den Startwerten aus Tabelle 2	53
Abbildung 34: Optimierte Hautdicken des Flügelkastens	54
Abbildung 35: Optimierte Profilhöhe des Flügelkastens.....	55
Abbildung 36: Optimierte Hautdicken und Profilhöhen des Flügelkastens	57

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: An den Rippen angebrachte Lasten.....	51
Tabelle 2: Ergebnisse der Optimierung mit reinen Strukturparametern.....	54
Tabelle 3: Ergebnisse der Optimierung mit reinen geometrischen Parametern.....	56
Tabelle 4: Ergebnisse der Optimierung mit kombinierten strukturellen und geometrischen Parametern.....	58
Tabelle 5: Anfangsprofilhöhen der Vergleichsoptimierungen.....	58
Tabelle 6: Endergebnisse der Optimierungen mit veränderter Profilhöhe.....	59
Tabelle 7: Endergebnisse der Optimierungen mit veränderten Startwerten.....	59
Tabelle 8: Strukturelle Optimierung mit 20 % höheren Profilhöhen.....	66
Tabelle 9: Strukturelle Optimierung mit 20 % geringeren Profilhöhen.....	66
Tabelle 10: Kombinierte Optimierung mit halben Profilhöhen als Startwert.....	66
Tabelle 11: Kombinierte Optimierung mit doppelten Profilhöhen als Startwert.....	67
Tabelle 12: Kombinierte Optimierung mit halben Paneeldicken als Startwert.....	67
Tabelle 13: Kombinierte Optimierung mit doppelten Paneeldicken als Startwert.....	68

1 Einleitung

Bei multidisziplinären Optimierungen werden verschiedenste Disziplinen miteinander verknüpft. Dabei ist es meist nicht möglich, die Disziplinen getrennt voneinander zu betrachten. Die Disziplinen teilen sich oftmals untereinander die gleichen Informationen. Ein Beispiel dafür wäre die strukturelle und aerodynamische, oder auch aerostrukturelle Optimierung von Flügelstrukturen. Es ist hier nicht möglich, diese beiden Disziplinen komplett unabhängig voneinander zu betrachten. So haben z. B. dünnere Hautdicken Auswirkungen auf die Flexibilität des Flügels und somit auch auf die Aerodynamik des Flügels.

Ilić et al. [1] entwickelten daher eine Repräsentation von Verknüpfungen einzelner Disziplinen. Das *cybermatrix protocol*. Es handelt sich dabei um eine N^2 -Matrix, welche aus der Karush-Kuhn-Tucker hergeleitet wurde.

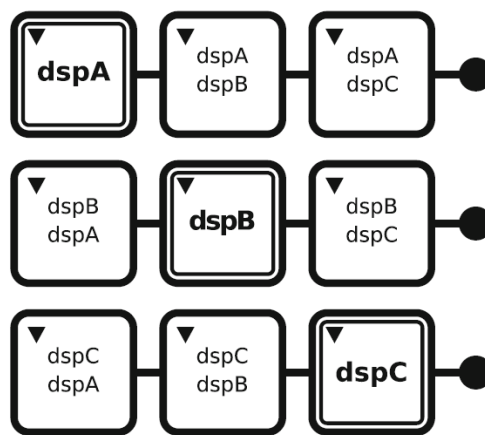


Abbildung 1: Schema einer Cybermatrix [1]

Es befinden sich auf der Hauptdiagonale die verschiedenen Disziplinen. Die Blöcke, welche sich nicht auf der Hauptdiagonale befinden, beschreiben welche Informationen die Disziplin der jeweiligen Reihe aus einer anderen Disziplin zieht.

Es ist zu erwarten, dass sich dem globalen Optimum besser angenähert werden kann, umso mehr Disziplinen bei der Optimierung betrachtet werden. Monodisziplinäre Optimierungen verlaufen oftmals in schlechtere lokale Optima. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, ob durch multidisziplinäre Optimierungen tatsächlich bessere Optima zu erwarten sind. Dafür wird in dieser Arbeit das Optimierungsframework *lightworks* verwendet. Bisher werden dort Flügelstrukturen strukturell optimiert. Das Ziel ist es dort auch multidisziplinäre Optimierungen durchzuführen, um so bessere

Entwürfe zu erhalten. Wird die Cybermatrix aus Abbildung 1 auf *lightworks* angewendet, so ergibt sich folgende Matrix.

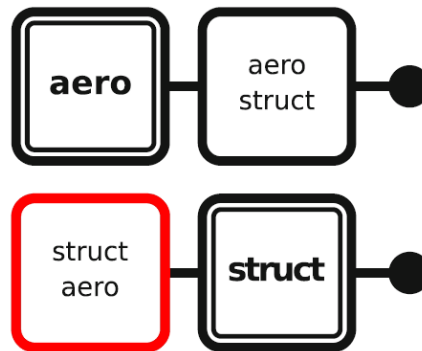


Abbildung 2: Mögliche Cybermatrix des *lightworks*-Frameworks [1]

Zum jetzigen Zeitpunkt existiert bisher die untere Reihe der strukturellen Disziplin. Die obere aerodynamische Reihe ist aber ein mögliches Ziel bei der Entwicklung von *lightworks*. Dafür soll in dieser Arbeit die Verknüpfung der strukturellen Disziplin mit der aerodynamischen erfolgen, welche in Abbildung 2 rot markiert wurde. Mit anderen Worten soll die bisherige strukturelle Zielfunktion durch Parameter erweitert werden, welche ebenfalls die Aerodynamik des Flügels beeinflussen können.

1.1 Lightworks

Vom Deutschen Luft- und Raumfahrtzentrum (DLR) wird eine Optimierungsumgebung namens *lightworks* entwickelt. Das Ziel dieses Frameworks ist es, die Masse eines Flugzeugflügels unter Einhaltung bestimmter Restriktionen zu optimieren. Dafür sind verschiedene Optimierungsalgorithmen implementiert. Die Struktur des Flügels wird aus einer FE-Datei hergeleitet (siehe Abschnitt 3.1). Stabilität und Festigkeit des Flügels können mit verschiedenen Kriterien überprüft werden. Diese werden in Kapitel 2.4.1 vorgestellt. Der Benutzer kann selbst entscheiden, welche der in *lightworks* implementierten Entwurfsvariablen optimiert werden sollen, um so die Masse des Flügels möglichst stark zu verringern. Welche Variablen möglich sind, ist aus Kapitel 2.3 ersichtlich.

1.2 Vorgehensweise

Es werden in Kapitel 2 zunächst einige theoretische Grundlagen geklärt. Dazu gehören Grundbegriffe rund um die Optimierung, wie Zielfunktion, Restriktionsfunktion und Entwurfsvariablen. Da hier gradientenbasierte Optimierverfahren verwendet werden, werden ebenfalls die gängigen Methoden

der Gradientenbestimmung vorgestellt. Letztlich wird in diesem Kapitel beschrieben, wie der Flügel von Innen aufgebaut ist sowie der Aufbau eines FE-Modells.

In Kapitel 3 werden die Methoden für eine Formoptimierung in dem *lightworks*-Framework umgesetzt. Zunächst wird in Abschnitt 3.1 erläutert, wie eine Optimierung in *lightworks* bisher initialisiert wurde. Im nächsten Abschnitt 3.2 wird dann eine neue Initialisierungsmethode vorgestellt, mit der es möglich ist, den Flügel auch geometrisch zu optimieren. Dabei werden die nötigen Schritte von der Initialisierung bis hin zur Optimierung erläutert. Dazu zählen unter anderem das Erstellen der Geometrie und aktualisieren der Geometrie nach einem Iterationsschritt.

Anschließend finden in Kapitel 4 die Optimierung mit der neuen Methode aus Abschnitt 3.2 statt. Es werden verschiedene Optimierungen mit verschiedenen Entwurfsvariablen durchgeführt und miteinander verglichen. Ebenfalls werden die Ergebnisse der kombinierten Optimierung mit strukturellen und geometrischen Parametern verifiziert und auf Robustheit geprüft.

Die Ergebnisse werden dann im letzten Kapitel nochmal zusammengetragen und diskutiert, woraus dann ein Fazit dieser Arbeit geschlossen wird.

1.3 Ziel dieser Arbeit

Bisher ist es möglich, die Struktur eines Flügels mit *lightworks* zu optimieren. Es wird also unter anderem der Materialaufbau und die -dicke der einzelnen Flügelpaneele verändert. In dieser Arbeit sollen Methoden entwickelt werden, die zusätzlich die äußere Geometrie des Flügels variieren kann. Dazu ist zu klären, welche geometrischen Parameter bei einer Flügeloptimierung betrachtet werden können. Aus diesen Parametern soll zunächst einer selektiert werden, um mit diesem den Flügel zu optimieren. So soll zunächst ein Verfahren entwickelt werden, geometrische Parameter zu integrieren. Weiterhin ist zu klären, ob durch die Kombination von strukturellen und geometrischen Parametern bessere Ergebnisse erzielt werden können, als mit den bisherigen Optimierungen mit rein strukturellen Parametern.

Durch die einhergehenden Geometrieänderungen durch die Optimierung ist es notwendig das FE-Netz zu aktualisieren. Die Änderung des Netzes wird sich ebenfalls auf die Gradienten der Ziel- und Restriktionsfunktionen auswirken. Es ist zu klären, wie eine effiziente Methode der FE-Netz-Aktualisierung in den *lightworks*-Prozess implementiert werden kann. Mit dieser Methode soll es möglich sein, Gradienten der Geometrieänderungen bestimmen zu können. Dazu können auch neue numerische Gradientenverfahren zu den bisherigen in *lightworks* implementiert werden. Es wird

dadurch erwartet, die Genauigkeit dieser Gradienten gegenüber den finiten Differenzen zu verbessern. Eine denkbare Methode wären die Gradienten mit komplexer Schrittweite. Es ist zu klären, ob durch diese Methode die Genauigkeit der Gradienten verbessert werden kann und ob es möglich ist, diese Methode in den *lightworks*-Prozess zu integrieren.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen, welche für diese Arbeit Relevanz besitzen, aufgeführt. Dabei handelt es sich um Grundlagen rund um die Optimierung, unter anderem Entwurfsvariablen, Restriktionsfunktionen und Gradienten. Weiterhin werden der Aufbau und Komponenten eines Flügels beschrieben, da als Ziel dieser Arbeit ein solcher Flügel für die Optimierungen verwendet wird.

2.1 Strukturoptimierung

In den meisten Anwendungsfällen ist das Ziel einer Strukturoptimierung, die Masse des zu optimierenden Systems zu minimieren und dabei die zulässigen Materialspannungen, Bauteilverformungen als auch andere selbst definierte Restriktionen nicht zu überschreiten. Die Masse des Systems wird deshalb als Zielfunktion bezeichnet. Als Ausgang jeder Strukturoptimierung dient ein Modell, das die Struktur des Systems zusammenfasst. Dieses wird hier auch als Strukturmodell bezeichnet. Es ist zu entscheiden, welche Parameter verändert bzw. optimiert werden können. Solche Parameter werden auch als Entwurfsvariablen bezeichnet. Weiterhin ist zu beachten, welche Restriktionen eingehalten werden müssen. Oft spielen auch geometrische Restriktionen eine Rolle, wobei ein Bauteil bestimmte Maße einhalten oder nicht überschreiten soll. Die Restriktionen definieren den zulässigen Bereich der Zielfunktion. Bei den Optimierungen in dieser Arbeit gilt, dass so lange der Wert der Restriktionsfunktion an einem bestimmten Punkt unter null ist, gilt sie dort als eingehalten.

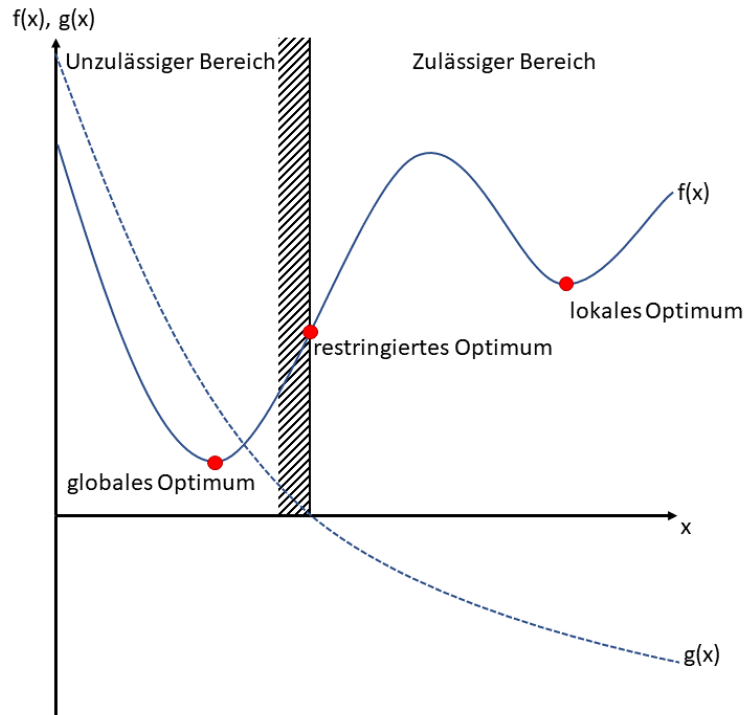


Abbildung 3: Verschiedene Optima am Beispiel einer Zielfunktion

Die Optimierung durchläuft einen iterativen Prozess, indem die Entwurfsvariablen mit bestimmten Optimierungsalgorithmen Schritt für Schritt angepasst werden. Nach jedem Iterationsschritt ist zu prüfen, ob ein Optimum gefunden wurde. Ein Optimum ist bei einer konvexen Funktion äquivalent zu dem Minimum dieser Funktion. Es wird zwischen lokale und globale Optima unterschieden. Bei einem globalen Optimum handelt es sich um die beste Lösung im gesamten realen Parameterraum. Das lokale Optimum hingegen gilt nur in einem begrenzten Bereich als beste Lösung. In Abbildung 3 sind die verschiedenen Optima für eine Beispielfunktion abgebildet. Ebenfalls ist dort eine Restriktionsfunktion zu erkennen. Der Schnittpunkt dieser Funktion mit der x-Achse stellt die Grenze zwischen zulässigen und unzulässigen Bereich dar. Hier befindet sich links der Grenze der unzulässige Bereich und rechts davon der zulässige. Bei Berücksichtigung der Restriktionsfunktion wäre das abgebildete globale Optimum im unzulässigen Bereich. Aus diesem Grund würde sich das globale Optimum in diesem Fall direkt an die Restriktionsgrenze verschieben.

Wurde nach einer Iteration kein Optimum gefunden, werden die Entwurfsvariablen in einem weiteren Iterationsschritt weiter angepasst. Abbildung 4 zeigt den Ablauf eines solchen Prozesses. Zur Überprüfung, ob ein Optimum gefunden wurde, dienen bestimmte Abbruchkriterien. Im Folgenden werden die gängigen Abbruchkriterien nach Schumacher [2] erläutert.

Beim ersten Kriterium wird der Gradient der Zielfunktion nach den Entwurfsvariablen gebildet. Die

Werte der aktuellen Entwurfsvariablen werden dann in den Gradienten eingesetzt und für jede Variable aufsummiert. Geht diese Summe gegen null, so befindet sich in diesem Punkt ein Extremum. Ist die Zielfunktion in dem Bereich konvex, so kann davon ausgegangen werden, dass es sich bei dem Extremum um ein Minimum handelt. Das ε sollte dabei klein gewählt werden. Größenordnungen von 10^{-5} bis 10^{-8} sind dabei üblich.

1. Abbruchkriterium:

$$\sum_i \left| \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) \right| < \varepsilon \quad 2.1$$

Beim nächsten Abbruchkriterium wird der Fortschritt der Optimierung überprüft. Dabei wird die relative Änderungsrate der Zielfunktion des aktuellen und des letzten Iterationsschritts gebildet. Ist diese genügend klein, wird die Optimierung an dieser Stelle beendet. Auch hier sollte ε_{rel} klein gewählt werden.

2. Abbruchkriterium:

$$\frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k+1)})}{\max\{|f(x^{(k+1)})|, 10^{-8}\}} < \varepsilon_{rel} \quad 2.2$$

Das dritte Abbruchkriterium dient zur Sicherheit, falls nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen kein Optimum gefunden werden kann. Wenn das der Fall ist, muss überprüft werden, ob der verwendete Optimierungsalgorithmus für dieses Optimierungsproblem geeignet ist. Hier wird die Anzahl der Iterationen k auf ein Maximum begrenzt.

3. Abbruchkriterium:

$$k = k_{max} \quad 2.3$$

Das letzte Kriterium wird bei restringierten Optimierungsproblemen benötigt. Gleichung 2.4 stellt die Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Bedingung dar. Diese wurde zunächst von Karush [3] und später ebenfalls von Kuhn und Tucker [4] aufgestellt.

4. Abbruchkriterium:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) + \sum_j^m \vec{\lambda}_j \vec{\nabla} g_j(\vec{x}) = \vec{0} \quad 2.4$$

Mit dieser Bedingung kann sichergestellt werden, dass auch alle Restriktionen erfüllt werden. Grafisch kann die Gleichung so interpretiert werden, dass der steilste Anstieg der Zielfunktion und steilster Anstieg der Restriktion genau gegeneinander gerichtet sind. Diese Bedingung ist nur in einem lokalen

Optimum möglich. Somit befindet sich der aktuelle Systemzustand genau auf einer Restriktionsgrenze. Anzumerken ist, dass auch wenn eines der obigen Abbruchkriterien erreicht wurde, noch nicht sichergestellt ist, ob es sich bei dem gefundenen Optimum um das Globale handelt oder nur ein lokales Minimum des abgesuchten Bereiches ist.

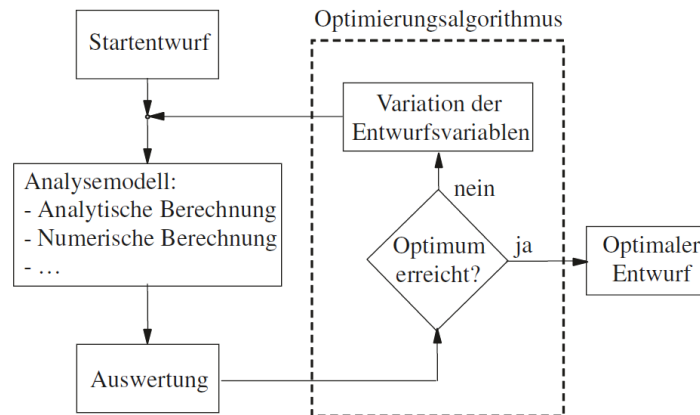


Abbildung 4: Ablauf einer Optimierung [2]

2.2 Optimierungsalgorithmus – MMA

Die Methode der bewegten Asymptoten oder „**M**ethod of **M**oving **A**symptotes“ wurde erstmal von Svanberg [5] vorgestellt. Hierbei wird ein Optimierungsproblem in jeder Iteration mithilfe von Asymptoten approximiert. Dadurch werden Ziel- und Restriktionsfunktionen in reziproke und damit konvexe Funktionen überführt. Das Optimum dieser Approximation wird dann als Ausgangspunkt der nächsten Iteration gewählt, bis letztendlich ein Abbruchkriterium erfüllt wird.

Zunächst werden um jeden Parameter $x_j^{(k)}$ für $j = 1, \dots, n$ der Iteration k zwei Grenzen $L_j^{(k)}$ und $U_j^{(k)}$ gewählt, sodass $L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)}$ gilt. Die Parameter L und U stellen die bewegten Asymptoten dar. Eine Beispielfunktion mit der oberen und unteren Asymptote ist in Abbildung 5 zu erkennen. Für die Zielfunktion der k -ten Iteration gilt:

$$f^k(\vec{x}) = f(\vec{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_j^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) \quad 2.5$$

$$p_j^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}, & \forall \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} > 0 \\ 0, & \forall \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \leq 0 \end{cases} \quad 2.6$$

$$q_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & \forall \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}, & \forall \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} < 0 \end{cases} \quad 2.7$$

Analog werden ebenfalls die Restriktionsfunktionen so approximiert. Zwischen den Optimierungsiterationen werden die Positionen der Asymptoten L und U verschoben. Ändert sich häufig die Fortschrittsrichtung der Optimierung zwischen den Iterationen, so können die Asymptoten näher an die Parameter $x_j^{(k)}$ gerückt werden. Dadurch stabilisiert sich die Optimierung. Falls andererseits der Vorgang eher langsam und monoton verläuft, können die Asymptoten weiter auseinander positioniert werden. So wird der Prozess relaxiert.

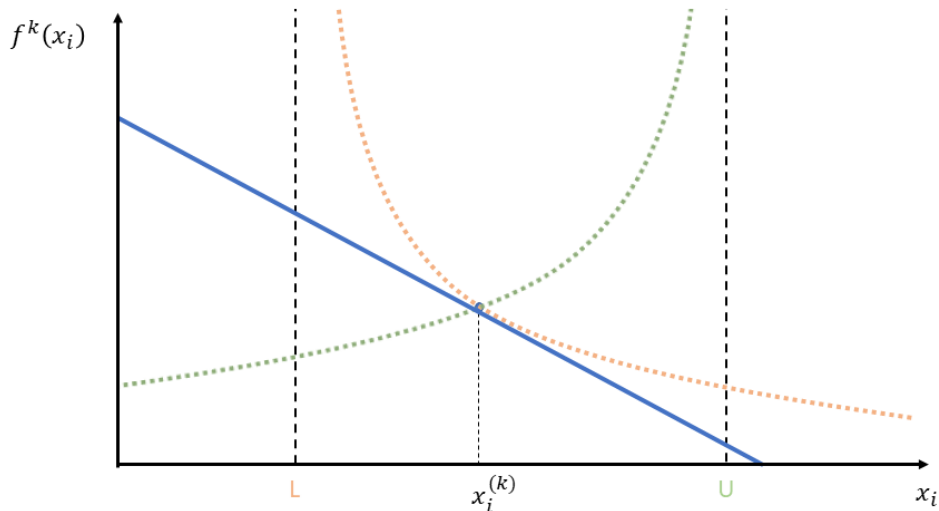


Abbildung 5: Annäherung einer Funktion f an einem Entwicklungspunkt x durch den MMA-Algorithmus

Mithilfe dieses Optimierungsalgorithmus ist es möglich, flexibel nicht lineare Optimierungsprobleme zu lösen. So können jegliche Arten von Restriktionsfunktionen berücksichtigt werden, solange die Gradienten dieser nach den Designvariablen bestimmt werden können.

2.3 Entwurfsvariablen

Die Entwurfsvariablen eines zu optimierenden Systems sind solche Variablen, die während der Optimierung variiert werden, um so das Optimum der Zielfunktion zu erreichen. Die Wahl der Entwurfsvariablen hat dabei Einfluss auf das resultierende Optimum. So existiert beim Entwurf eines Systems mehr Freiheit, wenn viele Entwurfsvariablen definiert sind. Meist kann so auch das Ergebnis der Optimierung verbessert werden. Andererseits erhöht sich mit der Anzahl der Entwurfsvariablen auch der Aufwand der Optimierung. Der Anwender sollte demnach entscheiden, welche Entwurfsvariablen für die jeweilige Optimierung sinnvoll sind und welche vernachlässigt werden können.

Im Folgenden werden mögliche Entwurfsvariablen für die Optimierung von Flügelstrukturen vorgestellt. Dabei wird unterschieden zwischen materialspezifischen und geometrischen Variablen.

2.3.1 Strukturelle Parameter

Die strukturellen Parameter werden in dieser Arbeit weniger im Fokus stehen als die geometrischen Parameter. Aus diesem Grund werden diese in diesem Kapitel kurz vorgestellt.

Als strukturelle Parameter werden in dieser Arbeit nur die Parameter bezeichnet, welche sich mit der Struktur der Flügelpaneele sowie deren Materialaufbau befassen. Das Material eines Flügelpaneels besteht hier meistens aus einem Laminat. Ein Laminat wird als Zusammenschluss mehrerer Einzellagen bezeichnet. Diese Einzellagen haben in der Regel verschiedene Faserorientierungen. Schürmann [6] beschreibt einige Vorteile, welche Faserverbundwerkstoffe besitzen. Abgesehen von guter Korrosionsbeständigkeit oder freier Formgestaltung ist wohl der größte Vorteil solcher Faserverbundwerkstoffe, dass sie eine hohe Stabilität und Festigkeit bei vergleichsweise geringer Dichte besitzen. Deswegen eignen sich Faserverbundwerkstoffe hervorragend für den Leichtbau. Nachteilig ist dennoch, dass die Fasern nur Kräfte entlang der Faserorientierung und nicht quer dazu aufnehmen können. Aus diesem Grund werden in einem Laminat auch immer Lagen mit unterschiedlichen Faserorientierungen verwendet, damit das Laminat möglichst vielen verschiedenen Belastungen aus beliebiger Richtung standhalten kann.

Optimierbare Parameter sind bei einem Laminat z. B. die Anzahl der Einzellagen. Dadurch steigt die Belastbarkeit des Flügels, hat aber selbstverständlich auch negative Auswirkungen auf die Masse des Flügels. Der Faserwinkel jeder Einzellage kann ebenfalls variiert werden, um so die bestmögliche Konfiguration des Laminats zu finden und damit die Steifigkeit zu maximieren. Nachteilig bei den

beiden oben genannten Parametern ist, dass diese keine kontinuierlichen Parameter darstellen. Außerdem haben Laminats die Eigenschaft eine große Freiheit bei der Auslegung zu besitzen und somit auch viele verschiedene Konfigurationsmöglichkeiten. Die oben genannten Entwurfsvariablen sind also nicht gut geeignet für einen Optimierungsprozess.

Aus diesem Grund haben Tsai und Pagano [7] erstmals die Lamination-Parameter (LP) eingeführt. Diese Parameter beschreiben die Steifigkeit eines Laminats und bilden sich aus Dicken der Einzelschichten sowie Faserorientierung innerhalb der Lagen. Die Steifigkeit eines beliebigen Laminats kann durch zwölf LP und eine Dicke beschrieben werden. Durch die LP reduziert sich die Anzahl der Entwurfsvariablen von $2n$ auf 13, wobei n die Anzahl der Einzellagen des Laminats ist. Ein weiterer Vorteil ist, dass die LP eine kontinuierliche Repräsentation des gesamten Entwurfsraumes des Laminats darstellen. Sie eignen sich also gut für die Optimierung von Faserverbunden.

Oftmals werden Flügelpaneele mithilfe von Stringern verstärkt (siehe Kapitel 2.6.1). Diese bestehen ebenfalls aus Laminaten. Die LP dieser Laminats können auch als Entwurfsvariablen für die Optimierung verwendet werden. Außerdem kann der Winkel der Stringer in Relation zur Flügelhaut und der Abstand der Stringer untereinander angepasst werden. Auch die Abmessungen der Stringerelemente, also vom Stringerfuß, -steg und -flansch können bei der Optimierung mit beachtet werden.

2.3.2 Geometrische Parameter

Bisher sind im Optimierungsframework *lightworks* strukturspezifische Parameter implementiert. Unter strukturspezifischen Parametern versteht man unter anderem Parameter, welche den Aufbau der Flügelhaut definieren, dessen Dicke verändern oder die Paneelstringer anpassen. Solche Parameter werden bei der Optimierung in *lightworks* bereits vorgesehen. Zusätzlich zu den strukturspezifischen Parametern ist es denkbar auch geometrische Parameter des Flügels zu berücksichtigen. Solche Parameter beeinflussen die äußere Geometrie des Flügels, wodurch wiederum Änderungen in der FE-Analyse zu erwarten sind. Durch die Formoptimierung soll die Geometrie des Flügels so geändert werden, sodass eine möglichst leichte Flügelgeometrie entsteht und dabei alle Festigkeits- und Stabilitätsrestriktionen eingehalten werden.

Kenway und Martins [8] haben bereits eine Optimierung eines Flügels mit geometrischen und strukturellen Parametern durchgeführt. Dort wurde der Flügel allerdings in zwei Disziplinen optimiert. Einmal strukturell, wodurch eine möglichst leichte Struktur entsteht und aerodynamisch, wodurch der Flügel möglichst optimale aerodynamische Eigenschaften besitzt. Eine solche multidisziplinäre

Optimierung bietet sich bei der Flügeloptimierung besonders gut an, da die genannten Disziplinen direkt miteinander gekoppelt sind. Durch eine leichte Flügelstruktur erfährt der Flügel größere Verformungen während Flugmanöver. Diese Verformungen beeinträchtigen auch die Aerodynamik des Flügels. Es muss eine Zielfunktion definiert werden, welche diese beiden Disziplinen miteinander verknüpft. Kenway und Martins haben sich für das Anfangsgewicht des Flügels vor dem Start und einen minimalen Kraftstoffverbrauch entschieden. In der Praxis wird meist ein Kompromiss zwischen diesen beiden Zielfunktionen gefunden.

In dieser Arbeit wird die Aerodynamik des Flügels zunächst nicht in Betracht gezogen, sondern nur dessen Struktur. Es gibt dennoch geometrische Variablen, welche nicht nur auf die Aerodynamik des Flügels Einfluss haben, sondern auch auf die Spannungszustände im Flügel. Diese sind hier von Bedeutung. Kenway und Martins haben solche Variablen als globale Variablen benannt. Dazu zählen die Spannweite des Flügels und die Vorderkantenpfeilung, welche an zwei Punkten des Flügels definiert wird. Ebenfalls dazu gehören die Verdrehung des Flügels und die Profiltiefe, welche an fünf bzw. vier Punkten entlang des Flügels definiert und dazwischen linear interpoliert werden. Außerdem wurden in diesem Fall noch 160 Profilparameter gewählt, welche das Profil des Flügels bestimmen. Diese Parameter wurden mithilfe der Freiform-Deformation angepasst.

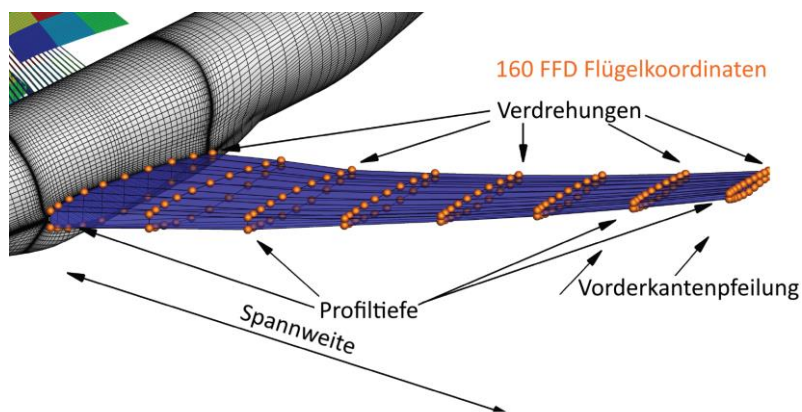


Abbildung 6: Mögliche Designvariablen an einem Flügel [8]

Ein weiterer Ansatz von Bombardieri et al. [9] war es, die komplette Flügelgeometrie mit Kontrollpunkten zu versehen und diese ebenfalls mit der Freiform-Deformation zu beeinflussen. Durch eine strategisch sinnvolle Platzierung dieser Punkte können die oben genannten geometrischen Parameter, die Kenway und Martins separat definiert haben, simultan verändert werden. Durch diese Methode kann eine Reduzierung der Designvariablen erreicht werden und damit eine Reduzierung des Rechenaufwands.

In dieser Arbeit sollen zunächst allgemeine geometrische Parameter optimiert werden und der Einfluss dieser auf die Zielfunktion und die Restriktionsfunktionen gezeigt werden. Dabei müssen diese geometrischen Parameter nicht unbedingt flügel-spezifischer Natur sein. Es bietet sich demnach an, die Maße der zu untersuchenden Geometrie zu ändern. Hier muss entschieden werden, in welcher Dimension die Größenänderung erfolgen soll. Da die innere Struktur eines Flügels, also die Rippen und Holme, ausschließlich in Höhenrichtung ausgerichtet sind, bietet es sich an, zunächst die Höhe der Geometrie anzupassen. Bezogen auf einen Flügel wäre dies somit die Profilhöhe des Flügels. Es muss bei der Änderung der Höhe ein Kompromiss zwischen Masse des Flügels und Stabilität und Festigkeit gefunden werden.

Verdeutlicht kann dies mit der Biegespannung an einem Balken. Die Biegespannung berechnet sich mit:

$$\sigma_b(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad 2.8$$

Eine Erhöhung der Balkenhöhe hätte zu Folge, dass das Trägheitsmoment I_y steigt. Durch das erhöhte Trägheitsmoment sinkt somit die Biegespannung im Balken. Dieses vereinfachte Prinzip kann ebenfalls auf den Flügel angewendet werden. Selbstverständlich würde die Masse ebenso vergrößert werden. Es ist also zu erwarten, dass es bei der Höhenoptimierung ein Optimum gibt, indem die Masse möglichst gering ist und alle Restriktionen eingehalten werden.

Als Gegenbeispiel steht dazu die Spannweite des Flügels. Aus der Sicht der reinen Formoptimierung ist zu erwarten, dass hier kein sinnvolles Optimum gefunden werden kann. Durch eine Verringerung der Spannweite verringert sich damit auch der Hebelarm des Momentes $M_y(x)$ aus Gleichung 2.8. Ein kleinerer Hebelarm bewirkt somit, dass die Biegespannung ebenfalls sinkt. Gleichzeitig verringert sich die Masse des Flügels. Es muss hier also kein Kompromiss gefunden werden und die optimale Lösung ist in diesem Fall eine Spannweite gegen null. Um eine sinnvolle Optimierung der Spannweite durchzuführen, müsste ebenfalls die Aerodynamik des Flügels in Betracht gezogen werden. Wie schon oben beschrieben, wird sich in dieser Arbeit aber lediglich auf die Form- und Strukturoptimierung konzentriert.

2.4 Restriktionen

Durch Restriktionsfunktionen wird der zulässige Entwurfsraum eingeschränkt. Die Lösung einer Optimierung sollte sich im zulässigen Bereich befinden. Am häufigsten vertreten sind die

Ungleichheitsrestriktionen. Diese werden meistens mit $g(x)$ gekennzeichnet. Damit eine Restriktion eingehalten wird, muss hier gelten:

$$g(x) \leq 0 \quad 2.9$$

Neben den Ungleichheitsrestriktionen gibt es noch die Gleichheitsrestriktionen, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass diese genau eingehalten werden müssen. In dieser Arbeit jedoch werden nur die Ungleichheitsrestriktionen behandelt.

2.4.1 Strukturelle Restriktionen

Solche Restriktionsfunktionen können im Wesentlichen so definiert werden, dass eine aufgebrachte Last die kritische Last nicht überschreitet. Meistens wird die aufgebrachte Last mit einem Sicherheitsfaktor belegt, um einen Spielraum zwischen dieser und der kritischen Last zu schaffen. Somit gilt für $g(x)$ hier im Allgemeinen:

$$g(x) = \frac{n \cdot \lambda}{n_{krit}} - 1 \leq 0 \quad 2.10$$

Wie hoch die kritische Last n_{krit} gesetzt werden kann, wird mit verschiedensten Kriterien bestimmt. Die Wahl des richtigen Kriteriums hängt davon ab, um welches Bauteil es sich handelt, wie es beansprucht wird und auf welches Versagen dieses Bauteil untersucht werden soll.

Stabilität

Die Stabilität eines Panels wird durch die Fähigkeit unter einer Last nicht zu beulen gekennzeichnet. Beulen kann unter starken Druck- oder Scherbeanspruchungen bei dünnwandigen Strukturen auftreten. Dabei verändert sich die Form des Bauteils und es entsteht eine wellenförmige Oberfläche. Im Handbuch Struktur Berechnung (HSB) [10] werden Kriterien beschrieben, mit denen es möglich ist, die kritische Last durch Druck- oder Scherbeanspruchung analytisch zu bestimmen.

Das erste Kriterium soll den Fall des Beulens unter einer Drucklast darstellen. Das Kriterium 45111-08, Issue B aus dem HSB gilt für rechteckige, flache, orthotropische Lamine, die mit einer uniaxialen Drucklast beansprucht werden. Passend, um die Paneele eines Flügels näherungsweise abzubilden. In Abbildung 7 ist eine Skizze eines solchen Laminats mit den Beullängen a und b abgebildet.

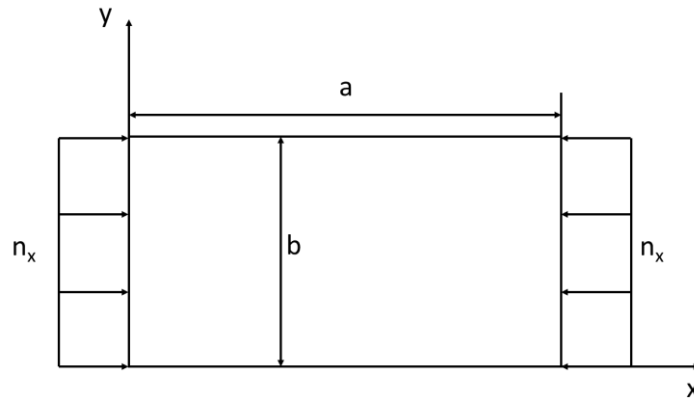


Abbildung 7: Druckbelastung an einem rechteckigen Laminat [10]

Dort berechnet sich die kritische Last, ab welcher Beulen auftritt, mit folgender Gleichung:

$$n_{x,krit} = k_x \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sqrt{\tilde{D}_{11} \cdot \tilde{D}_{22}} \quad 2.11$$

Da diese Kriterien nur gelten, wenn keine Koppel-Steifigkeitsmatrix des Bauteils existiert, muss die Plattensteifigkeitsmatrix dementsprechend angepasst werden, falls doch vorhanden.

$$\tilde{D} = D - B^T \cdot A^{-1} \cdot B \quad 2.12$$

Bei dem Faktor k_x handelt es sich um einen Beulfaktor, welcher von den Lagerbedingungen, Abmaße und Steifigkeit der Platte abhängig ist.

Weiterhin spielt wie oben beschrieben die Scherbeanspruchung eine Rolle beim Beulen des Bauteils. Dieser Fall ist im HSB unter 45112-02 Issue B zu finden. Dort wird die kritische Scherbeanspruchung für ein orthotropisches, rechteckiges Bauteil wie folgt berechnet:

$$n_{xy,krit} = k \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sqrt[4]{D_{11} \cdot D_{22}^3} \quad 2.13$$

Wiedemann [11] hat die obigen Kriterien für Druck- und Schubbeanspruchung zu einem Kriterium zusammengefasst. Als Restriktionsfunktion wird das kombinierte Druck- und Schubkriterium mit Gleichung 2.14 definiert.

$$g(x) = \left(\frac{n_{xy}}{n_{xy,krit}}\right)^2 + \frac{n_x}{n_{x,krit}} - 1 \leq 0 \quad 2.14$$

Durch die Kombination der beiden Kriterien mit der obigen Formel wird die Anzahl der Restriktionen für eine Optimierung minimiert. Zusätzlich werden durch das kombinierte Kriterium die gegenseitigen Einflüsse der Einzelkriterien von Druck und Schub berücksichtigt. Grundsätzlich beziehen sich die

Stabilitätskriterien auf das gesamte Paneel mitsamt den Stringern. Die Art, Anordnung und Anzahl der Stringer können das Beulverhalten des Paneels im Positiven beeinflussen.

Festigkeit

Eine Möglichkeit, das Versagen eines Materials zu bestimmen, stellt die Gestaltänderungshypothese von v. Mises bereit [11]. Diese Versagenshypothese gilt für die Verformung im plastischen Bereich und für homogene Werkstoffe. Bei Laminaten wird also jede Lage separat ausgewertet, wobei die aufgebrachten Lasten auf das Laminat zunächst auf die Einzellagen verteilt werden. Es wird zunächst eine Vergleichsspannung ermittelt.

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad 2.15$$

Die obige Gleichung gilt für einen ebenen Spannungszustand. Mithilfe der Vergleichsspannung werden mehrachsige Beanspruchungen in einachsige überführt. Die resultierende Vergleichsspannung kann dann mit den kritischen Spannungen des Materials, ab denen ein Versagen auftritt aus Versuchen verglichen werden. Somit gilt für die Restriktionsfunktion die Gleichung 2.16, wobei σ die maximal erlaubte Spannung ist:

$$g(x) = \frac{\sigma_V}{\sigma} - 1 \leq 0 \quad 2.16$$

Spezielle Festigkeitskriterien für Faserverbundwerkstoffe werden hier nicht weiter behandelt, da hier keine Faserverbundoptimierungen durchgeführt werden und diese somit keine Relevanz besitzen.

2.4.2 Geometrische Restriktionen

Es werden hier zunächst allgemeine geometrische Restriktionen vorgestellt. Brelje und Martins [12] benennen vier dimensionsabhängige einfache Restriktionen. Diese Restriktionen werden anhand eines Flügels als Beispiel erläutert.

Zunächst gibt es die Punktdickenrestriktion. Anhand dieser wird die Profildicke des Flügels an einem Punkt restringiert. Die Liniendicken-Restriktion besteht aus mehreren Punktdickenrestriktionen und beschränkt die Dicke des Flügels entlang einer Linie. Das ist vorteilhaft im Bereich entlang des Holmes, wenn dieser eine minimale Dicke besitzen soll. Eine Dimension höher existiert die Flächendickenrestriktion, welche aus einem Feld aus Punktdickenrestriktionen besteht. Es wird also sichergestellt, dass die Dicke in einer bestimmten Fläche einen bestimmten Wert nicht unterschreitet. Zum Beispiel kann so sichergestellt werden, dass der Flügelmittelkasten des Flugzeugs noch zum

optimierten Flügel passt. Als Letztes gibt es noch die Volumenrestriktion, wodurch ein minimales Volumen des Flügels in einem definierten Bereich nicht unterschritten werden kann. Diese Restriktion kann z. B. dazu verwendet werden, ein Mindestvolumen für den Tank einzuhalten. Abbildung 8 zeigt die oben benannten geometrischen Restriktion anhand eines Flügels.

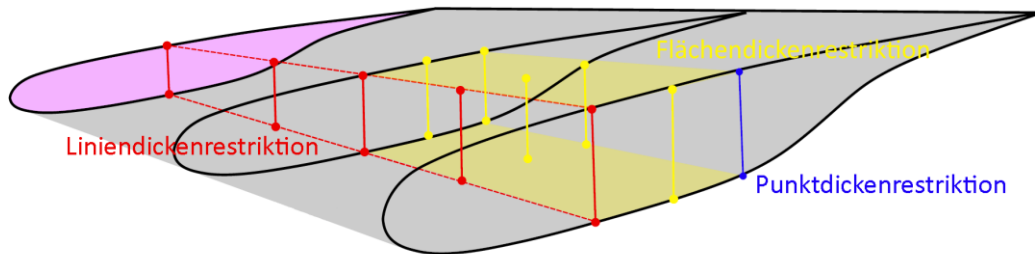


Abbildung 8: Geometrische Restriktionen am Beispiel eines Flügels [12]

Punktdickenrestriktion

Angenommen, ein Flügel ist in einem kartesischen Koordinatensystem definiert. Der Flügel besitzt eine Hauptebene E_h , welche durch die Spitze der Flügelvorderkante und durch die Spitze der Flügelhinterkante durchläuft. Diese Ebene wird durch einen Punkt $p_h = (x_h, y_h, z_h)$ und einem Normalenvektor n_h beschrieben. Oftmals entspricht die Hauptebene des Flügels der x-y-Ebene des Koordinatensystems. In diesem Fall gilt:

$$p_h = (0,0,0)$$

$$n_h = (0,0,1)$$

Für die Punktdickenrestriktion ist es nötig einen weiteren Punkt p_g und die Dicke t_g , die der Flügel an diesem Punkt mindestens haben soll, zu definieren. Der definierte Punkt wird zunächst auf die Hauptebene des Flügels projiziert. Der neue Punkt p_{gh} auf der Hauptebene berechnet sich aus den obigen Daten mit dem Skalarprodukt

$$p_{gh} = p_g - ((p_g - p_h) \cdot n_h) \cdot n_h. \tag{2.17}$$

Die Dicke des Flügels an diesem Punkt ist definiert als der Abstand der Schnittpunkte der Ober- und Unterschale mit der Linie

$$\vec{x} = p_{gh} + h \cdot n_h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Um die beiden Schnittpunkte der Ober- und Unterschale zu bestimmen, wird das FE-Netz als Hilfe verwendet. Durch das Netz ist der Flügel durch ebene Flächen diskretisiert, womit die Berechnung der Schnittpunkte vereinfacht wird.

Es bietet sich an, zunächst die beiden Elemente herauszufinden, welche sich mit der Linie \vec{x} schneiden. Dafür werden alle Knotenpunkte analog zu Gleichung 2.17 auf die Hauptebene des Flügels projiziert. So ist einfach zu ermitteln, zwischen welchen Knoten sich der Punkt p_{gh} befindet. Diese Knoten sind die Knoten der gesuchten Elemente.

Von den gesuchten Elementen sind die Eckpunkte bekannt. Mithilfe dieser lässt sich der Normalenvektor n_e des Elements bestimmen. Analog zu Gleichung 2.17 lässt sich der Punkt p_{gh} auf die Ebene der beiden Elemente projizieren und die Schnittpunkte bestimmen

$$p_e = p_{gh} - \left((p_{gh} - a) * n_e \right) \cdot n_e. \quad 2.19$$

Hier ist a einer der Eckpunkte des Elements. Die Dicke des Flügels an diesem Punkt lautet dann:

$$t = \|p_{e1} - p_{e2}\|. \quad 2.20$$

Es kann nun die Restriktionsfunktion aufgestellt werden. Diese besagt, dass die Dicke t kleiner sein muss als die definierte maximale Dicke t_g . Also:

$$g(x) = \frac{t}{t_g} - 1 \leq 0. \quad 2.21$$

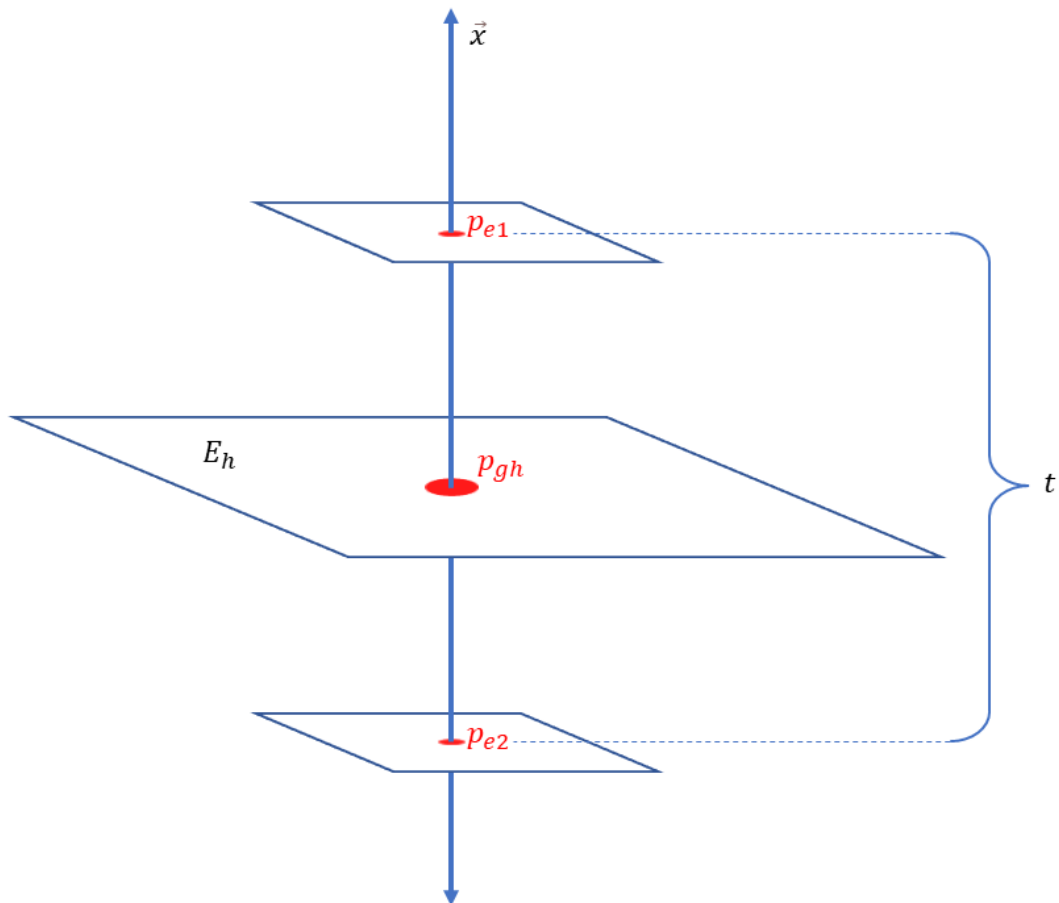


Abbildung 9: Bestimmung der Dicke t bei der Punktdickenrestriktion

Wie die Dicke t bestimmt wird, soll die Abbildung 9 verdeutlichen. Sie zeigt die Hauptebene E_h und den Punkt p_{gh} auf dieser Ebene. Die Linie \vec{x} ist parallel zu dem Normalenvektor der Hauptebene gerichtet. Diese schneidet zwei Elemente oberhalb und unterhalb der Hauptebene in den Punkten p_{e1} und p_{e2} . Der Abstand dieser beiden Punkte ist gleich der Dicke t , welche restringiert werden soll.

Mehrdimensionale Dickenrestriktionen

Die restlichen in Abbildung 8 abgebildeten Restriktionen bauen auf der Punktdickenrestriktion auf. Hierbei besteht eine Liniendickenrestriktion aus mehreren Punktdickenrestriktionen. Zur Definition einer Liniendickenrestriktion werden zwei Punkte, die maximale Dicke und die Auflösung der Punktdickenrestriktion benötigt. Letztere definiert, welchen Abstand die einzelnen Punktdickenrestriktionen zueinander haben sollten. Diese werden dann linear zwischen den beiden Anfangspunkten interpoliert. Analog besteht eine Flächendickenrestriktion aus mehreren

Liniendickenrestriktionen, wobei diese aus drei Punkten initialisiert wird. Ebenfalls wird hier eine einzuhaltende Mindestdicke und die Abstände zwischen den Liniendickenrestriktionen benötigt. Aus der Flächendickenrestriktion kann direkt auf die Volumenrestriktion geschlossen werden, indem statt die Abstände der Ober- und Unterschalen, die Volumina berechnet werden.

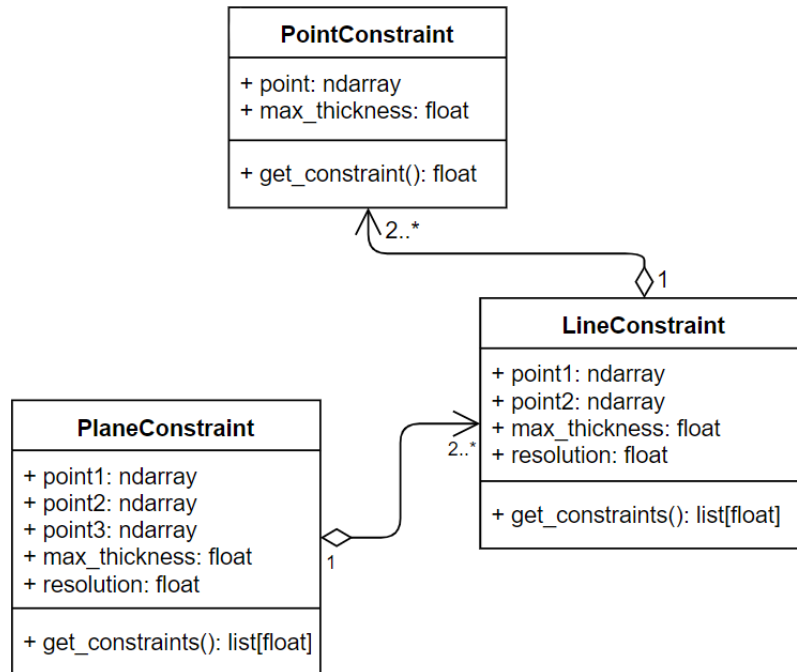


Abbildung 10: UML-Klassendiagramm der geometrischen Restriktionen

Die Abhängigkeiten und Relationen zwischen den geometrischen Restriktionen soll das UML-Klassendiagramm aus Abbildung 10 verdeutlichen. Mit UML-Klassendiagrammen werden Relationen zwischen Objektklassen bei objektorientierten Programmiersprachen gezeigt. Ebenfalls wird angegeben, aus welchen Attributen und Methoden eine Klasse zusammengesetzt ist.

2.5 Gradienten

In dieser Arbeit werden gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen verwendet. Die Gradienten werden für die Suchrichtung der Optimierung benötigt, wodurch die Effizienz gesteigert wird. Ein Großteil der Berechnungszeit wird dabei für die Berechnung der Gradienten benötigt und nicht für den Optimierungsalgorithmus selbst. Die Wahl eines geeigneten Gradientenverfahrens ist deshalb so wichtig, weil dadurch die Berechnungszeit und das Ergebnis der Optimierung verbessert werden kann. In diesem Kapitel werden die gängigen Gradientenverfahren vorgestellt.

2.5.1 Finite Differenzen

Die Gradienten mit finiten Differenzen zu berechnen, stellt eine näherungsweise Berechnung der Gradienten dar. Hier wird zunächst der Funktionswert an der Stelle ausgewertet, an der die Gradienten der Funktion berechnet werden sollen. Ein zweiter Funktionswert wird im Abstand h zum ersten gewählt und ebenfalls ausgewertet. Die Differenz der beiden Funktionswerte, dividiert durch die Schrittweite h , stellt die Steigung bzw. den Gradienten der Funktion an der Stelle des ersten Funktionswertes dar. Die Vorwärtsdifferenz ist als

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} = \frac{f(\vec{x} + h_k \vec{e}_k) - f(\vec{x})}{h_k} + \mathcal{O}(\|h\|) \quad 2.22$$

für ein mehrdimensionales Problem definiert. Hier ist h_k die Schrittweite für den Parameter x_k . Der Vektor e_k beschreibt einen Einheitsvektor, der in die Richtung des Parameters x_k weist. Der Term $\mathcal{O}(\|h\|)$ gibt die Größenordnung des Fehlers an, der bei der Berechnung mit finiten Differenzen gegenüber analytischen Berechnungen auftritt.

Die Berechnung mit finiten Differenzen kann auch als Annäherung einer Sekante, die durch zwei Punkte mit dem Abstand h der Funktion geht, angesehen werden. Wird der Betrag von h infinitesimal klein gewählt, dann wird aus der Sekante eine Tangente. Aus diesem Grund sollte die Schrittweite h bewusst möglichst klein gewählt werden, damit die Sekante möglichst der Tangente entspricht. Wird die Schrittweite allerdings zu klein gewählt, ergeben sich Rundungsfehler aufgrund der Maschinengenauigkeit und der Fehler wird wieder größer.

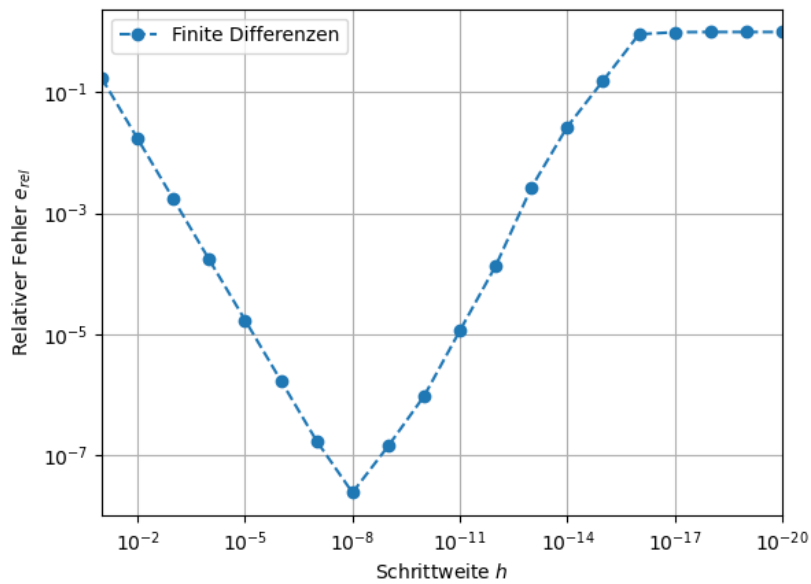


Abbildung 11: Relative Abweichung der finiten Differenzen über der Schrittweite

In Abbildung 11 ist aufgezeichnet, welchen Einfluss die Schrittweite h auf die relative Abweichung e_{rel} und somit auf die Genauigkeit der Gradienten hat. Die Abweichung wurde mit

$$e_{rel} = \frac{|g_{exakt} - g_{approx}|}{|g_{approx}|} \tag{2.23}$$

berechnet, wobei g_{exakt} der tatsächliche Gradient der Funktion und g_{approx} der angenäherte Gradient durch finite Differenzen sind. Zu erkennen ist, dass die relative Abweichung zunächst stetig kleiner wird, mit kleiner werdenden h . Bei einer Schrittweite von etwa 10^{-8} erreicht die relative Abweichung ihr Minimum, wonach sie aber mit kleiner werdenden h wieder ansteigt. Grund dafür ist die Gleitkommazahlgenauigkeit, die den kleinsten darstellbaren Betrag von Rechnern darstellt. Daraus lässt sich die optimale Schrittweite berechnen, bei der der kleinste Fehler auftritt. Die optimale Schrittweite berechnet sich nach Dennis und Schnabel [13] durch:

$$h_{k,opt} = \sqrt{\varepsilon} * (1 + |x_k|) \tag{2.24}$$

Hierbei ist ε die Gleitkommazahlgenauigkeit. Bei für Rechner üblichen ε in der Größenordnung von 10^{-16} ergeben sich demnach optimale Schrittweiten im Bereich von 10^{-8} , was das Minimum im Diagramm aus Abbildung 11 erklärt.

2.5.2 Gradienten durch komplexe Schrittweite

Diese Methode der Gradientenberechnung besitzt Ähnlichkeiten mit den finiten Differenzen und

werden auch mithilfe dieser hergeleitet. Es handelt sich hierbei ebenfalls um eine Approximation der Gradienten. Anders als bei den finiten Differenzen gibt es keine Genauigkeitseinbußen, wenn die Schrittweite zu klein gesetzt wird.

Martins et al. [14] leiten die Gradienten aus der Cauchy-Riemann-Gleichungen her. Angenommen, die Funktion f wird beschrieben als:

$$f = u + iv \quad 2.25$$

und die komplexe Zahl:

$$z = x + iy. \quad 2.26$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen besagen unter anderem, dass der Realteil der Funktion f abgeleitet nach dem Realteil der komplexen Zahl z gleich dem Imaginärteil der Funktion f abgeleitet nach dem Imaginärteil der komplexen Zahl z ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 2.27$$

Analog zu den finiten Differenzen und mithilfe obiger Gleichung wird auf folgende Gleichung geschlossen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + i(y + h)) - v(x + iy)}{h} \quad 2.28$$

Da das gewünschte Ergebnis sich nur im Realen befinden soll, kann die obige Gleichung vereinfacht werden. Hierbei gilt

$$v(x) = y = 0, \quad 2.29$$

sowie

$$u(x) = f(x). \quad 2.30$$

Außerdem soll der Limes durch ein infinitesimal kleines h als Schrittweite ersetzt werden. Somit ergibt sich letztendlich der Gradient:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\text{Im}[f(x + ih)]}{h}. \quad 2.31$$

Ein Vergleich zwischen finiten Differenzen und Gradienten mit komplexer Schrittweite soll folgende Abbildung zeigen. Hier wurde eine einfache Sinusfunktion einmal mit finiten Differenzen und komplexen Schrittweiten abgeleitet. Dabei wurde der relative Fehler der Approximation gegenüber dem analytisch berechneten Gradienten über die Schrittweite aufgetragen.

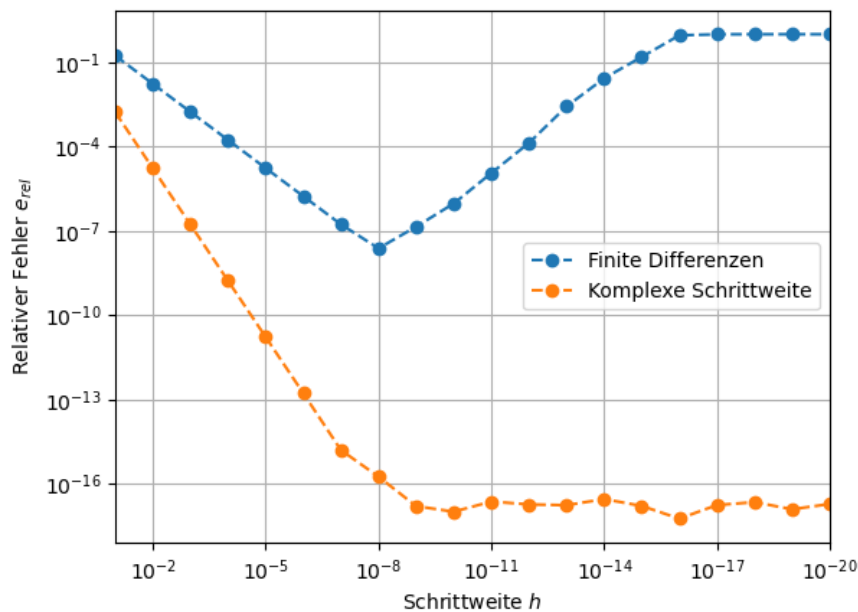


Abbildung 12: Vergleich der relativen Abweichungen von finiten Differenzen gegenüber komplexer Schrittweite

Gut zu erkennen ist, dass der relative Fehler durchgehend bei der Methode der komplexen Schrittweite unter dem der finiten Differenzen liegt. Außerdem wird hier deutlich, dass wie schon erwähnt der relative Fehler nicht ab einer bestimmten Schrittweite wieder ansteigt. Es ist hier also nicht erforderlich eine optimale Schrittweite zu bestimmen, sondern es kann eine beliebig kleine gewählt werden, ohne dass Genauigkeitseinbußen auftreten.

2.5.3 Automatische Differenzierung

Es handelt sich hierbei um die Differenzierung vom Programmcode durch Zerlegung einer Funktion in elementare Unterfunktionen [15]. Die Funktion wird so oft zerlegt, sodass die „unterste“ Ebene nur noch von den Variablen abhängig ist, nach denen differenziert werden soll. Es kann dabei zwischen zwei Richtungen unterschieden werden.

Vorwärts-Methode

Bei dieser Methode wird zunächst die Funktion $f(x)$ in mehrere Unterfunktionen x_i unterteilt. Beim Teilen der Funktion wird die Kettenregel verwendet. Bei einer Funktion $f(x_1(x_2))$ wird bei der Vorwärtsmethode zunächst die unterste Ebene abgeleitet. Die darüber liegenden Ebenen werden dann Schritt für Schritt ausgewertet, bis zur obersten.

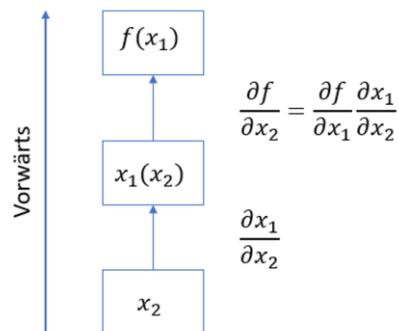


Abbildung 13: Grafische Darstellung der Vorwärtsmethode

Anders als bei den finiten Differenzen geben die automatischen Differenzen den exakten Wert wieder und ist keine Approximation. Der Nachteil bei der Vorwärtsmethode ist, dass für die Berechnung der Gradienten nach jedem abhängigen Parameter ein Funktionsdurchlauf pro Parameter benötigt wird. Ähnlich wie bei den finiten Differenzen sind hier n-Funktionsaufrufe nötig, wobei n die Anzahl der abhängigen Parameter ist.

Rückwärts-Methode

Anders als bei der Vorwärtsmethode wird bei der Rückwärtsmethode zunächst die oberste Ebene berechnet und im Anschluss die darunter liegenden. Bei dieser Methode ist daher das Speichern der zuvor berechneten Gradienten erforderlich.

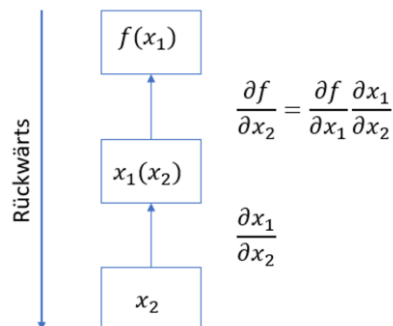


Abbildung 14: Grafische Darstellung der Rückwärtsmethode

Der Vorteil bei dieser Methode gegenüber der Vorwärts-Methode ist, dass hier nur ein Durchlauf erforderlich ist, um einen Gradienten nach allen abhängigen Parametern zu berechnen. Dieses Verfahren spart daher bei großer Anzahl an Parametern Rechenaufwand ein. Nachteilig ist aber, dass hier die Zwischenergebnisse der Ableitungen gespeichert werden müssen. Bei komplexen oder vielen Funktionsaufrufen kann diese Methode also einen hohen Speicherbedarf erfordern.

Die Wahl der beiden Verfahren ist also von der Anzahl der Parameter n sowie Anzahl der Funktionen

m abhängig. Ist $n \ll m$ sollte auf die Vorwärts-Methode zurückgegriffen werden, um einen möglichen hohen Speicherbedarf durch die Rückwärts-Methode zu verhindern. Ist $n \gg m$ sollte dann die Rückwärts-Methode angewendet werden, da so viel Rechenzeit eingespart werden kann.

2.5.4 Modulare Gradienten

In *lightworks* gibt es die Möglichkeit, die Gradienten der Restriktionsfunktionen modular zu berechnen. Dem gegenüber stehen die globalen Gradienten, wobei die Restriktionsfunktionen und Zielfunktion direkt nach den globalen Parametern abgeleitet werden. Bei den modularen Gradienten wird die Berechnung der Restriktionsfunktionen in drei Module eingeteilt.

Das erste Modul stellt das Strukturmodell für die Optimierung dar. Hier werden unter anderem aus den strukturellen Parametern die ABD-Matrizen der Flügelpaneele berechnet. Die ABD-Matrix besteht aus 36 Einträgen und gibt die Steifigkeit eines kombinierten Scheiben-Plattenelements an.

$$ABD = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix}$$

Hierbei handelt es sich bei den A -Einträgen um die Steifigkeit des Scheibenelements und bei den D -Einträgen um die des Plattenelements. Die B -Einträge stellen die Koppel-Steifigkeitsmatrix dar. Ein Scheibenelement wird dadurch gekennzeichnet, dass sich dieses nur mit Kraftflüssen beanspruchen lässt. Ein Plattenelement hingegen lässt sich lediglich durch Momentflüsse beanspruchen.

Mithilfe dieser Steifigkeiten können im zweiten Modul, dem FE-Solver, die Materialspannungen und Deformationen der Paneele bestimmt werden. Zusammen mit den Steifigkeiten aus dem ersten Modul gehen diese Spannungen dann in das letzte Modul, in welchem die Restriktionsfunktionen bestimmt werden.

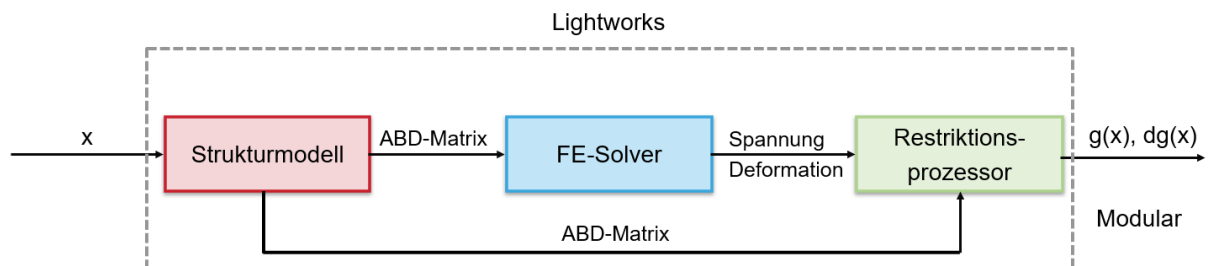


Abbildung 15: Modulare Darstellung der Restriktionsberechnung im *lightworks*-Prozess

Es ist jetzt möglich, die partiellen Gradienten für jedes Modul zu berechnen. Anschließend werden mit der Kettenregel die absoluten Gradienten der Restriktionsfunktionen nach den globalen Parametern bestimmt.

$$\frac{dg}{dx_s} = \frac{\partial ABD_p}{\partial x_s} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial ABD_p} \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial ABD_p} \right) \quad 2.32$$

Der rot markierte Teil der Gleichung entspricht den Gradienten aus dem Strukturmodell, wo die ABD-Matrizen nach allen globalen Parametern abgeleitet werden. Der blaue Gradient ist der Solver-Gradient. Hier werden die Materialspannungen σ nach den ABD-Matrizen aus dem Strukturmodell abgeleitet. Letztlich stellen die grünen Gradienten die partiellen Gradienten der Restriktionsfunktionen g dar. Die Restriktionsfunktionen sind von den ABD-Matrizen und von den Materialspannungen aus dem FE-Solver abhängig und müssen somit nach beiden partiell abgeleitet werden. Die obige Gleichung gilt nur für Ableitungen nach strukturellen Parametern x_s .

Der Vorteil durch die modularen Gradienten ist nun, dass jeder partieller Gradient mit anderen Gradientenverfahren berechnet werden kann, um so die optimalen Verfahren für jedes Modul zu verwenden und so den Rechenaufwand zu verringern. Ebenfalls ist erst durch das Modularisieren eine automatische Differenzierung der Gradienten möglich, da die Gradienten des FE-Solvers nach wie vor aufgrund von Zugangsbeschränkungen des Programmcodes, nur mit finiten Differenzen bestimmbar sind. Da die automatische Differentiation den exakten Gradienten darstellt und keine numerische Approximation, werden die Gradienten, bei denen es möglich ist, auch mit dieser Methode bestimmt.

Da der Fokus dieser Arbeit auf geometrischen Parametern liegt, soll eine analoge Gleichung wie Gleichung 2.32 hergeleitet werden, mit der auch geometrische Parameter modular abgeleitet werden können. Zunächst ist zu klären, welchen Einfluss eine Geometrieänderung auf Ziel- und Restriktionsfunktionen hat.

Ändert sich die Geometrie des Flügels, so müssen die Knoten des FE-Netzes den Geometrieänderungen entsprechend angepasst werden. Somit ändern sich die Abstände zwischen den Knoten und damit einhergehend die Flächen der einzelnen FE-Elemente. Letztendlich wirkt sich dies auf die Deformationen und Materialspannungen des Flügels aus. Die ABD-Matrizen haben nicht alleine Einfluss auf die Ergebnisse der FE-Analyse, sondern auch die geometrischen Parameter.

Änderungen der Paneelabmaße haben ebenfalls Einfluss auf die Stabilität des Flügels. Die Größe eines Panels und damit einhergehend die Beullängen dieses Panels sind unter anderem ausschlaggebend für die Beulkriterien. Eine Änderung der Geometrie wirkt sich also auch direkt auf die

Restriktionsfunktionen aus. Mit Gleichung 2.33 berechnen sich die absoluten Gradienten der Restriktionsfunktionen nach geometrischen Parametern mithilfe der Kettenregel. Die Parameter a und b stehen für die Beullängen entlang der Materialorientierungen eines Panels sowie orthogonal dazu. Die Beullängen werden in Abschnitt 2.6.2 behandelt.

$$\frac{dg}{dx_g} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_g} \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \frac{\partial a}{\partial x_g} \frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x_g} \frac{\partial g}{\partial b} \quad 2.33$$

Wie auch bei den Gradienten nach strukturellen Parametern werden hier die partiellen Gradienten, bei denen es möglich ist, mit automatischer Differentiation bestimmt. Im Fall von Gleichung 2.33 sind das alle roten und grünen partiellen Gradienten. Der blaue Solver-Gradient muss nach wie vor approximiert werden.

Laut Theorie liefern die komplexen Gradienten genauere Ergebnisse als die finiten Differenzen. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, dass die für die Solver-Gradienten die Methode der komplexen Schrittweite angewendet wird. Ob diese Methode anwendbar ist, ist von dem in dieser verwendete FE-Solver *B2000++* abhängig. Aus Gleichung 2.28 wird ersichtlich, dass dem Parameter nach dem abgeleitet wird ein imaginärer Anteil als Schrittweite hinzugefügt wird. Diese imaginären Anteile sollten beim Setzen in die Datenbank, welche von *B2000++* für die FE-Analyse verwendet wird, nicht verloren gehen. Laut Gleichung 2.32 werden bei den Solver-Gradienten die Materialspannungen nach den Einträgen der ABD-Matrizen abgeleitet. Werden komplexe ABD-Einträge in die Datenbank gesetzt und mit *B2000++* die FE-Analyse durchgeführt, ergeben sich daraus auch komplexe Materialspannungen. Mit dem imaginären Teil dieser Materialspannungen und Gleichung 2.31 werden dann die komplexen Gradienten gebildet. Das Ergebnis der komplexen und finiten Solver Gradienten unterscheidet sich kaum. Ein numerisches Rauschen ist hier zu erwarten.

Das gleiche Ergebnis soll ebenfalls erzielt werden, wenn statt den komplexen ABD-Einträgen komplexe Knotenkoordinaten gesetzt werden. Laut Gleichung 2.33 sind die Materialspannungen direkt nach den geometrischen Parametern abgeleitet. Werden komplexe Werte für die geometrischen Parameter gesetzt, werden auch die Knotenkoordinaten mit komplexen Werten versehen. Leider ist es bisher nicht möglich, komplexe Knotenkoordinaten dem *B2000++*-Solver zu übermitteln. Es wäre ein Eingriff in den Programmcode dieses Solvers erforderlich, um komplexe Gradienten der Materialspannungen nach geometrischen Parametern bestimmen zu können. Es müssen also nach wie vor die finiten Differenzen für die Solver-Gradienten verwendet werden.

2.6 Flügelaufbau und Paneelgeometrie

Für den Optimierungsprozess in *lightworks* ist der Flügelkasten relevant, jedoch nicht der gesamte Flügel. Da in der Regel zunächst der gesamte Flügel mitsamt seinen Komponenten vorliegt, ist es daher nötig aus diesem den Flügelkasten zu extrahieren (siehe Kapitel 3.2.1). Es ist demnach hilfreich, die Komponenten und den Aufbau eines Flügels zu kennen.

Für die spätere Formoptimierung und der Bestimmung der dazugehörigen Gradienten, spielen die Beullängen der Paneele eine große Rolle. Diese sind wiederum abhängig von den Materialorientierungen der Paneele. Deshalb werden in diesem Kapitel die Bestimmung der Beullängen aufgegriffen. Ebenfalls wird erläutert, wie die Materialorientierungen der Paneele in *lightworks* definiert sind.

2.6.1 Flügelaufbau

Der Flügel eines Flugzeugs sorgt für den benötigten Auftrieb zum Abheben des Flugzeugs und überträgt Lasten zu dessen Rumpf. Laut Niu [16] wird ein Flügel während des Fluges auf Biegung und Torsion beansprucht und muss diesen Belastungen standhalten. Ebenfalls muss auf die Stabilität des Flügels Rücksicht genommen werden, um so dem Versagen durch Beulen vorzubeugen. Die Festigkeit und Stabilität des Flügels werden direkt über den Aufbau bestimmt. In Abbildung 16 ist eine Skizze vom Inneren eines Flügels abgebildet, welches im Folgenden näher erläutert wird.

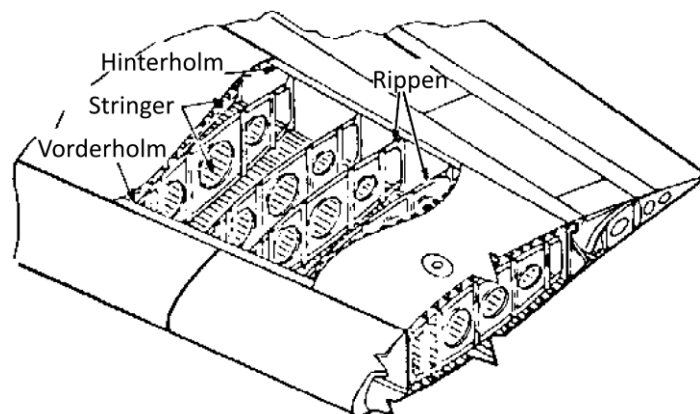


Abbildung 16: Innere Komponenten eines Flügels [16]

Von außen besteht der Flügel aus einer Ober- und Unterschale. Diese Schalen werden, wie schon oben beschrieben, auf Biegung beansprucht. Durch diese Biegungen wird die Haut des Flügels auf Druck

beansprucht. Die Haut auf der Oberschale ist in der Regel einem größeren Druck als die der Unterschale ausgesetzt. Um die Stabilität der Schalen zu erhöhen, wird die Haut oftmals mit Stringern versehen. In *lightworks* wird zum jetzigen Stand zwischen drei Stringertypen unterschieden: Blade-, T- und I-Stringer. Diese drei Typen unterscheiden sich im Profil und haben verschiedene Auswirkungen auf die Stabilität des Flügels. Der Blade-Stringer bestehen aus einem Steg, welcher für gewöhnlich orthogonal zur Haut gerichtet ist. Er kann aber auch in einem Winkel zur Haut angeordnet sein. Der T-Stringer hat zum Steg zusätzlich einen Fuß, der mit der Haut verbunden ist. Der zusätzliche Fuß hat positive Auswirkungen auf das Beulen des Paneels. So kann das Paneel deutlich höheren Kräften standhalten, bevor es zum Beulen kommt. Beim I-Stringer wird zusätzlich zum Fuß noch ein Flansch am Ende des Steges angebracht. Dies hat ebenfalls noch zusätzliche positive Auswirkungen auf das Beulen des Paneels. Diese Komponenten sind in Abbildung 17 skizziert.

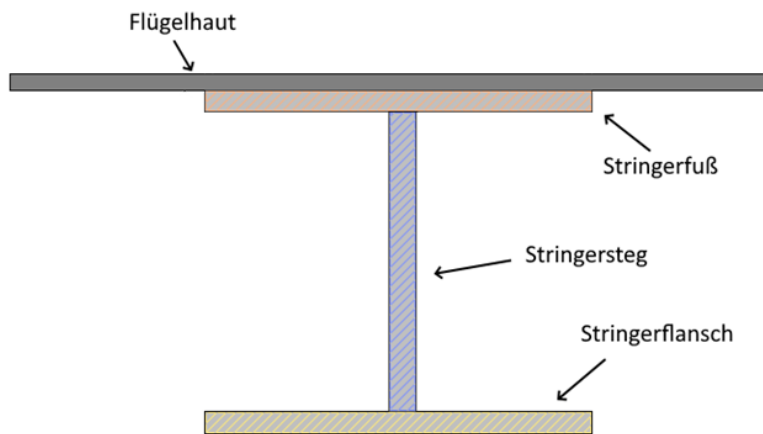


Abbildung 17: Komponenten eines versteiften Paneels

Nicht nur der Aufbau der Stringer hat Einfluss auf das Beulen des Flügels, sondern auch die Anordnung dieser. So werden die Stringer in Spannweitenrichtung des Flügels meist sehr eng beieinander angeordnet, um so das Beulen auf ein Minimum zu reduzieren.

Im Inneren des Flügels befinden sich Holme, welche in Spannweitenrichtung verlaufen. Die Holme erstrecken sich von der Ober- bis zur Unterschale. Ein Flügel sollte mindestens zwei Holme besitzen, welche als Vorder- und Hinterholm bezeichnet werden. Laut Niu [16] hat es sich bewährt, Flügel zu konstruieren, welche mindestens drei oder mehr Holme besitzen. Durch die Verwendung mehrerer Holme wird mehr Last von den Rippen genommen und das Material wird in Spannweitenrichtung ebenfalls weniger belastet. Zusätzlich zum Aufnehmen von Lasten werden die Holme dafür verwendet, um dort unter anderem die Kraftstofftanks und das Fahrwerk zu befestigen. Ebenfalls können die

Vorder- und Hinterholme zusammen mit der Flügelhaut einen Flügelkasten bilden, welcher auch als integrierter Kraftstofftank verwendet werden kann.

Zwischen den Holmen sind üblicherweise Rippen angebracht, welche die Holme miteinander verbinden. Diese dienen dazu, die Lasten von der Oberschale aufzunehmen und an die Holme weiterzuleiten. Niu [16] beschreibt, dass die Rippen für gewöhnlich orthogonal zu den Holmen gerichtet sind. Eine andere Möglichkeit ist es, die Rippen parallel zu der Flugrichtung zu platzieren. In Abbildung 18 sind die beiden Möglichkeiten abgebildet. Es wird allerdings die erstere Variante bevorzugt, da die Rippen parallel zur Flugrichtung, bei gleichem Rippenabstand, eine größere Gesamtlänge aufweisen als die Rippen, welche orthogonal zu den Holmen gerichtet sind.

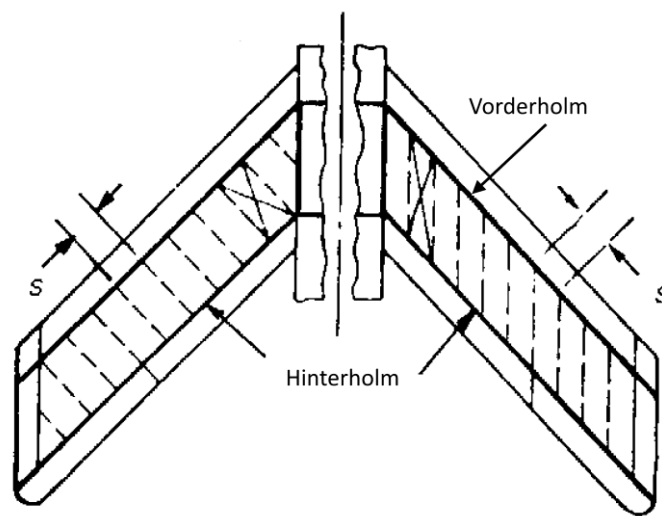


Abbildung 18: Zwei mögliche Rippenorientierungen eines Flügels. Links orthogonal zu den Holmen, rechts parallel zur Flugrichtung. [16]

2.6.2 Beullänge

Die Beullänge wird anhand der Orientierung des Materials und der Abmaße des Paneels bestimmt. Für die Berechnung der Beullänge wird zunächst das Paneel in zwei Teile unterteilt, wobei die Schnittebene durch den Mittelpunkt des Paneels in x-Richtung verläuft. Die x-Richtung wird durch die Orientierung des Materials bestimmt. Die y-Achse verläuft demnach transversal zur Materialorientierung. Anschließend werden die Abstände von der Schnittkante bis zu den Mittelpunkten der neuen Flächen hin, sowie die Abstände von der Schnittkante bis zu den äußersten Ecken bestimmt. Das Gleiche wird noch einmal durchgeführt, wobei die Schnittkante durch den Mittelpunkt in Richtung der y-Achse verläuft. Mithilfe folgender Gleichungen können dann die Beullängen des Paneels bestimmt werden [17].

$$Y_{span} = 2[\min(cy^+, (Y^+ - cy^+)) + \min(cy^-, (Y^- - cy^-))] \quad 2.34$$

$$X_{span} = 2[\min(cx^+, (X^+ - cx^+)) + \min(cx^-, (X^- - cx^-))]$$

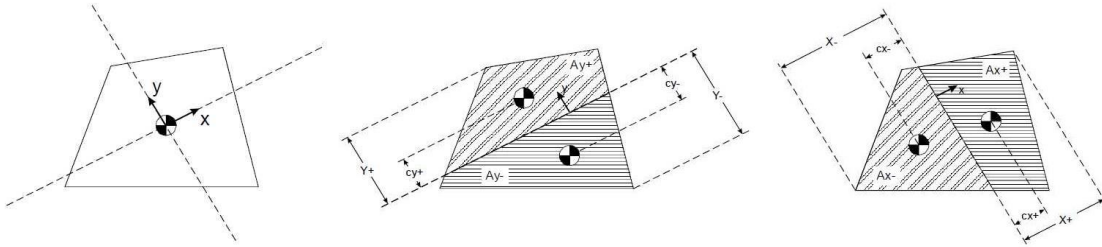


Abbildung 19: Berechnung der Beullängen [17]

2.6.3 Materialorientierung

Die Materialorientierung eines Panels wird hier anhand der Flügelgeometrie bestimmt. Dafür wird der Flügel in Segmente unterteilt. Dabei gilt, dass alle Paneele eines Segments die gleiche Materialorientierung besitzen. Es wird zunächst ein Richtungsvektor definiert. Dieser zeigt von der inneren Kante des Segments an der Flügelvorderkante bis zum Äußeren des Segments, ebenfalls an der Flügelvorderkante. In Abbildung 20 ist ein Flügel in der Draufsicht abgebildet. Dieser besteht komplett aus einem Segment. Das bedeutet, dass alle acht Paneele der Oberschale die gleiche Materialorientierung besitzen. Die Materialorientierungen der Paneele, der Unterschale und der Holme, welche nicht abgebildet sind, werden analog bestimmt. Die Orientierung der Rippen wird aus dem Kreuzprodukt aus \vec{n} und \vec{e}_x bestimmt. Im Beispiel aus Abbildung 20 zeigt \vec{e}_x in die entgegengesetzte Flugrichtung des Flügels.

$$\vec{n}_{ribs} = \vec{n} \times \vec{e}_x \quad 2.35$$

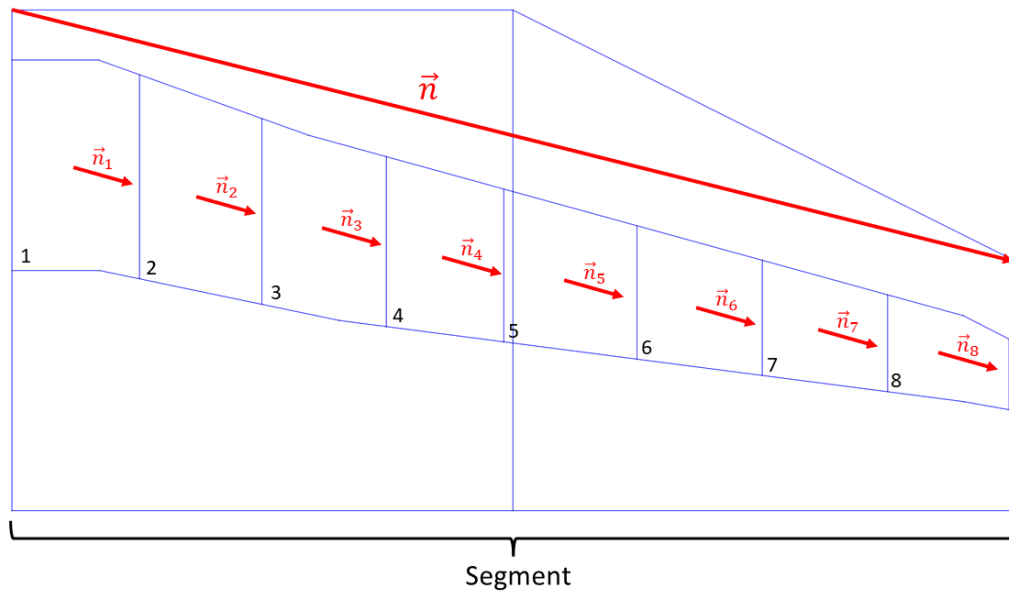


Abbildung 20: Materialorientierungen am Beispiel von Oberschalenpaneelen

2.7 FE-Modellierung

Um den Spannungszustand des Bauteils zu bestimmen, wird in jeder Optimierungsiteration eine FEM-Analyse durchgeführt. Die Vorgehensweise einer FEM-Analyse wird von Klein [18] so erläutert, dass in der Regel zunächst ein finites Elementmodell erstellt werden muss. In der heutigen Zeit wird häufig ein CAD-Modell als Grundlage für das Modell verwendet.

Dieses Modell bildet die Geometrie des zu analysierenden Bauteils vereinfacht mit Elementen ab. Gängige Elementtypen sind dabei Stab-, Scheiben- oder Volumenelemente. Die Wahl des Elementtyps ist von der Bauteilgeometrie und der gewünschten Genauigkeit der Analyse abhängig. Die Elemente werden durch Knotenpunkte an den Kanten miteinander verbunden. Es ist bei der Modellbildung auf Symmetrien des Bauteils zu achten, um so den Rechenaufwand zu minimieren. Auch ist es wichtig, das Netz aus Elementen an kritischen Stellen des Bauteils, z. B. Löcher oder scharfen Kanten zu verdichten, um dort genauere Informationen zu erhalten. An untergeordneten und unkritischen Stellen kann auf ein gröberes Netz zurückgegriffen werden, um auch so den Rechenaufwand zu minimieren.

Zusätzlich zu dem Netz müssen Randbedingungen, welche die Lagerung des Bauteils widerspiegeln, definiert werden. Für die Analyse muss außerdem mindestens eine Kraft als Lastfall definiert werden. Solche Kräfte greifen an definierte Knotenpunkte an. Zum Schluss muss jedem Element eine Wandstärke sowie Materialwerte in Form von Steifigkeitsmatrizen zugeordnet werden. Wurden alle Festlegungen getroffen, kann die eigentliche FE-Berechnung durchgeführt werden.

Zunächst werden die Verschiebungen der Knotenpunkte durch die aufgebrachten Lasten mittels numerischer Gleichungslöser berechnet. Ein nicht eingespannter Knoten besitzt sechs Freiheitsgrade. Drei für alle drei Raumrichtungen, sowie jeweils die Rotation um einer dieser drei Raumrichtungen. Mithilfe des Werkstoffgesetzes können so die Dehnungen und Spannungen der einzelnen Elemente bestimmt werden.

3 Implementierung

Lightworks ist eine Optimierungsumgebung, die vom DLR entwickelt wird. Im Speziellen können dort Flügelstrukturen optimiert werden. In der jetzigen Version wird zum Initialisieren der Optimierung eine FE-Datei im BDF- oder MDL-Dateiformat verwendet. Damit wird ein Analysemodell zur entsprechenden Durchführung der Optimierung erstellt.

In späteren Versionen soll das Strukturmodell aus einem CPACS-Datensatz hervorgehen, welches die nötigen strukturellen Parameter enthält. Für die Optimierung wird noch ein zum Strukturmodell passendes FE-Netz, sowie Lastfälle benötigt. Ist die Optimierung abgeschlossen, können die optimierten Parameter wieder zurück in die ursprüngliche CPACS-Datei geschrieben werden.

3.1 Initialisierung mit FE-Datei

Bisher wurden Optimierungen in *lightworks* mit einer FE-Datei initialisiert. In diesem Fall wird eine BDF (Bulk Data File) benötigt. In einer solchen Datei stehen jegliche Informationen, welche für eine FE-Analyse benötigt werden. Der Aufbau kann hierarchisch beschrieben werden. Auf der untersten Ebene befinden sich die Knotenpunkte. Diese besitzen Koordinaten im globalen Koordinatensystem des Modells und beschreiben je nach Dichte der Knoten grober oder feiner die Geometrie des Modells. Für jeden definierten Knoten werden die Verschiebungen durch die definierten Lastfälle bei der Analyse berechnet. Dem übergeordnet befinden sich die Elemente. Je nach Elementtyp werden entweder drei oder vier Knotenpunkte zu einem Element verbunden. Da in dieser Arbeit zunächst nur einfache rechteckartige Geometrien bearbeitet werden, werden hier Viereckelemente verwendet. Diese können die rechteckigen Geometrien gut abbilden. Jedes Element wird ebenfalls eine Materialorientierung zugewiesen. Diese ist die gleiche wie die Materialorientierung des Panels, welches zu dem jeweiligen Element gehört. Wie die Materialorientierungen der Paneele bestimmt werden, wurde in Kapitel 2.6.3 behandelt.

Mithilfe von mehreren Elementen können Objekte gebildet werden. Diese bilden die oberste Schicht in der Hierarchie. Auch hier gibt es mehrere Typen von Objekten, welche verschiedene Eigenschaften besitzen. Je nach Wahl des Objekttyps kann dies Einfluss auf das Ergebnis der Analyse haben. In dieser Arbeit werden ausschließlich dünne Schalenelemente verwendet, da diese die Flügelpaneele gut beschreiben. Jedem Objekt werden zudem noch Materialeigenschaften zugeordnet. Mit diesen Eigenschaften und den Knotenverschiebungen, welche sich aus der FE-Analyse ergeben, können dann die Spannungszustände im Flügel unter der aufgetragenen Last bestimmt werden.

Zusätzlich zu den oben beschriebenen Komponenten werden noch Lastfälle sowie Randbedingungen benötigt, um eine FE-Analyse durchführen zu können. Lastfälle werden durch Kräfte oder Momente, welche an bestimmten Knotenpunkten angreifen, definiert. Unter Randbedingungen werden hier Lagerbedingungen verstanden, die definieren, welche Knoten wie eingespannt sind. Ohne solche Randbedingungen können keine Verformungen bestimmt werden.

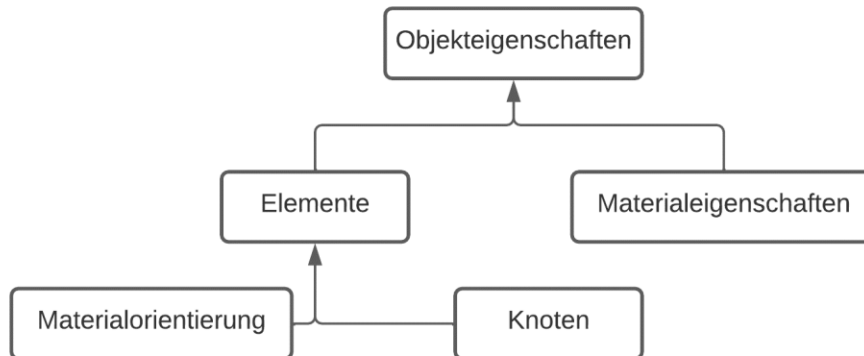


Abbildung 21: Hierarchischer Aufbau von Objekten in FE-Dateien

Speziell wird diese Datei für den *Nastran*-Solver verwendet. Es ist ebenfalls möglich, das FE-Modell im MDL (Model Description Language) Dateiformat einzuladen. Dieses Format wird für den *B2000++*-Solver verwendet und beschreibt ebenfalls ein FE-Modell. Dieser Solver wird in dieser Arbeit zur Durchführung der FE-Analyse verwendet. Wird also eine BDF-Datei in *lightworks* importiert, so wird sie zunächst in das MDL-Dateiformat konvertiert, um sie dann für die Analyse verwenden zu können. Für die Konvertierung stellt *B2000++* ein Modul zur Verfügung.

Für die Optimierung wird zusätzlich zum FE-Modell ein Strukturmodell benötigt. In diesem Modell ist der Flügel in Paneele unterteilt. In *lightworks* wird der Flügel maßgeblich mithilfe der Rippen und Holmen unterteilt. Jede Rippe wird als ein Paneel definiert, sowie der Abschnitt der Holme zwischen zwei Rippen. Die Oberschale und Unterschale des Flügels werden ebenfalls in Abschnitte (Zellen) unterteilt. Hier wird eine Zelle zwischen zwei Rippen und zwei Holmen definiert. Jede Zelle stellt ein Paneel dar. Weiterhin kann jedes Paneel als eine Optimierungsregion angesehen werden. Alle Paneele zusammen definieren das Strukturmodell, wobei das Modell in Holme, Rippen, Ober- und Unterschale unterteilt ist.

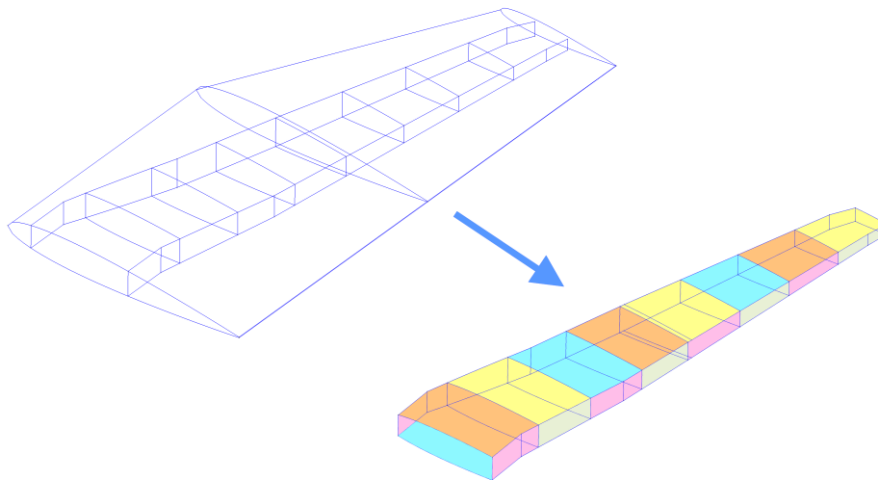


Abbildung 22: Paneele am Flügelkasten, getrennt durch Rippen.

Der Aufbau des Strukturmodells wird noch einmal anhand von Abbildung 22 verdeutlicht. In der Abbildung links sind die Konturen eines kompletten Flügels zu sehen. Der Flügel besitzt eine Ober- und Unterschale. Im Inneren des Flügels befinden sich zwei Holme, welche von der Wurzelrippe bis beinahe zur Flügelspitze hin entlang der Spannweite des Flügels verlaufen. Dazwischen befinden sich insgesamt 38 Rippen, welche orthogonal zu den Holmen gerichtet sind. In der Abbildung rechts ist der gleiche Flügel abgebildet, wobei hier die Holme, Rippen und Ober-, sowie Unterschale zwischen den Holmen beinhaltet sind. Dieses Modell ist eine grafische Repräsentation des Strukturmodells, welches aus dem Flügel links entsteht. Hier ist zu erkennen, dass nur noch Teile der Ober- und Unterschale im Strukturmodell vorhanden sind, welche sich zwischen den Holmen befinden. Diese Schalen werden durch die Rippen in einzelne Paneele unterteilt. Ebenfalls werden die Holme zwischen den Rippen in einzelne Paneele separiert. Nicht zu erkennen sind die Rippen im Inneren des Flügels, wobei jede Rippe auch hier ein Paneel darstellt.

Aus der FE-Datei ist es möglich, ein Strukturmodell zu erstellen. Hierbei wird aus jedem Objekt im FE-Modell ein Paneel generiert. Jedes Paneel besitzt Materialeigenschaften und eine Dicke, die aus der FE-Datei hervorgehen. Mithilfe der Knotenpunkte können die Beullängen jedes Paneels bestimmt werden (siehe Kapitel 2.6.2).

Zusammenfassend wird hier also eine FE-Datei als Input verwendet, woraus ein FE-Solver initialisiert und ein Strukturmodell erstellt wird. Als FE-Solver wird in *lightworks* der *B2000++*-Solver verwendet. Mit dem Solver und dem Strukturmodell kann die Optimierung gestartet werden. Der Ablauf ist in Abbildung 23 schematisch dargestellt.

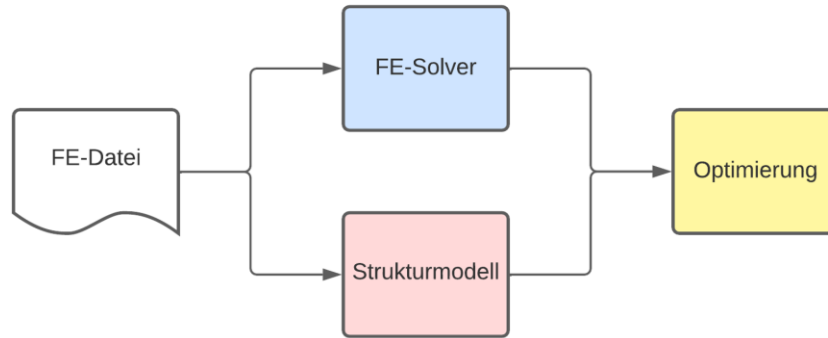


Abbildung 23: Prozess von der FE-Datei bis hin zur Optimierung

3.2 Initialisierung mit CPACS-Datei

Soll zusätzlich zur Struktur des Flügels die Geometrie optimiert werden, so bietet es sich eine *CPACS*-Datei als Ausgangspunkt dieser Optimierung an. In diesem Kapitel wird der Prozess vom Einlesen der Datei bis hin zur Optimierung erläutert.

3.2.1 CPACS

Das *Common Parametric Aircraft Configuration Schema* oder kurz *CPACS* [19] wurde ebenfalls vom DLR entwickelt. Es dient unter anderem zum Austausch von Flugzeugkonfigurationen. Dazu zählt die Geometrie und Aufbau des Flugzeugs, sowie Materialeigenschaften, welche allesamt hierarchisch parametrisiert sind. Die Flugzeuggeometrie kann mit der *TiGL*-Software, die ebenfalls vom DLR entwickelt wurde, herausgelesen werden. Diese Geometrie kann dann in die gewöhnlichen CAD-Dateiformate exportiert werden. Dafür verwendet *TiGL* den *OpenCASCADE* CAD-Kernel und kann somit, basierend auf B-Splines, die Geometrie modellieren. Der Benutzer kann durch Änderung der Parameter die Flugzeuggeometrie direkt anpassen. Deswegen eignet sich *CPACS* sehr gut für die multidisziplinäre Optimierung.

Für diese Arbeit sind zunächst die Flügel relevant, die in der *CPACS*-Datei definiert sind. Ein Flügel wird hier in mehrere Segmente unterteilt, wobei jedes Segment eine Ober- sowie eine Unterschale besitzt. Die Schalen können ebenfalls weiterhin in Zellen unterteilt werden. Jede Zelle kann ihr eigenes Material besitzen. Ebenfalls sind dort die Stringer der Zellen definiert, falls eine Zelle solche besitzt. In *lightworks* werden die Zellen der Ober- und Unterschale so definiert, dass immer zwischen zwei Rippen und zwei Holmen eine Zelle existiert. Diese Zelle ist das Äquivalent zu einem Paneel. Weiterhin werden in den Segmenten die Rippen und Holme definiert, falls solche vorhanden sind. Da, wie oben

beschrieben, mithilfe der Rippen und Holme die Zellen in *lightworks* definiert werden, müssen diese für eine Optimierung in *lightworks* in der *CPACS*-Datei definiert sein.

Zum Einlesen der *CPACS*-Datei ist zum Stand dieser Arbeit bereits ein *CPACS*-Interface in *lightworks* implementiert. Mit diesem können die Informationen des Flügels herausgelesen werden. Mit der *TiGL*-Bibliothek kann dann die Geometrie des Flügels als CAD-Datei exportiert und anschließend visualisiert werden.

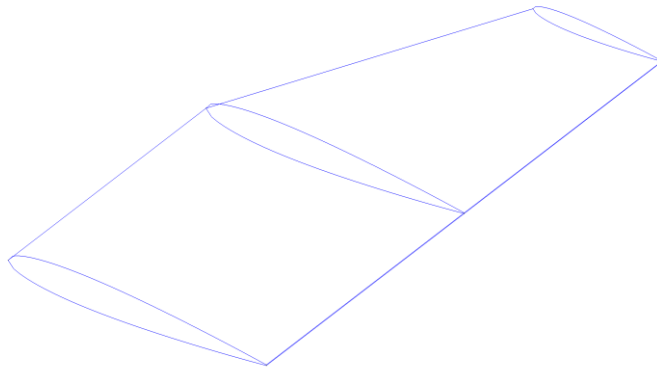


Abbildung 24: Flügel ohne innere Struktur

Wird der komplette Flügel mit *TiGL* exportiert, so sind allerdings lediglich die Ober- und Unterschale des Flügels in der CAD-Datei vorhanden. Um die Rippen und Holme des Flügels ebenfalls zu visualisieren, müssen die Flächen dieser, separat vor dem Exportieren mit der Ober- und Unterschale, mit booleschen Operationen verschnitten werden. Dafür bietet *TiGL* ebenfalls Funktionen an.

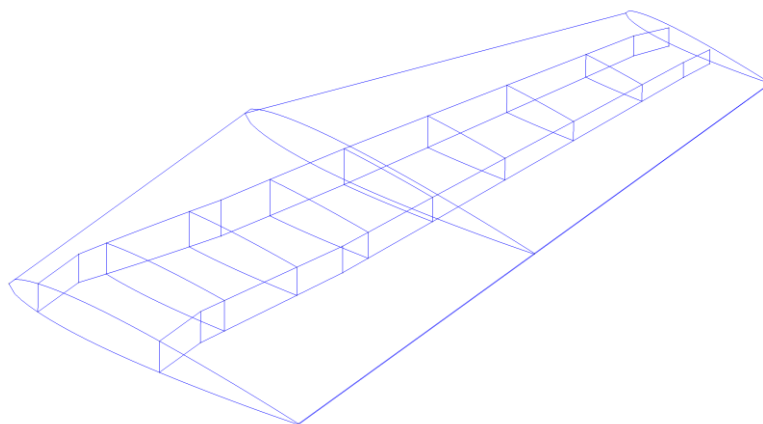


Abbildung 25: Flügel mit Rippen und Holme

Das Ergebnis dieser booleschen Operationen ist in Abbildung 25 ersichtlich. Da dieser Flügel noch keine Zellen besitzt, müssen diese definiert werden. Dafür bietet das CPACS-Interface in *lightworks* eine Funktion, mit der automatisch jeweils eine Zelle zwischen zwei Rippen und zwei Holmen erzeugt wird. Auch diese automatisch erzeugten Zellen werden mit dem Rest der Geometrie verschnitten. Da in *lightworks* der Bereich zwischen den Holmen optimiert wird, reicht es den Flügel in diesem Bereich zu modellieren. Der Rest der Ober- und Unterschale kann vernachlässigt werden. Der daraus resultierende Flügelkasten ist in Abbildung 26 dargestellt. Nachdem die zu optimierende Geometrie jetzt erstellt wurde, ist der nächste Schritt, diese Geometrie zu vernetzen.

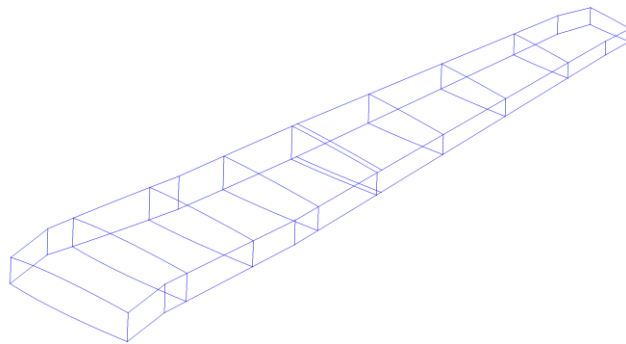


Abbildung 26: Flügelkasten aus Ober-, Unterschale, Rippen und Holme

3.2.2 FE-Netz

Zum Vernetzen wird in dieser Arbeit die Open-Source-Bibliothek *Gmsh* verwendet. Die vorher mit *TiGL* erstellte CAD-Datei kann in *Gmsh* importiert werden, um sie anschließend zu vernetzen.

Gmsh

Gmsh [20] ist eine Open-Source-Bibliothek, die für die Generierung von zwei- und drei-dimensionalen FE-Netzen verwendet werden kann. Was *Gmsh* für diese Arbeit interessant macht, ist, dass dort CAD-Geometrien importiert werden und direkt vernetzt werden können. Es besitzt ebenfalls zum grafischen Interface ein Python Interface, wodurch es direkt in *lightworks* integriert werden kann. Es ist möglich in *Gmsh* unstrukturierte Netze, unter anderem mit dem Delaunay-Algorithmus, zu generieren. Auch das Rekombinieren von Dreiecks- zu Viereckselementen ist möglich.

Netzarten

Es gibt verschiedene Arten von FE-Netzen. Bern und Plassmann [21] beschreiben drei verschiedene Typen. Zum einen gibt es strukturierte Netze, welche durch Simplität und Effektivität herausstechen. Nachteilig bei solchen Netzen ist, dass diese nicht bei komplexeren Geometrien angewendet werden können. Andererseits überzeugen strukturierte Netze durch ihre Einfachheit und Effektivität. Ebenfalls benötigen strukturierte Netze in der Regel weniger Speicherkapazität als unstrukturierte Netze.

Es ist eventuell nötig den zu vernetzenden Bereich in eine einfache Struktur, z. B. ein Rechteck abzubilden und diese Struktur dann zu vernetzen. Anschließend kann das Netz dann zurück zur ursprünglichen Struktur zurückgebildet werden. Dieses Vorgehen wird durch den Riemannschen Abbildungssatz verifiziert. Dieser besagt, dass jedes zusammenhängende Gebiet auf eine topologische Scheibe, also z. B. einen Einheitskreis oder ein Rechteck abgebildet werden kann. Nachteilig bei einer solchen Transformation ist, dass dadurch eventuell schlecht geformte oder sogar invertierte Elemente resultieren. Bei strukturierten Netzen werden ebenfalls meistens mehr Elemente für dasselbe Problem benötigt als bei sogenannten unstrukturierten Netzen. Grund dafür ist, dass die Elementgröße bei strukturierten Netzen nicht so flexibel gestaltet werden kann wie bei unstrukturierten.

Unstrukturierte Netze andererseits haben den Vorteil, dass sie auch auf komplexe Strukturen angewendet werden können, da dort auch ein schnellerer Größenwechsel zwischen benachbarten Elementen möglich ist. Eine Möglichkeit so ein unstrukturiertes Netz zu generieren ist die mit dem *Delaunay*-Algorithmus. Hier wird eine Fläche zunächst mit Punkten versehen, welche anschließend zu Dreiecken vernetzt werden.

Die letzten Arten sind hybride Netze, welche die Vorteile der beiden ersten Methoden kombiniert. Diese können aber noch nicht vollständig automatisch generiert werden. Aus diesem Grund werden diese im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

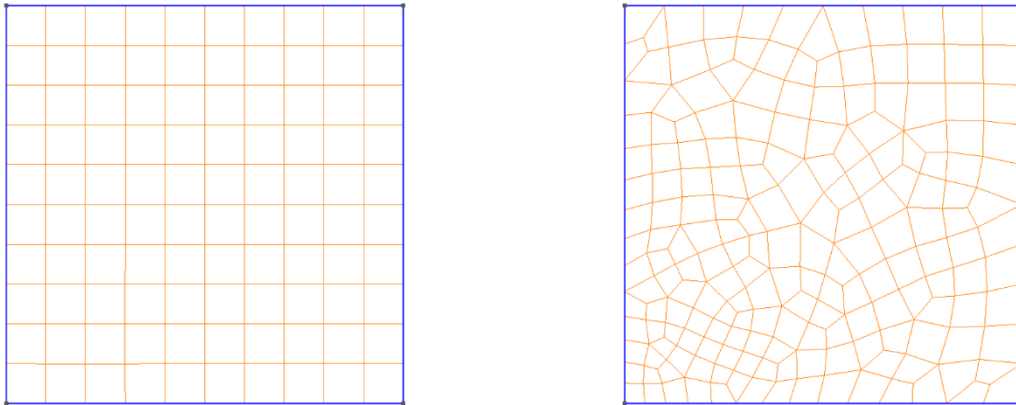


Abbildung 27: Links: strukturiertes Netz. Rechts: unstrukturiertes Netz

Vernetzungsalgorithmus für strukturierte Netze

Es ist möglich, in *Gmsh* die Kurven der Geometrie mit einer selbst definierten Anzahl von Knotenpunkten zu versehen, um so ein strukturiertes Netz zu erzeugen. Es müssen dabei allerdings bestimmte Bedingungen erfüllt sein, damit *Gmsh* die Flächen erfolgreich vernetzen kann. Mit diesem Algorithmus ist es lediglich möglich, rechteckige Flächen zu vernetzen. Außerdem muss die Bedingung erfüllt sein, dass gegenüberliegende Seiten des Rechtecks die gleiche Anzahl an Knotenpunkten besitzen. Dies gilt allerdings nur, wenn die beiden gegenüberliegenden Seiten die gleiche Anzahl an Kurven besitzen. Besitzt die eine Seite mehr Kurven als ihre gegenüberliegende, so muss die Seite mit mehr Kurven einen Knotenpunkt pro Kurve mehr besitzen als die gegenüberliegende. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen.

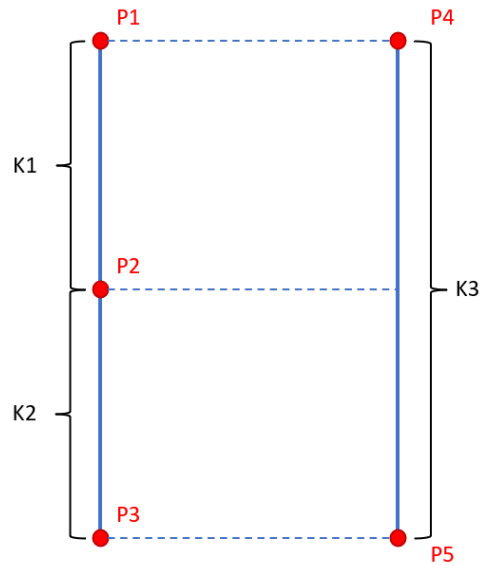


Abbildung 28: Vernetzung von zwei Kanten mit transfiniten Punkten

In Abbildung 28 sind insgesamt drei Geraden zu sehen. Die linke Seite besitzt zwei Geraden und die rechte besteht aus nur einer Geraden. Diese beiden Geraden wurden an drei Stellen miteinander vernetzt, zu erkennen an den gestrichelten Linien. Wird in *Gmsh* definiert, wie viele Knotenpunkte eine Kurve besitzen soll, so werden zunächst die beiden Endpunkte der jeweiligen Kurve mit Knotenpunkten versehen. Alle übrigen Knotenpunkte werden entlang der Kurve in regelmäßigen Abständen mithilfe von linearer Interpolation gesetzt. Es ist ebenfalls möglich, die Knoten in unregelmäßigen Abständen zu platzieren. Für die Anwendungsfälle in dieser Arbeit ist dies aber nicht notwendig. Jede Kurve muss also mindestens zwei Knotenpunkte besitzen. Wird diese Bedingung also auf das Beispiel oben angewendet, so ist zu erkennen, dass die Seite links mindestens vier Knotenpunkte besitzen muss, wobei zwei der Knotenpunkte übereinander auf P2 liegen. Die rechte Seite besitzt lediglich drei Knotenpunkte. *Gmsh* registriert, dass auf der linken Seite zwei Knoten übereinanderliegen und vernetzt diese beiden Punkte mit nur einer Kante. Zusammenfassend müssen folgende Bedingungen für das erfolgreiche Vernetzen mit selbst definierten Knotenpunkten erfüllt werden:

1. Jede Kurve muss mindestens zwei Knotenpunkte besitzen.
2. Eine Seite eines Rechtecks mit i Kurven, dessen gegenüberliegende j Kurven und n Knotenpunkte besitzt, muss mit $n + i - j$ Knotenpunkte belegt sein.

Basierend auf diesen Bedingungen ist es möglich einen Algorithmus zu konstruieren, welcher die nötige Robustheit besitzt, möglichst viele verschiedene rechteckige Geometrien vernetzen zu können. Zunächst wird basierend auf der Länge der Kurven und der eingestellten Netzgröße jede Kurve mit

einer bestimmten Anzahl an Knotenpunkten versehen. Anschließend wird der initiale Lösungsvorschlag auf die oben beschriebenen Bedingungen verifiziert. Werden dabei Kurvenpaare gefunden, bei denen die Bedingungen nicht erfüllt wurden, wird eines dieser Kurvenpaare zufällig ausgewählt. Es wird anschließend evaluiert, welche Änderungen an der Anzahl der Knotenpunkte vorgenommen werden muss, damit die Bedingungen erfüllt werden. Gibt es noch andere Kurven, welche ebenfalls von der geänderten Kurve abhängig sind, werden an diesen ebenfalls Änderungen an der Anzahl der Knotenpunkte entsprechend der Bedingungen vorgenommen. Rekursiv werden auch abhängige Kurven dieser Kurven ausgewählt, bis keine Abhängigkeiten mehr gefunden wurden. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis bei jedem Kurvenpaar alle Bedingungen erfüllt wurden. Folgender Pseudocode fasst den oben beschriebenen Prozess zusammen.

Algorithmus 1: Generierung eines strukturierten Netzes

```
curves ← Knotenpunkte;  
condition ← überprüfe(curves);  
while condition == False do  
    wähle zufällige Kurve aus;  
    verändere die Anzahl der Knotenpunkte der ausgewählten Kurve und dessen Abhängigkeiten;  
    condition ← überprüfe(curves);  
end  
result: curves;
```

Zur Robustheit ist eine Abbruchbedingung eingebaut, welche nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen den Prozess abbricht, falls keine valide Lösung für das Vernetzen der Geometrie gefunden werden kann. Damit kommt es nicht zu einer Endlosschleife.

Das Ergebnis dieses Vernetzungsalgorithmus ist in Abbildung 29 dargestellt. Zu erkennen ist, dass es sich bei dem generierten Netz um ein strukturiertes handelt. Das ist ein weiterer Vorteil, der durch diesen Algorithmus hervorsteicht, da die strukturierten Netze für die Anwendungsfälle in dieser Arbeit den unstrukturierten Netzen vorzuziehen sind. Wie schon oben beschrieben haben strukturierte Netze unter anderem den Vorteil, dass sie einfacher und effektiver sind, als unstrukturierte Netze. Dadurch kann Rechenzeit und Speicherkapazität eingespart werden. Auch in diesem Netz ist die eindeutige Trennung der Paneele sowie Aufteilung der Holme durch die Rippen zu sehen. Ebenfalls zu erkennen und wichtig für eine erfolgreiche FE-Analyse ist, dass die FE-Elemente auch paneelübergreifend mit den gleichen Knoten verbunden sind.

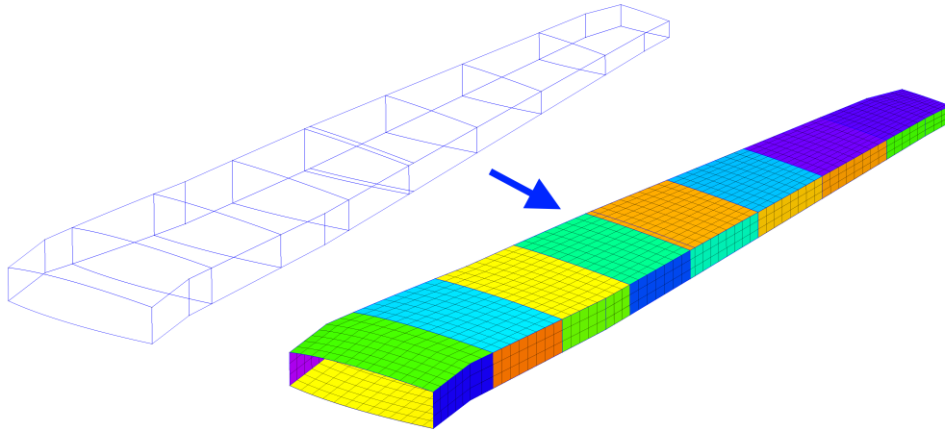


Abbildung 29: Strukturierte Vernetzung eines Flügelkastens

Vernetzung während der Optimierung

Während der Formoptimierung wird es vorkommen, dass sich die Geometrie des Flügels ändert. Die Knotenkoordinaten des FE-Netzes müssen daraufhin entsprechend der neuen Geometrie ebenfalls angepasst werden. Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, wie so etwas bewerkstelligt wird.

Sobald eine Optimierungsiteration durchlaufen wurde, kann die neue Geometrie in den ursprünglichen oder einen neuen *CPACS*-Datensatz geschrieben werden. Dieser neue Datensatz kann, genau wie vor dem Starten der Optimierung, eingelesen werden. Anschließend wird dann eine neue CAD-Datei generiert. Diese wird dann erneut in *Gmsh* importiert, um diese Geometrie neu zu vernetzen. Wichtig bei dieser Methode ist es, den oben vorgestellten Vernetzungsalgorithmus zu verwenden. Nur so kann sichergestellt werden, dass die Anzahl der Knoten über die Optimierungsiterationen hinweg konstant bleibt. Diese Bedingung muss gegeben sein, um die Gradienten der Knotenverschiebungen in Abhängigkeit zu den Knotenpositionen zu berechnen. Diese Schritte müssen nach jeder Optimierungsiteration durchgeführt werden und erfordern deshalb sehr viel Rechenzeit. Ein weiterer Nachteil dieser Implementierung wäre, dass es hier Einschränkungen bei der Wahl des Gradientenverfahrens gibt. Es gibt keinen analytischen Bezug mittels einer Gleichung der Geometrieänderungen zu den Knotenkoordinaten. Somit stellen die finiten Differenzen die einzige Möglichkeit dar, die Geometriegradien zu berechnen, indem die Knotenkoordinaten vor der Geometrieänderungen mit den Koordinaten nach der Geometrieänderung verglichen werden. Eine Lösung dieses Problems stellt die nächste Methode dar.

Eine weitere Methode ist es, die Geometrie nicht von Grund auf neu zu erstellen, sondern die Positionen der Geometriepunkte entsprechend der Geometrieänderung zu skalieren. Vor allem bei einfacher Geometrieänderung ist dies der anderen Methode vorzuziehen. Wird z. B. die Höhe des Querschnitts an einer Stelle des Flügels in Spannweitenrichtung durch den Optimierer neu skaliert, so könnten alle Koordinaten der FE-Knoten dementsprechend neu skaliert werden.

Im folgenden Beispiel soll die Skalierung der FE-Knoten durch Änderung der Profilhöhe eines Flügelkastens gezeigt werden.

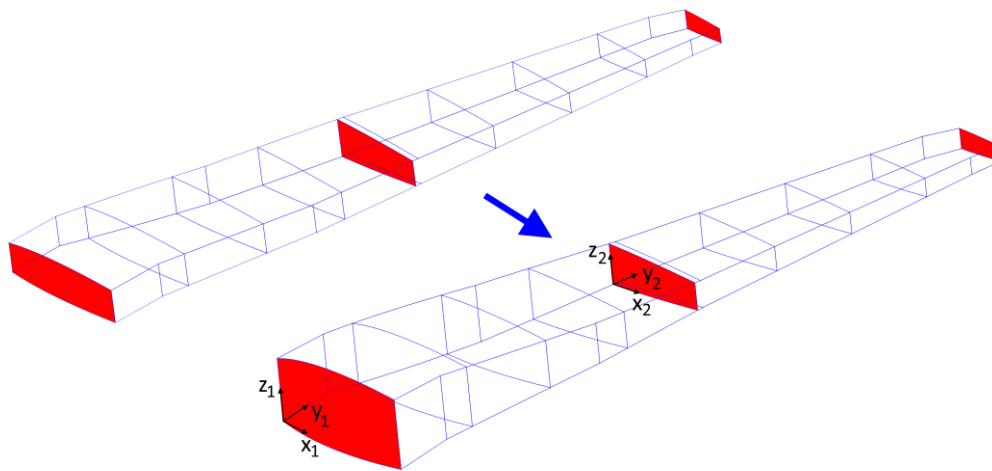


Abbildung 30: Änderung der Profilhöhe eines Flügelkastens

In Abbildung 30 oben ist die initiale Geometrie des Flügelkastens dargestellt. Die Profilhöhe des Flügels soll an der Innenkante verdoppelt werden. Der Rest des Flügels bleibt gleich. In CPACS wird jeder Flügel durch mindestens zwei Sektionen beschrieben, welche miteinander verbunden werden. Die Form dieser Profile wird durch B-Splines bestimmt. In diesem Fall besitzt der Flügel drei Sektionen, welche rot dargestellt sind. Es ist möglich, die Translation, Rotation und Skalierung dieser Sektionen bzw. Profile durch das Ändern einzelner Werte zu beeinflussen. Es ist also nicht erforderlich, das Profil bei jeder Änderung neu zu definieren. So ist eine einfache Variierung der Geometrie in CPACS möglich. In dieser Arbeit wird zunächst die Skalierung der Profile in z-Richtung, also in Profilhöhe benötigt. Da nicht nach jeder Iteration die Geometrie neu erstellt werden soll, ist eine manuelle Skalierung aller FE-Knoten entsprechend der Skalierung der Profile des Flügels nötig.

Hierfür wird der Flügel zunächst in Abschnitte unterteilt. Ein Abschnitt reicht von einer Sektion bis zur nächsten. Der Flügel in Abbildung 30 besitzt also zwei Abschnitte. Es wird anschließend für jeden Abschnitt ein eigenes Koordinatensystem definiert. Der Ursprung des Koordinatensystems wird an der

Flügelvorderkante auf Höhe der inneren Sektion des Abschnittes gewählt. Die x-Richtung des lokalen Koordinatensystems zeigt in Richtung der Kante der Sektion in Flugrichtung. Die y-Richtung erstreckt sich vom Koordinatenursprung bis zum Koordinatenursprung der nächsten Sektion. Daraus ergibt sich die z-Richtung automatisch orthogonal zu den vorherigen Richtungen.

Alle Knoten werden einmal durchlaufen. Dabei wird zunächst ermittelt, in welchen Abschnitt sich der Knoten befindet. Anschließend wird durch lineare Interpolation ermittelt, welche Skalierung auf diesen Knoten angewendet werden muss.

$$\lambda_{z,n} = \lambda_{z,s} + \frac{(\lambda_{z,s+1} - \lambda_{z,s}) * (y_n - y_s)}{y_{s+1} - y_s} \quad 3.1$$

Hier ist λ der Skalierungsfaktor und y die Position des Knotens in Spannweitenrichtung. Der Index s ist definiert für die jeweilige Sektion bzw. $s + 1$ für die nächste Sektion in Richtung der Flügelspitze. Diese beiden Sektionen spannen den Bereich auf, in dem sich der Knoten befindet.

Im nächsten Schritt müssen die globalen Knotenkoordinaten in lokale Koordinaten des Koordinatensystems des jeweiligen Abschnitts transformiert werden. In dem Beispiel aus Abbildung 30 kann dieser Schritt übersprungen werden, da dieser Flügel gerade ist und die für die Höhe ausschlaggebenden z-Koordinaten sich durch die Transformation nicht verändern werden. Bei in Höhenrichtung gebeugten Flügeln wäre dieser Schritt aber erforderlich. Die Transformationen werden mit folgenden Rotations-, Translations- und Skalierungsmatrizen durchgeführt.

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Translationsmatrix gibt den Koordinatenursprung des lokalen Koordinatensystems im globalen Koordinatensystem an. Die Rotationsmatrizen beschreiben die Rotation des lokalen Koordinatensystems um die x-, y- und z-Achse des globalen Koordinatensystems mit dem Winkel θ . Die Skalierung in z-Richtung wurde in Gleichung 3.1 bestimmt. Um die lokalen Koordinaten x', y', z' in die globalen Koordinaten x, y, z zu transformieren, müssen die obigen Matrizen mit dem lokalen Vektor multipliziert werden.

$$(x \ y \ z \ 1) = (x' \ y' \ z' \ 1) \cdot T \cdot S \cdot R_x \cdot R_y \cdot R_z \quad 3.2$$

Eine Transformation von globale in lokale Koordinaten erfolgt analog mit den Inversen der Rotations-, Translations- und Skalierungsmatrizen.

$$(x' \ y' \ z' \ 1) = (x \ y \ z \ 1) \cdot T^{-1} \cdot S^{-1} \cdot R_x^{-1} \cdot R_y^{-1} \cdot R_z^{-1} \quad 3.3$$

Nachdem der FE-Knoten von globalen in lokale Koordinaten des jeweiligen Abschnitts zusammen mit der Skalierung überführt wurde, müssen die Knotenkoordinaten wieder zurück ins globale Koordinatensystem transformiert werden. Hierbei wird die Skalierungsmatrix weggelassen, um die Skalierung nicht rückwirkend zu verändern.

Als Resultat ergeben sich neue FE-Knoten-Koordinaten im globalen Koordinatensystem mit angepasster z-Koordinate. Mit diesen kann eine neue FE-Analyse in einer neuen Optimierungsiteration durchgeführt werden.

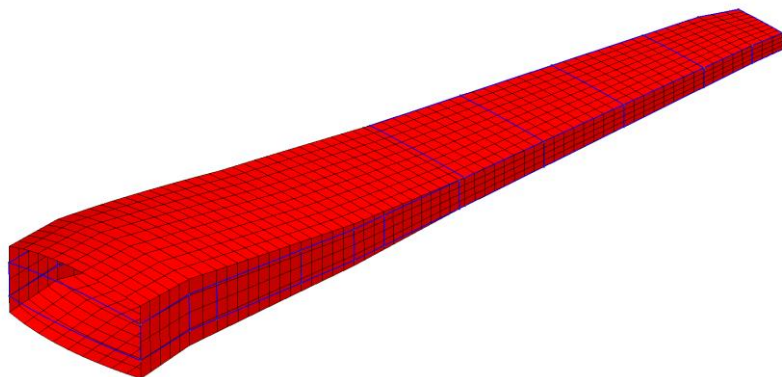


Abbildung 31: Änderung der Profilhöhe durch Skalierung von Knotenpunkten

Das Ergebnis der Skalierung ist in Abbildung 31 dargestellt. Die ursprüngliche Geometrie des Flügelkastens ist mit den blauen Linien gekennzeichnet. Sie entspricht der Geometrie aus Abbildung 30 vor der Geometrieänderung. Die roten Elemente sind das Resultat aus der Skalierung, wobei das

innerste Profil des Flügelkastens mit dem Faktor zwei skaliert worden ist. Die anderen beiden Profile, welche in Abbildung 30 ebenfalls rot eingezeichnet worden sind, sind unverändert. Es ist gut zu erkennen, dass durch die lineare Interpolation der Skalierung im ersten Abschnitt zwischen innerstes und mittleres Profil ein gleichmäßiger Abstieg der z-Koordinaten der FE-Knoten entstanden ist. Die Geometrie, welche von den roten FE-Elementen beschrieben wird, entspricht genau der aus Abbildung 30 nach der Geometrieänderung. Es ist also möglich, zwischen den Optimierungsiterationen die Geometrie des Flügels alleine durch die Skalierung der FE-Knotenkoordinaten zu verwenden. Die Geometrie muss nicht von Grund auf neu erstellt werden. Dadurch wird signifikante Rechenzeit eingespart. In diesem Fall wurden für das Herausschreiben und wieder einlesen der neuen kompletten Flügelgeometrie ungefähr 18,5 Sekunden benötigt, wohingegen für die reine Neuskalierung 0,5 Sekunden benötigt wurden.

Das Problem der eingeschränkten Wahl des Gradientenverfahrens wurde mit dieser Methode ebenfalls behoben. Es existiert somit eine konkrete Gleichung, welche ein Geometrieänderung mit den Knotenkoordinaten des FE-Netzes miteinander verknüpft. So ist es ebenfalls möglich, die Geometriegradien mittels automatischer Differentiation zu ermitteln oder dem Verfahren mit komplexer Schrittweite.

3.2.3 FE-Modell Generierung

Nachdem das FE-Netz generiert wurde, ist es möglich daraus das FE-Modell zu erstellen und in eine FE-Datei herauszuschreiben. Auch hier steht ein Paneel, welches in Abbildung 29 jeweils einfarbig markiert wurde, für ein Objekt als Schalenelement. Jedem FE-Element im FE-Netz ist eine Identifikationsnummer zugeordnet. Jedem Schalenelement können die jeweiligen Identifikationsnummern der FE-Elemente zugeordnet werden. Ebenfalls ist eine Zuordnung jedes Knotens zu den FE-Elementen möglich. Das Strukturmodell, das noch für die Optimierung benötigt wird, kann jetzt direkt aus dem FE-Netz generiert werden. Auf den Zwischenschritt, das Strukturmodell aus der FE-Datei zu generieren, kann somit verzichtet werden.

Nachdem die oben beschriebenen Schritte durchgeführt wurden, wurde der FE-Solver sowie das Strukturmodell aus einem CPACS-Datensatz generiert. Somit ist es jetzt möglich, eine Optimierung zu

starten. Zusammenfassend ist der in diesem Kapitel beschriebene Prozess in Abbildung 32 dargestellt.

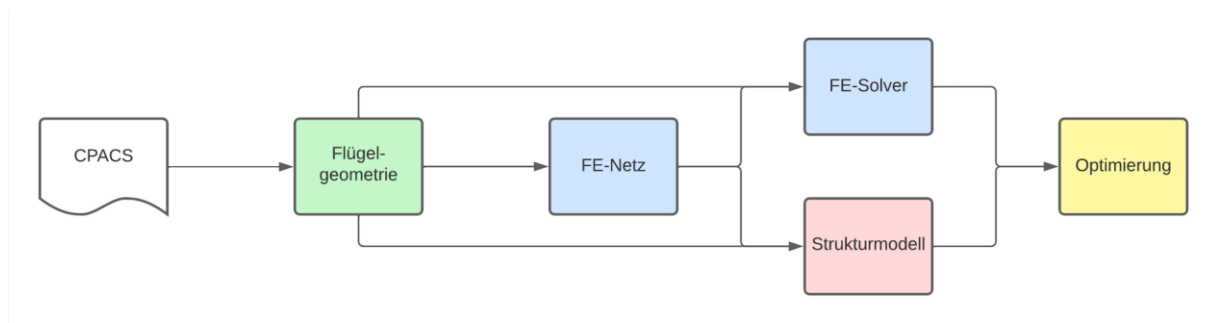


Abbildung 32: Prozess von einer CPACS-Datei bis hin zur Optimierung

4 Optimierungen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Optimierungen vorgestellt. Als Ausgang der Optimierung werden hier *CPACS*-Datensätze genutzt. Der Prozess, der vor der Optimierung durchlaufen wird, wurde in Kapitel 3.2 vorgestellt.

Zum Testen der Optimierungen wurde hier ein *CPACS*-Datensatz eines einfachen Flügels gewählt. Dieser ist über die GitHub Repositories des DLR Institute for Software Technology frei zugänglich [22]. Dort besitzt der Flügel noch keine Rippen und Holme. Diese wurden nachträglich hinzugefügt. Letztendlich wird lediglich der Flügelkasten optimiert. Der Prozess, wie die Flügelkastengeometrie erstellt wird, wurde bereits in Kapitel 3.2.1 beschrieben.

Bei den Flügelzellen handelt es sich um einfache unversteifte Paneele aus einer isotropen Einzelschicht. Die initiale Dicke der Paneele auf den Schalen beträgt 10 mm , die Rippen haben eine Anfangsdicke von 30 mm und die Holme von 3 mm . Der Flügel besitzt eine Spannweite von 2 m , ist 1 m breit und an der dicksten Position ungefähr 120 mm dick. Vor der Optimierung besitzt der Flügel eine Masse von rund 55 kg .

Damit eine Optimierung durchgeführt werden kann, müssen noch Lasten definiert werden. Diese können ebenfalls direkt in dem *CPACS*-Datensatz definiert werden. Es werden Kräfte parabolisch in positiver z -Richtung über den gesamten Flügel in jede Rippe eingeleitet. Dies bedeutet, dass die mittlere Rippe die größte Kraft erfährt, während in die äußersten Rippen die kleinsten Kräfte eingeleitet werden. Die Beträge der Kräfte sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Nummerierung der Rippen verläuft vom inneren des Flügels bis zur Flügelspitze. Der Flügel ist an der inneren Kante fest eingespannt. Es sind dort also alle Freiheitsgrade der jeweiligen FE-Knoten blockiert.

Tabelle 1: An den Rippen angebrachte Lasten

Nummer Rippe	Kraft in Newton
1	50312
2	86250
3	107812
4	115000
5	107812
6	86250
7	50312

Es soll die Masse des Flügels minimiert werden, wobei die angebrachten Lasten nicht zum Versagen des Flügels führen dürfen. Um ein Versagen festzustellen, wird die Stabilität und Festigkeit des Flügels mithilfe dreier Versagenskriterien evaluiert. Das kombinierte Beulkriterium aus Druck und Schubbeanspruchung, das Kriterium der maximal zulässigen Dehnung und das Festigkeitskriterium nach v. Mises. Der initiale Entwurf des Flügels würde den aufgetragenen Lasten nicht standhalten.

4.1 Strukturoptimierung

Im ersten Durchlauf soll der Flügel strukturell optimiert werden, indem die Hautdicke der Flügelschalen sowie die der Rippen und Holme angepasst wird. Die geometrischen Parameter werden zunächst nicht betrachtet. Die Restriktionsgradienten werden modular berechnet, wobei automatische Differenzen angewendet werden. Mit Ausnahme der Gradienten der Spannungen, welche durch den FE-Solver berechnet werden. Diese werden mit finiten Differenzen berechnet. Die Optimierungen werden mit der Methode der bewegten Asymptoten durchgeführt.

Abbildung 33 zeigt die Einhaltung der Restriktionsfunktion des initialen Entwurfes. Oben ist die Festigkeitsrestriktion von v. Mises zu erkennen, unten die Stabilitätsrestriktion des kombinierten Beulens. Bei beiden ist zu erkennen, dass die Belastungen an der Einspannung am größten sind. Bei der Festigkeit sind besonders die Paneele der Holme an der Einspannung stark belastet. Die Stabilitätsanalyse zeigt hingegen, dass gerade Paneele auf der Oberschale eher zum Beulen neigen, als Paneele auf der Unterseite. Das ist anhand der Krafteinleitung zu erklären. Die Kräfte werden hier von unten in die Rippen eingeleitet. Dadurch werden die Paneele auf der Oberschale auf Druck beansprucht, wohingegen Paneele auf der Unterschale auf Zug beansprucht werden. Durch die Druckbeanspruchung auf der Oberschale wird dann das Beulen verursacht. Die Werte der Festigkeits- und Stabilitätskriterien deuten darauf hin, dass das Beulen hier deutlich kritischer betrachtet werden muss.

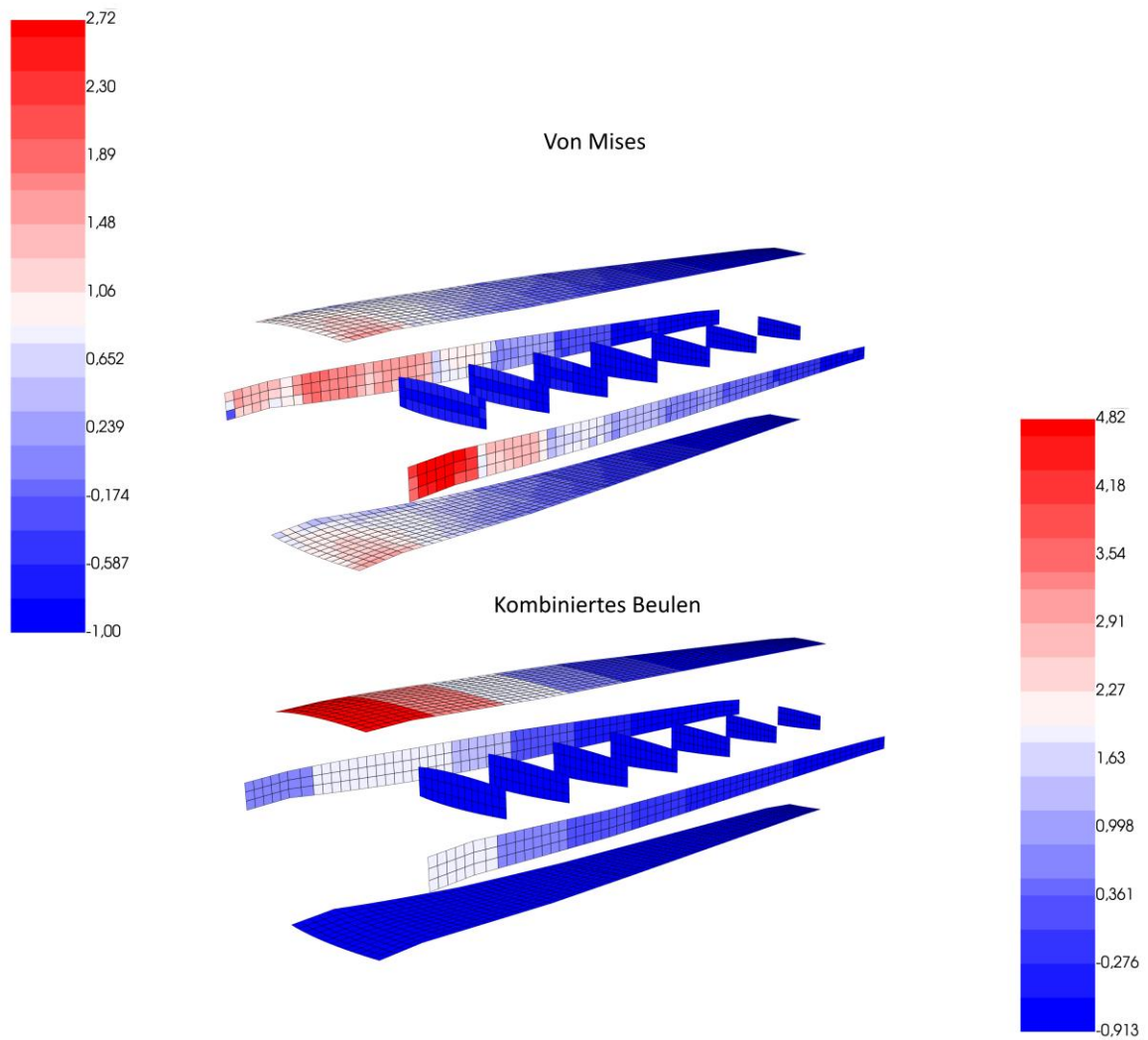


Abbildung 33: Restriktionswerte durch die aufgebrachtten Lasten aus Tabelle 1 am Flügelkasten und den Startwerten aus Tabelle 2

Abbildung 34 zeigt die Dickenverhältnisse des optimierten Flügels in einer expandierten Ansicht. Es ist gut zu erkennen, dass die Paneele an der Einspannung mit einer dickeren Haut belegt wurden als die Paneele an der Flügelspitze, da sie dort mehr belastet werden. Diese besitzen eine Dicke von ca. 24 *mm*. Die dünnsten Paneele an der Flügelspitze sowie die Rippen wurden mit Dicken von rund 1 *mm* belegt. Sie stellen unkritische Bauteile des Flügels dar und können deshalb zur Gewichtsreduzierung sehr dünn gewählt werden. Die Festigkeit der Holme wird an der Einspannung des Flügels am größten belastet und sinkt stetig bis zur Flügelspitze hin. Da die Holme aus einem Material gefertigt werden sollen, muss die Dicke dementsprechend über die gesamte Länge des Holmes konstant bleiben. Aus diesem Grund besitzen die Holme eine konstante mittlere Dicke von ca. 12 *mm*.

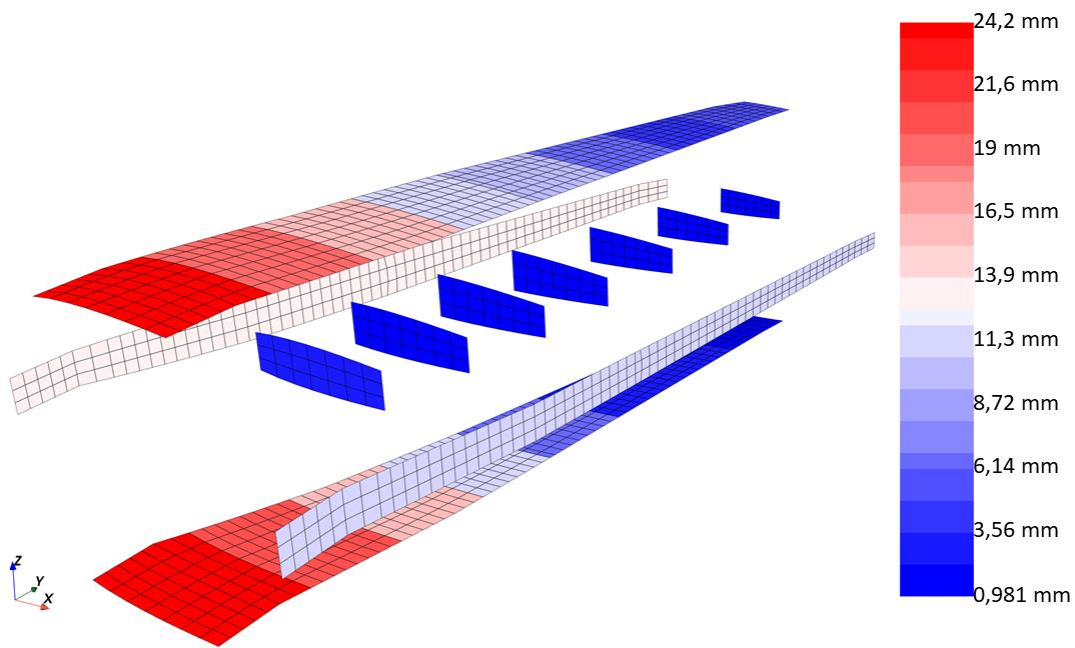


Abbildung 34: Optimierte Hautdicken des Flügelkastens

Bei dieser Optimierung hat sich die Masse des Flügelkastens kaum verändert und ist von 55 *kg* auf 57 *kg* angestiegen. Anders als beim initialen Entwurf würde dieser optimierte Entwurf den aufgetragenen Lasten mit den definierten Versagenskriterien standhalten. Es wurde also lediglich die Masse anders verteilt, wobei die Dicke der kritischen Bauteile erhöht und bei unkritischen gesenkt wurde. Die Ergebnisse der Optimierung sind in folgender Tabelle aufgeführt.

Tabelle 2: Ergebnisse der Optimierung mit reinen Strukturparametern

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	54,72 <i>kg</i>	57,14 <i>kg</i>
Maximale Restriktion	4,81	6.09e-8
Kritisches Kriterium	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 <i>mm</i>	0,98 <i>mm</i> – 24,2 <i>mm</i>
Dicken Rippen	30 <i>mm</i>	1,60 <i>mm</i> – 2,72 <i>mm</i>
Dicken Holme	3 <i>mm</i>	10,5 <i>mm</i> und 13,1 <i>mm</i>

Es fällt auf, dass die maximale Restriktion bei dem optimierten Entwurf im positiven Bereich liegt. Laut Definition gilt ein Entwurf dann als zulässig, wenn alle Restriktionsfunktionen einen Wert unter oder gleich null besitzen. Werte in der Größenordnung von 10^{-8} fallen noch in den Toleranzbereich von

null. In der Regel würde den Lasten noch ein Sicherheitsfaktor aufgelegt werden, sodass diese z. B. 50 % größer sind, als die durch die FE-Analyse berechnete Lasten (siehe Gleichung 2.10). So wird gewährleistet, dass der optimierte Entwurf auch in der Praxis standhalten wird. In diesem und in weiteren Fällen wurde kein Sicherheitsfaktor, bzw. ein Sicherheitsfaktor von eins verwendet. Das bedeutet, dass der optimierte Entwurf laut den Theorien der Festigkeits- und Stabilitätskriterien den berechneten Lasten aus der FE-Analyse gerade so standhalten würde. Wird ein Sicherheitsfaktor verwendet, ist es kein Problem, dass einige Restriktionswerte des optimierten Entwurfs leicht über null liegen.

4.2 Formoptimierung

In der nächsten Studie sollen statt den strukturellen Parametern rein geometrische Parameter des Flügelkastens optimiert werden. Hierbei wird die Profilhöhe an drei Stellen durch den Optimierer skaliert, um so die geringste Masse bei Einhaltung der definierten Restriktionen zu erhalten. Die drei Positionen, an denen die Profilhöhe optimiert wird, sind in Abbildung 30 rot eingezeichnet. Die Dicken der Flügelpaneele bleiben während der Optimierung konstant. Alle restlichen Einstellungen der Optimierung bleiben identisch zu der vorherigen strukturellen Optimierung.

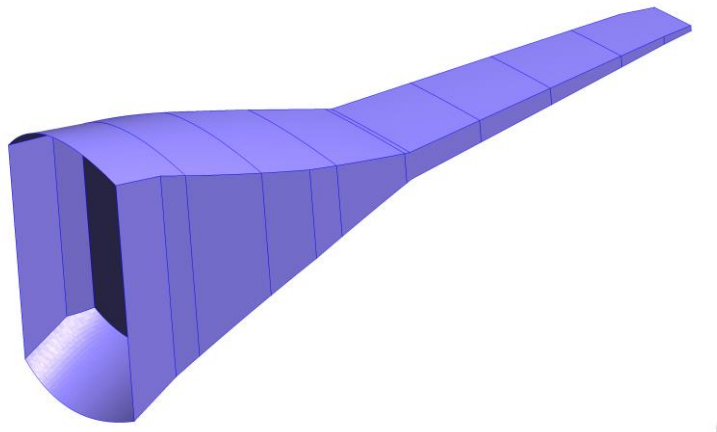


Abbildung 35: Optimierte Profilhöhe des Flügelkastens

In Abbildung 35 ist das Ergebnis der Formoptimierung des Flügelkastens ersichtlich. Die Höhe des Profils am Inneren des Flügelkastens wurde um den Faktor 7,61 skaliert. Dadurch ist dort die Höhe von ursprünglichen 120 mm auf 914 mm gestiegen. Das Profil in der Mitte des Kastens wurde mit einem Skalierungsfaktor von 1,11 nahezu unberührt belassen. Dadurch ist der Flügelkasten dort 133,2 mm

hoch. An der Flügelspitze wurde die Höhe des Profils um den Faktor 0,37 verkleinert und ist dort 22,2 mm hoch.

Wie auch in der vorherigen Optimierung, treten auch hier die größten Belastungen an der Einspannung des Flügels auf. Um den Belastungen entgegenzuwirken, wurde die Höhe dort am größten gewählt. Wie schon in Kapitel 2.3.2 beschrieben, wird durch die Erhöhung der Profilhöhe ebenfalls das Trägheitsmoment an dieser Stelle erhöht. Dadurch sinkt die Biegespannung und es wird somit den Belastungen entgegengewirkt. An der Flügelspitze treten die geringsten Belastungen auf, wodurch dort Material eingespart werden kann. Insgesamt beträgt die Masse in diesem Entwurf 98,44 kg, welche damit fast doppelt so hoch ist wie bei der Optimierung mit reinen strukturellen Parametern.

Es ist hinzuzufügen, dass die Flügelgeometrie aus Abbildung 35 eher ungewöhnlich ist und in der Praxis so nicht umgesetzt werden würde. Es soll hier aber gezeigt werden, dass der Flügelkasten durchaus mit den Profilhöhen als Entwurfsvariablen optimiert werden kann. Die Flugeigenschaften des Flügels haben hier keine Relevanz. Die geometrischen Restriktionen aus Kapitel 2.4.2 können in Zukunft dabei behilflich sein, die Höhe des Flügels zu restringieren, umso auch reguläre Flügelgeometrien zu erhalten. Die Ergebnisse dieser Optimierung sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Tabelle 3: Ergebnisse der Optimierung mit reinen geometrischen Parametern

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	54,72 kg	98,44 kg
Maximale Restriktion	4,81	3,18e-8
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Innere Profilhöhe	120 mm	913,2 mm
Mittlere Profilhöhe	120 mm	133,2 mm
Äußere Profilhöhe	60 mm	22,2 mm

4.3 Kombinierte Form- Strukturoptimierung

In der letzten Optimierung mit diesem Flügelkasten soll die Struktur und Geometrie optimiert werden. Damit wird geprüft, ob die Masse noch weiter verringert werden kann. Es werden wieder die identischen Einstellungen für die Optimierung verwendet. Wie bei den beiden vorherigen Optimierungen werden die Dicken der Schalenpaneele, Rippen und Holme sowie die Höhe des Flügelkastens an drei Stellen optimiert.

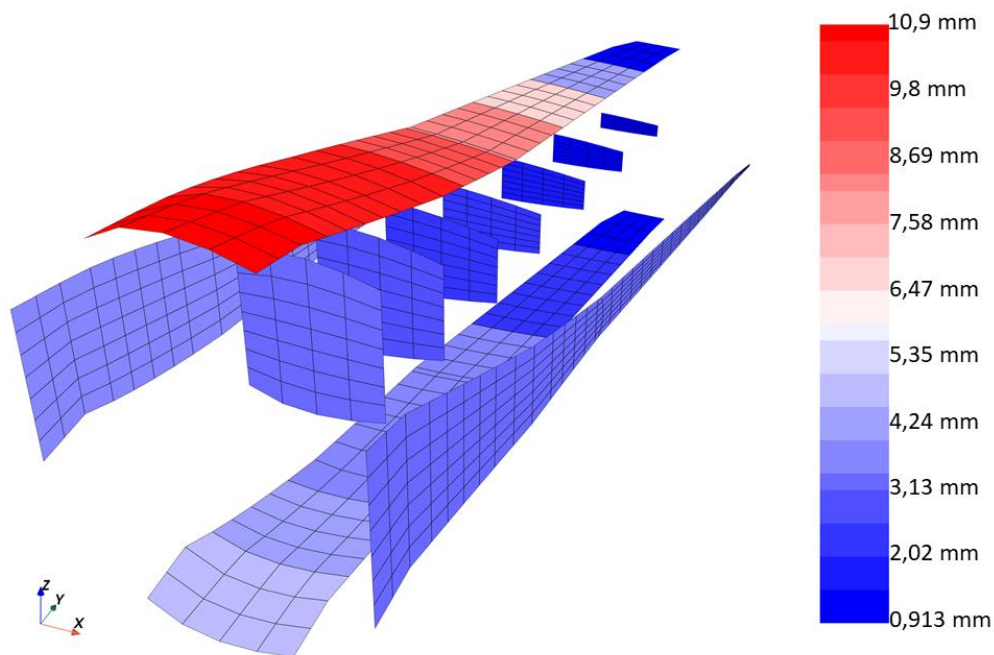


Abbildung 36: Optimierte Hautdicken und Profilhöhen des Flügelkastens

Die Form des Flügelkastens erinnert an die Form des Kastens mit reinen geometrischen Parametern. An der Einspannung wurde die Höhe hier aber auf 583,2 mm gesetzt. Die Höhen in der Mitte des Flügels und an der Flügelspitze sind ähnlich mit der reinen Formoptimierung.

Werden die Dicken der Paneele mit denen der reinen Strukturoptimierung verglichen, fällt auf, dass hier sich die Dicken der Ober- und Unterschale unterscheiden. Bei der reinen Strukturoptimierung waren die Dicken gleichmäßiger aufgeteilt. Oben wurde bereits beschrieben, dass die Paneele auf der Oberschale stärker zum Beulen neigen als die auf der Unterschale. Diese werden eher auf die Festigkeit beansprucht. Aus dieser Optimierung kann darauf geschlossen werden, dass durch das Optimieren der Höhe die Festigkeit in den Paneelen effizienter, also mit geringeren Gewichtseinbußen erhöht werden kann als durch die reine Dickenoptimierung der Paneele. Um dem Beulen der Paneele entgegenzuwirken, ist jedoch eher das Erhöhen der Dicke effizienter. Aus diesem Grund musste der Flügel in der reinen Formoptimierung an der Einspannung so hoch ausgelegt werden. Wohingegen hier Höhe eingespart werden konnte, indem die Dicken der Paneele erhöht wurden. Ebenfalls ist anzumerken, dass die Dicken der Paneele deutlich geringer ausfallen als bei der reinen Dickenoptimierung.

Das ausschlaggebendste Ergebnis dieser Optimierung ist die Masse des finalen Entwurfs. Diese ist hier mit 32,20 kg um den Faktor 0,6 gegenüber der initialen Masse verringert worden. Die Masse ist hier

sogar ein Drittel so hoch gegenüber der Masse des rein geometrischen Entwurfs. Alle relevanten Ergebnisse dieser Optimierung sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Tabelle 4: Ergebnisse der Optimierung mit kombinierten strukturellen und geometrischen Parametern

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	54,72 kg	32,20 kg
Maximale Restriktion	4,81	-2,62e-7
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 mm	1,12 mm – 11 mm
Dicken Rippen	30 mm	1,22 mm – 32,8 mm
Dicken Holme	3 mm	3,52 mm und 3,65 mm
Innere Profilhöhe	120 mm	583,2 mm
Mittlere Profilhöhe	120 mm	186 mm
Äußere Profilhöhe	60 mm	9,27 mm

4.4 Verifizierung der Ergebnisse

Es wurde bereits festgestellt, dass die Masse des Flügelkastens durch die kombinierte Optimierung aus Struktur und Geometrie geringer ausfällt als durch die reine Struktur- oder Geometrieoptimierung. In diesem Abschnitt soll die Güte dieses Ergebnisses verifiziert werden.

Zunächst soll überprüft werden, ob das gefundene Optimum mit den geometrischen Parametern aus Tabelle 4 tatsächlich das beste Ergebnis in näherer Umgebung im Parameterraum darstellt. Dafür wurde die Höhe des Flügelkastens aus dem Ergebnis der Optimierung aus Kapitel 4.3 um 20 % erhöht und optimiert. Im Anschluss wurde eine weitere Optimierung durchgeführt, bei der die Höhe um 20 % gesenkt wurde. Die Geometrie wurde dann so belassen und lediglich die Struktur des Flügels wurde optimiert. Es ist dann zu erwarten, dass die gefundenen Optima schlechter sind als das aus Kapitel 4.3. Die Anfangsgeometrie des Flügelkastens der beiden Optimierungen sind in Tabelle 5 aufgeführt. Ebenfalls nochmal aufgeführt ist die Geometrie des Ergebnisses aus Kapitel 4.3.

Tabelle 5: Anfangsprofilhöhen der Vergleichsoptimierungen

	-20 %	+0 %	+20 %
Innere Profilhöhe	466,6 mm	583,2 mm	699,8 mm
Mittlere Profilhöhe	148,8 m	186 mm	223,2 mm
Äußere Profilhöhe	77,8 mm	9,27 mm	116,6 mm

Die Resultate dieser können aus folgender Tabelle entnommen werden.

Tabelle 6: Endergebnisse der Optimierungen mit veränderter Profilhöhe

	-20 %	+0 %	+20 %
Initiale Masse	76,96 kg	87,70 kg	98,89 kg
Optimierte Masse	33,24 kg	32,20 kg	33,28 kg

Wie zu erwarten war, sind die Massen der beiden Vergleichsoptimierungen durchaus höher ausgefallen, als bei der kombinierten Struktur-Geometrie-Optimierung. Allerdings sind die Unterschiede minimal. Obwohl die Profilhöhe in beiden Optimierungen um 20 % verändert wurden, hat sich die Masse um rund 1 kg erhöht. Dies lässt vermuten, dass die Zielfunktion in diesem Bereich des Parameterraumes sehr flach verläuft. Aus diesem Grund werden sich die Ergebnisse der Studien in verschiedenen Durchläufen leicht unterscheiden, wobei aber immer nahezu die gleiche Masse erreicht wird.

Ebenfalls soll die Konvexität der Zielfunktion überprüft werden. Es soll also der Frage nachgegangen werden, ob es sich bei dem gefundenen Optimum um ein globales Optimum handelt oder um ein lokales. Dafür werden mehrere Optimierungen durchgeführt, wobei die Startparameter jedes Mal variiert werden. Handelt es sich bei dem gefundenen Optimum tatsächlich um ein globales, so sollte das Ergebnis der Vergleichsoptimierungen immer nahezu gleich sein. Auch die Endparameter sollten sich nicht stark unterscheiden. Handelt es sich um ein lokales, so wäre es möglich ein noch besseres Optimum zu finden. Ein globales Optimum ist allerdings erstrebenswert, da das Ergebnis der Optimierung möglichst nicht von den Startparametern abhängig sein sollte.

Es werden vier weitere Optimierungen durchgeführt, wobei jeweils die Paneeldicken und die Profilhöhen einmal halbiert und einmal verdoppelt werden. Es wird erwartet, dass die Masse der Flügelkästen nach den Optimierungen im selben Bereich liegen. Auch die Entwurfsvariablen sollten nach der Optimierung alle vergleichsweise gleich sein.

Tabelle 7: Endergebnisse der Optimierungen mit veränderten Startwerten

	Initiale Masse	Optimierte Masse
Halbe Profilhöhe	44,01 kg	33,61 kg
Doppelte Profilhöhe	75,70 kg	32,73 kg
Halbe Paneeldicke	28,89 kg	32,46 kg
Doppelte Paneeldicke	109,54 kg	32,28 kg

Die Ergebnisse der Optimierungen aus Tabelle 7 zeigen, dass obwohl veränderte Startwerte für die Optimierung gewählt wurden, die Massen am Ende des Durchlaufes alle ungefähr im selben Bereich liegen. Dass dennoch Unterschiede zwischen den Endmassen vorhanden sind, kann auch an den Abbruchkriterien liegen, welche hier relativ grob gewählt wurden. Die Änderungstoleranzen der Entwurfsvariablen, Zielfunktion und Restriktionsfunktionen zwischen den Iterationen wurden hier auf $1 \cdot 10^{-3}$ gesetzt. Feinere Abbruchkriterien würden erwartungsgemäß zu kleineren Unterschieden zwischen den Massen führen. Der Unterschied ist trotzdem klein genug, um zu der Feststellung zu kommen, dass die Resultate der Optimierungen allesamt ähnlich sind. Die Zielfunktion ist in dem getesteten Bereich also konvex. Somit wurde kein besseres Ergebnis als rund 33 *kg* erzielt. Genauere Ergebnisse der Optimierungen aus diesem Kapitel sind in Anhang A aufgeführt.

5 Fazit

5.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, Formoptimierungen eines Flügels im *lightworks*-Framework zu ermöglichen, um so eine Verknüpfung der strukturellen Disziplin mit der aerodynamischen zu schaffen. Dafür mussten zunächst geeignete Entwurfsvariablen, welche die Form des Flügels beeinflussen, gefunden werden. Zum Testen der Optimierungen wurden die Profilhöhen des Flügels als geometrische Entwurfsvariablen ausgewählt, da bei diesen ein Kompromiss zwischen Festigkeit, Stabilität und Masse des Flügels gefunden werden muss. Es sollte ebenfalls möglich sein, Ziel- und Restriktionsfunktionen nach diesen Entwurfsvariablen ableiten zu können. Dafür wurde eine analytische Gleichung, welche einen Zusammenhang der Profilskalierung zu den Knotenkoordinaten des FE-Netzes schafft, hergeleitet.

Durch die Geometrieänderungen am Flügel durch jede Optimierungsiteration ist es nötig das FE-Netz nach jeder Iteration zu aktualisieren. Es sollte eine effiziente Methode gefunden werden, um dies zu realisieren. Anstatt die Geometrie des Flügels nach jeder Iteration neu zu erstellen, war es möglich, die FE-Knotenkoordinaten entsprechend der Profilhöhenänderungen analytisch neu zu skalieren. Dadurch konnte signifikante Rechenzeit eingespart werden. Durch diese Methode entstand die oben schon angesprochene analytische Gleichung, die es ermöglicht hat die geometrischen Gradienten nicht nur mit finiten Differenzen bestimmen zu können.

Mit der Methode der komplexen Schrittweite sollte die Genauigkeit der Gradienten des FE-Solvers erhöht werden. Bei strukturellen Parametern war es möglich, die Gradienten mit dieser Methode zu bestimmen, da der *B2000++*-Solver es ermöglicht komplexe Materialwerte zu setzen. Bei den geometrischen Parametern hingegen müssen für diese Methode komplexe Knotenkoordinaten gesetzt werden. In der jetzigen Version von *B2000++* ist dies nicht möglich. Es sind Änderungen am Programmcode des *B2000++*-Solvers notwendig, damit auch die Gradienten dieses Solvers nach den geometrischen Parametern ableitbar sind.

Da die Informationen der Entwurfsvariablen aus einer CPACS-Datei gewonnen werden, war es nötig, die Optimierung mit einer solchen Datei initialisieren zu können. Es wurde ein Generator geschaffen, welcher aus einer CPACS-Datei zunächst eine CAD-Geometrie erstellt und anschließend, basierend darauf ein FE-Netz. Aus diesem Netz und weiteren Informationen aus der CPACS-Datei, wie z. B. Lastfällen, wurde ein FE-Modell generiert, mit dem es möglich war eine FE-Analyse durchführen zu können. Für eine Optimierung war noch ein Strukturmodell des zu optimierenden Flügels nötig. Dieses wurde ebenfalls aus dem Netz und den Informationen aus der CPACS-Datei generiert.

Am Ende dieser Arbeit wurden, mit der oben beschriebenen Methode, verschiedene Optimierungen durchgeführt und miteinander verglichen. Dafür wurde zunächst eine Optimierung mit reinen strukturellen Parametern, eine mit reinen geometrischen Parametern und zuletzt eine mit kombinierten strukturellen und geometrischen Parametern durchgeführt. Es hat sich gezeigt, dass durch die Kombination der beiden Parametertypen eine weitere Senkung der Masse des Flügels gegenüber der Optimierung mit reinen strukturellen Parametern möglich war. Die Optimierung mit reinen geometrischen Parametern hat gezeigt, dass tatsächlich ein Kompromiss zwischen der Masse des Flügels, Festigkeit und Stabilität, alleine durch die Änderungen der Profilhöhen des Flügels gefunden werden konnte. Allerdings war die Resultatmasse des Flügels deutlich höher als bei den anderen beiden Optimierungen. Es hat sich die Vermutung aus der Einleitung bestätigt, dass durch die multidisziplinäre ein besseres Optimum gefunden werden konnte, als durch die monodisziplinären Optimierungen.

Anschließend wurden weitere Vergleichsoptimierungen durchgeführt, um das Ergebnis der kombinierten Struktur-Geometrie-Optimierung zu verifizieren. Es hat sich gezeigt, dass dieses Ergebnis tatsächlich ein Optimum darstellt, da durch das Ändern der Startprofilhöhen und reine Strukturoptimierung sich leicht höhere Massen ergaben. Alternative Startwerte für die Optimierung haben gezeigt, dass es sich bei dem gefundenen Optimum um das Einzige in diesem Bereich handelt.

5.2 Aussicht

Als geometrische Entwurfsvariable wurden in dieser Arbeit die Profilhöhen des Flügels gewählt. Als weitere geometrische Entwurfsvariablen wurden ebenfalls die Pfeilung oder Spannweite des Flügels genannt. Ebenfalls denkbar wäre es, die Breite des Flügels zu optimieren. Um hier sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, reichen die Form- und Strukturoptimierungen des Flügels nicht aus. Hierfür sollte noch die Aerodynamik des Flügels in Betracht gezogen werden, um so aerostrukturelle Optimierungen durchzuführen. Dafür wäre es nötig, die Zielfunktion, welche bisher nur die Masse des Flügels beinhaltet, so anzupassen, dass auch die Aerodynamik dabei eine Rolle spielt. Das würde bedeuten, dass die Cybermatrix aus der Einleitung erweitert werden würde.

Es wurde bereits angesprochen, dass es nicht möglich war, die Gradienten des FE-Solvers nach den Knotenkoordinaten mit der Methode der komplexen Schrittweite abzuleiten. Bei dieser Methode ist zu erwarten, dass sich die Genauigkeit dieser numerischen Gradienten gegenüber den finiten Differenzen verbessert. Erwartungsgemäß hätte dies zur Folge, dass die Optimierungen im Schnitt weniger Iterationen benötigen, um zu konvergieren, da die Gradienten nicht mehr so stark schwanken.

Für die Methode der komplexen Schrittweite wäre ein Eingriff in den Programmcode des *B2000++*-Solvers nötig, damit auch komplexe Knotenkoordinaten gesetzt werden können.

Die Optimierungen in dieser Arbeit wurden bisher nur mit Festigkeits- und Stabilitätsrestriktionen durchgeführt. In Kapitel 2.4.2 wurden bereits denkbare geometrische Restriktionen in der Theorie dargestellt. In Zukunft können diese Restriktionen in das *lightworks*-Framework integriert werden, um dem Anwender so mehr Möglichkeiten zur Gestaltung des Flügels zu geben.

6 Literaturverzeichnis

- [1] Č. Ilić, A. Merle, A. Ronzheimer, M. Abu-Zurayk, J. Jepsen, M. Leitner, M. Schulze, A. Schuster, M. Petsch und S. Gottfried „Cybermatrix: A Novel Approach to Computationally and Collaboration Intensive Multidisciplinary Optimization for Transport Aircraft Design“ in *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XII*, Springer, 2019, pp. 37-47.
- [2] A. Schumacher, *Optimierung mechanischer Strukturen*, Berlin, Heidelberg: Springer-Vieweg, 2013.
- [3] W. Karush, „Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions“ 1939.
- [4] H. W. Kuhn und A. W. Tucker, „Nonlinear Programming“ *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp. 481-492, 1951.
- [5] K. Svanberg, „The Method of Moving Asymptotes - A new Method for Structural Optimizations“ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359-373, 1987.
- [6] H. Schürmann, *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
- [7] S. W. Tsai und N. J. Pagano, „Invariant Properties of Composite Materials“ Ohio, 1968.
- [8] G. Kenway und J. R. R. A. Martins, „Multi-Point High-Fidelity Aerostructural Optimization of a Transport Aircraft Configuration“ *Journal of Aircraft*, Januar 2014.
- [9] R. Bombardieri, R. Cavallaro, R. Sanchez und N. R. Gauger, „Aerostructural Wing Shape Optimization assisted by Algorithmic Differentiation“ 2020.
- [10] IASB, *Handbuch Struktur Berechnung*, 2009.
- [11] J. Wiedemann, *Leichtbau - Elemente und Konstruktion*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
- [12] B. Brelje und J. R. R. A. Martins, „Coupled Component Sizing and Aerodynamic Shape Optimization via Geometric Constraints“ in *AIAA Aviation Forum*, Dallas, 2019.
- [13] J. E. Dennis und R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Philadelphia: SIAM, 1996.
- [14] J. R. R. A. Martins, P. Sturdza und J. J. Alonso, „The Complex-Step Derivative Approximation“ *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 29, No. 3, pp. 245-262, September 2003.
- [15] R. D. Neidinger, „Introduction to Automatic Differentiation and MATLAB Object-Oriented Programming“ *SIAM Review*, Vol. 52, No. 3, pp. 545-563, 2010.
- [16] M. C.-Y. Niu, *Airframe Structural Design*, Hong Kong: Conmilit Press Ltd., 1988.

- [17] HyperSizer, „Buckling Spans“ [Online]. URL: https://hypersizer.com/help_7.3/#FE-Shells/shell-buckling_span.php?TocPath=Features%257CFEM%2520Interface%257CShell%2520Elements%257C_____5. [Zugriff am 31 Januar 2022].
- [18] B. Klein, FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau, Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [19] M. Siggel, J. Kleinert, T. Stollenwerk und R. Maierl, „TiGL: An Open Source Computational Geometry Library for Parametric Aircraft Design“ *Mathematics in Computer Science*, 13, pp. 367-389, 4 Juli 2019.
- [20] C. Geuzaine und J.-F. Remacle, „Gmsh“ [Online]. URL: <https://gmsh.info/>. [Zugriff am 19 Januar 2022].
- [21] M. Bern und P. Plassmann, „Mesh Generation“ in *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science B.V., 2000, pp. 291-332.
- [22] DLR-SC, „GitHub“ [Online]. URL: <https://github.com/DLR-SC/tigl-examples/blob/master/cpacs/simpletest.cpac.xml>. [Zugriff am 12 April 2022].
- [23] M. Alder, E. Moerland, J. Jepsen und B. Nagel, „Recent Advances in Establishing a Common Language for Aircraft Design with CPACS“ Bordeaux, Frankreich, 2020.

A Optimierungsergebnisse

Tabelle 8: Strukturelle Optimierung mit 20 % höheren Profilhöhen

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	98,88 kg	33,28 kg
Maximale Restriktion	0,46	8,13e-8
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 mm	0,89 mm – 10 mm
Dicken Rippen	30 mm	1,14 mm – 2,94 mm
Dicken Holme	30 mm	3,51 mm und 3,08 mm

Tabelle 9: Strukturelle Optimierung mit 20 % geringeren Profilhöhen

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	76,96 kg	33,24 kg
Maximale Restriktion	0,8	2,83e-7
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 mm	1,29 mm – 11,6 mm
Dicken Rippen	30 mm	1,01 mm – 3,22 mm
Dicken Holme	3 mm	3,34 mm und 3,67 mm

Tabelle 10: Kombinierte Optimierung mit halben Profilhöhen als Startwert

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	44,01 kg	33,61 kg
Maximale Restriktion	10,60	1,78e-7
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 mm	1,25 mm – 10,7 mm
Dicken Rippen	30 mm	1,57 mm – 3,62 mm
Dicken Holme	3 mm	3,42 mm und 3,62 mm
Innere Profilhöhe	60 mm	607,2 mm
Mittlere Profilhöhe	60 mm	196,8 mm
Äußere Profilhöhe	30 mm	8,4 mm

Tabelle 11: Kombinierte Optimierung mit doppelten Profilhöhen als Startwert

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	75,70 kg	32,73 kg
Maximale Restriktion	3,09	5,48e-6
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	10 mm	1,20 mm – 10,5 mm
Dicken Rippen	30 mm	1,48 mm – 3,60 mm
Dicken Holme	3 mm	3,17 mm und 3,60 mm
Innere Profilhöhe	240 mm	615,6 mm
Mittlere Profilhöhe	240 mm	189,6 mm
Äußere Profilhöhe	120 mm	13,2 mm

Tabelle 12: Kombinierte Optimierung mit halben Paneeldicken als Startwert

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	28,89 kg	32,46 kg
Maximale Restriktion	41,30	1,13e-7
Kritische Restriktion	Kombiniertes Beulen	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	5 mm	1,24 mm – 1,07 cm
Dicken Rippen	15 mm	1,28 mm – 2,97 mm
Dicken Holme	15 mm	3,58 mm und 3,69 mm
Innere Profilhöhe	120 mm	574,8 mm
Mittlere Profilhöhe	120 mm	189,6 mm
Äußere Profilhöhe	60 mm	7,2 mm

Tabelle 13: Kombinierte Optimierung mit doppelten Paneeldicken als Startwert

	Initialer Entwurf	Optimierter Entwurf
Masse	109,54 kg	32,28 kg
Maximale Restriktion	0,74	5,58e-8
Kritische Restriktion	Festigkeit nach v. Mises	Kombiniertes Beulen
Dicken Schalenpaneele	20 mm	1,15 mm – 10,4 mm
Dicken Rippen	60 mm	1,29 mm – 2,91 mm
Dicken Holme	6 mm	3,37 mm und 3,51 mm
Innere Profilhöhe	120 mm	637,2 mm
Mittlere Profilhöhe	120 mm	182,4 mm
Äußere Profilhöhe	60 mm	12,6 mm