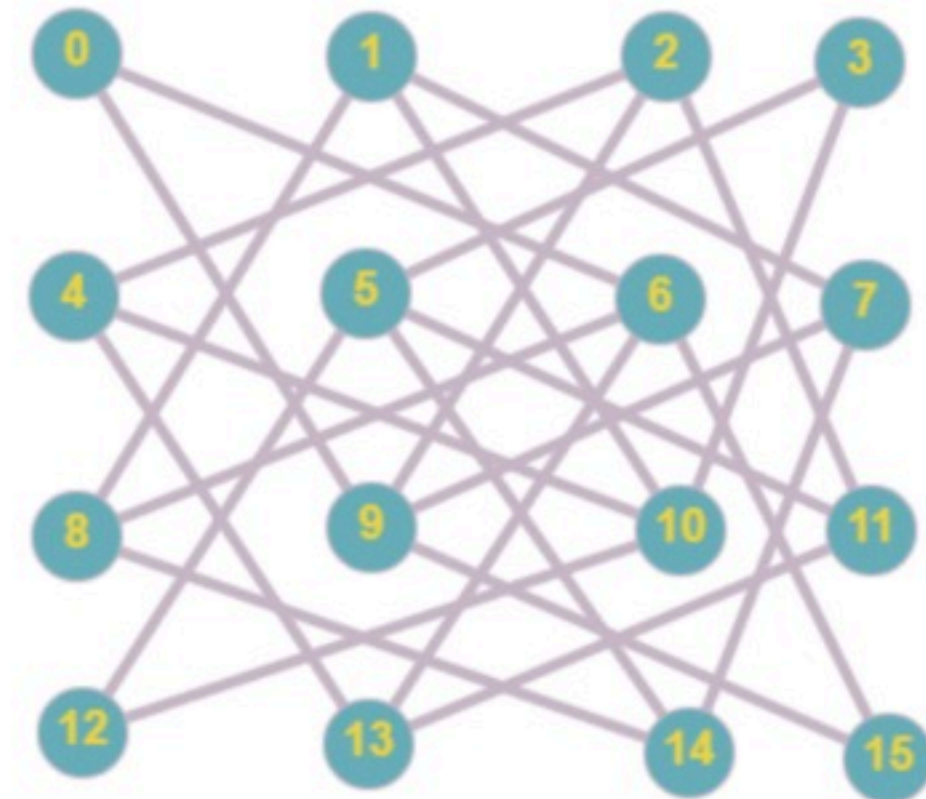
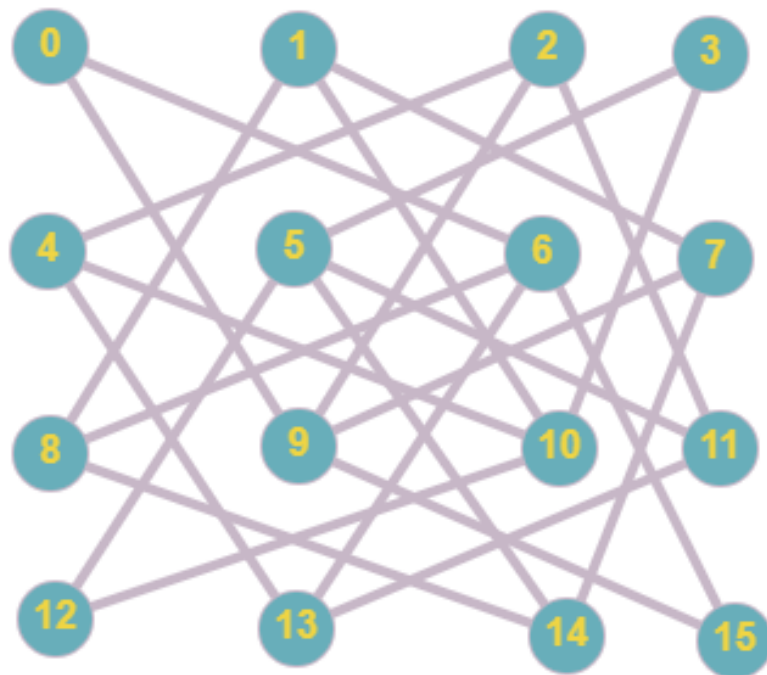


# BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT

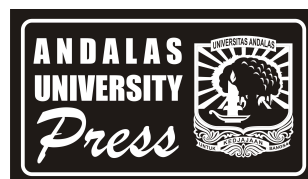


Syafrizal Sy  
Edy Tri Baskoro

# Bilangan Ramsey Multipartit



Syafrizal Sy  
Edy Tri Baskoro



# Bilangan Ramsey Multipartit

Penulis:  
Syafrizal Sy, Edy Tri Baskoro

ISBN :978-623-172-010-8

Dicetak dan diterbitkan oleh :  
Andalas University Press  
Jl. Situjuh No. 1, Padang 25129  
Telp/Faks. : 0751-27066  
email : cebitunand@gmail.com

Hak Cipta Pada Penulis © 2022

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang.  
Dilarang mengutip atau memperbanyak sebahagian atau seluruh isi  
buku tanpa izin tertulis dari penerbit.

# *Bilangan Ramsey Multipartit*

**Syafrizal Sy**  
Profesor Matematika  
Universitas Andalas  
Padang, Indonesia

**Edy Tri Baskoro**  
Profesor Matematika  
Institut Teknologi Bandung  
Bandung, Indonesia

Terimakasih Kepada:  
Saladin Uttunggadewa (Dosen Matematika ITB)  
Hilda Assiyatun (Dosen Matematika ITB)  
A.N.M. Salman (Dosen Matematika ITB)

## Kata Pengantar

Alhamdulillah puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas segala karunia-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga kami dapat menyusun buku yang berjudul **Bilangan Ramsey Multipartit**. Adapun materi-materi yang termuat di dalam buku ini adalah merupakan hasil kumpulan riset penulis dalam bentuk karya ilmiah yang diperoleh sejak penulis mendalami Teori Ramsey Multipartit sejak tahun 2005. Buku ini ditulis dengan harapan dapat memenuhi kriteria buku referensi berbasis penelitian tentang Teori Graf, khususnya kajian bilangan Ramsey multipartit.

Frank Plumtom Ramsey pada tahun 1930, mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar-tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Selanjutnya, teori ini dikenal dengan Teori Ramsey. Kemudian, pada tahun 1935 Erdős dan Szekeres mengaplikasikan teori ini ke dalam Teori Graf. Teori Ramsey mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi seperti yang termuat pada paper Espino pada tahun 2004 yang berjudul *On Ramsey's Conjecture: Efficient Allocations in the Neoclassical Growth Model with Private Information*. Pada bidang matematika, di samping teori graf, teori Ramsey juga tumbuh dan berkembang diantaranya dalam teori bilangan, aljabar, geometri, topologi, analisis harmonik, ruang metrik, dan teori ergodik seperti yang termuat pada paper Rosta tahun 2004 yang berjudul *Ramsey Theory Applications*.

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren dalam dua papernya yang terpisah memperkenalkan dua konsep bilangan Ramsey multipartit sebagai berikut, yaitu *bilangan Ramsey multipartit himpunan* dan *bilangan Ramsey multipartit ukuran*. Dari kedua papernya tersebut, Burger dan Vuuren memberikan sifat-sifat dasar, batas bawah dan batas atas untuk kedua bilangan Ramsey multipartit tersebut (himpunan dan ukuran), serta kaitan antara keduanya. Di samping itu, Burger dan Vuuren juga memberikan kaitan antara kedua bilangan Ramsey multipartit tersebut dengan bilangan Ramsey klasik. Kemudian, penulis mencoba membuat suatu buku tentang Ramsey multipartit untuk perluasan konsep yang diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren di atas, yaitu graf yang dikandungnya tidak harus lengkap dengan cara menghilangkan sifat *kelengkapan* (*completeness*) dari graf yang diberikan. Sebagian kandungan buku ini, dirujuk dari buku "Bilangan Ramsey multipartit ukuran" dengan penulis Syafrizal Sy dan Edy Tri Baskoro tahun 2021.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih serta penghargaan kepada Ketua LPPM Universitas Andalas beserta tim yang telah memberikan dukungan finansial dalam menulis Buku Monograf yang berjudul "Bilangan Ramsey Multipartit" dalam rangka pengembangan keilmuan penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Rektor Universitas Andalas yang telah memberikan kepercayaan dan fasilitas kepada penulis dalam bidang penelitian sehingga buku ini dapat diselesaikan. Penulis mengucapkan terimakasih kepada dosen dan teman2 di Departemen Matem-

atika Institut Teknologi Bandung. Kepada Ketua Departemen Matematika dan Sain Data Universitas Andalas dan rekan-rekan kolega, serta para peneliti dalam tim penelitian, penulis menyampaikan terima kasih atas kerja sama yang terjalin dengan baik selama ini, serta keluarga yang telah memberikan motivasi sehingga buku ini dapat diselesaikan. Walaupun buku ini masih jauh dari kesempurnaan, tak ada gading yang tak retak, namun semoga buku monograf ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya pengembangan dalam Teori Graf.

Padang, Agustus 2022

Syafrizal Sy & Edy Tri Baskoro

# Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	iii
Daftar Gambar	v
<b>I Pendahuluan</b>	<b>1</b>
I.1 Definisi Dasar dari Teori Graf	1
I.2 Teori Ramsey Klasik	3
I.3 Teori Ramsey Graf	4
I.4 Teori Ramsey Multipartit	5
I.4.1 Bilangan Ramsey multipartit himpunan	6
I.4.2 Bilangan Ramsey multipartit ukuran	8
<b>II Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan</b>	<b>12</b>
II.1 Survey Literatur	12
II.2 Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan Graf Lintasan	14
II.3 Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan $M_j(aK_2, K_{1,t})$	15
<b>III Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(P_n, P_s)</math></b>	<b>22</b>
III.1 Survey Literatur	22
III.2 $P_n$ versus $P_s$ dengan $s = 2, 3$	22
III.3 $P_n$ versus $P_4$	25
<b>IV Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(P_s, G)</math> dengan graf <math>G</math> lainnya</b>	<b>31</b>
IV.1 Survey Literatur	31
IV.2 Graf Lintasan versus Graf lainnya	32
IV.3 Graf Lintasan versus Graf Roda	34
<b>V Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(P_n, C_3)</math> dengan <math>n \geq 2</math></b>	<b>38</b>
V.1 Survey Literatur	38
V.2 Graf Lintasan versus Graf Lingkaran	38
<b>VI Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(P_3, K_{s \times 2})</math></b>	<b>43</b>
VI.1 Survey Literatur	43
VI.2 Graf Lintasan versus Graf <i>Cocktail Party</i>	43
VI.3 Graf Lintasan versus $K_{s \times 2}$	47
<b>VII Batas Bawah Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(P_n, K_{j \times b})</math></b>	<b>53</b>
VII.1 Survey Literatur	53
VII.2 Graf Lintasan versus Graf $K_{j \times b}$	53

<b>VIII</b>	<b>Bilangan Ramsey Bipartit Ukuran <math>m_2(P_n, T_s)</math></b>	<b>57</b>
	VIII.1 Survey Literatur . . . . .	57
	VIII.2 Graf Lintasan versus Graf Pohon . . . . .	57
<b>IX</b>	<b>Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_2(P_4, K_{1,n})</math></b>	<b>61</b>
	IX.1 Survey Literatur . . . . .	61
	IX.2 Graf Lintasan versus Graf Bintang . . . . .	61
<b>X</b>	<b>Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>m_j(S_m, C_n)</math></b>	<b>65</b>
	X.1 Survey Literatur . . . . .	65
	X.2 Graf Bintang versus Graf Lingkaran . . . . .	65
<b>XI</b>	<b>Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran <math>K_{s \times t}</math> versus Lintasan</b>	<b>70</b>
	XI.1 Survey Literatur . . . . .	70
	XI.2 Graf Lintasan versus $K_{s \times t}$ kecil . . . . .	71
	<b>Daftar Pustaka</b>	<b>73</b>
	<b>Daftar Simbol</b>	<b>77</b>
	<b>Indeks</b>	<b>78</b>
	<b>Daftar Riwayat Hidup</b>	<b>78</b>



# Daftar Gambar

III.1	Terdapat tiga lintasan biru yang lebih panjang yang diawali dari titik $a \in R_1$ dan diakhiri di titik $f \in S_1$ . . . . .	23
III.2	(i) Lintasan biru ${}_gP_h$ (ii) Lintasan biru ${}_uP_v$ . . . . .	24
III.3	(a) Partisi baru. (b) $F_3[E'] \supset K_{1,k}$ . (c) $F_3[E'] \supset 2K_{1,k-1}$ . . . . .	29
III.4	Ilustrasi Subkasus 3.2. . . . .	30
V.1	Suatu $(P_n, C_3; 3(r-1))$ -good graph menunjukkan $m_3(P_n, K_{3 \times 1}) \geq r$ . . . . .	39
V.2	(i) Untuk $V_a = V_b$ . (ii) $F_1$ tidak terhubung. . . . .	40
V.3	Suatu $(P_n, C_4;  K_{2 \times (s-1)} )$ -good graph yang menunjukkan $m_2(P_n, C_4) \geq s$ . . . . .	41
V.4	Konstruksi graf $K_{2 \times 2}$ di $F_2$ . . . . .	42
VI.1	(a) $G_1$ untuk $j$ genap (b) $G_1$ untuk $j$ ganjil. . . . .	44
VI.2	$K_{4 \times 3} \supset K_{3 \times 2}$ di $F_2[V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z]$ . . . . .	45
VI.3	$K_{3 \times 3} \supset K_{2 \times 2}$ di $F_2[V \cup V_u \cup V_d]$ . . . . .	47
VI.4	Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari $P_{n-1}$ untuk $ X  \leq 1$ . . . . .	48
VI.5	Ilustrasi <i>path</i> $P_{n-1}$ untuk Kasus 1. . . . .	49
VI.6	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 1.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 1.2. . . . .	50
VI.7	Ilustrasi $P_{n-1}$ untuk Kasus 2. . . . .	50
VI.8	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 2.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 2.2. . . . .	50
VI.9	Ilustrasi dari <i>path</i> $P_{n-1}$ untuk Kasus 3. . . . .	51
VI.10	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 3.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 3.2. . . . .	51
VI.11	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 4.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 4.2. . . . .	52
VI.12	(i) Ilustrasi untuk Subkasus 5.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 5.2. . . . .	52
VII.1	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > r - 1$ . . . . .	54
VII.2	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > jb - 1$ . . . . .	54
VII.3	$m_j(P_n, K_{j \times b}) > t - 1$ . . . . .	55
VII.4	Ilustrasi untuk Kasus 1. $n = 3$ . . . . .	56
VII.5	Illustration for Case 2. $n = 4$ or $5$ . . . . .	56
X.1	$G_1 \not\cong S_4$ and $G_2 \not\cong C_6$ . . . . .	66
X.2	Suatu graf bipartit $G_2$ untuk Subkasus 2.2 . . . . .	68

# Bab I Pendahuluan

## I.1 Definisi Dasar dari Teori Graf

Teori graf merupakan salah satu objek studi subdisiplin kombinatorial dalam teori Ramsey. Dalam bagian ini akan diberikan terminologi yang melingkupinya didefinisikan yang akan digunakan. Suatu **graf**  $G$  adalah himpunan tak-kosong berhingga  $V(G)$  dari objek-objek yang disebut **titik** (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong)  $E(G)$  dari himpunan bagian 2-elemen dari  $V(G)$  yang disebut **sisi** (*edge*). Himpunan  $V(G)$  dikatakan **himpunan titik** dari  $G$  dan Himpunan  $E(G)$  dikatakan **himpunan sisi** dari  $G$ . Suatu  $n$  *stripe* dari suatu graf  $G$  adalah didefinisikan sebagai himpunan dari  $n$  sisi tanpa mempunyai titik bersama. Jumlah titik dari suatu graf  $G$  dikatakan **order** dan jumlah sisi dari suatu graf  $G$  dikatakan **size**. Order dari  $G$  adalah  $|V(G)|$  dan size dari  $G$  adalah  $|E(G)|$ .

Suatu titik  $u$  dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) dengan titik  $v$  jika  $uv \in EG$ . Untuk suatu titik  $v$  dari  $G$ , **lingkungan** (*neighborhood*) adalah suatu himpunan yang didefinisikan  $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$  dan  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Selanjutnya, untuk suatu titik  $v \in G$  dan suatu subgraf  $H$  dari  $G$ , didefinisikan  $N_H(v) = N(v) \cap V(H)$ . Misalkan titik  $x$  di  $G$ , **derajat** (*degree*) dari suatu titik  $x$  ditulis  $d_G(x)$ , yaitu  $d_G(x) = |N_G(x)|$ . Jika setiap titik di dari suatu graf berderajat sama, maka graf tersebut dikatakan **graf reguler**. Jadi, jika  $d(x) = k$  untuk setiap titik  $x \in V(G)$ , maka  $G$  dikatakan graf  $k$ -reguler. **Derajat minimum** (*minimum degree*) dari  $G$  ditulis  $\delta(G)$  dan **derajat maksimum** (*maximum degree*) dari  $G$  ditulis  $\Delta(G)$ .

Jika  $e = uv$  adalah sisi di  $G$ , maka  $e$  dan  $u$  (dan  $e$  dan  $v$ ) dikatakan **insidensi** (*incidence*) di  $G$ . Jika  $e$  dan  $f$  adalah dua sisi berbeda yang insidensi dengan titik yang sama, maka  $e$  dan  $f$  dikatakan **sisi-sisi bertetangga**. Suatu subhimpunan  $M$  dari  $E(G)$  dikatakan *matching* di  $G$  jika tidak ada titik yang terkait dengan lebih dari satu sisi di  $M$ . **Komplemen** (*complement*)  $\overline{G}$  dari suatu graf  $G$  yaitu suatu graf dengan  $|\overline{G}| = |G|$  dan  $uv \in E(\overline{G})$  jika dan hanya jika  $uv \notin E(G)$ .

Dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dikatakan **isomorfik** jika terdapat fungsi satu ke satu, sebut  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ , sedemikian serhingga  $uv \in E(G_1)$  jika dan hanya jika  $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$ , yang mana ditulis  $G_1 \cong G_2$ . Suatu graf  $H$  dikatakan subgraf dari suatu gra  $G$  jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Misalkan  $S$  adalah himpunan tak kosong titik-titik dari suatu gra  $G$ . Suatu **subgraf yang diinduksi** (*induced subgraph*) oleh  $S$  adalah subgraf maksimal dari  $G$  dengan himpunan titik  $S$ , ditulis  $\langle S \rangle$ , yaitu  $\langle S \rangle$  memuat sisi-sisi di  $G$  yang berinsidensi dengan dua titik di  $S$ . Suatu subgraf  $H$  dari suatu graf  $G$  dikatakan suatu **subgraf induksi-titik** dari  $G$ , jika  $H = \langle S \rangle$  untuk suatu himpunan tak kosong titik-titik,  $S$ , dari  $G$ .

**Jalan** (*walk*) dalam suatu graf  $G$  adalah barisan  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  ( $n \geq 0$ ) dari titik dan sisi yang bergantian, dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga  $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jika  $v_0 = v_n$  maka jalan tersebut dikatakan **jalan tertutup** (*closed walk*). Jalan dikatakan mempunyai **panjang** (*length*)  $n$ , jika terdapat (tidak harus berbeda)  $n$  sisi. Suatu **jejak** (*trail*) adalah suatu jalan yang mana tidak ada sisi yang berulang. Suatu **path** adalah suatu jalan yang mana tidak ada titik yang berulang. Suatu **graf lingkaran**  $C_n$  (*cycle*) adalah suatu jalan  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  yang mana  $n \geq 3, v_0 = v_n$ , dan  $n$  titik  $v_1, v_2, \dots, v_n$  berbeda, atau graf lingkaran juga dapat disebut graf terhubung 2-reguler. Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah dua titik di graf  $G$ . Dikatakan  $u$  **joined** ke  $v$  jika  $G$  memuat path  $u - v$ . Graf  $G$  dikatakan **terhubung** (*connected*) jika  $u$  terhubung ke  $v$  untuk setiap pasang titik,  $(u, v)$ , di  $G$ .

Suatu graf  $G$  dikatakan **graf lengkap** (*complete graph*) berorde  $p$ , ditulis  $K_p$ , jika setiap dua titik (berbeda) bertetangga. Jika  $G$  adalah graf **n-partit** yang mempunyai himpunan-himpunan partit  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sedemikian sehingga setiap titik dari  $V_i$  bertetangga ke setiap titik di  $V_j$ , dimana  $1 \leq i < j \leq k$ , maka  $G$  disebut **graf lengkap n-partit**. Jika  $|V_i| = p_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  maka ditulis  $K_{=p_1, p_2, \dots, p_n}$ . Dalam hal  $n = 2$ , *graf lengkap 2-partit* dikatakan **graf bipartit**. Graf tersebut juga dikatakan **graf multipartit lengkap**. Jika  $p_1 = p_2 = \dots = p_n$  maka  $G$  dikatakan **graf partit-n seimbang**. Suatu notasi  $K_{n \times l}$  dikatakan **graf partit-n seimbang lengkap** dengan  $n$  himpunan partit dan  $l$  titik per himpunan partit. Untuk  $s \geq 3$ ,  $K_{s \times 2}$  dikatakan suatu **cocktail party graph**, yaitu adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghapus *perfect matching* dari graf lengkap  $K_{2s}$ .

Suatu graf lengkap dengan satu sisi  $e$  dihapus ditulis  $K_p - e$ . Suatu **graf bintang** *star*,  $K_{1,n}$ , adalah suatu graf bipartit  $n + 1$  titik dengan satu partit terdiri dari satu titik, dan  $K_{1,n}$  juga dapat ditulis  $S_{n+1}$ . Suatu **graf roda** *wheel*,  $W_n$ , adalah hasil dari sebuah titik yang dihubungkan ke setiap titik dari suatu graf lingkaran  $C_{n-1}$ . Jadi,  $W_n \cong C_n + \{x\}$ . Suatu **windmil**  $M_{2n}$  adalah suatu graf yang diperoleh dari  $W_{2n}$  dengan menghapus  $n$  buah *disjoint non-rim* sisi. Suatu **fan**  $F_n$  adalah suatu graf  $\{x\} + P_n$ . Suatu graf  $G$  dengan  $n$  titik dikatakan **pancyclic** jika  $G$  memuat *cycles* yang setiap panjangnya adalah  $l$  dengan  $3 \leq l \leq n$ .

Ada beberapa cara untuk menghasilkan suatu graf dari graf-graf lain. **Gabungan** (*union*) dari  $G_1$  dan  $G_2$ , ditulis  $G_1 \cup G_2$ , adalah suatu graf yang mempunyai  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ . Jika  $G_1 \cong G_2 \cong G$ , maka ditulis  $2G$  untuk  $G_1 \cup G_2$ . Secara umum, jika  $G_1 \cong \dots \cong G_n$  maka  $nG = G_1 \cup \dots \cup G_n$ . Jika  $G_1$  dan  $G_2$  dua graf yang titik-titiknya terpisah (*disjoint*), maka **join** dari  $G_1$  dan  $G_2$ , sebut  $G_1 + G_2$ , yaitu suatu graf yang terdiri dari gabungan,  $G_1 \cup G_2$  bersama dengan semua sisi dari tipe  $v_1v_2$  dimana  $v_1 \in G_1$  dan  $v_2 \in G_2$ .

## I.2 Teori Ramsey Klasik

Satu dari banyak problem fundamental dalam logika matematika adalah mencari prosedur teratur untuk menentukan benar tidaknya (konsistensi) suatu formula logika yang diberikan. Ramsey [42] adalah salah satu yang mengkaji problem tersebut. Ramsey mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar-tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Teori yang dikenal sebagai Teori Ramsey itu, kemudian mempunyai banyak penerapan diantaranya pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi [18].

Teori Ramsey tidak hanya tumbuh dan berkembang dalam bidang kelahirannya, yakni bidang logika, tetapi juga dapat dijumpai kegunaannya di bidang matematika yang lain diantaranya pada teori bilangan, aljabar, geometri, topologi, analisis harmonik, ruang metrik, dan teori ergodik [43]. Pada tahun 1935, Erdős dan Szekeres [17], teori Ramsey kemudian diaplikasikan ke dalam teori graf dan menjadi salah satu cabang dalam teori graf yang mendapat banyak perhatian dalam empat dasawarsa terakhir ini. Dalam teori graf, teori Ramsey dapat dinyatakan sebagai berikut.

*Untuk setiap bilangan bulat positif  $m$  dan  $n$ , **terdapat** bilangan bulat positif  $N_0$  sedemikian sehingga setiap graf  $F$  dengan  $N$  titik, dengan  $N \geq N_0$ , senantiasa memenuhi sifat berikut:  $F$  memuat subgraf lengkap  $K_m$  atau komplemen dari  $F$  memuat subgraf lengkap  $K_n$ .*

Bilangan bulat positif *terkecil*  $N_0$  pada pernyataan di atas disebut *bilangan Ramsey klasik* untuk nilai  $m$  dan  $n$ , dinotasikan dengan  $r(m, n)$ . Karena setiap graf  $F$  memenuhi  $\overline{\overline{F}} = F$ , bilangan Ramsey klasik ini bersifat simetris, yakni  $r(m, n) = r(n, m)$ .

Teorema berikut digunakan untuk menyelesaikan problem logika di

**Teorema I.1** *Untuk setiap bilangan bulat positif  $r, n$ , dan  $\mu$ , terdapat bilangan bulat positif  $M_0$  sedemikian sehingga untuk  $m \geq M_0$  dan jika semua  $r$ -subhimpunan (subhimpunan dengan  $r$  elemen) dari suatu  $m$ -himpunan  $\Gamma_m$  dikelompokkan (menurut sebarang aturan) ke dalam kelas-kelas saling lepas  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ), maka  $\Gamma_m$  akan memuat subhimpunan  $\Delta_n$  dengan semua  $r$ -subhimpunan dari  $\Delta_n$  menjadi anggota  $C_i$  yang sama.*

Pengetahuan tentang seberapa besar nilai  $M_0$  yang dapat diambil bila diberikan bilangan bulat positif  $r, n$  dan  $\mu$ , selanjutnya, menjadi pusat perhatian. Ramsey [42] memperoleh  $M_0 = n!!!\dots!$ , dengan proses faktorial dilakukan sebanyak  $\mu - 1$  kali untuk kasus  $r = 2$ . Namun demikian, nilai  $M_0$  tersebut masih dipandang terlalu besar.

Penentuan bilangan Ramsey klasik untuk pasangan nilai  $a$  dan  $b$  telah memperoleh banyak perhatian. Namun demikian, hasilnya masih jauh dari yang diharapkan.

Hingga kini, hanya **sembilan** bilangan Ramsey klasik telah diketahui. Greenwood dkk. [23] menemukan empat bilangan Ramsey yakni:  $R(3, 3) = 6$ ,  $R(3, 4) = 9$ ,  $R(3, 5) = 14$  dan  $R(4, 4) = 18$ . Kery [36] menunjukkan  $R(3, 6) = 18$ . Kalbfleisch [35] mendapatkan  $R(3, 7) = 23$ , dan Grinstead dkk. [24] menemukan bilangan Ramsey  $R(3, 8) = 28$  dan  $R(3, 9) = 36$ . Bilangan Ramsey klasik terbaru adalah  $R(4, 5) = 25$ . Bilangan Ramsey ini ditemukan McKay dan Radziszowski [38] dengan menggunakan bantuan komputer. Penentuan bilangan Ramsey klasik lainnya masih merupakan masalah terbuka (*open problem*), diantaranya  $R(5, 5)$  dan  $R(3, 10)$  yang kini banyak dikaji orang.

Pada tahun 2021, Stanisaw P. Radziszowski dalam surveynya memberikan nilai-nilai dan batas-batas untuk  $r(a, b)$ ,  $a \leq 10, b \leq 15$ , dapat dilihat di paper *Small Ramsey Numbers* [41].

$b$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40	47	53	60	67	74
								42	50	59	68	77	87
4		18	25	36	49	59	73	92	102	128	138	147	158
				41	61	84	115	149	191	238	291	349	417
5			43	58	80	101	133	149	183	203	233	267	275
			48	87	143	216	316	442	633	848	1138	1461	1878
6				102	115	134	183	204	262	294	347		401
				165	298	495	780	1171	1804	2566	3703	5033	6911
7					205	219	252	292	405	417	511		
					540	1031	1713	2826	4553	6954	10578	15263	22112
8						282	329	343	457		817		873
						1870	3583	6090	10630	16944	27485	41525	63609
9							565	581					
							6588	12677	22325	38832	64864		
10								798					
								23556	45881	81123			1313

### I.3 Teori Ramsey Graf

Selanjutnya, teorema di atas disebut dengan **Teorema Ramsey**. Erdős dan Szekeres [17] mengaplikasikan teorema tersebut ke dalam teori graf, dengan mengambil  $r = 2$  dan  $\mu = 2$ . Dalam bahasa graf,  $\Gamma_m$  menyatakan graf lengkap  $K_m$  dengan  $m$  titik,  $\Delta_n$  menyatakan graf lengkap  $K_n$  dengan  $n$  titik dan setiap 2-subhimpunan menyatakan sisinya. Pengelompokan ke dalam dua kelas saling lepas ( $\mu = 2$ ) dapat dipandang sebagai pewarnaan sisi dengan dua warna. Sehingga, dalam bahasa graf, Teorema Ramsey ?? dapat disajikan sebagai berikut.

**Teorema I.2** Untuk setiap nilai  $a$  dan  $b$ , terdapat bilangan bulat  $M_0$  sedemikian sehingga jika  $m \geq M_0$  maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf

*lengkap  $K_m$  akan memuat subgraf lengkap  $K_a$  warna merah atau subgraf  $K_b$  warna biru.*

Bilangan *terkecil*  $M_0$  pada Teorema I.2 disebut dengan **bilangan Ramsey klasik** untuk nilai  $a$  dan  $b$ , dan dinotasikan dengan  $R(a, b) = M_0$ . Walaupun pengetahuan tentang bilangan Ramsey klasik masih relatif sedikit, namun studi perluasan Teori Ramsey juga telah banyak dikaji. Salah satu perluasannya adalah sebagai berikut.

*Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Tentukan bilangan bulat positif terkecil  $N$  sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf lengkap  $K_N$  akan memuat subgraf dengan sisi berwarna merah yang isomorfik dengan graf  $G$  atau memuat subgraf dengan sisi berwarna biru yang isomorfik dengan graf  $H$ .*

Bilangan  $N$  di atas sebagai *bilangan Ramsey graf*  $R(G, H)$  untuk kombinasi antara graf  $G$  dan  $H$ . Selanjutnya, studi bilangan Ramsey graf ini berkembang pesat menjadi suatu bidang tersendiri dalam Teori Ramsey.

Studi bilangan Ramsey graf ini telah banyak dilakukan untuk berbagai macam kombinasi graf. Batas bawah bilangan Ramsey graf  $R(G, H)$  untuk sebarang graf  $G$  dan  $H$  telah ditemukan Chvátal dan Harary [11] yakni  $R(G, H) \geq (c(G)-1)(\chi(H)-1)+1$  dengan  $c(G)$  adalah banyaknya titik dari komponen maksimal dalam graf  $G$  dan  $\chi(H)$  adalah bilangan kromatik dari graf  $H$ . Khususnya, Chvátal [9] telah menemukan bilangan Ramsey graf  $R(T_n, K_m)$  dengan  $T_n$  adalah suatu graf pohon yang mempunyai  $n$  titik dan  $K_m$  adalah suatu graf lengkap yang mempunyai  $m$  titik.

## I.4 Teori Ramsey multipartit

Burger dan Vuuren mengkaji dua bentuk bilangan Ramsey multipartit, yaitu bilangan Ramsey multipartit-himpunan (Burger dan Vuuren, 2004) dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran (Burger dan Vuuren, 2004a).

Ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G, H)$  adalah dengan memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik. Sedangkan, ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(G, H)$  adalah dengan memberikan jumlah himpunan partit yang tetap dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum titik dari himpunan-himpunan partit tersebut sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik.

Untuk dua graf  $G_1$  dan  $G_2$ , dan bilangan bulat  $j \geq 2$ , bilangan bulat terkecil  $m_j(G_1, G_2) = t$  sedemikian sehingga setiap faktorisasi dari graf  $K_{j \times t} := F_1 \oplus F_2$  memenuhi kondisi berikut:  $F_1$  memuat  $G_1$  sebagai subgraf atau  $F_2$  memuat  $G_2$

sebagai subgraf. Suatu graf  $G \cong K_{j \times t}$  dengan  $n$  titik dikatakan  $(G_1, G_2; n)$ -good graph jika  $G$  tidak memuat  $G_1$  dan  $\overline{G}$  tidak memuat  $G_2$ .

Suatu graf  $G$  dikatakan **factorable** menjadi faktor-faktor  $G_1, G_2, \dots, G_n$  jika faktor-faktor ini adalah **pairwise edge-disjoint** dan  $\cup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$ . Jika  $G$  adalah di-faktor menjadi faktor-faktor  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , maka  $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$  dikatakan **factorization** dari  $G$ .

Pada dua subbab di bawah ini, akan diberikan kajian tentang kedua bilangan Ramsey multipartit seimbang lengkap tersebut.

### I.4.1 Bilangan Ramsey multipartit himpunan

Pengertian bilangan Ramsey multipartit-himpunan didefinisikan sebagai berikut oleh Burger dan Vuuren pada tahun 2004.

#### Definisi I.1 .

Misalkan  $j, a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$  adalah bilangan asli terkecil  $\xi$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf  $K_{\xi \times j}$  diberi warna merah dan warna biru secara sebarang, maka graf  $K_{\xi \times j}$  akan memuat subgraf  $K_{a \times b}$  merah atau subgraf  $K_{c \times d}$  biru.

Definisi ini merupakan perumuman dari bilangan Ramsey klasik, karena:

$$\text{jika } r(m, n) = t \text{ maka } M_1(K_{m \times 1}, K_{n \times 1}) = t. \quad (\text{I.1})$$

Seperti halnya bilangan Ramsey klasik, bilangan Ramsey multipartit-himpunan juga bersifat simetris, yaitu

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = M_j(K_{c \times d}, K_{a \times b}). \quad (\text{I.2})$$

Eksistensi dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan diberikan oleh Burger dan Vuuren (2004), yaitu untuk semua  $j, b, d \geq 1$  dan  $a, c \geq 2$  berlaku

$$\max\{r(a, c), \min\{\lceil b/j \rceil a, \lceil d/j \rceil c\}\} \leq M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq \binom{ab + cd - 2}{ab - 1}. \quad (\text{I.3})$$

Jika  $M_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = x$  maka sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi  $K_{x \times k}$  senantiasa akan memuat  $K_{a \times b}$  merah atau  $K_{c \times d}$  biru sebagai subgraf. Jelas bahwa,  $K_{x \times k} \subseteq K_{x \times j}$  untuk  $k \leq j$ . Ini mengakibatkan  $K_{x \times j}$  juga akan memuat  $K_{a \times b}$  merah atau  $K_{c \times d}$  biru sebagai subgraf. Oleh karena itu, jika  $k \leq j$  maka

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq M_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}). \quad (\text{I.4})$$

Dari (I.3), diperoleh  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq r(a, c)$  untuk semua  $j, b, d \geq 1$  dan  $a, c \geq 2$ . Sedangkan dari (I.4), didapat  $M_j(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) \leq M_1(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) = r(a, c)$ . Oleh karena itu, untuk setiap  $j \geq 1$  dan  $a, b \geq 2$  berlaku

$$M_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) = r(a, b). \quad (\text{I.5})$$

Misalkan  $M_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) = y$ . Misalkan  $a \leq \alpha$ ,  $b \leq \beta$ ,  $c \leq \gamma$  dan  $d \leq \delta$  maka sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi  $K_{y \times j}$  senantiasa memuat  $K_{\alpha \times \beta}$  merah (dan juga  $K_{a \times b}$  merah) atau  $K_{\gamma \times \delta}$  biru (dan juga  $K_{c \times d}$  biru) sebagai subgraf. Akibatnya,  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq y$ . Oleh karena itu, diperoleh

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq M_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}), \quad (\text{I.6})$$

jika  $a \leq \alpha$ ,  $b \leq \beta$ ,  $c \leq \gamma$ , dan  $d \leq \delta$ . Kemudian, Burger dan Vuuren (2004) juga menunjukkan celah (*gaps*) dari dua bilangan Ramsey multipartit-himpunan, yaitu untuk semua bilangan asli  $a \geq 3$ ,  $c \geq 2$  dan  $j, b, d \geq 1$  berlaku

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq M_j(K_{(a-1) \times b}, K_{c \times d}) + c \lceil d/j \rceil - 1. \quad (\text{I.7})$$

Hanya sedikit bilangan Ramsey multipartit-himpunan yang diketahui (Burger dan Vuuren, 2004). Pernyataan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4$  dan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{4 \times 1}) = 7$  diberikan oleh Harborth dan Mengersen (1996, 2001). Burger dkk. (2004) membuktikan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = M_3(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 4$ ,  $M_4(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 3$ , dan  $M_5(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = M_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2}) = 2$  untuk  $j \geq 6$ .

Nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk kombinasi  $K_{2 \times 1}$  dengan sebarang graf multipartit seimbang lengkap adalah sebagai berikut. Misalkan  $j, d \geq 1$  dan  $c \geq 2$  maka

$$M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) = \lceil d/j \rceil c. \quad (\text{I.8})$$

Untuk membuktikan (I.8), perhatikan sebarang pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari  $F \cong K_{\lceil d/j \rceil c \times j}$ . Jika ada satu sisi dari  $F$  yang berwarna merah maka  $F \supset K_{2 \times 1}$  merah sebagai subgraf. Jika tidak demikian, maka jelas  $F \supset K_{c \times d}$  biru sebagai subgraf, karena  $K_{c \times d} \subset K_{\lceil d/j \rceil c \times j}$ . Jadi,  $M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) \leq c \lceil d/j \rceil$ . Kemudian, dengan mewarnai semua sisi dari  $K_{(c \lceil d/j \rceil - 1) \times j}$  dengan warna biru, mengakibatkan tidak terdapat  $K_{2 \times 1}$  merah ataupun  $K_{c \times d}$  biru sebagai subgraf. Jadi  $M_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) \geq c \lceil d/j \rceil$ .

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren juga menemukan bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk dua kombinasi graf seimbang lengkap yaitu  $K_{2 \times 2}$  versus  $K_{3 \times 1}$ .

**Teorema I.3** Untuk semua  $j \geq 3$ ,  $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$ .

*Bukti.* Dari (I.3), diperoleh  $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \geq r(2, 3) = 3$  untuk semua  $j \geq 1$ . Selanjutnya ditunjukkan  $M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$ . Misalkan  $V(G) = \{x_1, \dots, x_9\}$  adalah himpunan titik-titik dari  $G \simeq K_{3 \times 3}$  dengan  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\{x_4, x_5, x_6\}$ , dan  $\{x_7, x_8, x_9\}$  adalah himpunan-himpunan partitnya. Misalkan terdapat pewarnaan merah-biru dari sisi-sisi di  $G$  yang tidak memuat  $K_{2 \times 2}$  merah dan  $K_{3 \times 1}$  biru. Misalkan berturut-turut  $R$  dan  $B$  adalah subgraf dari  $G$  yang diinduksi oleh sisi-sisi merah dan sisi-sisi biru. Karena tidak ada graf dengan jumlah titik ganjil dan setiap titiknya berderajat ganjil, maka perlu diperhatikan kasus berikut:

**Kasus i:**  $\Delta(B) \geq 4$ . Jika terdapat satu titik  $x$  di  $B$  yang mempunyai sedikitnya



dua tetangga dalam setiap dua himpunan partit lainnya, maka terdapat satu sisi yang menghubungkan dua titik tetangga dari  $x$  tersebut (karena  $R \not\subseteq K_{2 \times 2}$ ). Jadi,  $B \supseteq K_{3 \times 1}$ , kontradiksi.

**Kasus ii:**  $\Delta(R) \geq 4$ . Asumsikan  $|N_R(x_1)| \geq 4$ , maka  $x_2$  bertetangga dalam  $B$  dengan sedikitnya  $|N_R(x_1)| - 1$  titik di  $N_R(x_1)$ , karena bila tidak demikian terdapat  $K_{2 \times 2}$  merah. Jika  $|N_R(x_1)| \geq 5$ , maka  $x_2$  mempunyai derajat paling sedikit 4 di  $B$ , sehingga ini adalah Kasus i. Jadi, asumsikan  $N_R(x_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $N_B(x_1) = \{v_5, v_6\}$ . Karena  $\{x_2, x_3, v_5, v_6\}$  tidak membangun  $K_{2 \times 2}$  merah, akibatnya  $x_2 v_5 \in B$ . Maka  $d(x_2) \geq 4$  di  $B$ , ini juga Kasus (i).

Dengan menggunakan batas bawah oleh Chvátal dan Harary [11] yakni  $R(G, H) \geq (c(G) - 1)(\chi(H) - 1) + 1$ , untuk semua  $a, c \geq 2$  dan  $b, d \geq 1$  diperoleh batas bawah untuk graf multipartit seimbang lengkap, yaitu

$$M_1(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq \max\{(a - 1)(cd - 1), (c - 1)(ab - 1)\} + 1 \quad (\text{I.9})$$

Namun, (I.9) ini tidak berlaku untuk  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$  dengan  $j > 1$ . Dengan metode probabilistik yang diberikan oleh Erdős dan Spencer (1974), Burger dan Vuuren (2004) dapat menunjukkan batas bawah  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$  sebagai berikut. Untuk  $a, c \geq 2$  dan  $j, b, d \geq 1$ , berlaku

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > \frac{1}{j} \min\left\{\sqrt[j]{a!(b!)^a 2^{b^2 \binom{a}{2} - 1}}, \sqrt[j]{c!(d!)^c 2^{d^2 \binom{c}{2} - 1}}\right\}. \quad (\text{I.10})$$

Batas atas untuk bilangan Ramsey multipartit-himpunan kombinasi antara dua graf bipartit seimbang lengkap diberikan (I.11), buktinya dapat ditemukan pada Burger dkk. (2004) dan Stipp (2000). Untuk semua  $j, b \geq 1$ ,

$$M_j(K_{2 \times b}, K_{2 \times b}) \leq \left\lceil \frac{2b - 1}{j} \right\rceil + \left\lceil \frac{2(b - 1) \binom{2b - 1}{b} + 1}{j} \right\rceil. \quad (\text{I.11})$$

Batas atas (I.11) ini hanya dapat digunakan untuk kasus khusus yaitu mencari monokromatik subgraf bipartit seimbang lengkap. Walaupun belum dapat memperumum hasil-hasil untuk kasus graf multipartit lengkap, tetapi Burger dan Vuuren (2004) telah memberikan batas atas rekursif (I.12) berikut, yaitu untuk sebarang  $c \geq 2$  dan  $j \geq 1$ ,

$$M_j(G, K_{c \times 2}) \leq 2[M_1(G - v, K_{c \times 2}) - 1] + M_1(G, K_{(c-1) \times 2}) \quad (\text{I.12})$$

dengan  $G - v$  adalah sebarang graf terhubung.

## I.4.2 Bilangan Ramsey multipartit ukuran

Selain memperkenalkan konsep bilangan Ramsey multipartit-himpunan untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap, Burger dan Vuuren (2004a) juga mengawali pembahasan bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Kedua konsep tersebut

berbeda, namun keduanya saling berhubungan. Pada subbab ini akan diberikan beberapa hasil fundamental tentang bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap yang kecil. Namun sebelumnya, perhatikan definisi umum untuk bilangan Ramsey multipartit-ukuran dari kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berikut.

**Definisi I.2** Misalkan  $j, a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-ukuran  $m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d})$  didefinisikan jika terdapat bilangan asli terkecil  $\zeta$  sehingga jika semua sisi dari graf  $K_{j \times \zeta}$  diberi warna merah dan biru secara sebarang, maka graf  $K_{j \times \zeta}$  akan memuat subgraf  $K_{a \times b}$  merah atau subgraf  $K_{c \times d}$  biru, dan didefinisikan tak hingga dalam keadaan lain.

Bilangan Ramsey multipartit-ukuran dapat juga dipandang sebagai perumuman dari bilangan Ramsey klasik, karena

$$\text{jika } r(m, n) = t \text{ maka } m_t(K_{m \times 1}, K_{n \times 1}) = 1. \quad (\text{I.13})$$

Sifat kesimetrian juga dimiliki oleh bilangan Ramsey multipartit-ukuran, yakni

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = m_j(K_{c \times d}, K_{a \times b}). \quad (\text{I.14})$$

Kaitan lebih lanjut antara bilangan Ramsey multipartit dengan bilangan Ramsey klasik ditunjukkan oleh Burger dan Vuuren (2004a), yaitu sebagai berikut. Misalkan  $a, b, c$ , dan  $d$  adalah bilangan-bilangan asli dengan  $a, c \geq 2$ , maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) < \infty \iff j \geq r(a, c). \quad (\text{I.15})$$

Misalkan  $M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > k$ . Ini berarti bahwa terdapat suatu pewarnaan merah-biru pada semua sisi  $F \cong K_{k \times j}$  sedemikian sehingga  $F$  tidak memuat  $K_{a \times b}$  merah dan  $K_{c \times d}$  biru sebagai subgraf. Hal ini berakibat bahwa  $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > j$ . Demikian juga sebaliknya. Jadi, diperoleh

$$m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > j \iff M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > k. \quad (\text{I.16})$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh bahwa:

$$m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq j \iff M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq k. \quad (\text{I.17})$$

Seperti pada bilangan Ramsey multipartit-himpunan, sifat kelinieran juga dimiliki oleh bilangan Ramsey multipartit-ukuran, yakni: jika  $a \leq \alpha, b \leq \beta, c \leq \gamma$ , dan  $d \leq \delta$  maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq m_j(K_{\alpha \times \beta}, K_{\gamma \times \delta}) \quad (\text{I.18})$$

dan, jika  $k \leq j$  maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \leq m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}). \quad (\text{I.19})$$

Kemudian, Burger dan Vuuren (2004a) juga menunjukkan celah (*gaps*) antara dua bilangan Ramsey multipartit-ukuran. Untuk semua bilangan asli  $n \geq 3, s \geq 2$  dan  $j, l, t \geq 1$  berlaku

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq m_j(K_{(a-1) \times b}, K_{c \times d}) + \lceil d \lfloor j/c \rfloor \rceil - 1. \quad (\text{I.20})$$

Misalkan  $k = r(ab, cd)$ , maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi  $K_k \cong K_{k \times 1}$  akan memuat  $K_{ab}$  merah (juga memuat  $K_{a \times b}$  merah) atau memuat  $K_{cd}$  biru (juga memuat  $K_{c \times d}$  biru). Dari (I.19), barisan  $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d})$  tidak naik untuk  $k$  naik dengan sebarang nilai dari  $a, c \geq 2$  dan  $b, d \geq 1$  yang tetap. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat bilangan asli  $k$  sehingga  $m_k(K_{a \times b}, K_{c \times d}) = 1$ , jika  $k$  cukup besar. Oleh karena itu diperoleh bahwa jika  $j \rightarrow \infty$  untuk  $a, c \geq 2$  dan  $b, d \geq 1$ , maka

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \rightarrow 1. \quad (\text{I.21})$$

Akibat (I.21), jika  $j \rightarrow \infty$  untuk sebarang  $a, c \geq 2$  dan  $b, d \geq 1$ , maka

$$M_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \rightarrow r(a, c). \quad (\text{I.22})$$

Dari teori Ramsey klasik, misalkan  $r(a, b) = t$  maka setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari  $K_{t \times 1}$  senantiasa akan memuat  $K_{a \times 1}$  merah atau  $K_{b \times 1}$  biru sebagai subgraf. Oleh karena itu,  $m_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) \leq 1$  untuk semua  $j \geq t$ . Tetapi, menurut Definisi I.3,  $m_j(K_{a \times 1}, K_{b \times 1}) = 1$  untuk semua  $j \geq t$ . Jadi, untuk setiap  $a, c \geq 2$  dan  $j \geq r(a, c)$  berlaku

$$m_j(K_{a \times 1}, K_{c \times 1}) = 1. \quad (\text{I.23})$$

Nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi  $K_{2 \times 1}$  dengan sebarang bilangan Ramsey multipartit seimbang lengkap diberikan sebagai berikut. Untuk semua  $d \geq 1$  dan  $j \geq c \geq 2$  berlaku

$$m_j(K_{2 \times 1}, K_{c \times d}) = \lceil d / \lfloor j/c \rfloor \rceil. \quad (\text{I.24})$$

Hal ini benar karena  $t = \lceil d / \lfloor j/c \rfloor \rceil$  merupakan bilangan terkecil yang memberikan bahwa  $K_{j \times t} \supseteq K_{c \times d}$ .

Teorema berikut menunjukkan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi dua graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil.

**Teorema I.4** [Burger dan Vuuren, 2004a]

- (1)  $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$ .
- (2)  $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$  dan  $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ .
- (3)  $m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ .

(4)  $m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 1$  untuk semua  $j \geq 7$ .

*Bukti.*

(1) Karena  $r(2, 3) = 3 > j$ , maka dari (I.15)  $m_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = m_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = \infty$ .

(2) Harborth dan Mengersen (1996) telah memberikan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4 > 3$ , sehingga dari (1.16),  $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 2$ . Dari Teorema 1.3,  $M_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$ . Kemudian dari (1.17),  $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 3$ . Jadi,  $m_3(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 3$ . Selanjutnya, karena  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 4$  (Chartrand dan Schuster, 1971) dan dari (3.16),  $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) > 1$ . Kemudian dari (1.17), karena  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 4$ ,  $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 2$ . Jadi,  $m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ .

(3) Karena  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 7 > 6$ , dari (1.16) dan (1.19) diperoleh  $1 < m_6(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_5(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq m_4(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 2$ .

(4) Karena  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq j$  untuk semua  $j \geq 7$  (Chartrand dan Schuster, 1971), menurut (1.17) diperoleh  $1 \leq m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 1$  untuk semua  $j \geq 7$ .

Selanjutnya, karena setiap graf  $K_{jt}$  selalu memuat graf  $K_{j \times t}$ , diperoleh batas bawah berikut. Misalkan  $j, b, d \geq 1$  dan  $a, c \geq 2$  adalah bilangan-bilangan asli, maka diperoleh batas bawah berikut

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) \geq \min\{\lceil ab/j \rceil, \lceil cd/j \rceil\}. \quad (\text{I.25})$$

Melalui (1.16), dari (1.10) diperoleh batas bawah probabilistik, yaitu untuk setiap  $a, c \geq 2$  dan  $j, b, d \geq 1$ ,

$$m_j(K_{a \times b}, K_{c \times d}) > \frac{1}{j} \min\left\{\sqrt[ab]{a!(b!)^a 2^{b^2 \binom{a}{2} - 1}}, \sqrt[cd]{c!(d!)^c 2^{d^2 \binom{c}{2} - 1}}\right\}. \quad (\text{I.26})$$

Kemudian, Burger dkk. (2004) dan Stipp (2000) membuktikan batas atas bilangan Ramsey multipartit-ukuran untuk kombinasi graf bipartit seimbang lengkap berikut ini. Untuk semua  $j \geq 2$  dan  $b \geq 1$ ,

$$m_j(K_{2 \times b}, K_{2 \times b}) \leq \max\left\{2b - 1, \left\lceil \frac{2(b-1)\binom{2b-1}{b} + 1}{j-1} \right\rceil\right\}. \quad (\text{I.27})$$

Kajian Burger dkk. pada makalah tersebut terbatas pada penentuan bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran *hanya* untuk kombinasi antar graf multipartit seimbang lengkap. Untuk kombinasi graf lainnya, kajian bilangan Ramsey multipartit-himpunan dan bilangan Ramsey multipartit-ukuran masih merupakan masalah terbuka.

Secara umum, dalam kajian ini, konsep di atas akan diperumum dengan menghilangkan sifat kelengkapan dari graf yang dimuatnya. Misalkan  $j \geq 2$  adalah bilangan asli. Untuk graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$  adalah bilangan asli terkecil  $\zeta$  sedemikian sehingga sebarang pewarnaan semua sisi dari  $K_{j \times \zeta}$  dengan  $k$  warna akan memuat graf  $G_i$  untuk suatu warna ke  $i$ .

# Bab II Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan

## II.1 Survey Literatur

Ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_j(G, H)$  diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren [4], yaitu dengan memberikan jumlah titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari jumlah minimum himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik.

**Definisi II.1** Misalkan  $j, l, n, s$  dan  $t$  bilangan bulat positif dengan  $n, s \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $\xi$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap  $K_{\xi \times j}$  diberi warna merah atau biru maka graf multipartit seimbang lengkap  $K_{\xi \times j}$  akan memuat  $K_{n \times l}$  merah atau  $K_{s \times t}$  biru sebagai subgraf.

Definisi II.1 merupakan suatu perumuman dari bilangan Ramsey klasik, yaitu: jika  $R(\sigma, \lambda) = \tau$  maka

$$M_1(K_{\sigma \times 1}, K_{\lambda \times 1}) = \tau.$$

Proposisi berikut adalah sifat simetri dari bilangan Ramsey multipartit-himpunan.

**Proposisi II.1** Jika bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$  ada, maka  $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = M_j(K_{s \times t}, K_{n \times l})$ .

Jika konsep dari kedua definisi di atas kita hilangkan sifat kelengkapan dan pewarnaan yang dilakukan menggunakan  $c$  warna, maka kita dapatkan perluasan dari konsep tersebut seperti yang diberikan oleh Definisi II.2 dan II.3 berikut.

**Definisi II.2** Diberikan bilangan bulat positif  $j, c \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G_1, G_2, \dots, G_c)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $\psi$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap  $K_{\psi \times j}$  diberi warna dengan  $c$  buah warna maka graf multipartit seimbang lengkap  $K_{\psi \times j}$  akan memuat subgraf monokromatik  $G_i$  untuk suatu warna ke- $i$ .

Jika  $R(\sigma, \lambda) = \tau$  maka  $M_1(K_{\sigma \times 1}, K_{\lambda \times 1}) = \tau$ .

Selanjutnya, kita batasi hanya dua graf yang diberikan. Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ , dan bilangan asli  $j \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit  $M_j(G, H)$  adalah **bilangan bulat positif terkecil**  $t$  sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap  $K_{t \times j}$  diberi sebarang pewarnaan merah-biru maka graf  $K_{t \times j}$  akan memuat subgraf  $G$  berwarna merah atau subgraf  $H$  berwarna biru.

Berikut definisi  $M_j(G, H)$  dengan menggunakan faktorisasi, yaitu sebagai berikut. Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ , dan bilangan asli  $j \geq 2$ . Bilangan Ramsey multipartit-himpunan  $M_j(G, H)$  adalah **bilangan bulat positif terkecil**  $t$  sedemikian sehingga

untuk sebarang faktorisasi  $K_{t \times j} \cong F_1 \oplus F_2$  senantiasa  $F_1$  memuat subgraf  $G$  atau  $F_2$  memuat subgraf  $H$ .

Hasil kajian bilangan Ramsey multipartit himpunan masih sedikit ditemukan. Bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 3}) = 7$  diperoleh Chartrand dan Schuster [8]. Kemudian, bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{4 \times 1}) = 10$  ditemukan oleh Chvátal dan Harary [11]. Selanjutnya, bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4$  dan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{4 \times 1}) = 7$  ditemukan oleh Harborth dan Mengersen [29, 30]. Bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{5 \times 1}) = 14$  ditemukan oleh Greenwood dan Gleason [23]. Bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_1(K_{2 \times 2}, K_{6 \times 1}) = 18$  ditemukan oleh [19]. Bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_1(K_{2 \times 3}, K_{2 \times 3}) = 18$  ditemukan oleh Harborth dan Mengersen [28].

Untuk semua  $j \geq 1$ , Burger *dkk.* [4] menentukan nilai eksak dari  $M_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$  dimana hasil-hasilnya diberikan pada tabel berikut.

$j$	$M_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$	$M_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$	$M_j(K_{2 \times 2}, K_{4 \times 1})$
1	6	7	
2	4	4	7
3	4	3	
4	3	3	
5	2	3	
$\geq 6$	2	3	

Table II.1. Bilangan Ramsey multipartit himpunan

Proposisi berikut adalah sifat simetri dari bilangan Ramsey multipartit himpunan.

**Proposisi II.2** *Jika bilangan Ramsey multipartit himpunan  $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$  ada, maka  $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t}) = M_j(K_{s \times t}, K_{n \times l})$ .*

Berikut adalah beberapa proposisi menentukan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk graf lingkaran kecil.

**Proposisi II.3**  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) = 4$ .

*Bukti.*

Akan ditunjukkan  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \geq 4$ . Perhatikan  $K_{(4-1) \times 2} = K_{3 \times 2}$ . Faktorisasi  $K_{3 \times 2} \cong F_1 \oplus F_2$  sedemikian sehingga  $F_1 \cong 2K_{1,2}$  dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$ . Jadi  $F_1 \not\supseteq K_{2 \times 2}$  dan  $F_2 \not\supseteq K_{3 \times 1}$ . Oleh karena itu,  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \geq 4$ .

Selanjutnya, akan dibuktikan batas atas yaitu  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 4$ . Perhatikan  $K_{4 \times 2}$ . Faktorisasi  $K_{4 \times 2} \cong G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $G_1 \not\supseteq K_{3 \times 1}$ . Karena  $G_1 \not\supseteq K_{3 \times 1}$ , maka terdapat dua titik  $u$  dan  $v$  sedemikian sehingga  $uv \notin E(G_1)$ .

Jelas bahwa terdapat dua titik lain yang  $x$  dan  $y$  yang bertetangga ke  $u$  dan  $v$  di  $G_2$ . Akibatnya, titik  $u, v, x$  dan  $y$  membentuk  $K_{2 \times 2}$  di  $G_2$ . Oleh karena itu,  $M_2(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1}) \leq 4$ .  $\square$

## II.2 Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan Graf Lintasan

Pada bagian ini akan dibuktikan beberapa proposisi bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan dan graf lintasan berukuran kecil.

**Proposisi II.4**  $M_1(P_2, P_n) = n$ .

*Bukti:*

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah yaitu  $M_1(P_2, P_n) \geq n$ . Perhatikan suatu faktorisasi graf  $F = K_{(n-1) \times 1} = F_1 \oplus F_2$  dengan  $F_1$  adalah *independent vertices* dan  $F_2 = K_{n-1}$ . Jelas bahwa  $F_1 \not\supseteq P_2$  dan karena  $|F| \leq (n-1)$  maka  $F_2 \not\supseteq P_n$ . Akibatnya  $M_1(P_2, P_n) > n-1$ . Oleh karena itu  $M_1(P_2, P_n) \geq n$ .

Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya yaitu  $M_1(P_2, P_n) \leq n$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah faktorisasi dari  $G = K_{n \times 1}$  sedemikian sehingga  $G_1 \not\supseteq P_2$ . Akan ditunjukkan bahwa  $G_2 \supseteq P_n$ . Karena  $G_1 \not\supseteq P_2$  maka  $G_1$  berbentuk *independent vertices*. Jadi,  $G_2 \cong K_n$ . Akibatnya  $G_2 \supseteq P_n$ . Oleh karena itu,  $M_1(P_2, P_n) \leq n$ . Oleh karena itu,  $M_1(P_2, P_n) = n$ .  $\square$

**Proposisi II.5**  $M_2(P_2, P_s) = 2$  untuk  $3 \leq s \leq 4$ .

*Bukti:*

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah yaitu  $M_2(P_2, P_s) \geq 2$  untuk  $3 \leq s \leq 4$ . Perhatikan faktorisasi graf  $F = K_{1 \times 2} = F_1 \oplus F_2$  dengan  $F_1$  adalah *independent vertices*. Jelas bahwa  $F_1 \not\supseteq P_2$ . Karena untuk setiap  $s \in \{3, 4\}$  berlaku  $|F_2| = |K_{1 \times 2}| = 2 < s$ , maka  $F_2 \not\supseteq P_s$ . Akibatnya  $M_2(P_2, P_s) \geq 2$  untuk  $3 \leq s \leq 4$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atasnya yaitu  $M_2(P_2, P_3) \leq 2$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah sebarang faktorisasi dari  $G \cong K_{2 \times 2}$  sedemikian sehingga  $G_1 \not\supseteq P_2$ . Karena  $G_1$  adalah *independent vertices* dan  $G_2 \cong K_{2 \times 2}$ , maka  $G_2 \supseteq P_s$  untuk  $3 \leq s \leq 4$ . Oleh karena itu,  $M_2(P_2, P_s) = 2$  untuk  $3 \leq s \leq 4$ .  $\square$

**Proposisi II.6**  $M_2(P_2, P_s) = 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ .

*Bukti:*

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah yaitu  $M_2(P_2, P_s) \geq 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ . Perhatikan faktorisasi graf  $F = K_{2 \times 2} = F_1 \oplus F_2$  dengan  $F_1$  adalah *independent vertices*. Jelas bahwa  $F_1 \not\supseteq P_2$ . Karena untuk setiap  $s \in \{5, 6\}$  berlaku  $|F_2| = |K_{2 \times 2}| = 4 < s$ , maka  $F_2 \not\supseteq P_s$ . Akibatnya  $M_2(P_2, P_s) \geq 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atasnya yaitu  $M_2(P_2, P_s) \leq 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah sebarang faktorisasi dari  $G \cong K_{3 \times 2}$  sedemikian sehingga  $G_1 \not\supseteq P_2$ . Karena  $G_1$  adalah *independent vertices* dan  $G_2 \cong K_{3 \times 2}$ , maka  $G_2 \supseteq P_s$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ . Oleh karena itu,  $M_2(P_2, P_s) = 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ .  $\square$

**Proposisi II.7**  $M_2(P_3, P_s) = 3$  untuk  $3 \leq s \leq 6$ .

*Bukti:*

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah yaitu  $M_2(P_3, P_s) \geq 3$  untuk  $3 \leq s \leq 6$ . Misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2\}$  dan  $V_2 = \{b_1, b_2\}$  adalah dua himpunan partit dari graf  $F = K_{(3-1) \times 2}$ . Beri 2-pewarnaan merah-biru pada  $F$  sebagai berikut: warna merah pada semua sisi  $F_1 \cong 2P_2$  yaitu  $P_2 := a_1b_1$  dan  $P_2 := a_2b_2$ , dan warna biru pada semua sisi  $F_2 \cong 2P_2$  yaitu  $P_2 := a_1b_2$  dan  $P_2 := a_2b_1$ . Akibatnya,  $F_1 \not\supseteq P_3$  merah dan  $F_2 \not\supseteq P_s$  biru. Oleh karena itu,  $M_2(P_3, P_s) \geq 3$  untuk  $3 \leq s \leq 6$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atasnya yaitu  $M_2(P_3, P_s) \leq 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ . Warnai semua sisi dari graf  $G \cong K_{3 \times 2}$  sedemikian sehingga  $G \not\supseteq P_3$  merah. Akan ditunjukkan bahwa  $G \supseteq P_s$  biru. Misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2\}$ ,  $V_2 = \{b_1, b_2\}$ , dan  $V_3 = \{c_1, c_2\}$ , adalah himpunan partit dari  $G$ . Karena  $G \not\supseteq P_3$  merah, tanpa mengurangi perumuman, kita asumsikan  $G$  adalah membentuk *independent edges* (*maximum matching*) berwarna merah di  $G$ , sebut  $M = \{a_1b_1, a_2c_1, b_2c_2\}$ . Jadi titik-titik berikut membentuk path  $P_s := c_1b_1a_2c_2a_1b_2$  biru di  $G$ . Jadi,  $G \supseteq P_s$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ . Oleh karena itu,  $M_2(P_3, P_s) = 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ .  $\square$

**Proposisi II.8**  $M_3(P_3, k_{1,t}) = 3$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ .

*Bukti:*

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah yaitu  $M_3(P_3, k_{1,t}) \geq 3$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ . Misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$  dan  $V_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$  adalah dua himpunan partit dari graf  $F = K_{(3-1) \times 3}$ . Beri 2-pewarnaan merah-biru pada  $F$  sebagai berikut: warna merah pada semua sisi  $F_1 \cong 3P_2$  yaitu  $P_2 := a_1b_1$ ,  $P_2 := a_2b_2$ , dan  $P_2 := a_3b_3$ . Kemudian, warna biru pada semua sisi  $F_2 \supseteq K_{1,3}$  biru. Jadi,  $F_1 \not\supseteq P_3$  merah dan  $F_2 \not\supseteq K_{1,3}$  biru. Oleh karena itu,  $M_3(P_3, k_{1,t}) \geq 3$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atasnya yaitu  $M_3(P_3, k_{1,t}) \leq 3$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ . Warnai semua sisi dari graf  $G \cong K_{3 \times 3}$  sedemikian sehingga  $G \not\supseteq P_3$  merah. Akan ditunjukkan bahwa  $G \supseteq K_{1,t}$  biru. Misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $V_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$  dan  $V_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$  adalah tiga himpunan partit dari graf  $G$ . Karena  $G \not\supseteq P_3$  merah, tanpa mengurangi perumuman, kita asumsikan  $G$  adalah membentuk *independent edges* (*maximum matching*) berwarna merah di  $G$ . Karena jumlah titik adalah  $3 \times 3$  ganjil, maka terdapat satu titik  $x$  yang tidak bertetangga merah dengan titik lainnya. Misalkan titik  $x \in V_1$ , akibatnya titik  $x$  bertetangga biru dengan semua titik di  $V_2$  dan  $V_3$ . Jadi,  $G \supseteq K_{1,t}$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ . Oleh karena itu  $M_3(P_3, k_{1,t}) \leq 3$  untuk  $3 \leq t \leq 6$ . Oleh karena itu,  $M_2(P_3, P_s) = 3$  untuk  $5 \leq s \leq 6$ .  $\square$

### II.3 Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan $M_j(aK_2, K_{1,t})$

Dalam bagian ini, akan ditentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey multipartit himpunan *stripes* versus graf bintang. Sebelum membuktikannya hasil dari Teorema II.1 berikut, akan dibuktikan Lema II.1 berikut untuk menunjukkan batas bawah untuk bilangan Ramsey multipartit himpunan *stripes* versus graf bintang.



**Lema II.1** Untuk sembarang bilangan bulat positif  $a, t, p$ , dan  $j$  dimana  $t < a, j \geq 2$ , dan

- $\gamma = \lfloor \frac{a-1}{j} \rfloor$ ,
- $\delta \equiv a - 1 \pmod{j}$ ,
- $\eta = \lfloor \frac{\delta}{p-1-\gamma} \rfloor$ , dan
- $\theta \equiv \delta \pmod{p-1-\gamma}$ .

Jika  $(j - \eta - 1)(\theta - 1) + (j - \eta)(p - \gamma - \theta - 1) < t$ , maka  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \geq p$ .

*Bukti.*

Akan ditunjukkan bahwa  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \geq p$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah suatu faktorisasi dari  $F = K_{(p-1) \times j}$ . Misalkan

$$V(F) = \{v_{r,x} | 1 \leq r \leq p-1; 1 \leq x \leq j\}$$

dan

$$E(F) = \{v_{r,x}v_{u,x} | 1 \leq r \leq p-1; 1 \leq x \leq j; r+1 \leq u \leq p-1\}.$$

Selanjutnya, akan dikonstruksi suatu faktorisasi dari  $F$  dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(F_1) &= \{v_{r,x}v_{i,x}, v_{n,u}v_{l,x}, v_{w,\eta+1}v_{m,y} | 1 \leq r \leq \gamma; 1 \leq x \leq j; r+1 \leq i \leq p-1; \\ &\quad \gamma+1 \leq n \leq p-1; 1 \leq u \leq \eta; n+1 \leq l \leq p-1; \gamma+1 \leq w \leq \gamma+\theta; \\ &\quad w+1 \leq m \leq p-1+\theta, \eta+1 \leq y \leq j\} \\ E(F_2) &= \{v_{r,x}v_{n,x}, v_{r,x}v_{w,\eta+1} | \gamma+1 \leq r \leq p-1; \eta+2 \leq x \leq j; r+1 \leq n \leq p-1; \\ &\quad \gamma+\theta+1 \leq w \leq p-1\} = E(\bar{F}_1) \end{aligned}$$

Dari konstruksi  $E(F_1)$ , jelas bahwa  $F_1$  memuat *stripes*  $(a-1)K_2$ . Jadi,  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Dari konstruksi  $E(F_2)$  di atas, mempunyai graf bintang maksimum adalah  $K_{1,s}$  di  $F_2$  dengan

$$\begin{aligned} V(K_{1,s}) &= \{v_{\gamma+\theta,\eta+2}, v_{r,x}, v_{n,u} | \gamma+1 \leq r \leq \gamma+\theta-1; \eta+2 \leq x \leq j; \\ &\quad \gamma+\theta+1 \leq n \leq p-1; \eta+1 \leq u \leq j\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(K_{1,s}) &= \{v_{\gamma+\theta,\eta+2}v_{r,x}, v_{\gamma+\theta,\eta+2}v_{n,u} | \gamma+1 \leq r \leq \gamma+\theta-1; \eta+2 \leq x \leq j; \\ &\quad \gamma+\theta+1 \leq n \leq p-1; \eta+1 \leq u \leq j\} \end{aligned}$$

Karena  $s = (j - \eta - 1)(\theta - 1) + (j - \eta)(p - \gamma - \theta - 1) < t$ , maka  $K_{1,s} \subset K_{1,t}$ . Jadi,  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \geq p$ .  $\square$

Selanjutnya, akan dibuktikan Lema II.2 berikut untuk menunjukkan batas atas untuk bilangan Ramsey multipartit himpunan *stripes* versus graf bintang.

**Lema II.2** Untuk sembarang bilangan bulat positif  $a, t, p$ , dan  $j$  dimana  $t < a, j \geq 2$ , dan

- $\gamma = \lfloor \frac{a-1}{j} \rfloor$ ,
- $\delta \equiv a - 1 \pmod{j}$ ,
- $\alpha = \lfloor \frac{\delta}{p-\gamma} \rfloor$ , dan
- $\beta \equiv \delta \pmod{p - \gamma}$ .

Jika  $(j - \alpha - 1)(\beta - 1) + (j - \alpha)(p - \gamma - \beta) \geq t$ , maka  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \leq p$ .

*Bukti.*

Perhatikan sembarang faktorisasi dari  $G = K_{p \times j} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $G_1$  memuat  $(a - 1)K_2$ . Misalkan

$$V(G) = \{v_{r,x} | 1 \leq r \leq p; 1 \leq x \leq j\}$$

dan

$$E(G) = \{v_{r,x}v_{u,x} | 1 \leq r \leq p; 1 \leq x \leq j; r + 1 \leq u \leq p\}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Karena  $G_1$  memuat  $(a - 1)K_2$ , maka dipunyai graf bintang  $K_{1,k}$  di  $G_2$  dimana  $k \in t \leq k \leq (p - 1)j$ . Akibatnya, dikonstruksi  $G$  sedemikian sehingga  $G_2$  memuat  $K_{1,k}$  dengan  $t \leq k$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(G_1) &= \{v_{r,x}v_{i,x}, v_{n,u}v_{l,x}, v_{w,\alpha+1}v_{m,y} | 1 \leq r \leq \gamma; 1 \leq x \leq j; r + 1 \leq i \leq p; \\ &\quad \gamma + 1 \leq n \leq p; 1 \leq u \leq \alpha; n + 1 \leq l \leq p; \gamma + 1 \leq w \leq \gamma + \beta; \\ &\quad w + 1 \leq m \leq p - 1 + \beta, \alpha + 1 \leq y \leq j\} \\ E(G_2) &= \{v_{r,x}v_{n,x}, v_{r,x}v_{w,\alpha+1} | \gamma + 1 \leq r \leq p; \alpha + 2 \leq x \leq j; r + 1 \leq n \leq p; \\ &\quad \gamma + \beta + 1 \leq w \leq p\} \end{aligned}$$

Dari konstruksi  $G$ , diperoleh  $K_{1,k}$  di  $G_2$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(K_{1,k}) &= \{v_{\gamma+\beta,\alpha+2}, v_{r,x}, v_{n,u} | \gamma + 1 \leq r \leq \gamma + \beta - 1; \alpha + 2 \leq x \leq j; \\ &\quad \gamma + \beta + 1 \leq n \leq p; \alpha + 1 \leq u \leq j\} \\ E(K_{1,k}) &= \{v_{\gamma+\beta,\alpha+2}v_{r,x}, v_{\gamma+\beta,\alpha+2}v_{n,u} | \gamma + 1 \leq r \leq \gamma + \beta - 1; \alpha + 2 \leq x \leq j; \\ &\quad \gamma + \beta + 1 \leq n \leq p; \alpha + 1 \leq u \leq j\} \end{aligned}$$

Karena  $k = (j - \alpha - 1)(\beta - 1) + (j - \alpha)(p - \gamma - \beta) \geq t$ , maka dipunyai graf bintang minimum  $K_{1,t}$  in  $G_2$ . Oleh karena itu,  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \leq p$ .  $\square$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bilangan Ramsey himpunan untuk kombinasi *stripes* dan graf bintang.

**Teorema II.1** Untuk bilangan-bilangan bulat positif  $j$ ,  $a$ , dan  $t$ ,

$$M_j(aK_2, K_{1,t}) = \begin{cases} 2a & \text{untuk } t \leq a \text{ dan } j = 1, \\ t + a & \text{untuk } t \geq a \text{ dan } j = 1 \\ \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil & \text{untuk } t < a \text{ dan } j = 2 \\ \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil & \text{untuk } t < a, a \not\equiv 0 \pmod{3}, \text{ dan } j = 3 \\ \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3} & \text{untuk } t < a, a \equiv 0 \pmod{3}, \text{ dan } j = 3 \\ \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2 & \text{untuk } t < a, a \geq 4, \text{ dan } j = a - 2 \\ \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2 & \text{untuk } t < a, a \geq 3, \text{ dan } j = a - 1 \\ \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1 & \text{untuk } t \geq (a-2)j - (a-3), a \geq 3, \text{ dan } j \geq a. \end{cases}$$

*Bukti.*

Untuk membuktikan teorema ini, perhatikan delapan kasus berikut.

*Kasus 1.*  $M_1(aK_2, K_{1,t}) = 2a$ , untuk  $t \leq a$  dan  $j = 1$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \geq 2a$ . Perhatikan  $F = K_{(2a-1) \times 1} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1 = K_{2a-1}$  dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$ . Karena  $|F_1| = 2a - 1 < 2a$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Karena  $F_2$  adalah himpunan titik-titik yang independen, maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \geq 2a$  for  $t \leq a$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \leq 2a$ . Perhatikan  $G = K_{2a} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah suatu komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes  $M$ , dimana  $E(M) = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-1}\} = \{v_r v_u, \text{ where } 1 \leq r \leq a-1, a \leq u \leq 2a-2\}$ . Misalkan  $|M| = a-1$  dan  $aK_2 \not\subseteq G_1$ , dapat diasumsikan bahwa  $v_{2a-1}v_{2a} \in E(G_2)$ . Sekarang, untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, 2a-2\}$  perhatikan  $N_{G_1}(v_i) \cap V'$  dimana  $V' = \{v_{2a-1}, v_{2a}\}$ . Untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ , tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $|N_{G_1}(v_i) \cap V'| \geq |N_{G_1}(v_{a-1+i}) \cap V'|$ . Dalam kasus ini, maksimal  $M$  dapat dicek bahwa  $|N_{G_2}(v_i) \cap V'| + |N_{G_2}(v_{a-1+i}) \cap V'| \geq 2$ , yaitu untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$  dipunyai  $|N_{G_2}(e_i) \cap V'| \geq 2$ , dalam kasus lain dan sebaliknya bahwa ada satu  $i$  katakan  $i = 1$  sedemikian sehingga  $|N_{G_2}(v_i) \cap V'| + |N_{G_2}(v_{a-1+i}) \cap V'| \leq 1$ , oleh karena itu seperti  $|V'| = 2$  dipunyai  $|N_{G_1}(v_1) \cap V'| + |N_{G_1}(v_a) \cap V'| \geq 3$ . Ini artinya bahwa  $v_1$  dan  $v_a$  mempunyai suatu lingkungan yang berbeda dari  $V'$ . Tanpa mengurangi perumuman,  $v_1v_{2a-1}, v_av_{2a} \in E(G_1)$ . Oleh karena itu, bahwa  $M' = M \setminus \{v_1v_a\} \cup \{v_1v_{2a-1}, v_av_{2a}\}$  adalah stripe berukuran  $a$  di  $G_1$  adalah suatu kontradiksi. Jadi, untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ , diperoleh  $|N_{G_1}(e_i) \cap V'| \geq 2$ . Oleh karena itu,  $|V'| = 2$ ,  $v_{2a-1}v_{2a} \in E(G_2)$  dan  $|N_{G_1}(e_i) \cap V'| \geq 2$ , dari *Pigeonhole principle* satu dapat disebut bahwa terdapat minimal satu  $j \in \{2a-1, 2a\}$  sebut  $j = 2a-1$  sedemikian sehingga  $|N_{G_2}(v_{2a-1}) \cap V(M)| \geq a-1$ . Oleh karena itu, diperoleh  $K_{1,a} \subseteq G_2[N(v_{2a-1})]$ . Jadi, karena  $t \leq a$ , maka diperoleh bukti lengkap.

*Kasus 2.*  $M_1(aK_2, K_{1,t}) = t + a$ , untuk  $t \geq a$  dan  $j = 1$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \geq n+a$ . Perhatikan  $F = K_{(t+a-1) \times 1} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $E(F_1) = \{v_r v_u | 1 \leq r \leq a-1; r+1 \leq u \leq 2a-2\}$ . Jadi, dipunyai graf  $K_{1,s}$  di  $F_2$  dengan  $V(K_{1,s}) = \{v_i | a \leq i \leq t+a-1\}$  and  $E(K_{1,s}) = \{v_a v_i | a+1 \leq i \leq a+t-1\}$ . Jelas  $s = t+a-1 - (a+1) + 1 = t-1$ . Karena  $F_1$  memuat  $(a-1)$  stripes dan  $s \leq t-1$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$  dan  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \geq t+a$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \leq t+a$ . Perhatikan  $G = K_{(t+a) \times 1} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman,  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes. Perhatikan sembarang faktorisasi dari  $G_1$  dengan  $E(G_1) = \{v_r v_u | 1 \leq r \leq a-1; r+1 \leq u \leq 2(t+a-1)\}$ . Jadi, dipunyai graf  $K_{1,t}$  di  $G_2$  dengan  $V(K_{1,t}) = \{v_i | a \leq i \leq t+a\}$  dan  $E(K_{1,t}) = \{v_a v_i | a+1 \leq i \leq t+a\}$ . Oleh karena itu,  $M_1(aK_2, K_{1,t}) \leq t+a$ .

*Kasus 3.*  $M_2(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil$ , untuk  $t < a$  dan  $j = 2$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_2(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil - 1) \times 2} = F_1 \oplus F_2$  dengan  $F_1$  memuat  $(a-1)$  stripes dan  $F_2$  komplemen dari  $F_1$ . Karena  $2(\lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil - 1) < 2a$  dan  $t < a$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Dari Lema II.1, dipunyai graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  di  $F_2$  dimana  $s = 2(\lceil \frac{t}{2} \rceil - 1) < t$ . Karena  $s < t$  maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_2(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_2(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil) \times 2} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes. Dari Akibat Lema II.2, diperoleh graf bintang minimal  $k_{1,k}$  dengan  $k = 2\lceil \frac{t}{2} \rceil$ . Karena  $t \leq k$ , maka  $K_{1,t} \subseteq K_{1,k} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_2(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{2} \rceil + \lceil \frac{a}{2} \rceil$ .

*Kasus 4.*  $M_3(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil$ , untuk  $t < a$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , dan  $j = 3$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil - 1) \times 3} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $(a-1)K_2 \not\subseteq F_1$  dan  $F_2$  komplemen dari  $F_1$ . Karena  $t < a$  maka  $3(\lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil - 1) < 2a-1$ . Akibatnya,  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Dari Lema II.1, diperoleh graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  di  $F_2$  dimana  $s = 3(\lceil \frac{t}{3} \rceil - 1) < t$ . Karena  $s < t$ , maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil) \times 3}$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes. Dari Akibat Lemma II.2, diperoleh graf bintang minimal  $K_{1,k}$  dengan  $k = 3\lceil \frac{t}{3} \rceil$ . Karena  $t \leq k$  maka  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{3} \rceil + \lceil \frac{a}{3} \rceil$ .

*Kasus 5.*  $M_3(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}$ , untuk  $t < a$ ,  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , dan  $j = 3$ . Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3} - 1) \times 3} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1 = (a-1)K_2$  dan  $F_2$  komplemen dari  $F_1$ . Karena  $3(\lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3} - 1) < 2a$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Dari Lema II.1, dipunyai graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  in  $F_2$  dimana  $s = 3(\lceil \frac{t+1}{3} \rceil - 2) + 2$ . Karena  $s < t$ , maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}) \times 3} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah suatu komplemen dari  $G_1$ . akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes. Dari Lema II.2, dipunyai graf bintang minimal  $K_{1,k}$  dengan  $k = 3(\lceil \frac{t+1}{3} \rceil - 1) + 2$ . Karena  $t \leq k$ , maka  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_3(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t+1}{3} \rceil + \frac{a}{3}$ .

*Kasus 6.*  $M_{a-2}(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2$ , untuk  $t < a$ ,  $a \geq 4$ , dan  $j = a - 2$ . Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_{a-2}(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2 - 1) \times (a-2)} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1 = (a-1)K_2$  dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$ . Karena  $(a-2)(\lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2 - 1) < 2a$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Dari Lema II.1, dipunyai graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  dimana  $s = (a-2)(\lceil \frac{t+a-3}{a-2} \rceil) - a + 2 = t - 1$ . Karena  $s < t$ , maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_{a-2}(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_{a-2}(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2) \times (a-2)} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah suatu komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a-1)$  stripes. Dari Lema II.2, diperoleh graf bintang minimal  $K_{1,k}$  dimana  $k = (a-2)(\lceil \frac{t}{a-2} \rceil)$ . Karena  $t \leq k$ , maka  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_{a-2}(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{a-2} \rceil + 2$ .

*Kasus 7.*  $M_{a-1}(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2$ , untuk  $t < a$ ,  $a \geq 3$ , dan  $j = a - 1$ . Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_{a-1}(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2 - 1) \times (a-1)} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1 = (a-1)K_2$  dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$ . Karena  $(a-1)(\lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2 - 1) \leq 2a - 1$ , maka  $aK_2 \not\subseteq F_1$ . Dari Lema II.1, diperoleh graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  dimana  $s = (a-1)(\lceil \frac{t}{a-1} \rceil - 1)$ . Karena  $s \leq t - 1$ , maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_{a-1}(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_{a-1}(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2) \times (a-1)} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah suatu komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Dari Lema II.2, diperoleh graf bintang minimal  $K_{1,k}$  dimana  $s = (a-1)(\lceil \frac{t}{a-1} \rceil)$ . Karena  $t \leq k$ , maka  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_{a-1}(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t}{a-1} \rceil + 2$ .

*Kasus 8.*  $M_j(aK_2, K_{1,t}) = \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1$ , for  $t \geq (a-2)j - (a-3)$ ,  $a \geq 3$ , and  $j \geq a$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1$ . Perhatikan  $F = K_{(\lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil) \times j} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $aK_2 \not\subseteq F_1$  dan  $F_2$  adalah suatu komplemen dari  $F_1$ . Dari Lema II.1, dipunyai graf bintang maksimal  $K_{1,s}$  in  $F_2$  dimana  $s = j(\lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil) - a - j + 2 \leq t - 1$ . Karena  $s < t$ , maka  $K_{1,t} \not\subseteq F_2$ . Oleh karena itu,  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \geq \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1$ . Perhatikan  $G = K_{(\lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1) \times j} = G_1 \oplus G_2$  sedemikian sehingga  $aK_2 \not\subseteq G_1$  dan  $G_2$  adalah suatu komplemen dari  $G_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $G_1$  memuat  $(a - 1)$  stripes. Dari Lema II.2, diperoleh graf bintang minimal  $K_{1,k}$  dimana  $k \geq j(\frac{t+a-2}{j} + 1) - a - j + 2 = j(\frac{t+a-2}{j}) + j - a - j + 2 = t$ . Karena  $k \leq t$ , maka  $K_{1,t} \subseteq G_2$ . Oleh karena itu,  $M_j(aK_2, K_{1,t}) \leq \lceil \frac{t+a-2}{j} \rceil + 1$ .  $\square$

# Bab III Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

## $m_j(P_n, P_s)$

### III.1 Survey Literatur

Eksistensi dari semua bilangan Ramsey  $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$  for  $j = 2$  dijamin oleh Erdős dan Rado [15]. Untuk kasus  $k = 2$ , misalkan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf multipartit seimbang lengkap, bilangan-bilangannya dapat diturunkan dari hasil Burger dan van Vuuren [4]. Nilai-nilai eksak bilangan Ramsey bipartit  $b(P_s, P_t) = m_2(P_s, P_t)$  dari dua lintasan dapat diperoleh dari kasus khusus yang diperoleh Gyárfás dan Lehel [27], dan Faudree dan Schelp [20]. Selanjutnya, Hattingh dan Henning [32] menentukan nilai eksak dari bilang Ramsey bipartit  $b(P_m, K_{1,n})$ . Dalam kajian ini, kita menentukan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_s, P_t)$  dari dua lintasan dengan  $s = 2, 3$ .

### III.2 $P_n$ versus $P_s$ dengan $s = 2, 3$

Teorema berikut menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk lintasan.

**Teorema III.1** Untuk  $n \geq 6$ ,  $m_j(P_n, P_s) = \lceil \frac{n}{j} \rceil$  dengan  $2 \leq s \leq 3$ .

*Bukti.*

Misalkan  $k = \lceil \frac{n}{j} \rceil$ . Jika semua sisi dari  $F = K_{j \times (k-1)}$  diwarnai dengan biru maka  $F$  tidak memuat  $P_2$  merah (dan  $P_3$ ) maupun  $P_n$  biru untu  $n \geq 3$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_s, P_n) \geq k$  untuk  $s = 2, 3$  dan  $n \geq 3$ . Jelas bahwa untuk melihat  $m_j(P_2, P_n) \leq k$ , dan jadi  $m_j(P_2, P_n) = k$ . Sekarang, kita buktikan bahwa  $m_j(P_3, P_n) \leq k$ . Misalkan semua sisi dari  $F = K_{j \times k}$  diwarnai dengan merah biru, sedemikian sehingga  $F$  tidfak memuat  $P_3$  merah. Untuk menunjukkan bahwa  $F$  memuat lintasan biru  $P_n$  dengan  $n$  titik, perhatikan tiga kasus berikut.

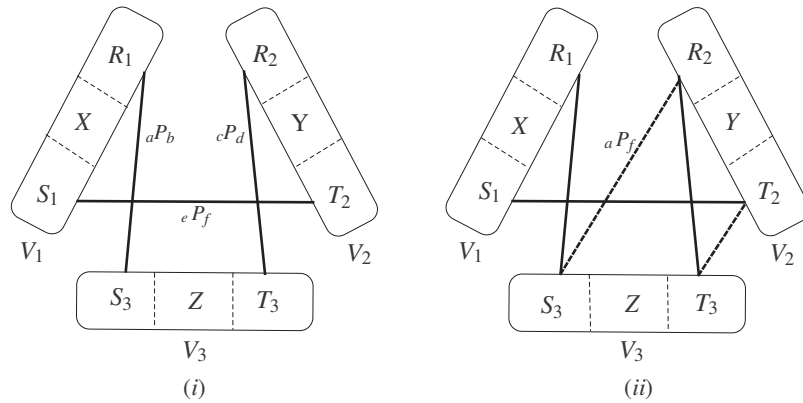
*Kasus 1.  $j = 2$ .*

Misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  dan  $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  adalah himpunan partit dari  $F$ . Jika semua sisi dari  $F$  diwarnai biru maka bukti selesai. Sekarang, misalkan  $F$  memuat  $r$  sisi merah,  $r \leq k$ . Karena tidak terdapat  $P_3$  merah, semua sisi merah ini adalah independen. Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa terdapat  $r$  sisi merah yaitu:  $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_rb_r$ . Jika  $r$  adalah ganjil maka  $a_1b_2a_3b_4 \cdots a_{r-2}b_{r-1}a_rb_1a_2b_3a_4 \cdots b_{r-2}a_{r-1}b_r a_{r+1}b_{r+1}a_{r+2}b_{r+2} \cdots a_k b_k$  adalah lintasan biru dengan paling sedikit  $n$  titik di  $F$ . Sekarang, jika  $r$  adalah genap maka dipunyai lintasan biru  $a_1b_2a_3b_4 \cdots a_{r-3}b_{r-2}a_{r-1}b_r a_{r-2}b_{r-3}a_{r-4} \cdots b_3a_2b_1a_r b_{r-1}a_{r+1}b_{r+1} \cdots a_k b_k$  dengan paling sedikit  $n$  titik di  $F$ .

*Kasus 2.  $j = 3$ .*

Jika semua sisi di  $F$  adalah biru, maka bukti selesai. Misalkan  $V_1, V_2$  dan  $V_3$

adalah himpunan-himpunan partit dari  $F$ . Sekarang asumsikan dengan tanpa mengurangi perumuman, berturut-turut terdapat  $r$ ,  $s$ , dan  $t$  sisi berwarna merah yang menghubungkan  $V_1$  ke  $V_2$ ,  $V_1$  ke  $V_3$ , dan  $V_2$  ke  $V_3$ . Dengan memperhatikan sisi-sisi merah ini, himpunan partisi  $V_1, V_2$  dan  $V_3$  sebagai berikut:  $V_1 = R_1 \cup X \cup S_1$ ,  $V_2 = R_2 \cup Y \cup T_2$  dan  $V_3 = S_3 \cup Z \cup T_3$ , dimana  $|R_1| = |R_2| = r$ ,  $|S_1| = |S_3| = s$  dan  $|T_2| = |T_3| = t$  sedemikian sehingga semua sisi menghubungkan  $R_1$  ke  $R_2$ ,  $S_1$  ke  $S_3$  dan  $T_2$  ke  $T_3$  adalah berwarna merah. Selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, asumsikan  $r \leq s \leq t$ . Akibatnya  $|Z| \leq |Y| \leq |X|$ . Amati bahwa terdapat tiga lintasan biru independen, yaitu: (i) lintasan  ${}_aP_b$  dengan  $2r$  titik yang menghubungkan semua titik  $R_1$  dan beberapa dari  $S_3$  dengan titik awalnya  $a \in R_1$  dan titik ujungnya  $b \in S_3$ , (ii) lintasan  ${}_cP_d$  dengan  $2r$  titik yang mengubungkan semua titik dari  $R_2$  dan beberapa dari  $T_3$  dengan titik awal  $c \in R_2$  dan titik ujungnya adalah  $d \in T_3$ , (iii) lintasan  ${}_eP_f$  dengan  $2s$  titik yang menghubungkan semua titik dari  $S_1$  dan beberapa dari  $T_2$  dengan titik awal  $e \in T_2$  dan titik ujung  $f \in S_1$ , terlihat pada Gambar .II.(i). Dengan menghubungkan semua ujung lintasan ini menjadi satu lintasan biru lebih panjang:  ${}_aP_f := {}_aP_b c P_d e P_f$ . Lintasan ini mempunyai  $4r + 2s$  titik, lihat Gambar.II.(ii).



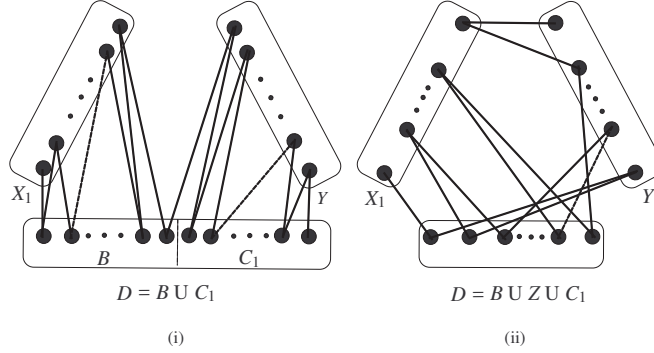
Gambar III.1. Terdapat tiga lintasan biru yang lebih panjang yang diawali dari titik  $a \in R_1$  dan diakhiri di titik  $f \in S_1$ .

Misalkan  $A, B$ , dan  $C$  adalah berturut-turut sub-sub himpunan  $T_2, S_3$  dan  $T_3$ , yang mana memuat semua titik-titik yang tidak termuat di lintasan biru di atas. Jadi, dipunyai  $|Y| + |A| = |X|$  dan  $|B| + |Z| + |C| = |X| + |B| = |X| + (s - r)$ , dan  $(s - r) = |Y| - |Z| \leq |X|$ . Akan ditunjukkan bahwa terdapat lintasan biru yang menghubungkan  $X, Y \cup A$  dan  $B \cup Z \cup C$  dengan paling sedikit  $3|X| + (s - r)$  titik.

Partisi himpunan-himpunan  $C = C_1 \cup C_2$  sedemikian sehingga  $C_2$  terdiri dari semua titik-titik ujung dari sisi merah yang menghubungkan  $A$  dan  $C$ , dan juga  $|C_2| = |A| = (t - s)$  dan  $|C_1| = |B| = (s - r)$ . Partisi himpunan-himpunan  $X = X_1 \cup X_2$  sedemikian sehingga  $|X_2| = |C_2|$ . Jelas bahwa  $|X_1| = |Y|$ . Misalkan  $D = B \cup Z \cup C_1$ . Ingat bahwa  $|X_2| = |A| = |C_2|$ . Misalkan  $C_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ,  $X_2 =$



$\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , dan  $A = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ , dimana  $m = t - s$ . Akibatnya diperoleh lintasan biru  $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 \dots a_m b_m c_m$ . Lintasan biru ini mempunyai  $3(t-s)$  titik, dan ditulis dengan  ${}_a P_{c_m}$ . Karena  $f a_1$  adalah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan  ${}_a P_f$  dan  ${}_a P_{c_m}$  diperoleh lintasan biru dengan  $4r + 3t - s$  titik. Lintasan yang dihasilkan ini, ditulis dengan  ${}_a P_{c_m}$ , berawal; dari  $a$  dan berakhir pada  $c_m$ . Selanjutnya, perhatikan tiga subkasus berikut.



Gambar III.2. (i) Lintasan biru  ${}_g P_h$  (ii) Lintasan biru  ${}_u P_v$

*Subkasus 2.1.*  $|Z| = 0$ .

Karena  $|Z| = 0$  maka  $|D| = |B \cup C_1| = 2|Y| = 2|X_1| = 2(s - r)$ . Akibatnya, diperoleh lintasan biru dengan menghubungkan semua titik di  $X_1$  dengan sebagian titik di  $D$  secara bergantian, dan melanjutkan dengan menghubungkan sebagian lain dari titik-titik di  $D$  dengan semua titik-titik di  $Y$  secara bergantian. Lintasan biru ini dimulai dari  $g \in X_1$  dan diakhiri di  $h \in C_1$ , dan ditulis dengan  ${}_g P_h$  (lihat Gambar II. 2.(i)). Lintasan ini mempunyai  $4(s - r)$  titik. Karena  $c_m g$  adalah sebuah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan biru  ${}_a P_{c_m}$  dan  ${}_g P_h$  diperoleh lintasan biru dengan  $3(s + t)$  titik. Lintasan yang diperoleh ini menggunakan semua titik di  $F$ , dan  $F$  juga memuat sebuah lintasan biru dengan paling sedikit  $n$  titik.

*Sukasus 2.2.*  $0 < |Z| < |Y|$ .

Karena  $|Z| < |Y|$  maka  $|D| = |B \cup Z \cup C_1| < 2|Y|$ . Akibatnya, diperoleh lintasan biru  ${}_u P_v$  dengan menghubungkan semua titik di  $X_1$  dengan semua titik di  $Y$  melalui semua titik-titik di  $D$  satu persatu, sampai semua titik-titik di  $D$  telah semuanya digunakan. Jika masih terdapat beberapa titik di  $X_1$  (dan juga di  $Y$ ) maka hubungkan langsung semua titik-titik yang tersisa ini secara bergantian, lihat Gambar.II 2 (ii). Karena  $c_m u$  adalah lintasan biru maka dengan menghubungkan dua lintasan  ${}_a P_{c_m}$  dan  ${}_u P_v$ , dipunyai lintasan biru dengan  $3(|Y| + r + t)$  titik. Lintasan ini memuat semua titik-titik di  $F$ , dan  $F$  juga memuat lintasan biru dengan paling sedikit  $n$  titik.

*Subkasus 2.3.*  $|Z| = |Y| \neq 0$ .

Karena  $|Z| = |Y|$ , maka  $s - r = 0$  dan juga  $|D| = |Z|$ . Jadi, memuat lintasan biru  ${}_w P_z$  dengan menghubungkan semua titik-titik di  $D$ ,  $X_1$ , dan  $Y$  secara bergantian, di-

mana  $w \in D$  dan  $z \in Y$ . Karena  $c_m w$  adalah sisi biru maka dengan menghubungkan dua lintasan  ${}_a P_{c_m}$  dan  ${}_w P_z$ , diperoleh lintasan biru dengan  $3(|Y| + r + t)$  titik. Lintasan ini akan memuat semua titik-titik di  $F$ .

*Kasus 3.*  $j \geq 4$ .

Misalkan  $V_1, V_2, \dots, V_j$  adalah himpunan-himpunan partit di  $F$ . Secara trivial, jika semua sisi dari  $F$  adalah berwarna biru maka bukti selesai. Jika  $j$  genap dari Kasus 1, diperoleh  $\frac{j}{2}$  lintasan biru menghubungkan semua titik-titik  $V_1$  to  $V_2, V_3$  ke  $V_4, \dots, V_{j-1}$  ke  $V_j$ . Setiap lintasan mempunyai  $2k$  titik. Karena  $F$  tidak mempunyai  $P_3$  merah maka kita dapat menjghubungkan  $\frac{j}{2}$  lintasan-lintasan ini menjadi satu lintasan biru dengan  $kj$  titik. Lintasan terakhir ini akan mempunyai paling sedikit  $n$  titik. Jika  $j$  ganjil, dari Kasus 1, diperoleh  $\frac{j-3}{2}$  lintasan biru yang menghubungkan semua titik  $V_1$  ke  $V_2, V_3$  ke  $V_4, \dots, V_{j-4}$  ke  $V_{j-3}$  yang independen. Setiap lintasan ini mempunyai  $2k$  titik. Dengan menggunakan metode pada Kasus 2, diperoleh lintasan biru yang lain dengan menghubungkan semua titik  $V_{j-2}, V_{j-1}$  dan  $V_j$ . Juga karena  $F$  tidak memuat  $P_3$ , dengan menghubungkan semua lintasan ini menjadi satu lintasan biru, maka diperoleh lintasan biru dengan paling sedikit  $n$  titik.  $\square$

**Akibat III.1** Untuk  $j \geq 2$  dan  $n \geq 6$ ,

$$m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j=2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk yang lainnya,} \end{cases}$$

dimana  $s = 2$  atau  $3$ .

*Bukti.*

Untuk  $j = 2$ , karena  $F$  adalah graf bipartit maka  $F$  tidak memuat lingkaran ganjil,  $m_2(P_4, C_n) = \infty$  untuk sebarang bilangan ganjil  $n \geq 5$ . Misalkan  ${}_x P_y$  adalah lintasan biru final yang diperoleh dari Teorema II.1. Ini mengakibatkan terdiri dari paling sedikit  $n$  titik. Karena  $xy$  adalah sisi biru maka dengan menghubungkan titi  $x$  dan  $y$ , diperoleh lingkaran biru  $C_n$  dengan paling sedikit  $n$  titik.  $\square$

### III.3 $P_n$ versus $P_4$

Hingga kini masih sedikit ditemukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(G, H)$ . Berikut adalah beberapa kajian yang terkait dengan bilangan Ramsey multipartit ukuran. Bilangan  $m_2(P_s, P_t)$  dikaji oleh Gyárfás dan Lehel [27] pada tahun 1973 dan Faudree dan Schelp [20] pada tahun 1975. Kemudian, Hattingh dan Henning [32] pada tahun 1998 menentukan nilai eksak untuk  $m_2(P_m, S_n)$ , dan batas atas bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf lengkap, yaitu  $m_2(a, b) \leq m_2(b, a - 1) + m_2(a, b - 1) + 1$  dengan  $a, b \geq 2$  [31], dimana  $m_2(x, y) = m_2(K_{x,x}, K_{y,y})$ . Pada tahun 2002, Longani [37] menemukan nilai eksak dari  $m_2(G, G)$  dimana  $G \cong K_{2 \times 2}, K_{2,3}$ , or  $S_n$  dengan  $n \geq 1$ .

Untuk semua  $j \geq 2$ , Day *et al.* [13], dan Burger dan van Vuuren [4] menentukan nilai eksak dari  $m_j(K_{2 \times 2}, H)$  dimana  $H \cong K_{2 \times 2}$  or  $K_{3 \times 1}$ . Syafrizal Sy *et al.* [46, 47] menentukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$  dimana  $s = 2$  atau  $3$ , dan  $G$  adalah suatu lintasan  $P_n$ , suatu graf lingkaran  $C_n$ , suatu graf roda  $W_n$ , suatu graf bintang  $S_n$ , atau graf kipas  $F_n$ . Pada kajian ini, perhatikan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan versus graf lintasan  $m_j(P_4, P_n)$  for  $n \geq 2$ .

Untuk membuktikan Teorema III.2, akan digunakan Lema III.1 berikut.

**Lema III.1** *Misalkan  $G \cong K_{2 \times n}$  adalah suatu graf bipartit dengan  $n \geq 2$ . Misalkan  $G = G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1$  adalah subgraf yang terdiri dari minimal komponen. Jika  $G_1$  memuat komponen terbesar  $H$  dimana  $|V(H)| \leq |V(G \setminus H)|$  maka  $G_2$  memuat suatu lintasan dengan  $2n$  titik.*

*Bukti.*

Tanpa mengurangi perumuman, cukup membuktikan untuk kasus dimana  $G_1$  terdiri dari tepat tiga komponen, yang mana setiap komponen tersebut adalah graf bipartit lengkap. Misalkan  $K_{a_1, b_1}$ ,  $K_{a_2, b_2}$ , dan  $K_{a_3, b_3}$  adalah komponen-komponen dari  $G_1$  dengan  $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 + b_3$  dan  $a_1 + b_1 \leq \sum_{i=2}^3 (a_i + b_i)$ . Asumsikan bahwa  $a_1 \leq b_1$ . Perhatikan dua kasus berikut.

*Kasus 1.  $a_1 \leq b_2$ .*

Akan ditunjukkan bahwa  $a_1 + a_3 \geq b_2$ . Misalkan  $a_1 + a_3 < b_2$ . Ingat bahwa karena  $a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2$ , maka diperoleh  $a_2 > b_1$ . Akibatnya, diperoleh  $a_2 + b_2 > a_1 + b_1$ . Ini kontradiksi dengan fakta bahwa  $K_{a_1, b_1}$  adalah graf terbesar. Jadi haruslah  $a_1 + a_3 \geq b_2$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$ . Misalkan bahwa  $a_1 + a_3 > b_1 + b_2$ . Ingat bahwa  $G$  adalah graf bipartit seimbang. Jadi  $a_2 < b_3$ . Lebih jauh bahwa, asumsikan bahwa  $a_1 \leq b_1$ , mengakibatkan  $a_3 > b_2$ . Sebagai akibatnya, diperoleh  $a_3 + b_3 > a_2 + b_2$ . Ini kontradiksi dengan jumlah titik  $|K_{a_i, b_i}|$ . Jadi,  $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$ .

Misalkan  $A_i = V_1 \cap V(K_{a_i, b_i})$  dan  $B_i = V_2 \cap V(K_{a_i, b_i})$  adalah subhimpunan partit dari  $G$ , dengan  $i = 1, 2, 3$ .

Sekarang, konstruksi suatu lintasan sebagai berikut. Awali dari sebuah titik di  $A_1$ , diperoleh suatu lintasan terpanjang  $P^1$  dengan menggunakan titik di  $A_1$  dan  $B_2$ . Karena  $a_1 \leq b_2$ ,  $P^1$  melewati semua titik di  $A_1$  dan diakhiri dengan titik di  $B_2$ . Perluas  $P^1$  dengan menggunakan sisa titik-titik di  $B_2$  dan titik-titik di  $A_3$ . Karena  $a_1 + a_3 \geq b_2$ , perluasan ini sebut  $P^2$ , titik ujungnya di  $A_3$ , sesudah melewati semua titik-titik di  $B_2$ . Kemudian, dilanjutkan perluasan lintasan  $P^2$  dengan menggunakan sisa titik di  $A_3$  dan  $B_1$ . Lintasan yang dihasilkan ini sebut  $P^3$ , titik ujungnya di  $B_1$ , karena  $a_1 + a_3 \leq b_1 + b_2$ . Lintasan  $P^3$  dapat diperpanjang menjadi  $P^4$  dengan menggunakan sisa titik di  $B_1$  dan  $A_2$ . Lintasan  $P^4$  titik ujungnya harus di  $A_2$ , karena  $G$  adalah graf seimbang. Amati bahwa, pada langkah ini titik-titik

*unsaturated* adalah sisa dari  $A_2$  dan  $B_3$ . Mengingat kembali  $G$  adalah seimbang,  $P^4$  dapat diperluas ke dalam lintasan terakhir melewati semua titik di  $G$ .

*Kasus 2.*  $a_1 > b_2$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $a_1 \leq b_2 + b_3$ . Misalkan  $a_1 > b_2 + b_3$ , maka diperoleh  $a_2 + a_3 < b_1$ . Akibatnya,  $a_1 + b_1 > (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$ . Suatu kontradiksi untuk mengasumsikan  $a_1 + b_1 \leq (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$ . Oleh karena itu, kita mempunyai  $a_1 \leq b_2 + b_3$ .

Selanjutnya, kita akan tunjukkan bahwa  $a_1 + a_2 \geq b_2 + b_3$ . Misalkan bahwa  $a_1 + a_2 < b_2 + b_3$ , kita peroleh  $a_3 > b_1 \geq a_1 > b_2$ . Ini mengakibatkan  $b_2 + a_2 < a_1 + a_2 < b_2 + b_3 < a_3 + b_3$ . Ini kontradiksi dengan jumlah titik  $|K_{a_i, b_i}|$ . Oleh karena itu, kita harus punya  $a_1 + a_2 \geq b_2 + b_3$ .

Menggunakan prosedur yang sama Kasus 1, kita dapat mengkonstruksi lintasan biru menggunakan semua titik dari  $G$ . Dalam kasus ini lintasannya dengan titik awal di  $A_1$  dan titik akhir di  $B_1$ .  $\square$

**Teorema III.2** Untuk bilangan-bilangan bulat  $j, n \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, P_4) = \begin{cases} \lceil \frac{4}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 2 \text{ dan } n = 2, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 3, \\ \lceil \frac{n+1}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 3 \text{ dan } n \geq 3. \end{cases}$$

*Bukti.*

Kita perhatikan tiga kasus berikut.

*Kasus 1.*  $j \geq 2$  dan  $n = 2$ .

Untuk  $2 \leq j \leq 3$ , akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_4, P_2) \geq 2$ . Berikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf  $G_1 \cong K_{j \times 1}$  sedemikian sehingga  $G_1$  tidak memuat  $P_2$  merah. Karena  $j < 4$  maka  $G_1$  tidak memuat  $P_4$  biru. Jadi,  $m_j(P_4, P_2) \geq 2$ . Untuk menunjukkan bahwa  $m_j(P_4, P_2) \leq 2$ , perhatikan  $F_1 \cong K_{j \times 2}$  dengan  $2 \leq j \leq 3$ . Misalkan semua sisi dari  $F_1$  diberi pewarnaan merah-biru sebarang sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $P_2$ . Ini mengakibatkan, semua sisi  $F_1$  harus berwarna biru. Karena  $2j \geq 4$  untuk  $2 \leq j \leq 3$ , maka  $F_1$  memuat suatu lintasan biru  $P_4$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_4, P_2) \leq 2$  untuk  $2 \leq j \leq 3$ .

Sekarang untuk  $j \geq 4$ . Jelas bahwa  $m_j(P_4, P_2) \geq 1$ . Misalkan semua sisi dari  $G_1 \cong K_{j \times 1}$  diberi pewarnaan sembarang sedemikian sehingga  $G_1$  tidak memuat  $P_2$  merah. Semua sisi dari  $G_1$  harus biru, Karena  $G_1$  tidak memuat  $P_2$  merah. Karena  $j \geq 4$ , maka jelas bahwa  $G_1$  memuat  $P_4$  biru. Oleh karena itu,  $m_j(P_4, P_2) \leq 1$  untuk  $j \geq 4$ .

*Kasus 2.*  $j = 2$  dan  $n \geq 3$ .

Misalkan  $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ . Perhatikan  $G_2 \cong K_{2 \times (t-1)}$ . Ambil subgraf  $2K_{1, t-2}$  di  $G_2$ ,

dan warnai sisi  $2K_{1,t-2}$  dengan warna merah. Sisa sisi dari  $G_2$  diwarnai dengan biru. Jelas bahwa,  $G_2$  tidak memuat  $P_4$  merah atau  $P_n$  biru. Oleh karena itu,  $m_2(P_4, P_n) \geq t$ .

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_2(P_4, P_n) \leq t$ . Perhatikan  $F_2 \cong K_{2 \times t}$ . Misalkan semua sisi dari  $F_2$  diwarnai sembarang dengan warna merah dan biru sedemikian sehingga  $F_2$  tidak memuat  $P_4$  merah. Jika semua sisi dari  $F_2$  adalah berwarna biru, maka secara trivial  $F_2$  memuat  $P_n$  biru dan buktinya lengkap. Oleh karena itu, asumsikan bahwa  $F_2$  memuat paling sedikit satu komponen merah. Karena  $F_2$  tidak memuat  $P_4$  merah maka setiap komponen merah di  $F_2$  akan membentuk graf bintang. Untuk menunjukkan bahwa  $F_2$  memuat  $P_n$  biru, perhatikan dua kemungkinan.

*Subkasus 2.1*  $F_2$  memuat graf bintang  $K_{1,t}$  merah atau graf bintang  $2K_{1,t-1}$  merah. Dalam kasus ini, misalkan  $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$  dan  $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$  adalah himpunan-himpunan partit dari  $F_2$ . Tanpa mengurangi perumuman, jika  $F_2$  memuat  $K_{1,t}$  merah, misalkan  $a_1 \in V_1$  adalah titik pusat dari  $K_{1,t}$  maka dipunyai lintasan  $P := b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots a_{t-1} b_{t-1} a_t b_t$  in  $F_2$  merah. Kemudian, jika  $F_2$  memuat dua bintang merah  $2K_{1,t-1}$ , misalkan  $a_1 \in V_1$  dan  $b_t \in V_2$  adalah titik-titik pusat  $2K_{1,t-1}$  maka dipunyai lintasan merah  $Q := b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots a_{t-1} b_{t-1} a_t$  di  $F_2$ . Amati bahwa kedua kasus ini, dipunyai lintasan biru  $P_n$  dengan paling sedikit  $n$  titik di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_4, P_n) \leq t$ .

*Subkasus 2.2.*  $F_2$  tidak memuat graf bintang merah  $K_{1,t}$  ataupun graf bintang merah  $2K_{1,t-1}$ . Sebagai akibatnya,  $F_2$  komponen merah terbesar dengan paling banyak  $t$  titik. Dengan Lema 1,  $F_2$  memuat lintasan biru  $P_n$  dengan  $n = 2t$  titik. Oleh karena itu,  $m_j(P_4, P_n) \leq t$ .

*Kasus 3.*  $j \geq 3$  dan  $n \geq 3$ .

Misalkan  $s = \lceil \frac{n+1}{j} \rceil$ . Perhatikan  $G_3 \cong K_{j \times (s-1)}$ . Ambil subgraf  $K_{1, (j-1)(s-1)}$  di  $G_3$ , dan warnai semua sisinya dengan warna merah. Semua sisi sisa di  $G_3$  diwarnai dengan warna biru. Jelas bahwa,  $G_3$  tidak memuat path merah  $P_4$ . Karena  $j(s-1) - 1 < n$  maka  $G_3$  tidak memuat path biru  $P_n$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_4, P_n) \geq s$ .

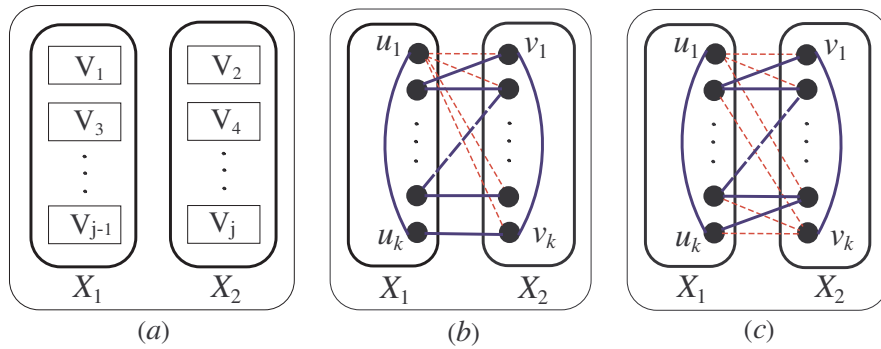
Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_j(P_4, P_n) \leq s$ . Perhatikan  $F_3 \cong K_{j \times s}$ . Misalkan semua sisi dari  $F_3$  diberi warna merah atau biru secara sembarang, sedemikian sehingga  $F_3$  tidak memuat  $P_4$  merah. Jika semua sisi dari  $F_3$  diberi warna biru, maka  $F_3$  trivial memuat  $P_n$  biru, jadi buktinya lengkap. Sekarang, asumsikan bahwa  $F_3$  memuat paling sedikit satu komponen merah. Karena  $F_3$  tidak memuat  $P_4$  merah, maka semua komponen merah ini membentuk *stars* atau *cycles*  $C_3$ . Sekarang, misalkan  $V_1, V_2, \dots, V_j$  adalah himpunan-himpunan partit dari  $F_3$ . Untuk menunjukkan bahwa  $F_3$  memuat  $P_n$  biru, perhatikan dua subkasus berikut.

*Subkasus 3.1.*  $j$  genap.

Partisi himpunan-himpunan partit dari  $F_3$  menjadi dua himpunan partit baru, sebut

$X_1 = V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{j-1}$  and  $X_2 = V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_j$ . Selanjutnya, misalkan  $X_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  dan  $X_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  dengan  $k = \frac{j}{2}s$  (Lihat Gambar IV.1.(a)). Misalkan  $E' = \{uv \in E(F_3) | u \in X_1 \text{ dan } v \in X_2\}$ . Perhatikan  $F_3[E'] \subseteq F_3$ . Untuk menunjukkan bahwa  $F_3$  memuat  $P_n$  biru, cukup tunjukkan bahwa  $F_3[E']$  memuat  $P_n$  biru. Perhatikan tiga kemungkinan berikut.

i). Jika  $F_3[E']$  memuat graf bintang merah  $K_{1,k}$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $u_1 \in V_1$  adalah titik pusat  $K_{1,k}$  merah di  $X_1$ . Jika  $u_1 u_k \notin E(F_3)$  maka diperoleh graf lintasan merah  $u_1 u_k v_k v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 \dots u_{k-1} v_{k-1}$  dengan  $2k$  titik di  $F_3$ . Pada sisi lain, jika  $u_1 u_k \in E(F_3)$  maka diperoleh graf lintasan biru  $v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 \dots v_{k-1} u_k$  dengan  $2k - 1$  titik di  $F_3$ . Oleh karena itu,  $F_3$  memuat graf lintasan biru dengan paling sedikit  $n$  titik (lihat Gambar III.3.(b)).



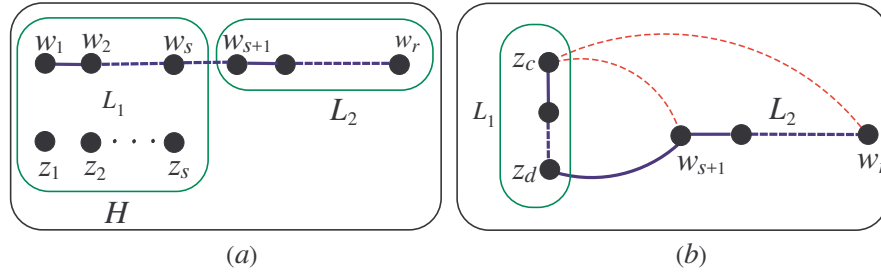
Gambar III.3. (a) Partisi baru. (b)  $F_3[E'] \supset K_{1,k}$ . (c)  $F_3[E'] \supset 2K_{1,k-1}$ .

ii). Jika  $F_3[E']$  memuat dua *star* merah  $2K_{1,k-1}$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $u_1 \in V_1$  dan  $v_k \in V_j$  adalah titik-titik pusat dari *star* merah  $2K_{1,k-1}$ . Karena  $F_3$  tidak memuat  $P_4$  merah, maka diperoleh *path* biru  $v_k v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 \dots u_{k-1} v_{k-1} u_k u_1$  dengan  $2k$  titik di  $F_3$ , karena  $u_1 u_k \notin E(F_3)$  dan  $v_1 v_k \notin E(F_3)$ . Jadi, dipunyai graf lintasan biru dengan paling sedikit  $n = js - 1$  titik di  $F_3$  (lihat Gambar. III.3(c)).

iii). Jika  $F_3[E']$  tidak memuat  $K_{1,k}$  merah maupun  $2K_{1,k-1}$  merah, maka  $F_3[E']$  memuat komponen terbesar merah dengan paling sedikit  $s$  titik. Dari Lema IV.1,  $F_3[E']$  memuat graf lintasan merah dengan  $js$  titik. Oleh karena itu,  $F_3$  memuat suatu graf lintasan biru dengan  $n = js$  titik.

*Subkasus 3.2 j ganjil.*

Dengan menggunakan metode dalam Subkasus 3.1, dipunyai himpunan partit yang baru, sebut  $Y_1 = V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{j-2}$  dan  $Y_2 = V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_{j-1}$  dengan  $|Y_1| = |Y_2| = k$ . Misalkan  $F_3^*$  adalah subgraf dari  $F_3$  diinduksi oleh  $Y_1$  dan  $Y_2$ . Karena jumlah himpunan partit dalam  $F_3^*$  adalah genap, maka dengan menggunakan metode dalam Subkasus 3.1, sehingga diperoleh graf lintasan biru  $L = w_1 w_2 \dots w_s w_{s+1} \dots w_r$  di  $F_3^*$  dengan paling sedikit  $r = s(j - 1) - 1$  titik.



Gambar III.4. Ilustrasi Subkasus 3.2.

Sekarang, misalkan  $H$  adalah suatu subgraf  $F_3$  yang diinduksi oleh  $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$  dan  $V_j = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$  (lihat Gambar. IV.2(a)). Jika  $H$  memuat graf bintang merah  $K_{1,s}$  atau dua graf bintang merah  $2K_{1,s-1}$ , maka dengan menggunakan metode dalam Subkasus 2.1, diperoleh graf lintasan merah  $L_1$  dengan paling sedikit  $2s-1$  titik. Misalkan  $L_2 = w_{s+1} \dots w_r$ . Jika terdapat suatu sisi biru menghubungkan graf lintasan biru  $L_1$  dan graf lintasan biru  $L_2$ , maka  $F_3$  memuat suatu graf lintasan biru dengan paling sedikit  $n = js - 2$  titik. Sebaliknya, misalkan  $z_c w_{s+1}$  dan  $z_c w_r$  adalah sisi-sisi merah. Karena  $F_3$  tidak memuat  $P_4$  merah, maka  $z_d w_{s+1}$  adalah suatu sisi biru (lihat Gambar. IV.2(b)). Jadi,  $F_3$  memuat graf lintasan biru dengan paling sedikit  $n = js - 2$  titik.

Jika  $F_3^*$  tidak memuat graf bintang merah  $K_{1,k}$  maupun dua graf bintang merah  $2K_{1,k-1}$ , maka  $F_3^*$  memuat komponen terbesar merah dengan paling sedikit  $s$  titik. Jadi, dengan Lema IV.1,  $F_3^*$  memuat suatu graf lintasan biru dengan paling sedikit  $js$  titik. Oleh karena itu,  $F_3$  memuat suatu graf lintasan biru dengan paling sedikit  $n = js$  titik.  $\square$

**Akibat III.2** Untuk bilangan bulat  $j \geq 2$  dan  $n \geq 3$ ,

$$m_j(P_4, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{untuk } j = 2 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap,} \\ \lceil \frac{n+1}{j} \rceil & \text{untuk } j, n \geq 3. \end{cases}$$

*Bukti.*

Jika  $G \cong K_{2 \times t}$ , maka  $G$  tidak memuat *cycle* ganjil untuk sembarang bilangan asli  $t$ . Ini mengakibatkan,  $m_2(P_4, C_n) = \infty$  untuk  $n \geq 3$  ganjil. Selanjutnya, untuk  $n \geq 2$  genap, misalkan  ${}_a P_b$  adalah graf lintasan biru yang diperoleh dalam bukti dari Teorema III.2 dengan  $ab$  adalah sisi biru. Graf lintasan biru ini adalah terdiri dari paling sedikit  $n$  titik. Karena  $ab$  adalah sisi biru, maka dengan menghubungkan  $a$  dan  $b$ , graf lingkaran biru  $C_n$  dengan paling sedikit  $n$  titik.  $\square$

# Bab IV Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_s, G)$ dengan graf $G$ lainnya

## IV.1 Survey Literatur

Pada tahun 1973, Gyárfás dan Lehel [27], dan Faudree dan Schelp [20] pada tahun 1975, menemukan bilangan Ramsey biipartit ukuran  $m_2(P_s, P_t)$ . Kemudian, Hattingh dan Henning [32] pada tahun 1998 menemukan nilai eksak  $m_2(P_m, S_n)$ . Kemudian, pada tahun 2002, Longani [37] menemukan nilai eksak  $m_2(G, G)$  dimana  $G \cong S_n, K_{2 \times 2}$  atau  $K_{2,3}$ .

Kemudian, pada tahun 2021 untuk semua  $j \geq 1$ , Day *dkk.* [13], dan pada tahun 2004 Burger *dkk.* [4] menemukan nilai eksak dari  $m_j(K_{2 \times 2}, H)$  dimana  $H \cong K_{2 \times 2}$  or  $K_{3 \times 1}$ . Hasil-hasilnya diperlihatkan dalam Tabel 1. Syafrizal Sy [46] telah membuktikan teorema dan akibat berikut untuk *Ramsey multipartit ukuran* untuk *paths* versus *paths* atau *cycles*.

**Teorema IV.1** Untuk  $j \geq 2$  dan  $n \geq 6$ ,  $m_j(P_s, P_n) = \lceil \frac{n}{j} \rceil$  dimana  $s = 2, 3$ .

**Akibat IV.1** Untuk  $j \geq 2$  dan  $n \geq 6$ ,

$$m_j(P_s, C_n) = \begin{cases} \infty & \text{for } j=2 \text{ dan } n \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk yang lainnya,} \end{cases}$$

dimana  $s = 2, 3$ .

Table IV.1

Bilangan Ramsey multipartit  $m_j(K_{2 \times 2}, H)$  untuk suatu  $H$ .

$j$	$m_j(K_{2 \times 2}, K_{2 \times 2})$	$m_j(K_{2 \times 2}, K_{3 \times 1})$
1	$\infty^b$	$\infty^b$
2	$5^a$	$\infty^b$
3	$3^a$	$3^b$
4	$2^a$	$2^b$
5	$2^a$	$2^b$
6	$2^a$	$2^b$
$\geq 7$	$1^a$	$1^b$

<sup>a</sup> Ditemukan oleh Day *dkk.* [13].

<sup>b</sup> Ditemukan oleh Burger *dkk.* [4].

Pada kajian ini, akan ditentukan Bilangan Ramsey multipartit untuk kombinasi lintasan kecil dan suatu graf  $G$ , dimana  $G$  adalah isomorfik dengan graf roda, graf bintang, graf kipas, dan graf kincir. Akan dibuktikan dengan Lema Bondy untuk graf multipartit seimbang lengkap.



Lema Bondy berikut akan digunakan untuk pembuktian pada penentuan bilangan Ramsey graf lintasan versus graf lainnya yang termuat pada teorema berikutnya.

**Lema IV.1** Misalkan  $G$  adalah suatu graf berorde  $n$ . Jika  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$  maka  $G$  adalah pansiklik atau  $n$  adalah genap dan  $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ .

## IV.2 Graf Lintasan versus Graf lainnya

Pada bagian ini akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit  $m_j(P_s, G)$  dimana  $s = 2$  atau  $3$  dan  $G$  adalah graf roda  $W_n$ , graf bintang  $S_n$ , graf kipas  $F_n$ , atau graf kincir  $M_n$ .

**Teorema IV.2** Misalkan  $G \cong K_{j \times t}$ ,  $j \geq 3$  dan  $t \geq 2$ . Misalkan  $M$  adalah suatu matching di  $G$  (tidak harus sempurna). Jika  $F \cong G \setminus M$  maka  $F$  adalah pansiklik (pancyclic).

*Bukti.* Misalkan  $F \cong K_{j \times t} \setminus M$ . Karena  $j \geq 3$  dan  $t \geq 2$  maka diperoleh  $\delta(F) = (j-1)t - 1 \geq \frac{jt}{2}$ . Jadi,  $F$  adalah pansiklik.

Untuk sebarang bilangan asli  $n \geq 2$  dan  $t$ , jelas bahwa  $K_{2 \times t}$  tidak memuat  $W_n$ . Oleh karena itu  $m_2(G, W_n) = \infty$  untuk sebarang graf  $G$ . Akibatnya,  $m_2(P_s, W_n) = \infty$  untuk  $s = 2$  atau  $3$ . Teorema berikut menentukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$  untuk  $j \geq 3$  dan  $s = 2$  atau  $3$  dimana  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$  dengan  $n \geq 6$ .  $\square$

**Teorema IV.3** Misalkan  $G$  adalah sebuah graf roda  $W_n$ , sebuah graf bintang  $S_n$  sebuah graf kipas  $F_n$  dengan  $n \geq 6$ . Untuk  $j \geq 3$ ,

$$m_j(P_2, G) = \lceil \frac{n}{j-1} \rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, G) = \begin{cases} \infty & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } G \cong W_n \text{ dengan } n \text{ adalah ganjil,} \\ \frac{n}{j-1} & \text{untuk } j \text{ adalah ganjil, semua } G, \text{ dan } n = (j-1)s \text{ dengan} \\ & s \text{ adalah ganjil,} \\ \lceil \frac{n+1}{j-1} \rceil & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

*Bukti.* Misalkan  $G$  adalah sebuah wheel  $W_n$ , sebuah star  $S_n$  sebuah graf kipas. Untuk menunjukkan bahwa  $m_j(P_2, G) \geq \lceil \frac{n}{j-1} \rceil$ , perhatikan  $H_1 \cong K_{j \times (r-1)}$  dengan  $r = \lceil \frac{n}{j-1} \rceil$ . Jika semua sisi di  $H_1$  diwarnai biru maka  $H_1$  tidak memuat  $G$  biru, karena  $(j-1)(\lceil \frac{n}{j-1} \rceil - 1) < n$ .  $H_1$  juga tidak memuat  $P_2$  merah. Oleh karena itu  $m_j(P_2, G) \geq r$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_2, G) \leq r$ . Berikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi di  $H \cong K_{j \times r}$  sedemikian sehingga  $H$  tidak memuat  $P_2$  merah.

Jadi, semua sisi dari  $H$  harus biru. Oleh karena itu,  $H$  memuat  $G$  biru dengan  $n$  vertices. Jadi,  $m_j(P_2, G) \leq r$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .

Dalam menentukan  $m_j(P_3, G)$ , perhatikan tiga kasus berikut.

*Kasus 1.*  $j = 3$  dan  $G \cong W_n$  dengan  $n$  adalah ganjil.

Untuk sebarang bilangan asli  $t$  dan  $n \geq 6$  ganjil, dipunyai bahwa  $K_{3 \times t}$  tidak memuat  $W_n$ . Jadi  $m_3(G, W_n) = \infty$  untuk sebarang graf  $G$  dengan  $n \geq 6$  ganjil. Sebagai konsekuensinya,  $m_3(P_3, W_n) = \infty$  untuk  $n \geq 6$  ganjil.

*Kasus 2.*  $j$  ganjil, semua  $G$ , dan  $n = (j - 1)s$  dengan  $s$  ganjil.

Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_3, G) \geq s$ . Misalkan  $H_2 \cong K_{j \times (s-1)}$  dengan  $s = \frac{n}{j-1}$ . Jika semua sisi dari  $H_2$  diwarnai dengan biru maka  $H_2$  tidak memuat  $G$  biru, karena  $(j-1)(\frac{n}{j-1} - 1) < n$ .  $H_2$  juga tidak memuat  $P_3$  merah. Oleh karena itu,  $m_j(P_3, G) \geq s$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_3, G) \leq s$ . Misalkan  $H \cong K_{j \times s}$ . Misalkan semua sisi  $H$  diberi warna merah-biru secara sebarang sedemikian sehingga  $H$  tidak memuat  $P_3$  merah. Jelas bahwa, semua sisi merah di  $H$  adalah independen. Karena  $js$  adalah ganjil maka terdapat paling sedikit titik  $x \in V(H)$  sedemikian sehingga semua sisi yang terkait dengan  $x$  adalah biru. Jadi,  $S_n$  berwarna biru di  $H$ . Selanjutnya, asumsikan  $x \in V_1$ , dimana  $V_1$  adalah himpunan partit dari  $H$ . Selanjutnya, misalkan  $H^1$  adalah suatu subgraf dari  $H$  yang diinduksi oleh  $V(H) \setminus V_1$ . Jadi,  $H^1 \cong K_{(j-1) \times s}$ . Karena  $H^1$  tidak mempunyai  $P_3$  merah maka dari Teorema 1  $H^1$  memuat  $P_n$  biru. Jadi,  $H$  juga memuat  $F_n$  biru. Dari Akibat 1,  $H^1$  juga memuat  $C_n$  biru. Bersama dengan  $x$ , lingkaran biru ini akan membentuk  $W_n$  biru di  $H^1$ . Jadi,  $m_j(P_3, G) \leq s$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .

*Kasus 3.* Untuk nilai lain dari  $j$  and  $n$ .

Misalkan  $t = \lceil \frac{n+1}{j-1} \rceil$ . Untuk menunjukkan bahwa  $m_j(P_3, G) = t$ , perhatikan  $H_3 \cong K_{j \times (t-1)}$ . Ambil sebarang *perfect matching*  $M$  di  $H_3$ , misalkan semua sisi dari  $M$  diwarnai dengan merah dan sisi sisa dari  $H_3$  diwarnai dengan biru. Jadi  $H_3$  tidak mempunyai  $P_3$  merah maupun  $G$  biru dengan  $n$  titik. Jadi  $m_j(P_3, G) \geq t$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan  $m_j(P_s, G) \leq t$ . Misal semua sisi dari  $H \cong K_{j \times t}$  diwarnai secara sebarang dengan warna merah dan biru sedemikian sehingga  $H$  tidak memuat  $P_3$  merah. Jelas bahwa, terdapat paling sedikit satu sisi merah, sebut  $xy$  di  $H$  (karena sisi lainnya adalah biru yaitu  $G$  di  $H$ ). Misalkan  $x$  adalah di himpunan partit  $V_1$  dari  $H$ . Sekarang, misalkan  $H^1$  adalah subgraf dari  $H$  yang diinduksi oleh  $V(H) \setminus (V_1 \cup \{y\})$ . Jadi,  $H^1 \cong K_{(j-1) \times t} \setminus \{y\}$ . Untuk menunjukkan bahwa  $H$  memuat  $G$  biru dengan  $n$  titik, perhatikan dua subkasus berikut.

*Subkasus 3.1.*  $j = 3$ .

Karena  $H^1 \cup \{y\}$  tidak memuat  $P_3$  merah, dengan Akibat 1,  $H^1 \cup \{y\}$  memuat  $C_{2t}$  biru. Bersama dengan  $x$ , graf lingkaran ini akan memuat kipas  $F_n$  biru. Akibatnya,  $H$  juga memuat  $S_n$  biru. Jadi  $m_3(P_3, G) \leq t$  untuk  $G \cong F_n$ , atau  $S_n$ . Sekarang, untuk menunjukkan bahwa  $m_3(P_3, W_n) \leq t$  untuk  $n$  genap (Catatan bahwa untuk kasus  $n$  ganjil telah ditunjukkan oleh Kasus 1). Ambil sebarang titik  $z$  di himpunan partit dari  $H$  bahwa tidak memuat  $x$  dan  $y$ . Karena  $H^1 \setminus \{y, z\}$  tidak mempunyai  $P_3$ , dari Akibat 1,  $H^1 \setminus \{y, z\}$  memuat  $C_n$  biru, karena  $n = 2t - 2$  genap. Tentu,  $H^1$  juga memuat  $C_n$  lingkaran biru. Bersama dengan  $x$ , lingkaran ini akan membentuk  $W_n$  di  $H$ . Jadi  $m_3(P_3, W_n) \leq t$ .

*Subkasus 3.2.  $j \geq 4$ .*

Sekali lagi bahwa, karena  $H^1$  tidak mempunyai  $P_3$  merah maka semua sisi merah di  $H^1$  (jika ada) akan membentuk (tidak harus *perfect matching*) suatu *matching*  $M$ . Dari Teorema III.2,  $H^1 \setminus M$  adalah pansiklik. Oleh karena itu,  $H^1$  memuat lingkaran biru  $C_l$  untuk setiap  $l \in \{6, 7, \dots, (j-1)t-1\}$ . Bersama dengan  $x$ , lingkaran terbesar di  $H^1$  akan membentuk  $W_n$  biru di  $H$ . Akibatnya,  $H$  juga memuat  $S_n$  biru dan  $F_n$  biru di  $H$ . Jadi  $m_j(P_3, G) \leq t$  untuk  $G \cong W_n, S_n$ , atau  $F_n$ .  $\square$

**Akibat IV.2** Untuk  $j \geq 3$  dan  $n \geq 3$ ,

$$m_j(P_2, M_{2n}) = \lceil \frac{2n}{j-1} \rceil \text{ dan}$$

$$m_j(P_3, M_{2n}) = \begin{cases} \frac{2n}{j-1} & \text{untuk } j \text{ ganjil dan } 2n = (j-1)s \text{ dengan} \\ & s \text{ ganjil,} \\ \lceil \frac{2n+1}{j-1} \rceil & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases}$$

*Bukti.*

Karena  $M_{2n} \subseteq W_{2n}$ , jelas bahwa  $m_j(P_s, M_{2n}) \leq m_j(P_s, W_{2n})$ . Oleh karena itu, cukup ditunjukkan bahwa  $m_j(P_s, M_{2n}) \geq m_j(P_s, W_{2n})$ .

Karena  $H_1, H_2$  dan  $H_3$  (dalam bukti dari Teorema 3) tidak memuat  $P_s$  ( $s = 2$  atau  $3$ ) merah maupun  $W_{2n}$  biru, dan  $M_{2n} \subset W_{2n}$  maka  $m_j(P_s, M_{2n}) \geq m_j(P_s, W_{2n})$  untuk semua  $n \geq 3$ .  $\square$

### IV.3 Graf Lintasan versus Graf Roda

Untuk  $j = 2$ , nilai dari  $m_2(P_s, P_t)$  ditemukan oleh Gyárfás dan Lehel [27], dan Faudree dan Schelp [20]. Hattingh dan Henning [32] menemukan nilai eksa dari  $m_2(P_m, S_n)$ . Jayawardene dan Samarasekara [34] memperoleh nilai eksak bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk *stripes* versus *stripes*  $m_j(nP_2, mP_2)$ . Ide bilangan Ramsey multipartit ukuran diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren [4], dan Syafrizal dan kawan-kawan. Bilangan Ramsey untuk lintasan kecil versus dan kelas-kelas graf telah dikaji oleh Syafrizal Sy, Baskaro dan kawan-kawan, yaitu [46], [47], dan [48].

Baru-baru ini, Yaser Rowshan, Mostafa Gholami, dan Stanford Shateyi [54] menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(K_{1,2}, P_4, nK_2)$  untuk sembarang  $j, n \geq 2$  dan  $m_j(nK_2, C_7)$ , untuk sembarang  $j \leq 4$  dan  $n \geq 2$ . Dalam tulisan ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_4(P_n, W_4)$  untuk semua bilangan bulat  $n \geq 2$ . Untuk sembarang bilangan bulat  $l \geq 2$  dan  $t$ , jelas bahwa  $K_{2 \times t}$  tidak memuat  $W_l$ . Oleh karena itu  $m_2(G, W_l) = \infty$  untuk sembarang graf  $G$ . Sebagai akibatnya,  $m_2(P_n, W_l) = \infty$  untuk sembarang bilangan bulat  $n, l \geq 2$ . Teorema berikut menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_4(P_n, W_l)$  untuk bilangan bulat positif  $n \geq 2$ . Berikut adalah bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf lintasan versus graf roda lima titik.

**Teorema IV.4** Untuk bilangan bulat  $n \geq 2$ ,

$$m_4(P_n, W_4) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } n = 2, \\ 3 & \text{untuk } 3 \leq n \leq 4, \\ 4 & \text{untuk } n = 5, \\ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

*Bukti.* Perhatikan empat kasus berikut.

*Kasus 1:* untuk  $n = 2$ .

Untuk menunjukkan batas bawah  $m_4(P_n, W_4) \geq 2$ , perhatikan  $F_1 \cong K_{4 \times 1}$ . Misalkan  $D_1 \oplus E_1$  adalah faktorisasi dari  $F_1$  dimana  $D_1$  adalah himpunan titik-titik independen dan  $E_1 = K_{4 \times 1}$ . Jelas bahwa  $D_1 \not\supseteq P_2$  dan juga  $E_1 \not\supseteq W_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_2, W_4) \geq 2$  untuk  $n = 2$ .

Untuk menunjukkan batas atas  $m_4(P_n, W_4) \leq 2$ , perhatikan sembarang faktorisasi  $G_1 \cong K_{4 \times 2} = Q_1 \oplus R_1$  sedemikian sehingga  $Q_1$  tidak memuat  $P_2$ . Jadi,  $Q_1$  adalah titik-titik independen. Karena  $|R_1 \setminus V| = 6$  untuk sembarang himpunan partitif  $V$  dari  $G_1$ , maka  $R_1 \supseteq C_4$ . Akibatnya,  $R_1 \supseteq W_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_2, W_4) \leq 2$  for  $n = 2$ .

*Kasus 2:* untuk  $3 \leq n \leq 4$ .

Untuk menunjukkan bahwa  $m_4(P_n, W_4) \geq 3$ , misalkan  $V_1, \dots, V_4$  adalah himpunan-himpunan partitif dari  $F_2 = K_{4 \times 2}$ , dimana  $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}\}$  dengan  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Misalkan  $D_2 \oplus E_2$  adalah faktorisasi  $F_2$  dengan  $E(D_2) = \{a_{11}a_{21}, a_{12}a_{22}, a_{31}a_{41}, a_{32}a_{42}\}$ , dan  $E_2$  adalah komplemen dari  $D_2$  terhadap  $F_2$ . Jadi,  $D_2 \not\supseteq P_n$ . Karena  $E_2 \setminus V$  tidak memuat  $C_4$  di  $E_2$ , maka  $E_2 \not\supseteq W_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_n, W_4) \geq 3$  untuk  $3 \leq n \leq 4$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_4(P_n, W_4) \leq 3$ . Perhatikan,  $G_2 \cong K_{4 \times 3}$ . Misalkan  $Q_2 \oplus R_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $G_2$  sedemikian sehingga  $Q_2$  tidak memuat  $P_n$ . Akan ditunjukkan bahwa  $R_2$  memuat  $W_4$ . Untuk itu, perhatikan dua subkasus berikut.

*Subkasus 2.1:* jika  $Q_2 = 4C_3$ .

Misalkan  $V_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \dots, V_4 = \{a_{41}, a_{42}, a_{43}\}$  adalah himpunan partit dari  $G_2$ . Tanpa mengurangi perumumman, asumsikan bahwa empat lingkaran di  $Q_2$  adalah  $C_3^1 := a_{11}a_{31}a_{42}a_{11}$ ,  $C_3^2 := a_{21}a_{32}a_{43}a_{21}$ ,  $C_3^3 := a_{22}a_{33}a_{13}a_{22}$ ,  $C_3^4 := a_{23}a_{41}a_{12}a_{23}$ . Jadi, terdapat graf lingkaran  $C_4 := a_{11}a_{21}a_{13}a_{32}a_{11}$  in  $R_2$ . Akibatnya, dipunyai graf roda  $W_4 := C_4 + \{a_{41}\}$  di  $R_2$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_n, W_4) \leq 3$  untuk  $3 \leq n \leq 4$ .

*Subkasus 2.2:* jika  $Q_2 \neq 4C_3$ .

Karena  $Q_2$  tidak memuat  $4C_3$ , maka terdapat satu titik  $x$  sedemikian sehingga  $d(x) \leq 1$ . Selanjutnya, perhatikan  $H = K_{4 \times 3} \setminus (V_x \cup N(x))$ . Jadi  $|H| \geq 8$ . Misalkan  $P := {}_a P_b$  adalah lintasan terpanjang di  $H$ . Maka  $xa, xb, \notin Q_2$ . Selanjutnya, misalkan  $A = V(H) \setminus (V_a \cup V_b)$ . Karena  $|A| \geq 3$ , maka terdapat paling sedikit dua titik, sebut  $c$  dan  $d$ . Karena  $ac, ad, bc, bd, \notin Q_2$ , maka semua titik ini, yaitu  $a, b, c$ , dan  $d$  akan membentuk graf lingkaran  $C_4$  di  $R_2$ . Jelas bahwa,  $ax, bx, cx, dx \notin R_2$ . Akibatnya, dipunyai suatu graf roda  $W_4 := C_4 + \{x\}$  di  $R_2$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_4, W_4) \leq 3$  untuk  $3 \leq n \leq 4$ .

*Kasus 3:* untuk  $n = 5$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $m_4(P_5, W_4) \geq 4$ . Misalkan  $D_3 \oplus E_3$  adalah suatu faktorisasi dari  $F_3 \cong K_{4 \times 3}$  dengan  $D_3 \cong 3K_{4 \times 1}$  dan  $E_3$  adalah komplemen dari  $D_3$  terhadap  $F_3$ . Jelas bahwa,  $D_3 \not\cong P_5$ . Karena setiap titik dari sembarang graf lingkaran  $C_4$  di  $E_3$  akan bertetangga ke setiap titik ke himpunan partit yang lain yang memuat titik-titik dari  $C_4$  di  $E_3$ , maka  $E_3 \not\cong W_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_5, W_4) \geq 4$  untuk  $n = 5$ .

Untuk menunjukkan bahwa  $m_4(P_5, W_4) \leq 4$ , perhatikan  $G_3 \cong K_{4 \times 5}$ . Misalkan  $Q_3 \oplus R_3$  adalah sembarang faktorisasi dari  $G_3$  sedemikian sehingga  $Q_3$  tidak memuat  $P_5$ . Untuk menunjukkan bahwa  $R_3$  memuat  $W_4$ , perhatikan dua kemungkinan berikut.

*Subkasus 3.1:* jika  $Q_3 = 4K_4$ .

Misalkan  $V_1 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\}, \dots, V_4 = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}\}$  adalah himpunan partit dari  $G_3$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa empat graf lengkap di  $Q_3$  dengan himpunan titik-titik adalah  $V(K_4^i) = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}\}$  dengan  $1 \leq i \leq 4$ . Jadi, dipunyai graf lingkaran  $C_4 := u_{11}u_{22}u_{13}u_{32}u_{11}$  di  $R_3$ . Akibatnya, dipunyai graf lingkaran  $W_4 := C_4 + \{u_{44}\}$  di  $R_3$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_5, W_4) \leq 4$  untuk  $n = 5$ .

*Subkasus 3.2:* jika  $Q_3 \neq 4K_4$ .

Karena  $Q_3$  tidak memuat  $4K_4$ , maka terdapat satu titik  $y$  sedemikian sehingga  $d(y) \leq 2$ . Selanjutnya, perhatikan  $H = K_{4 \times 4} \setminus (V_y \cup N(y))$ . Jadi,  $|H| \geq 10$ . Misalkan  $P := {}_u P_v$  adalah lintasan terpanjang  $H$ . Jadi  $yu, yv, \notin Q_3$ . Selanjutnya, misalkan  $B = V(H) \setminus V(P)$ . Karena  $Q_3 \not\cong P_5$ , maka  $|B| \geq 6$ . Akibatnya, terdapat paling sedikit dua titik, sebut  $w$  dan  $z$ , dengan  $z, w \in (Q_3[B] \setminus (V_u \cup V_v))$ . Jadi, semua titik-titik ini  $u, v, w, z$  membentuk graf lingkaran  $C_4 := zuwvz$  di  $R_3$ . Akhirnya, dipunyai graf roda  $W_4 := C_4 + \{y\}$  di  $R_3$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_5, W_4) \leq 4$  untuk  $n = 5$ .

*Kasus 4:* untuk  $n \geq 6$ .

Misalkan  $t = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $m_4(P_n, W_4) \geq t$ . Misalkan  $F_4 = K_{4 \times (t-1)} \cong D_4 \oplus E_4$  dengan  $D_4 \cong 2K_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ . Karena  $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < n$ , maka  $D_4 \not\cong P_n$ . Karena faktorisasi dari  $D_4$  adalah dua faktor, maka  $E_4 \not\cong W_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_n, W_4) \geq t$  untuk  $n \geq 6$ .

Selanjutnya, akan tunjukkan bahwa  $m_4(P_n, W_4) \leq t$ . Perhatikan  $G_4 \cong K_{4 \times t}$ . Misalkan  $Q_4 \oplus R_4$  adalah sembarang faktorisasi dari  $G_4$  sedemikian  $Q_4$  tidak memuat  $P_n$ . Akan ditunjukkan bahwa  $R_4$  memuat  $W_4$ . Misalkan  $P = {}_aP_b$  adalah lintasan terpanjang di  $Q_4$ . Tunjukkan bahwa  $R_4$  memuat  $W_4$ , perhatikan bahwa dua subkasus berikut.

*Subkasus 4.1:* jika  $V_a = V_b$ .

Misalkan  $X = V(K_{4 \times t}) \setminus (V_a \cup V(P))$ . Misalkan  ${}_cP_d^1$  adalah suatu lintasan terpanjang dalam graf  $Q_4[X]$ . Jadi, empat titik-titik ini  $a, b, c, d$  akan membentuk graf lingkaran  $C_4$  di  $R_4$ . Karena  $4(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1) - 2(n-1) > 1$ , maka dipunyai satu titik  $x$  di  $R_4 \setminus (V_a \cup V_c \cup V_d)$  sedemikian sehingga  $x$  bertetangga ke  $a, b, c$ , dan  $d$  di  $R_4$ , yang mana satu dari semua titik-titik ini akan membentuk graf roda  $W_4$  di  $R_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_n, W_4) \leq t$  untuk  $n \geq 6$ .

*Subkasus 4.2:* jika  $V_a \neq V_b$ .

Misalkan  $Y = V(K_{4 \times t}) \setminus (V_a \cup V_b \cup V(P))$ . Misalkan  ${}_cP_d^2$  adalah lintasan terpanjang di graf  $Q_4[Y]$  sedemikian sehingga  $V_c = V_d$ . Jadi, semua titik-titik ini  $a, b, c$ , dan  $d$  akan membentuk  $C_4$  di  $R_4$ . Karena  $4(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1) - 2(n-1) > 1$ , maka dipunyai satu titik  $y$  di  $R_4 \setminus (V_a \cup V_b \cup V_c)$  sedemikian sehingga  $y$  bertetangga ke  $a, b, c$ , dan  $d$  di  $R_4$ , yang mana satu dari semua titik ini akan membentuk graf roda  $W_4$  in  $R_4$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_n, W_4) \leq t$  untuk  $n \geq 6$ .  $\square$

# Bab V Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(P_n, C_3)$ dengan $n \geq 2$

## V.1 Survey Literatur

Untuk  $j \geq 3$  dan  $s = 2, 3$ , Syafrizal *dkk* [47] menemukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$ , dimana  $G$  adalah *wheel*, *star*, *fan*, atau *windmill*.

## V.2 Graf Lintasan versus Graf Lingkaran

Dalam tulisan ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multi partit ukuran  $m_j(P_n, C_s)$  dari *path*  $P_n$  versus *cycle*  $C_s$  dimana  $n \geq 2$  dan  $s = 3$  atau 4.

Untuk sembarang bilangan bulat positif  $t$ , jelas bahwa  $K_{2 \times t}$  tidak memuat  $C_3$ . Oleh karena itu,  $m_2(G, C_3) = \infty$  untuk sembarang graf  $G$ . Sebagai akibatnya adalah,  $m_2(P_n, C_3) = \infty$  untuk sembarang bilangan bulat  $n \geq 2$ . Teorema berikut memberikan nilai eksak untuk  $m_j(P_n, C_3)$  dengan  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .

**Teorema V.1** Untuk bilangan bulat  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, C_3) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n = 2 \text{ or } 3, \\ n - 1 & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap}, \\ n - 2 & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } n \geq 5 \text{ ganjil}, \\ \lceil \frac{2n}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 4 \text{ genap}, \\ \lceil \frac{2n-1}{j} \rceil & \text{untuk } j \geq 5 \text{ ganjil}. \end{cases}$$

*Bukti.*

Perhatikan dua kasus berikut.

*Kasus 1.*  $j = 3$  dan  $n = 2$  or 3.

Jelas bahwa,  $m_3(P_2, C_3) \geq 1$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{3 \times 1}$  dengan  $F_1 \not\supseteq P_2$ . Jadi,  $V(F_1)$  adalah himpunan titik independen. Ini mengakibatkan,  $F_2 \supseteq C_3$ . Oleh karena itu,  $m_3(P_2, C_3) \leq 1$ .

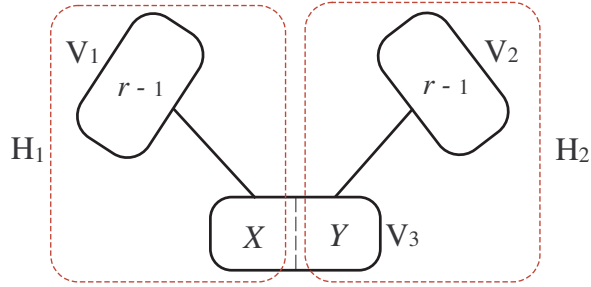
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_3(P_3, C_3) \geq 2$ . Perhatikan  $G \cong K_{3 \times 1}$ . Misalkan  $G = G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1 \cong K_2 \cup K_1$ . Akibatnya,  $G_1 \not\supseteq P_3$  dan  $G_2 \not\supseteq K_{3 \times 1}$ . Jadi,  $m_3(P_3, C_3) \geq 2$ . Sekarang, akan ditunjukkan  $m_3(P_3, C_3) \leq 2$ . Perhatikan  $F \cong K_{3 \times 2}$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  dengan  $F_1 \not\supseteq P_3$ . Karena  $F_1 \not\supseteq P_3$ , maka ambil tiga titik dari himpunan partit berbeda, sedemikian sehingga semua titik ini akan membentuk himpunan titik-titik independen di  $F_1$ . Jadi, dipunyai  $C_3$  di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_3(P_3, C_3) \leq 2$ .

*Kasus 2.* ( $j = 3$  dan  $n \geq 4$ ) atau ( $j \geq 4$ ).

Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah dengan memperhatikan dua subkasus sebagai berikut.

*Subkasus 2.1.* Untuk  $j = 3$  dan  $n \geq 4$ .

Misalkan  $r = n - 1$  dengan  $n$  adalah genap (atau  $r = n - 2$  dengan  $n$  adalah ganjil). Untuk menunjukkan bahwa  $m_3(P_n, C_3) \geq r$ , perhatikan bahwa  $G \cong K_{3 \times (r-1)}$ . Misalkan  $V_1, V_2$ , dan  $V_3 = X \cup Y$  adalah himpunan partit dari  $G$  dimana  $0 \leq |X| - |Y| \leq 1$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $G$  dengan  $G_1$  adalah graf terdiri dari dua komponen  $H_1 \cong K_{|V_1|, |X|}$  dan  $H_2 \cong K_{|V_2|, |Y|}$  (lihat Gambar V.1).



Gambar V.1. Suatu  $(P_n, C_3; 3(r-1))$ -good graph menunjukkan  $m_3(P_n, K_{3 \times 1}) \geq r$ .

Consider

$$\begin{aligned}
 2|X| + 1 &= 2 \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil + 1 \\
 &= 2 \left( \frac{r-1}{2} \right) + 1 \quad (r-1 \text{ adalah bilangan bulat positif}) \\
 &= 2 \left( \frac{(n-1)-1}{2} \right) + 1 \\
 &< n.
 \end{aligned}$$

Akibatnya,  $H_1 \not\cong P_n$ . Karena  $|X| \geq |Y|$  maka  $H_2 \not\cong P_n$ . Jadi,  $G_1 \not\cong P_n$ . Pada sisi lain, karena  $G_2$  akan membentuk graf bipartit maka  $G_2 \not\cong C_3$ . Oleh karena itu,  $m_3(P_n, C_3) \geq r$ .

*Subkasus 2.2.* Untuk  $j \geq 4$ .

Misalkan  $r = \lceil \frac{2n}{j} \rceil$  untuk  $j$  genap (atau  $r = \lceil \frac{2n-1}{j} \rceil$  untuk  $j$  ganjil). Untuk menunjukkan  $m_j(P_n, C_3) \geq r$ , perhatikan  $G \cong K_{j \times (r-1)}$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah faktorisasi  $G$  dimana  $G_1$  adalah dua komponen, sebut  $H_1$  dan  $H_2$ , sedemikian sehingga  $H_1$  akan membentuk graf multipartit lengkap dengan  $\lceil \frac{j(r-1)}{2} \rceil$  titik dan  $H_2$  akan membentuk graf multipartit lengkap dengan  $\lfloor \frac{j(r-1)}{2} \rfloor$  titik. Karena  $\lceil \frac{j(r-1)}{2} \rceil < n$  maka  $G_1 \not\cong P_n$ . Pada sisi lain, karena  $G_2$  adalah graf bipartit, maka  $G_2 \not\cong C_3$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_n, C_3) \geq r$ .



Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_n, C_3) \leq r$ . Perhatikan  $F \cong K_{j \times r}$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $P_n$ . Untuk menunjukkan bahwa  $F_2 \supseteq C_3$ , misalkan  $P$  adalah *path* terpanjang di  $F_1$ . Jika  $|V(P)| = 1$  maka jelas bahwa  $F_2 \supseteq C_3$ . Sekarang, misalkan  $|V(P)| \neq 1$ . Definisikan  $V_u$  adalah suatu himpunan partit  $F$  yang memuat titik  $u$ . Perhatikan dua kemungkinan berikut.

*Subkasus 2.1.1.* Jika  $F_1$  terhubung.

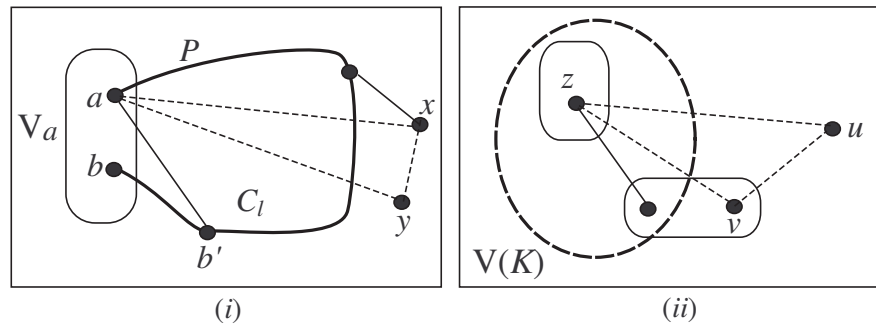
Misalkan  $P := {}_a P_b$ . Perhatikan  $A = V(F) \setminus (V_a \cup V(P))$ . Karena  $|A| > r$  maka terdapat dua titik, sebut  $x$  dan  $y$ , di  $A$  dengan  $V_x \neq V_y$ . Karena  $V_x \neq V_y$ , maka  $V_x \neq V_b$  atau  $V_y \neq V_b$ . Sekarang, perhatikan dua subkasus berikut.

(i).  $V_a \neq V_b$ .

Karena  $P$  adalah *path* terpanjang di  $F_1$  dan  $F_1$  adalah graf terhubung, maka  $ab \notin E(F_1)$ . Karena  $V_x \neq V_b$  atau  $V_y \neq V_b$  dengan  $x, y \notin V_a$ , maka diperoleh salah satu  $C_3 := abx$  atau  $C_3 := aby$  in  $F_2$ .

(ii).  $V_a = V_b$ .

Misalkan  $b'$  adalah titik yang bertetangga ke  $b$  di *path*  $P$ . Misalkan  $ab' \notin E(F_1)$ . Jika  $b'x \notin E(F_1)$  atau  $b'y \notin E(F_1)$ , maka  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 1} := ab'x$  atau  $K_{3 \times 1} := ab'y$ . Pada sisi lain, jika  $b'x \in E(F_1)$  dan  $b'y \in E(F_1)$  maka  $F_1$  memuat *path* terpanjang dengan titik-titik ujungnya di dua himpunan partit berbeda. Dari Subkasus (i),  $F_2$  memuat  $K_3$ . Sekarang, misalkan  $ab' \in E(F_1)$ . Karena  $ab' \in E(F_1)$  maka  $F_1$  memuat suatu *cycle*  $C_l$  dengan  $l = |V(P)| - 1$  titik. Karena  $F_1$  adalah subgraf terhubung maka titik  $x$  dan titik  $y$  harus terhubung (bertetangga) ke suatu titik di  $C_l$ . Jadi,  $xy \notin E(F_1)$  (karena  $P$  adalah *path* terpanjang di  $F_1$ ) (lihat Gambar.V.2(i)). Jelas bahwa, karena  $P$  *path* terpanjang di  $F_1$ , maka  $x$  dan  $y$  tidak bertetangga dengan  $a$  di  $F_1$ . Ini mengakibatkan, diperoleh  $C_3 := axy$  di  $F_2$ .



Gambar V.2. (i) Untuk  $V_a = V_b$ . (ii)  $F_1$  tidak terhubung.

*Subkasus 2.1.2.* Jika  $F_1$  tidak terhubung.

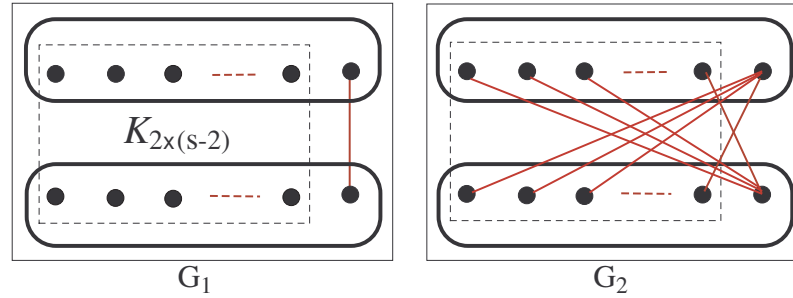
Misalkan  $K$  adalah komponen terkecil di  $F_1$ . Jika  $|V(K)| = 1$  maka  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 1}$

(karena  $V(F_1)$  terdiri dari himpunan titik-titik yang independen). Selanjutnya, misalkan  $|V(K)| \neq 1$ . Sekarang, perhatikan posisi titik-titik dari  $K$  di  $F_1$ . Misalkan titik-titik dari  $K$  adalah termuat di tepat dua himpunan partit di  $F_1$ . Misalkan  $B = V(F_1) \setminus V(K)$ . Karena  $K$  adalah komponen terkecil di  $F_1$ , maka  $|B| \geq n$ . Ini mengakibatkan, terdapat dua titik, sebut  $u$  dan  $v$ , di  $V(F_1[B])$  sedemikian sehingga  $uv \in E(F_2)$  dengan  $u \in V_k$  untuk suatu  $k \in V(K)$ . Karena titik-titik di  $K$  dalam dua himpunan partit maka dapat dipilih titik  $z \in V(K)$  sedemikian sehingga  $zu, zv \notin E(F_1)$  (lihat Gambar. V.2(ii)). Jadi,  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 1} := kuv$ . Selanjutnya, misalkan titik-titik di  $K$  adalah termuat paling sedikit di tiga himpunan partit. Akibatnya, karena  $u, v \in V(F_1[B])$  dengan  $uv \in E(F_2)$ , maka dapat dipilih titik  $w \in V(K)$  sedemikian sehingga  $wu, vw \notin E(F_1)$ . Jadi,  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 1} := wuv$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_n, C_3) \leq r$ .  $\square$

**Teorema V.2** Untuk bilangan asli  $n \geq 4$ ,  $m_2(P_n, C_4) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

*Bukti.*

Misalkan  $s = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ . Perhatikan  $G \cong K_{2 \times (s-1)}$ . Misalkan  $G_1 \cong K_{2 \times (s-2)} \cup K_2$  dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $G$ . Karena  $2(s-2) < n$  maka  $G_1 \not\supseteq P_n$ , dan karena  $G_2 \cong 2K_{1, (s-2)}$  maka  $G_2 \not\supseteq C_4$  (lihat Gambar V.3). Oleh karena itu,  $m_2(P_n, C_4) \geq s$ .

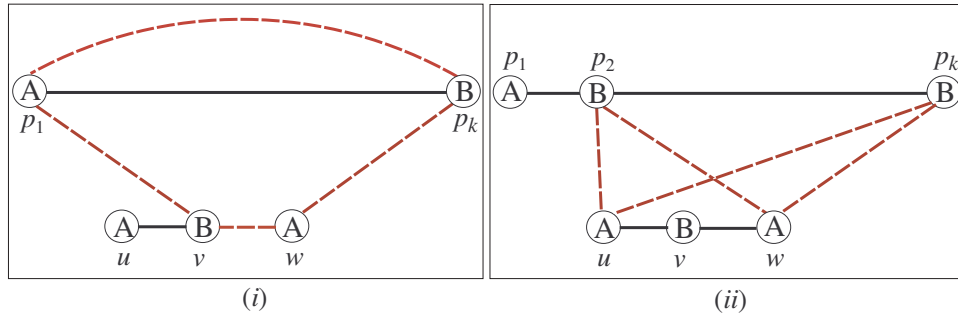


Gambar V.3. Suatu  $(P_n, C_4; |K_{2 \times (s-1)}|)$ -good graph yang menunjukkan  $m_2(P_n, C_4) \geq s$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_2(P_n, C_4) \leq s$ . Perhatikan bahwa  $F \cong K_{2 \times s}$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  dan misalkan bahwa  $P_n$  adalah bukan subgraf dari  $F_1$ . Misalkan  $P := p_1 p_2 \dots p_k$  path terpanjang di  $F_1$  dimana  $k \leq n - 1$ . Jika  $|V(P)| \leq 2$  maka jelas bahwa  $F_2 \supseteq C_4$ . Sekarang, misalkan  $3 \leq |V(P)| \leq (n - 1)$ . Perhatikan  $X = V(F_1) \setminus V(P)$ . Karena  $F_1 \not\supseteq P_n$  maka  $|X| = 2s - (n - 1) \geq 3$ . Karena  $|X| \geq 3$  dan  $F_1$  adalah graf bipartit, maka terdapat paling sedikit dua titik pada satu himpunan partit. Misalkan  $a, b \in X$ . Jika  $F_1$  memuat suatu cycle  $C_k$ , maka ambil dua titik, sebut  $p_i$  dan  $p_j$ , di  $(V(C_k) \setminus V_a)$  untuk suatu  $i$ . Jadi,  $F_2$  memuat suatu  $C_4 := p_i a p_j b p_i$ .

Sekarang, asumsikan bahwa  $F_1$  memuat cycle  $C_k$ . Jadi  $p_1 p_k \notin E(F_1)$ . Misalkan  $A$

dan  $B$  adalah himpunan partit dari  $F$ . Karena  $p_1, p_k \in A$  maka terdapat dua titik  $z, v \in (X \cap B)$  sedemikian sehingga  $F_2$  memuat *cycle*  $C_4 := p_1zp_kv p_1$ .



Gambar V.4. Konstruksi graf  $K_{2 \times 2}$  di  $F_2$ .

Selanjutnya, jika  $p_1 \in A$  dan  $p_k \in B$  adalah dua titik ujung di dua himpunan partit berbeda, maka  $|X| \geq 4$ . Misalkan  $u, w \in (X \cap A)$  dan  $v \in (X \cap B)$ , perhatikan dua kasus berikut.

*Kasus 1.* Jika  $uv \notin E(F_1)$ , maka  $C_4 := uvp_1p_ku$ .

*Kasus 2.* Jika  $uv \in E(F_1)$ , perhatikan dua kemungkinan berikut (lihat Gambar V.4). Jika  $vw \notin E(F_1)$  maka  $F_2$  memuat graf lingkaran  $C_4 := vwp_kp_1v$  (lihat Gambar V.4(i)). Pada sisi lain, jika  $vw \in E(F_1)$  maka  $F_2$  memuat graf lingkaran  $C_4 := up_2wp_ku$  in  $F_2$ , karena  $p_2u, p_2w \notin E(F_1)$  (lihat Gambar V.4(ii)).  $\square$

# Bab VI Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran

## $m_j(P_3, K_{s \times 2})$

Misalkan  $P_n$  adalah suatu *path* dengan  $n$  titik. Definisikan  $V_u$  adalah suatu himpunan partit  $G$  yang memuat titik  $u$ , dan  $\delta(V)$  adalah derajat minimum dari himpunan partit  $V$ .

### VI.1 Survey Literatur

Syafrizal *dkk.* telah menentukan  $m_j(P_s, n)$  untuk  $s = 2, 3, 4$  dan  $j, n \geq 3$  ([46],[?]), dan juga, Syafrizal *dkk.* ([47]) menemukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$ , dimana  $G$  adalah *wheel, star, fan*, atau *windmill* untuk suatu  $j \geq 3$  dan  $s = 2, 3$ . Kemudian, Gyárfás *dkk.* [25] menunjukkan bahwa sembarang 2-peawarnaan dari semua sisi graf lengkap tripartit  $K_{3 \times n}$  terdapat suatu monokromatik *path* dengan panjang  $(1 - o(1))2n$ . Selanjutnya, Gyárfás *dkk.* [26] mengkaji bilangan Ramsey multipartit untuk *cycles* ganjil. Akhirnya, Syafrizal ([49]) telah menentukan  $m_j(C_3, P_n)$  untuk  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ , dan  $m_2(C_4, P_n)$  untuk  $n \geq 4$ .

### VI.2 Graf Lintasan versus Graf *Cocktail Party*

Untuk bilangan asli  $a, b$ , dan  $t$  dengan  $a < b$ ,  $K_{a \times t}$  tidak memuat  $K_{b \times t}$ . Jadi untuk  $s > j$ ,  $m_j(G, K_{s \times t}) = \infty$  dengan sembarang graf  $G$ . Akibatnya,  $m_j(P_3, K_{s \times t}) = \infty$  untuk  $s > j$ . Tujuan dalam bab ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk *path* kecil versus graf *cocktail party*  $m_j(P_3, K_{s \times t})$  untuk  $j, s \geq 2, t = 2$ , dan  $s \leq j$ .

**Teorema VI.1** Untuk bilangan bulat  $j, s \geq 2$ ,

$$m_j(P_3, K_{s \times 2}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \text{ dan } j \geq 4, \\ 2 & \text{untuk } s = \lceil \frac{j}{2} \rceil \text{ dan } j \text{ ganjil}, \\ 3 & \text{untuk } \lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor \text{ dan } j \geq 4. \end{cases}$$

*Bukti.*

*Kasus 1.*  $2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$  dan  $j \geq 4$ .

Jelas bahwa,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 1$ . Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 1$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_j$  dan misalkan bahwa  $P_3$  adalah bukan subgraf dari  $F_1$ . Maka  $F_1$  adalah subgraf dari  $\frac{j}{2}K_2$  (jika  $j$  genap) atau  $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor K_2 \cup K_1$  (jika  $j$  ganjil). Jadi  $F_2$  akan memuat  $K_{s \times 2}$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 1$ .

*Kasus 2.*  $s = \lceil \frac{j}{2} \rceil$  dan  $j$  ganjil.

Pertama akan ditunjukkan  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 2$ . Perhatikan  $G \cong K_j$ . Misal  $G_1 \cong$

$\lfloor \frac{j}{2} \rfloor K_2 \cup K_1$  dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $G$ . Ini mengakibatkan  $G_1$  tidak memuat  $P_3$ . Karena  $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor < s$ , maka  $G_2$  tidak memuat  $K_{s \times 2}$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 2$ .

Untuk menunjukkan  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 2$ , dilakukan induksi terhadap  $j$ . Misalkan  $F \cong K_{j \times 2}$  dan misalkan  $F_1 \oplus F_2$  sembarang faktorisasi dari  $F$ . Misalkan bahwa  $F_1 \not\supset P_3$ . Akan ditunjukkan bahwa  $F_2 \supset K_{s \times 2}$ .

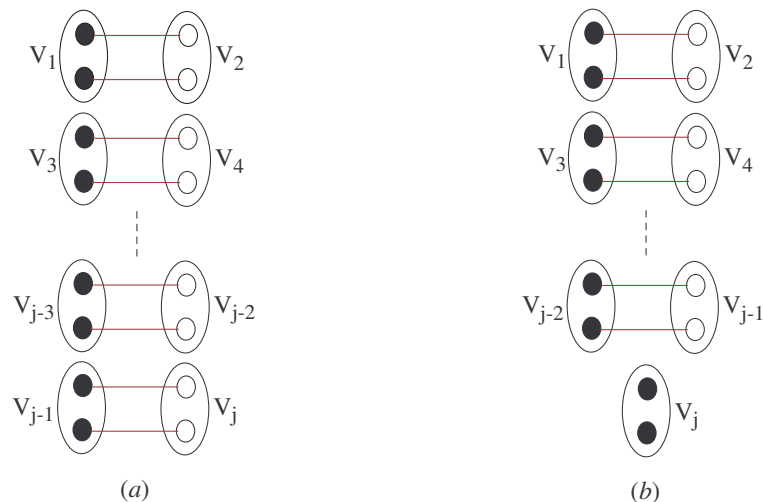
Untuk Kasus  $j = 3$ , karena  $F_1 \not\supset P_3$  maka dua titik dalam satu himpunan partit dari  $F_1$  tidak akan bertetangga ke paling sedikit dua titik lainnya. Jadi, empat titik ini akan membentuk suatu  $K_{2 \times 2}$  di  $F_2$ .

Asumsikan benar untuk  $j = k - 2$  yaitu  $m_{k-2}(P_3, K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}) \leq 2$ .

Untuk kasus  $j = k$ , pilih dua himpunan partit, sebut  $A$  dan  $B$ , yang mana terdapat sebuah sisi di  $F_1$  yang menghubungkan suatu titik di  $A$  ke titik lain di  $B$ . Perhatikan suatu faktorisasi dari  $F_1 \setminus (A \cup B)$ . Dengan asumsi induksi, akan terdapat graf  $K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}$  di  $F_2$ . Untuk dua titik bertetangga di  $A \cup B$  akan tidak bertetangga ke sembarang titik lain di  $K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2}$  di  $F_1$ . Jadi, dipunyai  $K_{s \times 2} = K_{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil \times 2} + K_{1 \times 2}$  di  $F_2$ , karena  $s = \lceil \frac{k-2}{2} \rceil + 1$  untuk  $k$  ganjil. Oleh karena itu,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 2$  untuk  $s = \lceil \frac{j}{2} \rceil$  dan  $j$  ganjil.

*Kasus 3.*  $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$  dan  $j \geq 4$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 3$ . Perhatikan  $G \cong K_{j \times 2}$ . Misalkan  $G_1$  adalah gra dalam Gambar VI.1 dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $G$ . Jelas bahwa,  $G_1 \not\supset P_3$ . Karena  $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s$ , maka  $G_2$  tidak memuat  $K_{s \times 2}$ . Jadi,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \geq 3$ .



Gambar VI.1. (a)  $G_1$  untuk  $j$  genap (b)  $G_1$  untuk  $j$  ganjil.

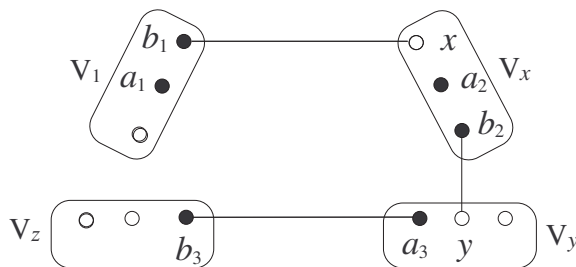
Untuk menunjukkan bahwa  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$ , digunakan induksi pada  $j$ . Misalkan  $F \cong K_{j \times 3}$  dan misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  dan misalkan bahwa  $F_1 \not\supset P_3$ . Untuk menunjukkan bahwa  $F_2 \supset K_{s \times 2}$ , perhatikan dua subkasus berikut.

*Subkasus 3.1.*  $j \geq 5$  ganjil.

Untuk  $j = 5$ , karena  $|V(F)|$  ganjil maka terdapat titik  $a_1$  dari himpunan partit  $V_1$  di  $F_1$  dengan  $d(a_1) = 0$ . Lebih lanjut, pilih satu titik  $b_1 \in V_1$  di  $F_1$  dengan  $d(b_1) = \delta(F_1 \setminus \{a_1\})$ . Misalkan  $N_1$  adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke  $b_1$  di  $F_1$ . Perhatikan  $X_1 = V(F_1) \setminus (V_1 \cup N_1)$ . Jelas bahwa,  $|X_1| \geq 11$ . Ambil satu titik  $a_2$  dari himpunan partit  $V_2$  di  $F_1[X_1]$  dengan  $d(a_2) = \delta(F_1[X_1])$  dan pilih titik lain  $b_2$  dari himpunan partit  $V_2$  dengan  $d(b_2) = \delta(F_1[X_1] \setminus \{a_2\})$ . Misalkan  $N_2$  adalah himpunan titik yang bertetangga dengan  $a_2$  dan  $b_2$  di  $F_1[X_1]$ . Perhatikan  $X_2 = V(F_1[X_1]) \setminus (V_2 \cup N_2)$ . Jelas bahwa,  $|X_2| \geq 6$ . Pilih titik  $a_3$  dari himpunan partit  $V_3$  di  $F_1[X_2]$  dengan  $d(a_3) = \delta(F_1[X_2])$  dan ambil satu titik lain  $b_3$  dari himpunan partit  $V_3$  dengan  $d(b_3) = \delta(F_1[X_2] \setminus \{a_3\})$ . Misalkan  $N_3$  adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke  $a_3$  dan  $b_3$  di  $F_1[X_2]$ . Perhatikan bahwa  $X_3 = V(F_1[X_2]) \setminus (V_3 \cup N_3)$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $P_3$  maka  $|X_3| \geq 2$ . Jadi, terdapat paling sedikit dua titik  $a_4$  dan  $b_4$  di  $F[X_3]$ . Jadi, semua titik ini  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4$  dan  $b_4$  akan membentuk  $K_{4 \times 2}$  di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_5(P_3, K_{4 \times 2}) \leq 3$ .

Asumsikan adalah benar untuk  $j = k - 4 \geq 5$  ganjil, bahwa  $m_{k-4}(P_3, K_{t \times 2}) \leq 3$  dimana  $t = \lceil \frac{k-4}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-4}{4} \rfloor$ .

Akan ditunjukkan benar untuk  $j = k$  ganjil, yaitu  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$  dengan  $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$ . Karena  $|V(F)|$  adalah ganjil, maka terdapat satu titik  $a_1$  dari himpunan partit  $V_1$  di  $F_1$  dengan  $d(a_1) = 0$ . Lebih lanjut, pilih titik lain  $b_1 \in V_1$ . Misalkan  $x$  adalah titik yang bertetangga dengan  $b_1$  di  $F_1$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $P_3$  maka terdapat dua titik  $a_2, b_2 \in (V_x \setminus \{x\})$ . Misalkan  $y$  adalah titik yang bertetangga dengan  $b_2$  di  $F_1$ . Ambil satu titik  $a_3$  di  $V_y$ . Pilih satu titik  $b_3 \in (V_z \setminus (V_1 \cup V_x \cup V_y))$  bertetangga ke  $a_3$  di  $F_1$ . Jelas bahwa, semua titik ini  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3$  dan  $b_3$  tidak akan bertetangga ke semua titik di  $K_{3 \times 2}$  di  $F_2$ .



Gambar VI.2.  $K_{4 \times 3} \supset K_{3 \times 2}$  di  $F_2[V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z]$ .

Selanjutnya, perhatikan  $A = V(F_1) \setminus (V_1 \cup V_x \cup V_y \cup V_z)$ . Jika  $a_2 u \in E(F_1)$  dimana

$u \in (V_1 \cup V_y \cup V_z)$  maka dengan asumsi induksi,  $F[A]$  akan memuat  $K_{t \times 2}$  di  $F_2$ . Pada kasus lain, jika  $a_2 u \in E(F_1)$  dengan  $u \notin (V_1 \cup V_y \cup V_z)$  maka kita juga dapat mengkonstruksi  $K_{t \times 2}$  dari  $F[A] \setminus \{u\}$  sedemikian sehingga terdapat  $K_{t \times 2}$  di  $F_2$ . Jelas bahwa, semua titik ini  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3$  dan  $b_3$  tidak akan bertetangga ke sembarang titik dari  $F_1[A]$ . Karena

$$\begin{aligned} t + 3 &= \left\lceil \frac{k-4}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + 3 \\ &= \left( \left\lceil \frac{k-4}{2} \right\rceil + 2 \right) + \left( \left\lfloor \frac{k-4}{4} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \left( \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right) + \left( \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \right) \\ &= s \end{aligned}$$

untuk  $k \geq 5$  maka, dipunyai  $K_{t \times 2} + K_{3 \times 2} = K_{s \times 2}$  di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$  untuk  $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$  dan  $j \geq 5$  ganjil.

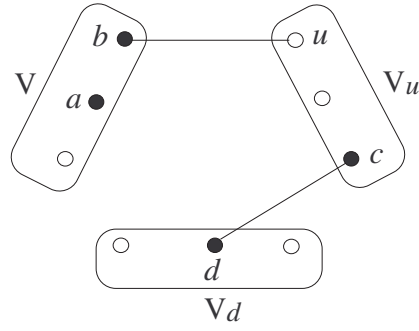
*Sukusus 3.2.*  $j \geq 4$  genap.

Pertama-tama akan ditunjukkan untuk  $j = 4$ , misalkan  $a_1$  dan  $b_1$  adalah titik-titik di himpunan partit  $V_1$  di  $F_1$ . Misalkan  $N_1$  adalah himpunan titik yang bertetangga  $a_1$  dan  $b_1$  di  $F_1$ . Perhatikan  $X_1 = V(F_1) \setminus (V_1 \cup N_1)$ . Karena  $|N_1| \leq 2$  maka  $|X_1| \geq 7$ . Jadi, terdapat himpunan partit  $V_2$  di  $F_1[X_1]$  sedemikian sehingga  $V_2$  memuat dua titik, sebut  $a_2$  dan  $b_2$ . Misalkan  $N_2$  adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan  $a_2$  dan  $b_2$  di  $F_1$ . Perhatikan  $X_2 = V(F_1[X_1]) \setminus (V_2 \cup N_2)$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $P_3$  maka  $|X_2| \geq 2$ . Akibatnya, terdapat paling sedikit dua titik di  $F_1[X_2]$ , sebut  $a_3$  dan  $b_3$ . Jadi,  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3$  dan  $b_3$  akan membentuk  $K_{3 \times 2}$  di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_4(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 3$ .

Asumsi benar untuk  $j = k - 3 \geq 4$  genap, yaitu  $m_{k-3}(P_3, K_{t \times 2}) \leq 3$  dimana  $t = \lceil \frac{k-3}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$ .

Akan ditunjukkan bahwa asumsi benar untuk  $j = k$  genap, yaitu  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$  dimana  $\lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor$ . Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah titik-titik di himpunan partit  $V$  dan misalkan  $N$  adalah himpunan titik-titik yang bertetangga ke  $a$  dan  $b$ . Misalkan bahwa  $u \in N$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $P_3$  maka terdapat satu titik  $c \in (V_u \setminus N)$  dan pilih titik  $d \in V(F_1) \setminus V$  yang mana bertetangga ke  $c$ . Jadi, semua titik ini  $a, b, c, d$  dan  $d$  akan membentuk  $H \cong K_{2 \times 2}$  di  $F_2$ .

Lebih lanjut, perhatikan sembarang faktorisasi dari  $V(F_1) \setminus (V \cup V_u \cup V_d)$ . Dengan asumsi induksi, karena  $F_1$  tidak memuat  $P_3$  maka  $F_2$  akan memuat  $K_{t \times 2}$  dimana  $t = \lceil \frac{k-3}{2} \rceil + \lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$ . Jelas bahwa, setiap titik di  $H$  akan tidak bertetangga ke sembarang



Gambar VI.3.  $K_{3 \times 3} \supset K_{2 \times 2}$  di  $F_2[V \cup V_u \cup V_d]$ .

titik  $V(F_1) \setminus (V \cup V_u \cup V_d)$ . Karena

$$\begin{aligned}
 t + 2 &= \left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k-3}{4} \right\rfloor + 2 \\
 &= \left( \left\lfloor \frac{k-3}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left( \left\lfloor \frac{k-3}{4} \right\rfloor + 1 \right) \\
 &= \left( \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \right) \\
 &= s
 \end{aligned}$$

untuk  $k \geq 4$ , maka, diperoleh  $K_{t \times 2} + K_{2 \times 2} = K_{s \times 2}$  di  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) \leq 3$  untuk  $j \geq 4$  genap.  $\square$

**Konjektur 1** Untuk sembarang bilangan asli  $j, s \geq 2$ ,  $m_j(P_3, K_{s \times 2}) = 4$  dimana  $\lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor < s \leq j$ .

### VI.3 Graf Lintasan versus $K_{s \times 2}$

Suatu graf  $G \cong K_{j \times t}$  dengan  $n$  titik dikatakan  $(G_1, G_2; n)$ -good graph jika  $G$  tidak memuat  $G_1$  dan  $\overline{G}$  tidak memuat  $G_2$ . Syafrizal [49] telah menentukan  $m_j(P_n, C_3)$  untuk  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ , dan  $m_2(P_n, C_4)$  untuk  $n \geq 4$ . kemudian, Syafrizal [50] telah membuktikan teorema berikut.

**Teorema VI.2** Untuk bilangan bulat  $j, s \geq 2$ ,

$$m_j(P_3, K_{s \times 2}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 2 \leq s \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \text{ dan } j \geq 4, \\ 2 & \text{untuk } s = \lceil \frac{j}{2} \rceil \text{ dan } j \text{ ganjil,} \\ 3 & \text{untuk } \lceil \frac{j}{2} \rceil < s \leq \lceil \frac{j}{2} \rceil + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor \text{ dan } j \geq 4. \end{cases}$$

Dalam bab ini, kita akan buktikan teorema berikut.

**Teorema VI.3** Untuk bilangan bulat  $n \geq 3$ ,

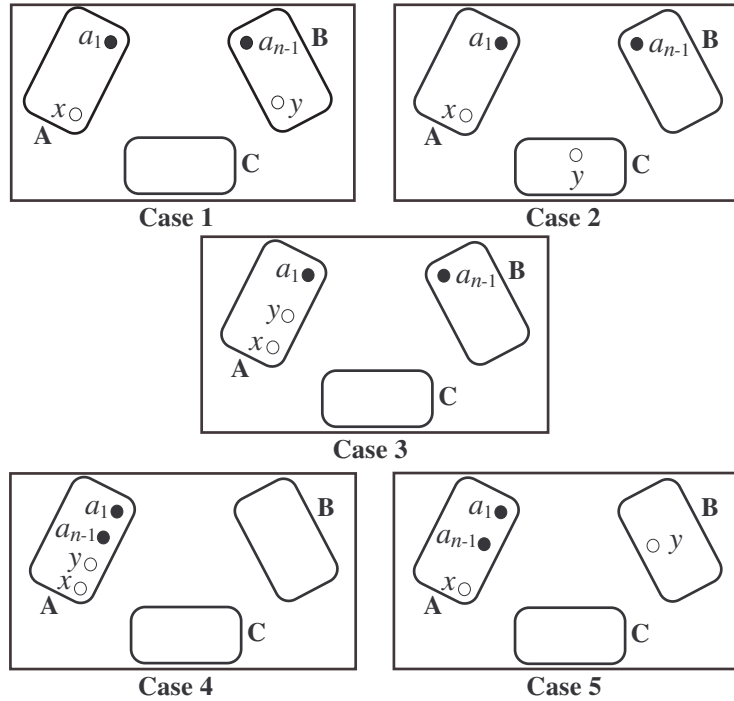


$$m_3(P_n, K_{2 \times 2}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } n = 3, \\ 3 & \text{untuk } 4 \leq n \leq 6, \\ \lceil \frac{n+1}{3} \rceil & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

*Bukti.*

Dari Teorema VI.2, akan diperoleh  $m_3(P_3, K_{2 \times 2}) = 2$ . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $4 \leq n \leq 6$ ,  $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq 3$ . Perhatikan  $G \cong K_{3 \times 2}$ . Misalkan  $G_1 \cong 2K_3$  dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $G$ . Jelas bahwa,  $G_1 \not\supseteq P_n$ . Karena  $G_2 \cong C_6$  maka  $G_2 \not\supseteq K_{2 \times 2}$ . Jadi,  $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq 3$ . Selanjutnya, untuk  $n \geq 7$ , misalkan  $t = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ . Akan dibuktikan bahwa  $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq t$ . Perhatikan  $H \cong K_{3 \times (t-1)}$ . Misalkan  $H_1 \cong K_{3 \times (t-1)}$ , dan misalkan  $H_2$  adalah komplemen dari  $H_1$  relatif terhadap  $H$ . Jelas bahwa,  $H_2 \not\supseteq K_{2 \times 2}$ . Karena  $3(t-1) < n$ , maka diperoleh  $H_1 \not\supseteq P_n$ . Oleh karena itu,  $m_3(P_n, K_{2 \times 2}) \geq t$  untuk  $n \geq 7$ .

Sekarang, akan ditunjukkan batas atas untuk  $m_3(P_n, K_{2 \times 2})$  dengan  $n \geq 4$ . Perhatikan  $F \cong K_{3 \times 3}$  untuk  $4 \leq n \leq 6$ , atau  $F \cong K_{3 \times t}$  untuk  $n \geq 7$ .



Gambar VI.4. Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari  $P_{n-1}$  untuk  $|X| \leq 1$ .

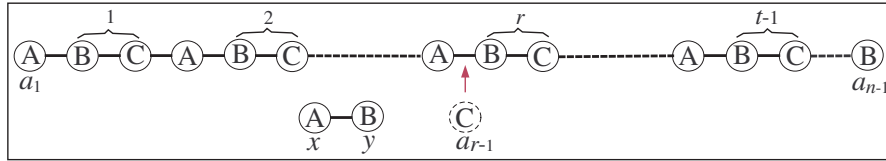
Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  dengan  $F_1 \not\supseteq P_n$ . Akan ditunjukkan bahwa  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ . Karena  $P_{s-1} \subset P_s$  untuk setiap bilangan asli  $s \geq 2$  mengakibatkan  $m_3(P_{s-1}, K_{2 \times 2}) \leq m_3(P_s, K_{2 \times 2})$ , maka akan ditunjukkan batas atas, asumsikan  $F_1 \supseteq P_{n-1}$ . Jika  $F_1 \supseteq C_{n-1}$  maka terdapat suatu  $a, b \in (V(F) \setminus V(C_{n-1}))$

sedemikian sehingga  $au, av, bu, bv \notin E(F_1)$  untuk suatu  $u, v \in (V(C_{n-1}) \setminus (V_a \cup V_b))$ . Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := aubva$ . Jadi, untuk selanjutnya  $F_1 \not\supseteq C_{n-1}$ . Misalkan  $P_{n-1} := a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ . Perhatikan  $X = V(F) \setminus (V_{a_1} \cup V_{a_{n-1}} \cup V(P_{n-1}))$ . Jika  $|X| \geq 2$  maka terdapat dua titik  $c$  dan  $d$  di  $X$  sedemikian  $ca_1, ca_{n-1}, da_1, da_{n-1} \notin E(F_1)$ . Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ca_1 da_{n-1} c$ .

Selanjut, perhatikan  $|X| \leq 1$ . Misalkan  $x, y \notin V(P_{n-1})$  dan misalkan  $A, B$ , dan  $C$  adalah himpunan partit dari  $F$ . Definisikan  $P_l := (A(i), B(j), C(k))$  adalah suatu *path* dengan  $l$  titik terdiri dari  $i$  titik di  $A$ ,  $j$  titik di  $B$ , dan  $k$  titik di  $C$ . Jelas bahwa,  $l = i + j + k$ . Perhatikan lima kemungkinan posisi titik-titik ujung dari  $P_{n-1}$  yaitu  $a_1, a_{n-1}, x$ , dan  $y$  di  $F_1$  (lihat Gambar VI.4).

*Kasus 1:*  $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B_{a_{n-1}}(t-1), C(t))$ .

Misalkan  $x \in A$  dan  $y \in B$ . If  $xy \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xy a_1 a_{n-1} x$ . Sekarang, asumsikan  $xy \in E(F_1)$ . Asumsikan bahwa, untuk setiap  $r \in (1, n-1)$ , tidak terdapat  $a_{r-1} \in C$  dan  $a_r \in B$  dengan  $a_{r-1}, a_r \in V(P_{n-1})$ . Jadi, terdapat  $t-1$  komposisi  $a_{r-1} \in B$  dan  $a_r \in C$ . Tetapi, karena  $|A| = |B| = |C| = t$ , terdapat  $a_i \in C$ ,  $i = r-1$ , dengan  $a_r \in B$ . Kasus ini kontradiksi dengan tidak terdapat  $a_{r-1} \in C$  dan  $a_r \in B$ . Jadi, harus ada  $r \in (1, n-1)$  sedemikian sehingga  $a_{r-1} \in C$  dan  $a_r \in B$  (lihat Gambar VI.5). Perhatikan dua subkasus berikut.



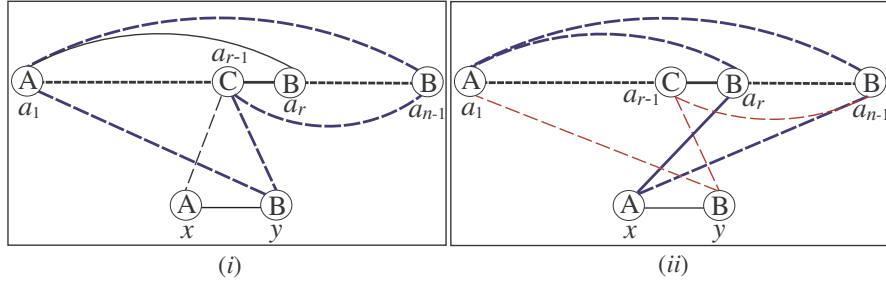
Gambar VI.5. Ilustrasi *path*  $P_{n-1}$  untuk Kasus 1.

*Subkasus 1.1.* Misalkan  $a_1 a_r \in E(F_1)$  or  $a_{n-1} a_{r-1} \in E(F_1)$ . Asumsikan  $a_1 a_r \in E(F_1)$ . Akibatnya,  $a_{r-1} a_{n-1} \notin E(F_1)$  (karena, jika  $a_{r-1} a_{n-1} \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq C_{n-1} := a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1} a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1$ ). Selanjutnya, jika  $ya_{r-1} \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_{n+1} := xy a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_r a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1}$ . Jadi, haruslah  $ya_{r-1} \notin E(F_1)$ . Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ya_{r-1} a_{n-1} a_1 y$  (lihat Gambar VI.6 (i)).

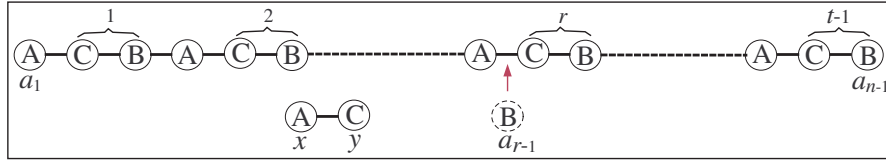
*Subkasus 1.2.* Misalkan  $a_1 a_r \notin E(F_1)$  dan  $a_{n-1} a_{r-1} \notin E(F_1)$ . Jika  $a_r x \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq a_r x a_{n-1} a_1 a_r$ . Sebaliknya, jika  $a_r x \in E(F_1)$  maka  $a_{r-1} y \notin E(F_1)$  (ini mengakibatkan  $F_1 \supseteq P_{n+1} := a_1 \dots a_{r-1} y x a_r \dots a_{n-1}$ ). Jadi, haruslah  $a_{r-1} y \notin E(F_1)$ . Ini mengakibatkan,  $F_2 \supseteq a_{r-1} y a_1 a_{n-1} a_{r-1}$  (lihat Gambar VI.6 (ii)).

*Kasus 2:*  $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B_{a_{n-1}}(t), C(t-1))$ .

Misalkan  $x \in A$  dan  $y \in C$ . Jika  $xy \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xy a_1 a_{n-1} x$ . Sebaliknya, jika  $xy \in E(F_1)$  maka dengan metode pada Kasus 1, terdapat  $r \in (1, n-1)$  sedemikian sehingga  $a_{r-1} \in B$  dan  $a_r \in C$  (lihat Gambar VI.7). Perhatikan dua subkasus berikut.

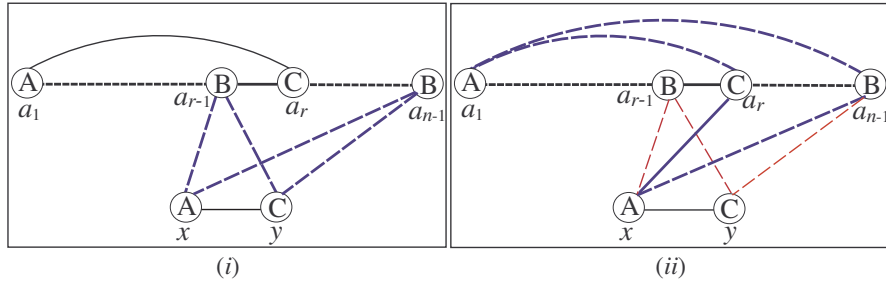


Gambar VI.6. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 1.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 1.2.



Gambar VI.7. Ilustrasi  $P_{n-1}$  untuk Kasus 2.

*Subkasus 2.1.* Jika  $a_1 a_r \in E(F_1)$  maka  $a_{r-1} x, a_{r-1} y \notin E(F_1)$  (karena, Jika  $a_{r-1} x \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_{n+1} := y x a_{r-1} a_{r-2} a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$ ). Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$  (lihat Gambar VI.8 (i)).

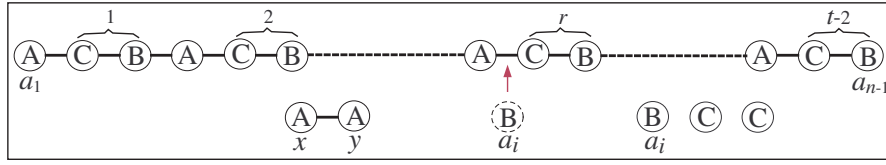


Gambar VI.8. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 2.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 2.2.

*Subkasus 2.2.* Jika  $a_1 a_r \notin E(F_1)$  maka  $x a_r \in E(F_1)$  (karena, jika  $x a_r \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_1 a_r x a_{n-1} a_1$ ) (lihat Gambar VI.8 (ii)). Karena  $x a_r \in E(F_1)$ , maka diperoleh  $a_{r-1} y \notin E(F_1)$  (karena, jika  $a_{r-1} y \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_{n+1} := a_1 a_2 \dots a_{r-1} y x a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$ ) dan  $a_{r-1} x \notin E(F_1)$  (karena, jika  $a_{r-1} x \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_n := a_1 a_2 \dots a_{r-1} x a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$ ). Ini mengakibatkan,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$ .

*Kasus 3:*  $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-2), B(t), C(t))$  dengan  $a_{n-1} \notin A$ .

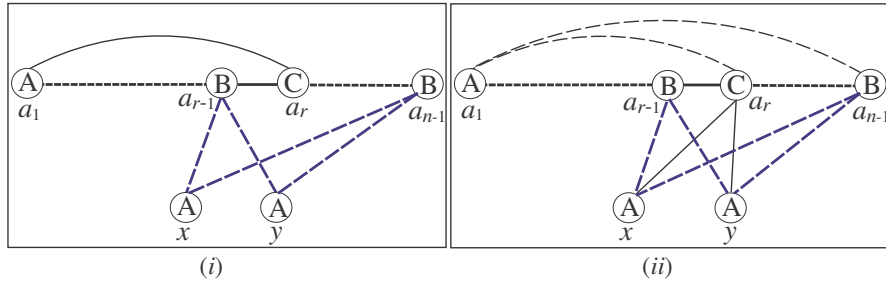
Misalkan  $a_{n-1} \in B$ , maka perhatikan dua kemungkinan berikut. Dengan metoda



Gambar VI.9. Ilustrasi dari  $path P_{n-1}$  untuk Kasus 3.

dari Kasus 1, terdapat  $r \in (2, n - 2)$  sedemikian sehingga  $a_{r-1} \in B$  dan  $a_r \in C$  (lihat Gambar VI.9). Perhatikan dua subkasus berikut.

*Subkasus 3.1.* Jika  $a_1 a_r \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r-1} \dots a_1 a_r \dots a_{n-1}$ . Akibatnya,  $a_{r-1}$  dan  $a_{n-1}$  tidak bertetangga  $x$  dan  $y$  (lihat Gambar V.10 (i)). Jadi,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$ .



Gambar VI.10. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 3.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 3.2.

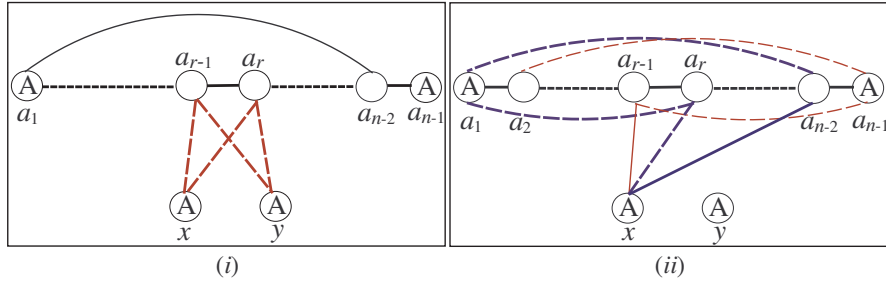
*Subkasus 3.2.* Jika  $a_1 a_r \notin E(F_1)$ , maka  $x a_r \in E(F_1)$  (karena, jika  $x a_r \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_r a_1 a_{n-1} x$ ). Selanjutnya, jika  $a_{r-1} y \in E(F_1)$  maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_1 \dots a_r y a_{r-1} \dots a_{n-1}$ . Jadi, haruslah  $a_{r-1} y \notin E(F_1)$  (lihat Gambar V.10 (ii)). Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := x a_{r-1} y a_{n-1} x$ .

*Kasus 4:*  $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-2), B(t), C(t))$  dengan  $a_{n-1} \in A$ .

Misalkan  $a_{r-1}, a_r \notin A$  dengan  $r \in (1, n - 2)$ . Perhatikan dua subkasus.

*Subkasus 4.1.* Misalkan  $a_1 a_{n-2} \in E(F_1)$  or  $a_2 a_{n-1} \in E(F_1)$ . Asumsi  $a_1 a_{n-2} \in E(F_1)$ , maka  $a_{r-1} z, a_r z \notin E(F_1)$  dengan  $z \in \{x, y\}$  (karena, jika  $a_{r-1} z \in E(F_1)$  atau  $a_r z \in E(F_1)$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := z a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_{n-2} a_{n-3} \dots a_r$  atau  $F_1 \supseteq P_{n-1} := z a_r a_{r+1} \dots a_{n-2} a_1 a_2 \dots a_{r-1}$ . Karena  $a_{r-1}, a_r \notin A$  dan  $x, y, a_{n-1} \in A$ , dari Kasus 3,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ ). Akibatnya,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_{r-1} x a_r y a_{r-1}$  (lihat Gambar VI.11 (i)).

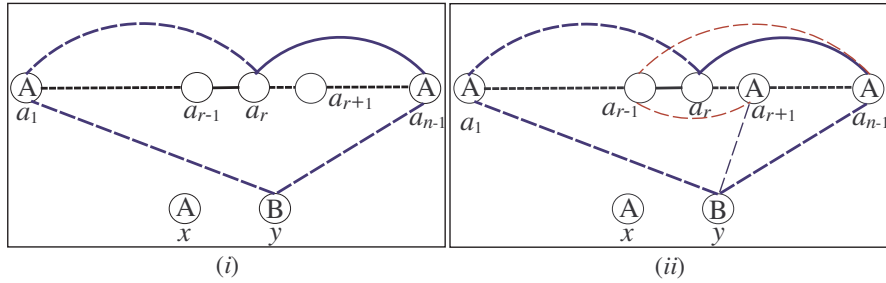
*Subkasus 4.2.* Misalkan  $a_1 a_{n-2} \notin E(F_1)$  dan  $a_2 a_{n-1} \notin E(F_1)$ , lihat Gambar VI.11 (ii). Karena  $F_1 \not\supseteq P_n$ , maka haruslah  $a_{r-1} x \notin E(F_1)$  atau  $a_r x \notin E(F_1)$ , dan  $a_{r-1} y \notin E(F_1)$  atau  $a_r y \notin E(F_1)$ . Jika  $a_{r-1} x, a_r x, a_{r-1} y, a_r y \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_{r-1} x a_r y a_{r-1}$ . Sekarang, asumsikan  $a_{r-1} x \in E(F_1)$  maka  $x a_r \notin E(F_1)$ . Akibatnya,  $x a_{n-2} \in E(F_1)$  (karena, jika  $x a_{n-2} \notin E(F_1)$ , maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := a_r x a_{n-2} a_1 a_r$ ).



Gambar VI.11. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 4.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 4.2.

Sebaliknya, jika  $xa_{n-2} \in E(F_1)$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_r a_{r+1} \dots a_{n-2} x a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1$ . Karena  $a_r \notin A$  dan  $y, a_1, a_{n-1} \in A$ , dari Kasus 3,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$  (lihat Gambar. VI.10 (ii)).

*Kasus 5:*  $P_{n-1} := (A_{a_1}(t-1), B(t), C(t))$  dengan  $a_{n-1} \in A$ . Misalkan  $x \in A$  dan  $y \in B$ , dan perhatikan  $a_{r-1}, a_r \notin A$  dengan  $r \in (1, n-2)$ . Jika  $a_1 a_r \in E(F_1)$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_r a_{r+1} \dots a_{n-1}$ . Akibatnya, jika  $a_{r-1} \in B$ , maka dengan Kasus 1,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$  (karena  $x, a_1 \in A$  dan  $a_{r-1}, y \in B$ ) atau, jika  $a_{r-1} \in C$  maka dengan Kasus 2,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$  (karena  $x, a_1 \in A$ ,  $y \in B$ , dan  $a_{r-1} \in C$ ). Jadi, haruslah  $a_1 a_r \notin E(F_1)$ . Dengan argumen ini, juga diperoleh  $a_{r-1} a_{n-1} \notin E(F_1)$ . Selanjutnya, jika  $a_r a_{n-1} \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ya_1 a_r a_{n-1} y$ . Jadi, haruslah  $a_r a_{n-1} \in E(F_1)$ . Perhatikan dua subkasus berikut..



Gambar VI.12. (i) Ilustrasi untuk Subkasus 5.1. (ii) Ilustrasi untuk Subkasus 5.2.

*Subkasus 5.1.* Jika  $a_{r+1} \notin A$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_{r+1} a_{r+2} \dots a_r a_{r-1} \dots a_1$ . Akibatnya, dengan argumen yang sama,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$  (lihat Gambar V.12 (i)).

*Subkasus 5.2.* Jika  $a_{r+1} \in A$ , maka  $a_{r-1} a_{r+1} \notin E(F_1)$  (karena, jika  $a_{r-1} a_{r+1} \in E(F_1)$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1} a_r$ . Dengan argumen yang sama,  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2}$ ). Selanjutnya, jika  $ya_{r+1} \in E(F_1)$ , maka  $F_1 \supseteq P_{n-1} := ya_{r+1} a_{r+2} \dots a_{n-1} a_r a_{r-1} \dots a_1$ . Akibatnya, terdapat  $a_i, a_j \in (V(F) \setminus (V_y \cup V_{a_1}))$  sedemikian sehingga  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := xa_i ya_j x$ ,  $i, j \in (2, n-2)$ . Sebaliknya, jika  $ya_{r+1} \notin E(F_1)$  maka  $F_2 \supseteq K_{2 \times 2} := ya_{r+1} a_{r-1} a_{n-1} y$  (lihat Gambar VI.12 (ii)).  $\square$

# Bab VII Batas Bawah Bilangan Ramsey

## Multipartit Ukuran $m_j(P_n, K_{j \times b})$

### VII.1 Survey Literatur

Hattingh dan Henning [31] menemukan nilai eksak dari bilangan Ramsey bipartit  $b(P_m, K_{1,n})$ . Untuk kasus  $k = 2$ , dengan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf multipartit lengkap seimbang, bilangan-bilangan asli dapat ditemukan pada hasil yang diperoleh Burger dan van Vuuren [4]. Gyárfás *dkk.* [26] mengkaji bilangan ramsey multipartit untuk *cycles* ganjil. Syafrizal *dkk.* [47] menemukan nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$ , dimana  $G$  adalah *wheel, star, fan*, atau *windmill* untuk  $j \geq 3$  dan  $s = 2, 3$ . Lebih lanjut, Syafrizal [49] menentukan  $m_j(C_3, P_n)$  untuk  $j \geq 3$  dan  $n \geq 2$ , dan  $m_2(C_4, P_n)$  untuk  $n \geq 4$ . Kemudian, Syafrizal [50] memperoleh  $m_j(P_3, K_{s \times 2})$  untuk bilangan asli  $j, s \geq 2$ . Tujuan pada bab ini adalah untuk mendapatkan batas bawah untuk bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_n, K_{j \times b})$ .

### VII.2 Graf Lintasan versus Graf $K_{j \times b}$

Akan dibuktikan teorema berikut.

**Teorema VII.1** Untuk bilangan asli  $j, n \geq 3$  dan  $b \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq \begin{cases} (n-1)b, & \text{jika } 3 \leq n \leq j, \\ jb, & \text{jika } j < n < jb, \\ (j-1)\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b, & \text{jika } n \geq jb. \end{cases}$$

*Bukti.*

Perhatikan tiga kasus berikut.

*Kasus 1.* Untuk  $3 \leq n \leq j$ .

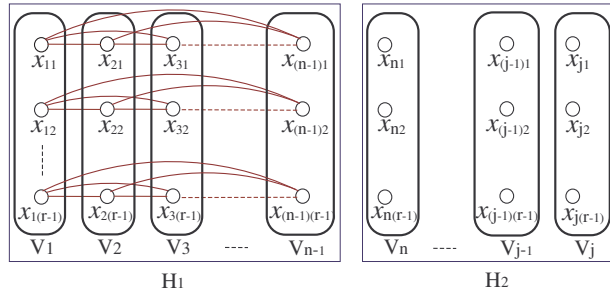
Misalkan  $r = (n-1)b$ . Perhatikan  $K_{j \times (r-1)} = G_1 \oplus G_2$

dimana  $G_1 \cong H_1 \cup H_2$  dengan  $H_1 \cong (r-1)K_{n-1}$  dan  $H_2 \cong (r-1)(j-n+1)K_1$  (lihat Gambar VII.1).

Perhatikan  $G_1[H_1]$ . Karena  $|V(K_{n-1})| < n$ , jelas bahwa  $G_1 \not\supseteq P_n$ . Sekarang, perhatikan  $G_2[H_1]$ . Jadi,  $G_2[H_1] \not\supseteq K_{(n-1) \times b}$  karena  $\frac{r-1}{n-1} < b$ . Akibatnya,  $G_2 \not\supseteq K_{j \times b}$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq (n-1)b$ .

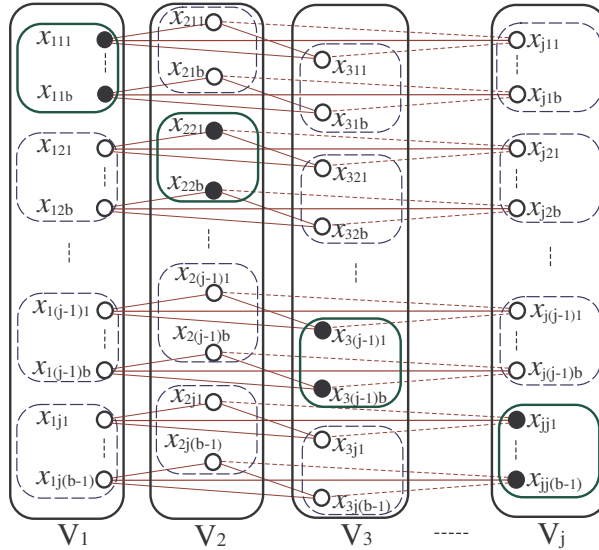
*Kasus 2.* For  $j < n < jb$ .

Perhatikan  $K_{j \times (jb-1)} = G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1 \cong (jb-1)K_j$  (lihat Gambar VII.2).



Gambar VII.1.  $m_j(P_n, K_{j \times b}) > r - 1$ .

Karena  $j < n$ , jelas bahwa  $G_1 \not\cong P_n$ . Untuk setiap  $x \in V_i$ ,  $1 \leq i \leq j - 1$ ,  $|N(x)| = j - 1$  di  $G_1$ . Jadi, untuk setiap  $b$  titik di  $V_i$  mengakibatkan  $|N(V_i)| = (j - 1)b$  in  $G_1$ .



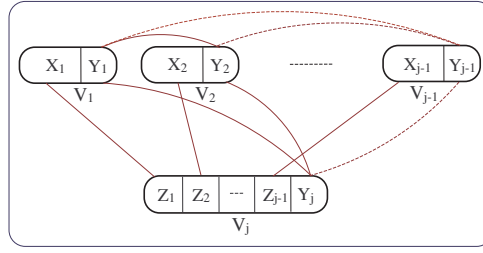
Gambar VII.2.  $m_j(P_n, K_{j \times b}) > jb - 1$ .

Akibatnya,  $|V(G_1) \setminus (\cup_{i=1}^{j-1} N(V_i))| = b - 1$ . Jadi,  $G_2 \not\cong K_{j \times b}$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq jb$ .

*Kasus 3.* Untuk  $n \geq jb$ .

Misalkan  $t = (j - 1) \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b$ . Perhatikan  $G \cong K_{j \times (t-1)}$  (lihat Gambar VII.3). Misalkan  $V_1 = X_1 \cup Y_1$ ,  $V_2 = X_2 \cup Y_2$ ,  $\dots$ ,  $V_{j-1} = X_{j-1} \cup Y_{j-1}$ , dan  $V_j = Z_1 \cup \dots \cup Z_{j-1} \cup Y_j$  adalah himpunan partit dari  $G$  dengan  $|X_i| = (j - 1) \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ ,  $|Y_j| = |Y_i| = b - 1$ , dan  $|Z_i| = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$  untuk setiap  $i \in \{1, \dots, j - 1\}$ .

Misalkan  $G_1 \cong (j - 1)K_{|X_i|, |Z_i|} \cup K_{j \times (b-1)}$  adalah subgraf dari  $G$  dengan  $K_{j \times (b-1)} = G_1[Y_j \cup_{i=1}^{j-1} Y_i]$ . Karena  $j(b - 1) < n$  dan  $2|Z_i| + 1 < n$  untuk setiap  $i$ , jelas bahwa



Gambar VII.3.  $m_j(P_n, K_{j \times b}) > t - 1$ .

$G_1 \not\supseteq P_n$ . Selanjutnya, misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $G$ . Karena  $K_{|X_i|, |Z_i|}$  adalah graf bipartit lengkap dan  $|Y_j| = |Y_i| = b - 1 < b$ , jelas bahwa  $G_2 \not\supseteq K_{j \times b}$ . Oleh karena itu,  $m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq t$ .  $\square$

Khususnya untuk  $j = 3$ , bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_3(P_n, K_{3 \times 2})$  dengan  $3 \leq n \leq 5$ , akan diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema VII.2**

$$m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = \begin{cases} 4, & \text{if } n = 3, \\ 6, & \text{if } n = 4 \text{ atau } 5. \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan  $A, B$ , dan  $C$  adalah himpunan-himpunan partit dari  $F \cong K_{3 \times 4}$  untuk  $n = 3$  (atau  $F \cong K_{3 \times 6}$  untuk  $n = 4$  atau  $5$ ). Kita perhatikan dua kasus berikut.

*Kasus 1.* Untuk  $n = 3$ .

Dari Teorema VI.1, diperoleh  $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \geq 4$ .

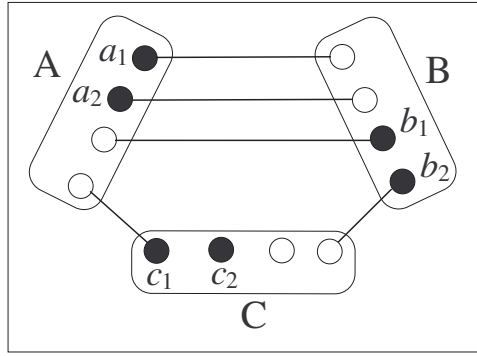
Untuk menunjukkan  $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 4$ , perhatikan  $F \cong K_{3 \times 4}$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $P_3$ . Akan ditunjukkan bahwa  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 2}$ . Karena  $F_1$  tidak mempunyai  $P_3$ , maka  $F_1$  harus memuat *matching* dengan paling banyak enam sisi. Asumsikan bahwa jumlah sisi *matching* yang terbanyak di  $F_1$  adalah yang terletak di himpunan  $A$  dan  $B$ . Sekarang, ambil sembarang dua titik di  $A$ , sebut  $a_1, a_2$ , mempunyai tetangga di  $B$ . Ambil dua titi di  $B$ , sebut  $b_1$  dan  $b_2$ , yang mana tidak bertetangga ke  $a_1$  atau  $a_2$ . Akhirnya, ambil dua titik di  $C$ , sebut  $c_1$  dan  $c_2$  (selalu mungkin), yang mana tidak bertetangga ke  $a_1, a_2, b_1$  dan  $b_2$ . Oleh karena itu, himpunan titik-titik ini  $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$  akan menginduksi suatu  $K_{3 \times 2}$  di  $F_2$ , lihat Gambar VII.4. Oleh karena itu,  $m_3(P_3, K_{3 \times 2}) \leq 4$ .

*Kasus 2.* Untuk  $4 \leq n \leq 5$ .

Dari Teorema VI.1, diperoleh  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \geq 6$ .

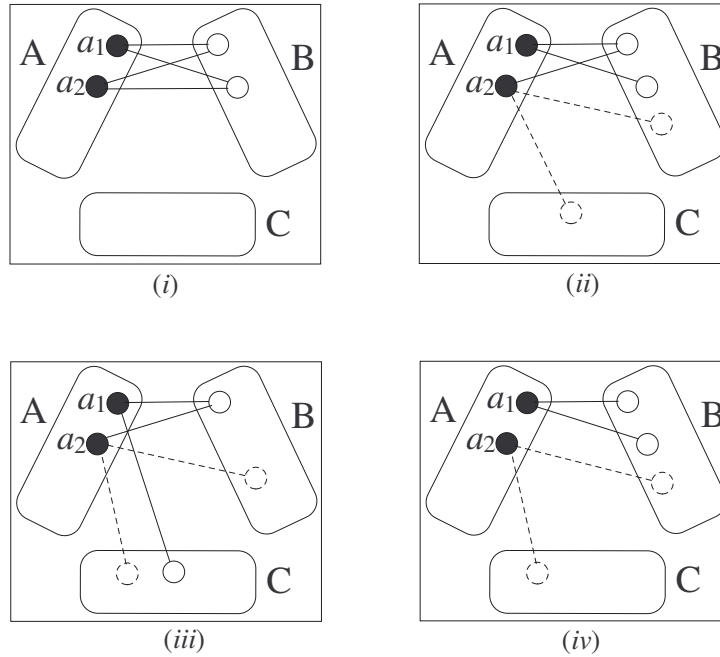
Untuk menunjukkan bahwa  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$ , perhatikan  $F \cong K_{3 \times 6}$ . Misalkan





Gambar VII.4. Ilustrasi untuk Kasus 1.  $n = 3$ .

$F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  dengan  $F_1 \not\subseteq P_n$ . Akan tunjukkan bahwa  $F_2 \supseteq K_{3 \times 2}$ . Misalkan  $a_1, a_2 \in A$  dengan  $d(a_1) = \delta(F_1)$  dan  $d(a_2) = \delta(F_1[A] \setminus \{a_1\})$ . Jadi,  $\delta(F_1) \leq 2$  karena  $F_1 \not\subseteq P_n$ . Jadi,  $d(a_1) \leq 2$  dan  $d(a_2) \leq 2$ , lihat Gambar



Gambar VII.5. Illustration for Case 2.  $n = 4$  or  $5$ .

VII.5. Misalkan  $N_1$  adalah himpunan titik yang bertetangga ke  $a_1$  dan  $a_2$  di  $F_1$ . Perhatikan  $X = V(F_1) \setminus (A \cup N_1)$ . Jadi,  $|X| \geq 7$ . Karena jumlah titik-titik di setiap himpunan partit adalah lima titik, jelas bahwa terdapat paling sedikit dua titik, sebut titik  $b_1$  dan titik  $b_2$  di  $B$ . Selanjutnya, misalkan  $N_2$  adalah himpunan titik yang bertetangga ke  $b_1$  dan  $b_2$  di  $F_1[X]$ . Akibatnya, terdapat paling sedikit dua titik, sebut titik  $c_1$  dan titik  $c_2$ , di  $(C \setminus N_2)$ . Semua titik ini yaitu  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$ , dan  $c_2$  akan membentuk  $K_{3 \times 2}$  in  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$ .  $\square$

## Bab VIII Bilangan Ramsey Bipartit Ukuran

$$m_2(P_n, T_s)$$

### VIII.1 Survey Literatur

Dalam [31], Hattingh dan Henning mengkaji teori Ramsey bipartit. Diberikan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$ , bilangan Ramsey bipartit ukuran  $m_2(G_1, G_2)$  adalah bilangan asli terkecil  $t$  sedemikian sehingga untuk sembarang pewarnaan dengan warna merah dan biru pada semua sisi dari  $K_{2 \times t}$  mengakibatkan  $G_1$  merah atau  $G_2$  biru sebagai subgraf. Ekuivalen dengan, untuk dua graf  $G_1$  dan  $G_2$ , bilangan Ramsey bipartit ukuran  $m_2(G_1, G_2)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $t$  sedemikian sehingga sebarang faktorisasi dari graf  $K_{2 \times t} := F_1 \oplus F_2$  memenuhi kondisi salah satu dari berikut, yaitu:  $F_1$  memuat  $G_1$  sebagai subgraf atau  $F_2$  memuat  $G_2$  sebagai subgraf.

Masih sedikit hasil yang telah ditemukan untuk bilangan Ramsey bipartit ukuran. Untuk  $j = 2$ , Gyárfás dan Lehel [27], serta Faudree dan Schelp [20] telah memperoleh nilai eksak  $m_2(P_s, P_t)$ . Hattingh dan Henning [32] menentukan nilai eksak dari  $m_2(P_n, K_{1,s})$ .

Untuk semua  $j \geq 1$ , Day *et al.* [13] dan, Burger dan van Vuuren [4] juga memperoleh nilai eksak dari  $m_j(K_{2 \times 2}, H)$  dimana  $H \cong K_{2 \times 2}$  atau  $K_{3 \times 1}$ . Selanjutnya, Syafrizal *dkk.* [46, 47, 48] memperoleh nilai eksak dari  $m_j(P_s, G)$  dimana  $s = 2, 3$  dan  $G$  adalah suatu *path*  $P_n$ , suatu *cycle*  $C_n$ , suatu *wheel*  $W_n$ , suatu *star*  $S_n$  atau suatu *fan*  $F_n$ .

Syafrizal dan Baskoro [52] mengkaji bilangan Ramsey untuk graf multipartit seimbang, dan menentukan batas bawah untuk bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_n, K_{j \times b})$ .

Untuk membuktikan hasil utama pada bab ini, digunakan lema berikut.

**Lema VIII.1** [48] *Misalkan  $G \cong K_{2 \times n}$  adalah graf bipartit dengan  $n \geq 2$ . Misalkan  $G = G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1$  terdiri dari paling sedikit tiga komponen. Jika  $G_1$  memuat komponen terbesar  $H$  dimana  $|H| \leq |G \setminus H|$  maka  $G_2$  memuat suatu path dengan  $2n$  titik.*

### VIII.2 Graf Lintasan versus Graf Pohon

Tujuan kajian pada bab ini adalah menentukan bilangan Ramsey bipartit untuk kombinasi dari sembarang *path*  $P_n$  dan *tree*  $T_s$  untuk bilangan-bilangan asli  $n, s \geq 2$ .

**Teorema VIII.1** *Untuk bilangan-bilangan asli  $n, s \geq 2$ ,*

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil), \\ s & \text{untuk } (\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s) \text{ atau } (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil}. \end{cases}$$

*Bukti.* Kita perhatikan tujuh kemungkinan.

*Kasus 1.*

Hatting dan Henning [32] menemukan nilai eksak bipartit ukuran  $m_2(P_n, T_4)$  dengan  $n \geq 10$ .

*Kasus 2.* ( $n \geq 3, s \leq 3$ ) atau ( $n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ).

Untuk  $n \geq 3$  dan  $s \leq 3$ , diperoleh nilai dari  $m_2(P_n, T_s)$  telah ditemukan oleh Syafrizal dkk. di [46].

Selanjutnya, untuk  $n \geq 9$  dan  $4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , perhatikan  $F_2 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)}$ . Jika semua sisi dari  $F_2$  diberi warna merah, maka  $F_2$  memuat salah satu dari berikut yaitu *path*  $P_n$  merah atau *tree*  $T_s$  biru, karena  $2(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) < n$ . Jadi  $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Perhatikan bahwa  $F \cong K_{2 \times \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ . Misalkan  $F = F_r \oplus F_b$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\supseteq T_s$ . Jadi,  $F_r$  terdiri dari paling sedikit tiga komponen. Selanjutnya, komponen terbesar merah  $H$  yaitu  $F_r$  yang memenuhi  $|H| \leq |F \setminus H|$ . Dari Lema 1,  $F$  memuat *path* yang melalui semua titik di  $F_b$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

*Kasus 3.* ( $\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s$ ) atau ( $s = n$  ganjil).

Perhatikan  $F_3 \cong K_{2 \times (s-1)}$ . Misalkan  $F_3 = G_3 \oplus H_3$  dengan  $G_3 \cong 2K_{2 \times \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor}$  untuk  $n \geq 3$ . Karena  $2\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor < s$  maka  $G_3 \not\supseteq T_s$  dan  $H_3 \not\supseteq P_n$ . Ini mengakibatkan,  $m_2(P_n, T_s) \geq s$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq s$ . Perhatikan bahwa  $F \cong K_{2 \times s}$ . Misalkan  $F = F_r \oplus F_b$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\supseteq T_s$ . Jadi, komponen terbesar di  $F_r$  berorder  $s - 1$ . Jadi,  $F_r$  terdiri dari paling sedikit tiga komponen, dan dengan Lema 1, diperoleh *path* biru melalui semua titik di  $F_b$ . Karena  $|F| = 2s > n$ , maka diperoleh *path* biru  $P_n$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq s$ .

Untuk Kasus 4, Kasus 5, Kasus 6, dan Kasus 7, jika  $F$  terdiri dari paling sedikit tiga komponen merah dengan komponen merah terbesar  $R$  memenuhi  $|R| \leq |F \setminus R|$ , maka dengan Lema IX.1, dipunyai *path*  $P_n$ . Jadi, cukup perhatikan bahwa  $F_r$  terdiri dari hanya dua komponen merah. Karena  $F_r$  hanya terdiri dari dua komponen merah, maka boleh diasumsikan bahwa  $V(F_r) = R_1 \cup R_2$  dengan  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ .

*Kasus 4.*  $s = n$  genap.

Perhatikan  $F_4 \cong K_{2 \times (s-2)}$ . Misalkan  $F_4 = G_4 \oplus H_4$  dengan  $G_4 \cong 2K_{2 \times \frac{s-2}{2}}$ . Jadi  $G_4 \not\cong T_s$  dan  $H_4 \not\cong P_n$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \geq s - 1$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq s - 1$ . Perhatikan  $F \cong K_{2 \times (s-1)}$ . Misalkan  $F = F_r \oplus F_b$  sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\cong T_s$ . Jelas bahwa,  $|F_r| = |F_b| = s - 1$ . Misalkan  $x_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$  dan  $x_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$ . Karena  $x = \min\{x_1, x_2\}$  dan  $x \geq 2\lceil \frac{s-1}{2} \rceil = s$  maka dapat dikonstruksi suatu *path* biru dengan  $2x$  titik. Jadi,  $F$  memuat *path* biru dengan  $s$  titik. Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq s - 1$ .

*Kasus 5.*  $s = 2n$ .

Misalkan  $t = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ . Perhatikan  $F_5 \cong K_{2 \times (t-1)}$ . Misalkan  $F_5 = G_5 \oplus H_5$  dengan  $G_5 \cong K_{2 \times (n-1)} \cup K_{2 \times (t-n)}$ . Jadi  $G_5 \not\cong T_s$  dan  $H_5 \not\cong P_n$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \geq t$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq t$ . Perhatikan  $F \cong K_{2 \times t}$ . Misalkan bahwa  $F = F_r \oplus F_b$  sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\cong T_s$ . Misalkan bahwa  $y_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$  dan  $y_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$ . Karena  $y = \min\{y_1, y_2\}$  and  $y_1 \neq y_2$  then we can construct a blue path on  $2y + 1$  vertices. Since  $|F_r| \leq s - 1$  then  $y \geq t - (n - 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Jadi,  $F$  memuat *path*  $P_n$  blue dengan paling sedikit  $n$  titik. Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq t$ .

*Kasus 6.*  $n < s$ ,  $n$  genap.

Perhatikan  $F_6 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 2)}$ . Misalkan  $F_6 = G_6 \oplus H_6$  dengan  $G_6 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1)} \cup K_{2 \times (\frac{n}{2} - 1)}$ . Jadi,  $F_6$  tidak memuat *tree*  $T_s$  merah maupun *path*  $P_n$  biru. Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$ . Perhatikan bahwa  $F \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1)}$ . Misalkan  $F = F_r \oplus F_b$  sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\cong T_s$ . Misalkan  $z_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$  dan  $z_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$ . Karena  $z = \min\{z_1, z_2\}$  dan  $z_1 \neq z_2$ , maka dapat dikonstruksi suatu *path* biru dengan  $2z + 1$  titik. Karena  $|F_r| \leq s - 1$  maka  $z \geq \frac{n}{2}$ . Jadi,  $F$  *path* biru  $P_n$  dengan paling sedikit  $n$  titik. Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \frac{n}{2} - 1$ .

*Kasus 7.*  $n < s$ ,  $n$  ganjil.

Perhatikan bahwa  $F_7 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 3)}$ . Misalkan  $F_7 = G_7 \oplus H_7$  with  $G_7 \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1)} \cup K_{2 \times (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2)}$ . Jelas bahwa,  $F_7$  tidak memuat *tree* merah  $T_s$  maupun  $P_n$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ .

Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ . Consider  $F \cong K_{2 \times (\lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2)}$ . Misalkan  $F = F_r \oplus F_b$  adalah sebarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_r \not\cong T_s$ .  $w_1 = |V_1 \cap R_1| \geq |V_1 \cap R_2|$  dan  $w_2 = |V_2 \cap R_2| \geq |V_2 \cap R_1|$ . Karena

$w = \min\{w_1, w_2\}$  dan  $w_1 \neq w_2$ , maka dapat dikonstruksi *path* biru  $P_n$  dengan  $n = 2w + 1$  titik. Karena  $|F_r| \leq s - 1$  maka  $w \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ . Jadi,  $F$  *path* biru  $P_n$  dengan paling sedikit  $n$  titik. Oleh karena itu,  $m_2(P_n, T_s) \leq \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ .  $\square$

# Bab IX Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_2(P_4, K_{1,n})$

## IX.1 Survey Literatur

Eksistensi dari semua bilangan  $m_j(G_1, G_2, \dots, G_k)$  untuk  $j = 2$  dijamin oleh of Erdős dan Rado [15], dan untuk  $G_1, G_2$  graf multipartit seimbang lengkap dan  $k = 2$  dijamin oleh Burger dan van Vuuren [4]. Nilai eksak bilangan Ramsey bipartit  $b(P_s, P_t) = m_2(P_s, P_t)$  dari dua *path* diperoleh dari kasus khusus yang ditemukan oleh Gyárfás dan Lehel [27], dan Faudree dan Schelp [20]. Selanjutnya, Hattingh dan Henning [32] menentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey bipartit  $b(P_m, K_{1,n})$ .

Syafrizal Sy [53] telah memperoleh bilangan Ramsey bipartit untuk kombinasi dari sembarang *path*  $P_n$  dan *tree*  $T_s$  untuk bilangan bulat positif  $n, s \geq 2$ .

**Teorema IX.1** Untuk bilangan bulat  $n, s \geq 2$ ,

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, 4 < s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil), \\ s & \text{untuk } (\lceil \frac{n}{2} \rceil < s < n < 2s) \text{ atau } (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil}. \end{cases}$$

## IX.2 Graf Lintasan versus Graf Bintang

Dalam tulisan ini, akan ditentukan nilai eksak dari bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_s, K_{1,n})$  untuk kombinasi *path* versus *star* dengan  $n \geq 2$ . Akan dibuktikan teorema berikut.

**Teorema IX.2** Jika  $n \geq 3$  maka  $m_2(P_4, K_{1,n}) = n + 1$ .

*Bukti.*

Perhatikan faktorisasi berikut  $K_{2 \times n} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1$  adalah suatu *matching* lengkap dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$  relatif terhadap  $K_{2 \times n}$ . Jelas bahwa,  $F_1 \not\supseteq P_4$  dan  $F_2 \not\supseteq K_{1,n}$ . Jadi,  $m_2(P_4, K_{1,n}) \geq n + 1$ .

Sekarang, misalkan  $K_{2 \times (n+1)} = F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi  $K_{2 \times (n+1)}$  dan misalkan bahwa  $F_2 \not\supseteq K_{1,n}$ . Jadi,  $\Delta(F_2) \leq n - 1$ , dan jadi  $\delta(F_1) \geq n + 1 - (n - 1) = 2$ . Karena paling sedikit derajat terkecil adalah 2 di  $F_1$  maka terdapat dua titik, sebut  $x$  dan  $y$ , dari himpunan partit yang sama sedemikian sehingga  $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$  di  $F_1$ . Ini mengakibatkan bahwa  $P_4 \subset F_1$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_4, K_{1,n}) \leq n + 1$ .  $\square$

**Teorema IX.3** Jika  $n \geq 2$  maka  $m_3(P_s, K_{1,n}) = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$  for  $s = 3, 4, 5$ . Selain itu, Jika  $n \neq 8 + 10k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , maka  $m_3(P_6, K_{1,n}) = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ .

*Bukti.*

Misalkan  $t = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ . Perhatikan suatu faktorisasi dari  $K_{3 \times (t-1)} = F_1 \oplus F_2$  dimana  $F_1$  adalah suatu graf terdiri dari  $(t-1)$  titik  $C_3$  yang saling lepas dan  $F_2$  adalah komplemen dari  $F_1$  relatif terhadap  $K_{3 \times (t-1)}$ . Maka,  $F_1 \not\supseteq P_4$  dan  $F_2 \not\supseteq K_{1,n}$ . Jadi,  $m_3(P_4, K_{1,n}) \geq t$ .

Sekarang, misalkan  $K_{3 \times (n+1)} = F_1 \oplus F_2$  adalah suatu faktorisasi dari  $K_{3 \times t}$  dan misalkan bahwa  $F_2 \not\supseteq K_{1,n}$ . Jadi,  $\Delta(F_2) \leq n-1$ , dan jadi  $\delta(F_1) \geq 2t - (n-1)$ . Jika  $n$  genap, maka  $\delta(F_1) \geq 3$  dan yang lainnya  $\delta(F_1) \geq 4$ .

Misalkan  $n$  adalah genap. Maka derajat minimum dari  $F_1$  is  $\delta(F_1) \geq 3$  maka sembarang komponen terhubung dari  $F_1$  harus berderajat  $\delta(F_1) \geq 5$ . Hanya komponen berorder 5 akan terbentuk dari 1, 2, 2 berturut-turut dari tiga himpunan partit. Jika  $n = 8 + 10k$  untuk suatu bilangan asli  $k$ , maka  $F_1$  dapat disusun dengan kompen berorder setiap 5, dan jadi  $F_1 \supseteq P_s$ , dimana  $s=3, 4$  dan 5. Jika  $n \neq 8 + 10k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , maka satu dari komponennya akan berorder minimal 6. Jadi,  $F_1$  akan memuat  $P_s$  diman  $s=3,4,5$  dan 6. Oleh karena itu,  $m_3(P_4, K_{1,n}) \leq t$ .  $\square$

**Teorema IX.4** Untuk bilangan bulat positif  $n$ ,  $m_2(P_2, K_{1,n}) = n$ .

**Bukti.**

Untuk  $n = 1$ , jelas bahwa  $m_2(P_2, K_{1,1}) \geq 1$ . Selanjutnya, misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah faktorisasi dari  $K_{2 \times 1}$  sedemikian sehingga  $K_{2 \times 1} \not\supseteq P_2$ . Karena  $F_2 \cong K_{2 \times 1}$  maka  $m_2(K_{1,1}, P_2) \leq 1$ . Oleh karena itu,  $m_2(K_{1,1}, P_2) = 1$ .

Pertama-tama akan tunjukkan bahwa  $m_2(P_2, K_{1,n}) > n-1$  untuk  $n \geq 2$ . Perhatikan suatu faktorisasi  $K_{2 \times (n-1)} \cong G = G_1 \times G_2$  dimana  $G_1$  adalah suatu  $K_{2 \times (n-1)}$ . Jelas bahwa  $G_1$  tidak memuat  $K_{1,n}$  dan  $G_2 \not\supseteq P_2$ . Oleh karena itu  $m_2(K_{1,n}, P_2) \geq n$ .

Untuk menunjukkan bahwa  $m_2(P_2, K_{1,n}) \leq n$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F = K_{2 \times n}$  sedemikian sehingga  $F_1 \not\supseteq P_2$ . Karena setiap himpunan partit dari  $F$  terdiri dari  $n$  titik, maka  $F_2 \supseteq K_{1,n}$ . Memuat  $m_2(K_{1,n}, P_2) \leq n$ .  $\square$

Untuk sembarang integer  $t$ , jelas bahwa  $K_{2 \times t}$  tidak memuat  $K_m$  untuk  $m \geq 3$ . Jadi,  $m_2(G, K_m) = \infty$  untuk sembarang graf  $G$ . Oleh karena itu  $m_2(K_{1,n}, K_m) = \infty$  untuk sembarang  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ . Teorema berikut memberikan nilai eksak dari  $m_3(K_{1,3}, P_l)$  untuk  $l \geq 2$ .

**Teorema IX.5** Untuk sembarang bilangan bulat positif  $l$ ,

$$m_3(K_{1,3}, P_l) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } 1 \leq l \leq 3, \\ 3 & \text{untuk } 4 \leq l \leq 9, \\ \lceil \frac{l}{3} \rceil & \text{untuk } l \geq 10. \end{cases}$$

**Bukti.**

*Kasus 1.* Untuk  $1 \leq l \leq 3$ .

Pertama-tama kita tunjukkan bahwa  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq 2$ . Perhatikan faktorisasi  $K_{3 \times 1} := G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1$  adalah suatu graf lingkaran  $C_3$ . Jelas bahwa,  $G_1 \not\supseteq K_{1,3}$  dan  $G_2 \not\supseteq P_l$ . Jadi,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq 2$  untuk semua  $1 \leq l \leq 3$ .

Sekarang, akan ditunjukkan  $m_3(K_{1,3}, P_l) \leq 2$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sebarang faktorisasi  $F = K_{3 \times 2}$ , dan misalkan  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,3}$ . Jadi,  $\Delta(F_1) \leq 2$ . Akibatnya  $\delta(F_2) \geq 4 - 2 = 2$ . Ini mengakibatkan, setiap titik  $x \in V(F_1)$  bertetangga ke paling banyak dua titik di  $F_1$ . Jadi,  $F_2 \supseteq P_l$ . Oleh karena itu,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \leq 2$  untuk  $2 \leq l \leq 3$ .

*Kasus 2.* Untuk  $4 \leq l \leq 9$ .

Untuk  $4 \leq l \leq 9$ , pertama akan ditunjukkan bahwa  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq 3$ . Perhatikan faktorisasi  $K_{3 \times 2} := G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1$  adalah suatu graf lingkaran  $C_6$ . Jadi,  $G_1 \not\supseteq K_{1,3}$ . Dari Kasus 1,  $G_2 \not\supseteq P_l$  untuk  $l \geq 4$ . Oleh karena itu,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq 3$  untuk  $4 \leq l \leq 9$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $m_3(K_{1,3}, P_l) \leq 3$  untuk  $4 \leq l \leq 9$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sebarang faktorisasi dari  $K_{3 \times 3}$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,3}$ . Karena  $\Delta(F_1) \leq 2$ , akibatnya  $\delta(F_2) \geq 4$ . Ini mengakibatkan, setiap titik  $x \in V(F_1)$  bertetangga ke paling banyak dua titik di  $F_1$ . Jadi,  $F_2 \supseteq P_l$ . Oleh karena itu,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \leq 3$  untuk  $4 \leq l \leq 9$ .

*Kasus 3.* Untuk  $l \geq 10$ .

Misalkan  $t = \lceil \frac{l}{2} \rceil$ . Akan ditunjukkan bahwa  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq t$  untuk  $l \geq 10$ . Perhatikan faktorisasi  $K_{3 \times (t-1)} := G_1 \oplus G_2$  dengan  $G_1$  adalah suatu graf lingkaran  $C_{3(t-1)}$ . Jelas bahwa  $G_1 \not\supseteq K_{1,3}$ . Karena  $3(\lceil \frac{l}{3} \rceil - 1) < l$  maka  $G_2 \not\supseteq P_l$  untuk  $l \geq 10$ . Jadi,  $m_3(K_{1,3}, P_l) > t - 1$ . Oleh karena itu,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \geq t$  untuk  $l \geq 10$ .

Akan ditunjukkan batas atas dari  $m_3(K_{1,3}, P_l)$  adalah  $t = \lceil \frac{l}{3} \rceil$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah faktorisasi dari  $K_{3 \times t}$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,3}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $F_2$  memuat  $P_l$ . Misalkan  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ , dan misalkan  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$  adalah himpunan-himpunan partit  $K_{3 \times t}$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,3}$ , maka tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan bahwa  $F_1$  memuat graf lingkaran  $C_{3t} := a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 \dots a_t b_t c_t$ . Jadi, dipunyai suatu graf lintasan

$$P_n := a_1 c_1 b_2 a_3 c_3 b_4 a_5 c_5 b_1 a_2 c_2 b_3 \dots a_{t-1} c_{t-1} b_t$$

in  $F_2$ . Oleh karena itu,  $m_3(K_{1,3}, P_l) \leq \lceil \frac{l}{3} \rceil$  untuk  $l \geq 10$ .  $\square$

Akibat berikut sebagai implikasi dari teorema di atas

**Akibat IX.1** Untuk bilangan-bilangan bulat positif  $l \geq 4$ ,  $m_3(K_{1,3}, C_l) = \lceil \frac{l}{3} \rceil$ .

**Bukti.**

Misalkan  ${}_a P_c$  adalah graf lintasan yang diperoleh di  $F_2$  dari bukti Teorema 1. Graf



lintasan ini terdiri dari paling sedikit  $l$  titik. Karena  $ab$  adalah sisi di  $E(F_2)$ , maka dengan menghubungkan dua titik  $a$  dan  $b$ , diperoleh graf lingkaran  $C_l$  di  $F_2$  dengan paling sedikit  $l$  titik.  $\square$

Untuk  $j = 2$  dan  $n = 1$ , jelas bahwa  $m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{2n-1}) = 1$ . Teorema berikut memberikan nilai eksak bilangan Ramsey multipartit untuk kombinasi graf bintang dan graf lintasan dengan  $j, n \geq 2$ .  $\square$

**Teorema IX.6** Untuk bilangan-bilangan bulat positif  $j, n \geq 2$ ,

$$m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{2n-1}) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } 2 \leq j \leq 3 \text{ dan } n = 2, \\ n & \text{untuk } j \geq 2 \text{ dan } n \geq 3. \end{cases}$$

**Bukti.**

*Kasus 1.* Untuk  $2 \leq j \leq 3$  dan  $n = 2$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan  $m_2(K_{1,(j-1)2}, P_3) \geq 3$ . Misalkan  $G_1 \oplus G_2$  adalah faktorisasi dari  $K_{2 \times 2}$  sedemikian sehingga  $G_1$  adalah *matching* sempurna. Jelas bahwa  $G_1 \not\supseteq K_{1,(j-1)2}$  dan  $G_2 \not\supseteq P_3$ . Oleh karena itu,  $m_2(K_{1,(j-1)2}, P_3) \geq 3$ .

Untuk menunjukkan bahwa  $m_2(K_{1,(j-1)2}, P_3) \leq 3$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times 3}$  sedemikian sehingga  $F_1 \oplus P_3$ . Karena  $\delta(F_2) \geq 2$  maka  $F_2 \supseteq K_{1,(j-1)2}$ . Jadi,  $m_2(K_{1,(j-1)2}, P_3) \leq 3$ .

*Kasus 2.* Untuk  $j \geq 2$  dan  $n \geq 3$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa  $m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{jn-1}) \geq n$ . Misalkan  $K_{j \times (n-1)} = G_1 \oplus G_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times (n-1)}$ , dan misalkan bahwa  $K_{1,(j-1)n}$  adalah bukan subgraf dari  $G_1$ . Karena banyak titik dari  $K_{j \times (n-1)}$  adalah  $j(n-1)$ , maka jelas bahwa graf lintasan terpanjang di  $G_2$  mempunyai titik sebanyak  $j(n-1)$ . Jadi,  $G_2$  tidak memuat graf lintasan dengan  $jn-1$  titik. Jadi,  $m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{jn-1}) \geq n$ .

Sekarang akan ditunjukkan  $m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{2n-1}) \leq n$ . Misalkan  $K_{j \times n} = F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times n}$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,(j-1)n}$ . Misalkan  $V_1, V_2, \dots, V_j$  adalah himpunan titik-titik dari  $K_{j \times n}$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $K_{1,(j-1)n}$ , maka terdapat dua titik  $x \in V_{j-1}$  dan  $y \in V_j$  sedemikian sehingga  $F_3 \cong (K_{(j-1) \times n} \setminus \{x\}) + \{y\}$  yang merupakan graf multipartit lengkap dengan  $jn - n - 1$  titik. Karena  $jn - |F_3| = n$  dan  $F_1 \not\supseteq K_{1,(j-1)n}$  maka ada  $n$  titik di  $\overline{F_3}$ . Jadi, semua titik di dua himpunan  $|F_3|$  dan  $|\overline{F_3}|$  akan membentuk suatu graf lintasan dengan  $2n + 1$  titik. Oleh karena itu,  $m_j(K_{1,(j-1)n}, P_{2n-1}) \leq n$ .  $\square$

# Bab X Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $m_j(S_m, C_n)$

## X.1 Survey Literatur

Tujuan dalam bagian ini adalah menentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(S_m, C_n)$  untuk suatu kombinasi dari suatu *star* dan suatu *cycle*. Suatu *star*  $S_m$  adalah graf  $m$  titik dengan satu one berderajat  $m - 1$ , disebut *center*, dan  $m - 1$  titik berderajat 1. Suatu *cycle*  $C_n$  dengan panjang  $n \geq 3$  yaitu suatu graf terhubung 2-regular dengan  $n$  titik. Misalkan  $K_{j \times t}$  adalah graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari  $j$  himpunan partit dan  $t$  titik [4]. Suatu graf  $G$  dengan  $n$  titik dikatakan *pancyclic* jika  $G$  memuat semua *cycles* dengan setiap panjangnya adalah  $l$ ,  $3 \leq l \leq n$ .

Misalkan  $G$  adalah suatu graf dengan himpunan titik adalah  $V(G)$  dan himpunan sisi adalah  $E(G)$ . *Lingkungan*  $N(v)$  dari suatu titik  $v$  adalah himpunan titik yang bertetangga ke  $v$  di  $G$ . Banyaknya titik yang bertetangga dengan  $x$  didefinisikan sebagai  $d(x) = |N(x)|$ . *Derajat minimum* ditulis dengan  $\delta(G)$  dan *derajat maksimum* ditulis dengan  $\Delta(G)$ . Graf  $G$  dikatakan *r-regular* jika  $d(x) = r$  untuk semua  $x \in V(G)$ . Definisikan  $V_u(G)$  untuk suatu himpunan partit  $G$  yang memuat titik  $u$ .

Untuk menunjukkan hasil utama pada bagian ini, akan digunakan lema Bondy [6] dan teorema berikut.

**Lema X.1** *Misalkan  $G$  adalah suatu graf berorder  $n$ . Jika  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , maka akan memenuhi salah satu dari berikut, yaitu:  $G$  adalah pancyclic atau  $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  dengan  $n$  genap.*

Berikut diberikan Teorema Moo dan Moser [39] untuk digunakan dalam pembuktian teorema selanjutnya.

**Teorema X.1** *Jika  $G$  adalah graf bipartit seimbang  $2n$  titik, dengan derajat minimum  $\delta(G) \geq \frac{n+1}{2}$ , maka  $G$  adalah hamiltonian.*

## X.2 Graf Bintang versus Graf Lingkaran

Syafrizal dkk [46] telah memperlihatkan bahwa bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_j(P_m, C_n)$  untuk kombinasi *paths* dan *cycles*, untuk kasus  $m = 2$  dan 3. Pada bagian ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk *star*  $S_m$  dan *cycle*  $C_n$  untuk  $m, n \geq 3$ . Dalam Teorema XI.2, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $S_m$  untuk  $m = 3, 4$  dan *cycle*  $C_n$  untuk  $n \geq 3$ , dan pada Teorema 3 akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran  $S_m$  untuk  $m \geq 4$  dan *cycle*  $C_n$  untuk  $n \geq 5$ .

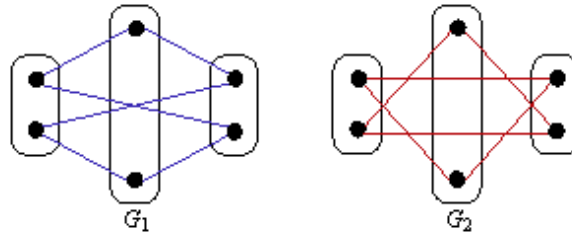
**Teorema X.2** Untuk bilangan asli  $j, n \geq 3$  dan  $m = 3, 4$

$$m_j(S_m, C_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } j = 3, m = 4, \text{ dan } n = 6, \\ 2 & \text{untuk } j = 5, m = 4, \text{ dan } n = 3, 4, \\ 1 & \text{untuk } (5 \leq n \leq j \text{ dan } m = 3), \text{ atau} \\ & \text{untuk } (j = 6, n = 4, 6 \text{ dan } m = 4), \text{ atau} \\ & \text{untuk } (5 \leq n \leq j, j \geq 7 \text{ dan } m = 4). \end{cases}$$

*Bukti.* Perhatikan tiga kemungkinan berikut.

*Kasus 1.*  $j = 3, m = 4$ , dan  $n = 6$ .

Pertama akan ditunjukkan  $m_3(S_4, C_6) \geq 3$ . Misalkan  $G_1 \cong C_6$  dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $K_{3 \times 2}$ . Ini mengakibatkan,  $G_1 \not\supseteq S_4$  dan  $G_2 \not\supseteq C_6$ , lihat Gambar X.1. Jadi,  $m_3(S_4, C_6) \geq 3$ .



Gambar X.1.  $G_1 \not\supseteq S_4$  and  $G_2 \not\supseteq C_6$ .

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_3(S_4, C_6) \leq 3$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F \cong K_{3 \times 3}$  dan misalkan bahwa  $F_1 \not\supseteq S_4$ . Maka,  $\Delta(F_1) \leq 2$ , jadi  $\delta(F_2) \geq 4$ . Jika  $\Delta(F_1) \leq 1$  maka, menurut Lema XI.1,  $F_2$  adalah *pancyclic* dan mengakibatkan  $F_2 \supseteq C_6$ . Sekarang, tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $d(x) = 2$  untuk setiap  $x \in V(F_1)$ , maka  $F_1$  adalah suatu graf *2-regular* dan  $F_2$  adalah suatu graf *4-regular*. Jika  $F_1$  terhubung maka  $F_1$  adalah suatu *cycle*  $C_9$ . Pada sisi lain,  $F_1$  adalah isomorfik ke satu dari berikut yaitu  $\{C_3 \cup C_6, C_4 \cup C_5, 3C_3\}$ . Jika  $F_1$  tidak mempunyai *path*  $P_3$  dengan titik ujungnya pada himpunan partit yang sama, maka  $F_2$  memuat suatu subgraf bipartit  $G$  yang diinduksi oleh enam titik dalam sembarang dua himpunan partit, dimana  $\delta(G) \geq 2$ . Dari Teorema X.1,  $F_2 \supseteq C_6$ . Pada sisi lain (jika  $F$  memuat  $P_3$ ), maka dapat dikonstruksi suatu graf bipartit  $G$  di  $F_2$ , sebagai berikut. Misalkan  $A$  adalah himpunan tiga titik di *path*  $P_3$  ini. Ambil  $B$  sebagai himpunan partit di  $F_2$  yang tidak memuat *path*  $P_3$  tersebut. Akibatnya, terdapat suatu subgraf bipartit yang diinduksi  $G$  di  $F_2$  oleh  $A \cup B$ , dimana  $\delta(G) \geq 2$ . Dari Teorema X.1,  $F_2 \supseteq C_6$ .

*Kasus 2.*  $j = 5, m = 4$  dan  $n = 3, 4$ .

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa  $m_5(S_4, C_n) \geq 2$ . Misalkan  $G_1 \cong C_5$  dan

misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $K_5 = K_{5 \times 1}$ , sehingga  $G_2 \cong C_5$ . Maka,  $K_5 = G_1 \oplus G_2$  adalah suatu faktorisasi sedemikian sehingga  $G_1 \not\supseteq S_4$  dan  $G_2 \not\supseteq C_n$  untuk  $n = 3$  dan  $4$ . Oleh karena itu,  $m_5(S_4, C_n) \geq 2$  untuk  $n = 3$  dan  $4$ .

Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F \cong K_{5 \times 2}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $S_4 \subseteq F_1$  atau  $C_n \subseteq F_2$  untuk  $n = 3$  dan  $4$ . Misalkan bahwa  $S_4 \not\subseteq F_1$ . Akibatnya,  $\Delta(F_1) \leq 2$ , sehingga  $\delta(F_2) \geq 6$ . Karena  $\delta(F_2) \geq 5$ , maka dari Lema X.1,  $F_2$  adalah *pancyclic* dan sedemikian sehingga  $F_2 \supseteq C_n$  untuk  $n = 3$  dan  $4$ . Oleh karena itu,  $m_5(S_4, C_n) \leq 2$  untuk  $n < 5$ .

*Kasus 3.* ( $5 \leq n \leq j$  dan  $m = 3$ ) atau ( $j = 6, m = 4$ , dan  $n = 4, 6$ ) atau ( $5 \leq n \leq j, j \geq 7$  dan  $m = 4$ ).

Jelas bahwa,  $m_j(S_m, C_n) \geq 1$ . Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) \leq 1$ . Misalkan  $K_{j \times 1} \cong K_j := F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_j$  dan, misalkan bahwa  $F_1 \not\supseteq S_m$  untuk  $m = 3, 4$ . Akibatnya,  $\Delta(F_1) \leq 2$ , sehingga  $\delta(F_2) \geq (j - 1) - \Delta(F_1)$ . Pandang tiga subkasus berikut.

*Subkasus 3.1.* Untuk ( $5 \leq n \leq j$  dan  $m = 3$ ).

Karena  $F_1 \not\supseteq S_3$  atau  $F_1$  adalah suatu *matching* (tidak perlu maksimal), maka  $\Delta(F_1) \leq 1$ . Sehingga,  $\delta(F_2) \geq j - 2 \geq \frac{n}{2}$ . Jadi, dari Lema X.1,  $F_2$  adalah *pancyclic*. Oleh karena itu,  $F_2 \supseteq C_n$ . Jadi,  $m_j(S_3, C_n) \leq 1$  untuk  $5 \leq n \leq j$ .

*Subkasus 3.2.* Untuk ( $j = 6, m = 4$  dan  $n = 4, 6$ ).

Karena  $j = 6$  maka  $\delta(F_2) = 3$ , yaitu  $\delta(F_2) \geq \frac{j}{2} = 3$ . Jadi, dari Lema X.1  $F_2$  adalah suatu *pancyclic*. Akibatnya,  $F_2 \supseteq C_4$  dan  $C_6$ . Oleh karena itu,  $m_6(S_4, C_n) \leq 1$  untuk  $n = 4, 6$ .

*Subkasus 3.3.* Untuk ( $5 \leq n \leq j, j \geq 7$  dan  $m = 4$ ).

Karena  $j \geq 7$ , maka  $\delta(F_2) \geq j - 3 \geq \frac{j}{2}$ . Jadi, dengan Lema X.1,  $F_2$  adalah *pancyclic*. Jadi,  $F_2 \supseteq C_n$  untuk  $3 \leq n \leq j$ . Oleh karena itu,  $m_j(S_4, C_n) \leq 1$  dimana  $5 \leq n \leq j$  dengan  $j \geq 7$ .  $\square$

**Teorema X.3** Untuk bilangan asli  $j$  dan  $n$  dimana  $3 \leq j < n$ ,

$$m_j(S_m, C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{j} \rceil & \text{untuk } 4 \leq m \leq \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2, \\ \lceil \frac{n}{j} \rceil + 1 & \text{untuk } n \text{ ganjil dan satu dari} \\ & [ m = \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2, j \text{ genap} ] \text{ atau} \\ & [ m = \frac{1}{2} \lceil \frac{n}{j} \rceil (j - 1) + 2, j \text{ ganjil} ]. \end{cases}$$

*Bukti.* Perhatikan dua kasus berikut.

*Kasus 1.*  $4 \leq m \leq \lceil \frac{n}{j} \rceil (\frac{j}{2} - 1) + 2$ .

Misalkan  $r = \lceil \frac{n}{j} \rceil$ . Akan ditunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) \geq r$ . Misalkan  $G_1 \cong (r - 1)C_j$  dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $K_{j \times (r-1)}$ .

Jadi,  $\Delta(G_1) = 2$ , sedemikian sehingga  $G_1 \not\subseteq S_m$ , untuk  $m \geq 4$ . Karena  $|V(G_2)| = j(r-1) < n$  maka  $G_2 \not\subseteq C_n$ .

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) \leq r$ . Misalkan  $K_{j \times r} := F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times r}$  dan misalkan bahwa  $S_m$  adalah bukan subgraf dari  $F_1$ . Akibatnya  $\Delta(F_1) \leq m-2 \leq r(\frac{j}{2}-1)$ . Jadi,  $\delta(F_2) \geq (j-1)r - r(\frac{j}{2}-1) = \frac{jr}{2}$ . Karena  $\delta(F_2) \geq \frac{jr}{2}$ , dari Lema X.2,  $F_2 \supseteq C_n$  dimana  $n \leq jr$ . Jadi  $m_j(S_m, C_n) \leq r$  untuk semua  $3 \leq n \leq jr$ .

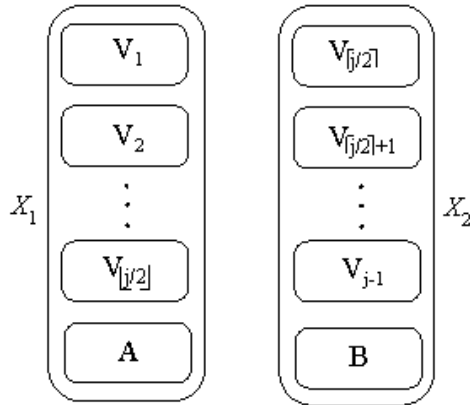
*Kasus 2. n ganjil.*

Misalkan  $t = \lceil \frac{n}{j} \rceil + 1$ . Untuk menunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) = t$ , perhatikan dua kemungkinan dari  $j$ .

*Subkasus 2.1.  $m = (\frac{j}{2}-1)(t-1) + 2$  dan  $j$  genap.*

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) \geq t$ . Misalkan  $G_1 \cong 2K_{\frac{j}{2} \times (t-1)}$ , dan misalkan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $K_{j \times (t-1)}$ . Jadi,  $\Delta(G_1) = (t-1)(\frac{j}{2}-1)$ . Karena  $\Delta(G_1) = (t-1)(\frac{j}{2}-1) < m-1$  maka  $G_1 \not\subseteq S_m$ . Selanjutnya, karena  $G_2$  adalah graf bipartit, maka  $G_2 \not\subseteq C_n$  untuk  $n$  ganjil. Oleh karena itu,  $m_j(S_m, C_n) \geq t$  untuk semua bilangan  $n$  ganjil.

Akan ditunjukkan bahwa  $m_j(S_m, C_n) \leq t$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times t}$ , dan misalkan bahwa  $S_m$  adalah bukan subgraf dari  $F_1$ . Jadi,  $\Delta(F_1) \leq m-2$ . Ini mengakibatkan,  $\delta(F_2) \geq (j-1)t - (m-2) = \frac{jt}{2} + \frac{j}{2} - 1 \geq \frac{jt}{2}$ , karena  $j \geq 3$ . Dari Lema X.2,  $F_2 \supseteq C_n$ , dimana  $n \leq jt$ . Oleh karena itu,  $m_j(S_m, C_n) \leq t$  untuk semua  $n$  ganjil.



Gambar X.2. Suatu graf bipartit  $G_2$  untuk Subkasus 2.2

*Subkasus 2.2.  $m = \frac{1}{2}(j-1)(t-1) + 2$  dan  $j$  ganjil.*

Misalkan  $V_1, V_2, \dots, V_{j-1}$  dan  $V_j$  adalah himpunan partit dari  $K_{j \times t}$ . Misalkan  $V_j = A \cup B$  dengan  $||A| - |B|| \leq 1$ . Partisi himpunan partit dari  $K_{j \times (t-1)}$  menjadi dua himpunan partit, sebut  $X_1 = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{[\frac{j}{2}]} \cup A$  dan  $X_2 = V_{[\frac{j}{2}]+1} \cup V_{[\frac{j}{2}]+1} \cup \dots \cup$

$V_{j-1} \cup B$ . Misalkan  $F[X_1]$  dan  $F[X_2]$  adalah dua graf multipartit lengkap. Misalkan  $G_1 = F[X_1] \cup F[X_2]$  dan  $G_2$  adalah komplemen dari  $G_1$  relatif terhadap  $K_{j \times (t-1)}$ , lihat Gambar X.2.

Jadi,  $G_2$  adalah suatu graf bipartit. Ini mengakibatkan,  $\Delta(G_1) \leq \frac{1}{2}(j-1)(t-1)$ . Karena  $\Delta(G_1) \leq \frac{1}{2}(j-1)(t-1) < m-1$ , maka  $F_1 \not\subseteq S_m$ . Selanjutnya, karena  $G_2$  adalah graf bipartit, maka  $G_2 \not\subseteq C_n$  untuk  $n$  ganjil. Oleh karena itu,  $m_j(S_m, C_n) \geq t$  untuk semua  $n$  ganjil.

Akan ditunjukkan  $m_j(S_m, C_n) \leq t$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{j \times t}$ , dan misalkan bahwa  $S_m$  adalah bukan suatu subgraf dari  $F_1$ . Jadi,  $\Delta(F_1) \leq m-2$ . Ini mengakibatkan,  $\delta(F_2) \geq (j-1)t - (m-2) = \frac{jt}{2} + \frac{j}{2} - 1 \geq \frac{jt}{2}$ . Dari Lema X.1,  $F_2 \supseteq C_n$  dimana  $n \leq jt$ . Oleh karena itu,  $m_j(S_m, C_n) \leq t$  untuk semua  $n$  ganjil.  $\square$

# Bab XI Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran $K_{s \times t}$ versus Lintasan

## XI.1 Survey Literatur

Ide bilangan Ramsey multipartit ukuran diperkenalkan oleh Burger dan Vuuren [4], dan Syafrizal *dkk.* [46] dengan memperhatikan dua faktorisasi dari suatu graf  $K_{s \times t}$  dengan jumlah partitnya tetap yaitu  $s$  himpunan multipartit. Lebih tepatnya, untuk diberikan dua graf, yaitu misalkan  $G_1$  dan  $G_2$ , dan bilangan asli  $s \geq 2$ , maka bilangan Ramsey multipartit ukuran  $m_s(G_1, G_2) = t$  adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga sembarang faktorisasi dari graf  $K_{s \times t} := F_1 \oplus F_2$  akan memnuhi kondisi berikut, yaitu satu dari berikut: atau  $F_1$  memuat  $G_1$  sebagai subgraf atau  $F_2$  memuat  $G_2$  sebagai subgraf. Bilangan-bilangan Ramsey untuk *path* versus kelas graf lainnya yang diberikan dalam [47], [?], [49], [50], and [52]. Pada bagian ini akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap yang berukuran kecil. Syafrizal Sy *et al.* [51] telah memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk graf multipartit seimbang lengkap sebagai berikut.

**Teorema XI.1** Untuk bilangan asli  $j, n \geq 3$  dan  $b \geq 2$ ,

$$m_j(P_n, K_{j \times b}) \geq \begin{cases} (n-1)b, & \text{jika } 3 \leq n \leq j, \\ jb, & \text{jika } j < n < jb, \\ (j-1)\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + b, & \text{jika } n \geq jb. \end{cases}$$

Surahmat *dkk.* [44] telah menentukan bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi *star* dan *path*  $m_2(P_4, K_{1,n}) = n + 1$  untuk  $n \geq 3$ . Selanjutnya, Syafrizal Sy [53] menentukan nilai dari bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi *path* dan *tree* sebagai berikut.

**Teorema XI.2** Untuk bilangan bulat  $n, s \geq 2$ ,

$$m_2(P_n, T_s) = \begin{cases} \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor & \text{untuk } n \geq 10, s = 4, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{untuk } (n \geq 3, s \leq 3) \text{ atau } (n \geq 9, \\ & 4 < s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \\ s & \text{untuk } (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < s < n < 2s) \text{ or} \\ & (s = n \text{ ganjil}), \\ s - 1 & \text{untuk } s = n \text{ genap}, \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 & \text{untuk } s = 2n, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \frac{n}{2} - 1 & \text{untuk } n < s, n \text{ genap}, \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 & \text{untuk } n < s, n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Pada tahun 2015, Anie Lusiani *dkk.* [1] telah memperoleh bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi *star* dan *cycle*  $m_j(S_m, C_n)$  dimana  $3 \leq n \leq j$  dan sembarang  $m \geq 3$ .

## XI.2 Graf Lintasan versus $K_{s \times t}$ kecil

Hasil utama yang pertama dari bagian ini adalah menentukan bilangan Ramsey bipartit ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil dan *path* dengan  $n \geq 2$  titik.

**Teorema XI.3** Untuk bilangan bulat  $n \geq 2$ ,  $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) = 2n + 1$ .

*Bukti:*

Pertama akan ditunjukkan bahwa  $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \geq 2n + 1$ . Perhatikan sembarang faktorisasi  $K_{2 \times 2n} := G_1 \oplus G_2$  dimana  $G_1 := K_{1, n-1} \cup K_{n-1, 1}$ . Jelas bahwa  $G_1 \not\supseteq K_{2 \times n}$  dan juga  $G_2 \not\supseteq P_{4n}$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \geq 2n + 1$  untuk semua  $n \geq 2$ .

Sekarang, akan ditunjukkan bahwa  $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \leq 2n + 1$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $K_{2 \times (2n+1)}$  sedemikian sehingga  $K_{2 \times n}$  adalah bukat sebagai subgraf dari  $F_1$ . Akan ditunjukkan bahwa  $P_{4n}$  adalah suatu subgraf dari  $F_2$ . Jadi, dari Lema 1 di [32],  $F_2$  memuat suatu hamiltonian *path*, jadi  $F_2 \supseteq P_{4n}$ . Oleh karena itu,  $m_2(P_{4n}, K_{2 \times n}) \leq 2n + 1$  untuk semua  $n \geq 2$ .  $\square$

Hasil utama kedua dari bagian ini adalah penentuan bilangan Ramsey multipartit ukuran untuk kombinasi graf multipartit seimbang lengkap berorde kecil dan *path*, yaitu  $P_n$  dimana  $n = 4, 5, 6$ , atau 7.

**Teorema XI.4** Untuk bilangan positif  $n$ ,  $4 \leq n \leq 7$ ,  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = 6$ .

*Bukti.*

Untuk  $3 \leq n \leq 5$ , dari Teorema 2 di [51], dipunyai  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) = 6$ .

Selanjutnya, dari Teorem 1 di [51], diperoleh batas bawah  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \geq 6$  untuk  $6 \leq n \leq 7$ .

Untuk menunjukkan batas atas  $m_3(K_{P_n, 3 \times 2}) \leq 6$ , perhatikan  $F \cong K_{3 \times 6}$ . Misalkan  $F_1 \oplus F_2$  adalah sembarang faktorisasi dari  $F$  sedemikian sehingga  $F_1$  tidak memuat  $P_n$ . Akan ditunjukkan bahwa  $F_2$  memuat  $K_{3 \times 2}$ . Misalkan  $P$  adalah *path* terpanjang di  $F$ , dan  $Q$  adalah *path* terpanjang di graf  $F \setminus V(P)$ , dan  $R$  adalah *path* terpanjang di graf  $F \setminus V(P \cup Q)$ . Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah titik-titik ujung di  $P$ . Misalkan  $c$  dan  $d$  adalah titik-titik ujung di  $Q$ . Misalkan  $e$  dan  $f$  adalah titik-titik ujung di  $R$ . Karena  $P, Q$ , dan  $R$  adalah tiga *path* terpanjang, maka  $xy \notin E(F_1)$  untuk setiap  $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$ . Misalkan  $A, B, C$  adalah himpunan-himpunan partit di  $F$ . Perhatikan dua kemungkinan berikut.



*Kasus 1:* Jika  $a, b \in A$ ,  $c, d \in B$ , dan  $e, f \in C$  maka  $uv \notin E(F_1)$  untuk setiap  $u, v \in \{a, b, c, d, e, f\}$ . Jadi, himpunan  $\{a, b, c, d, e, f\}$  akan diinduksi suatu  $K_{3 \times 2}$  di  $F_2$ . Oleh karena itu  $m_3(K_{3 \times 2}, P_n) \leq 6$  untuk  $6 \leq n \leq 7$ .

*Kasus 2:* Jika  $a, b \notin A$ ,  $c, d \notin B$ , atau  $e, f \notin C$ . Tanpa mengurangi perumuman, asumsikan bahwa  $a \in A$  dan  $b \in B$ ,  $c \in B$  dan  $d \in C$ , dan  $e \in C$  dan  $f \in C$ . Jelas bahwa  $ac, ae, ce \notin F_1$ . Karena  $|A| = |B| = |C| = 6$ , maka terdapat tiga titik, sebut  $u \in A$ ,  $v \in B$ , dan  $w \in C$  sedemikian sehingga  $uv, uw, vw \notin F_1$ . Oleh karena itu, himpunan  $\{a, u, c, v, e, w\}$  akan menginduksi  $K_{3 \times 2}$  di  $F_2$ . Jadi,  $m_3(P_n, K_{3 \times 2}) \leq 6$  untuk  $6 \leq n \leq 7$ .  $\square$

## Daftar Pustaka

- [1] Anie Lusiani, Syafrizal Sy, Edy Tri Baskoro, and Chula Jayawardene, On Size Multipartite Ramsey numbers for Stars versus Cycles, *Procedia Computer Science* 74 (2015), 27 – 31.
- [2] L.W. Beineke dan A.J. Schwenk, On a bipartite form of the Ramsey problem, *Congr. Numer.* 15.(1975) 17-22.
- [3] A.P. Burger dan J.H. van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part I: Set Numbers, *Discrete Math.* 283 (2004) 37-43.
- [4] A.P. Burger dan J.H. van Vuuren, Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II: Size Numbers, *Discrete Mat.* 283 (2004) 45-49.
- [5] J.A. Bondy dan U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press LTD, London (1976).
- [6] J.A. Bondy, Pancyclic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **11** (1971) 80-84.
- [7] Y. Caro dan C. Rousseau, Asymptotic bounds for bipartite Ramsey numbers, *Electron J. Combi.*, 8 (2001) R 17.
- [8] Chartrand, G. dan Schuster, S. On the existence of specified cycles in complementary graphs, *Bull. AMS.* **1971**, 77, pp 995–998.
- [9] Chvátal, V. Tree-complete graph Ramsey numbers, *J. Graph Theory*, **1**, 93 (1977).
- [10] V. Chvatal dan F. Harary, Generalised Ramsey theory for graphs, II: small diagonal numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 32 (1972) 389-394.
- [11] V. Chvatal dan F. Harary, Generalised Ramsey theory for graphs, III: small off-diagonal numbers, *Pacific. J. Math. Soc.* 41 (1972) 335-345.
- [12] F.R.K. Chung dan R.L. Graham, On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graph, *J. Combin. Theory*, 18 (1975) 2, 164-169.
- [13] D. Day, W. Goddard, M.A. Henning dan HC Swart, Multipartite Ramsey numbers, *Ars Combin.* 58 (2001), 23-31.
- [14] Effendi, Ahmad Iqbal Baqi, dan Syafrizal Sy, size multipartite Ramsey numbers for small  $K_{s \times t}$  versus paths, *Int. J. Math. Sci.*, Vol. 10, 2016, no. 22, pp. 1061 - 1065.
- [15] P. Erdős dan R. Rado, A partiton calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 62 (1956) 229-489.

- [16] P. Erdos, R.J. Faudree, C.C. Rousseau dan R.H. Schelp, Multipartite graph-tree Ramsey numbers, *Proc. of the First China-USA International Graph Theory Conference* 576 (1989), 146–154.
- [17] P. Erdős dan Szekeres G., A combinatorial problem in graph, *Compo. Math.*, 2 (1935) 463-370.
- [18] Espino, *On Ramsey's Conjecture: Efficient Allocations in the Neoclassical Growth Model with Private Information*, Institut fr Hhere Studien - Institute for Advanced Studies (IHS), (2004).
- [19] Exoo G. Constructing Ramsey graphs with a computer, *Congr. Numer.* **1987**, 59, pp 31-36.
- [20] R.J. Faudree dan R.H. Schelp, Path-path Ramsey type numbers for complete bipartite graph, *J. Combin. Theory Ser. B* 19 (1975), 161-173.
- [21] W. Goddard, M.A. Henning dan O.R. Oellermann, Bipartite Ramsey numbers and Zarankiewicz, *Discrete Mat.* 219 (2000), 85-95.
- [22] Graham R.L., Rothschild B.L. dan Spencer J.H., *Ramsey Theory*, John Willey and sons (1990).
- [23] R.E. Greenwood dan A.M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graph, *Canad. J. Math.* 7 (1955), 1-7.
- [24] C. Grinstead dan S. Roberts, On the Ramsey numbers  $R(3,8)$  and  $R(3,9)$ , *J. Combin. Theory*, 33 B (1982) 27-51.
- [25] A. Gyarfás, M. Ruzinkó, G.N. Sárközy dan E. Szemerédi, Tripartite Ramsey numbers for paths, *J. Graph Theory*, 55 (2007), 164–174.
- [26] A. Gyarfás, G.N. Sárközy dan R.H. Schelp, Multipartite Ramsey numbers for odd cycles, *J. Graph Theory*, 61 (2009), 12–21
- [27] A. Gyárfás dan J. Lehel, A Ramsey-type problem in directed and bipartite graphs, *Periodica Math. Hungar.* 3 (1973), 299-304.
- [28] Harborth H. dan Mengersen I. The Ramsey number of  $K_{3,3}$  in: Y. Alavi, *et al.* (Eds.), *Combinatorics, Graph Theory and Applications*, 2, Wiley, New York **1991**, pp 639-644.
- [29] H. Harborth dan I. Mengersen, Some Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *Australas. J. Combin.* 13 (1996) 119-128.
- [30] H. Harborth dan I. Mengersen, Ramsey numbers in octahedron graphs, *Discrete Math.* 231 (2001) 241-246.
- [31] J.H. Hattingh dan M.A. Henning, Bipartite Ramsey theory, *Utilitas Math.* 53 (1998), 217-230.

- [32] J.H. Hattingh dan M.A. Henning. Star-path bipartite Ramsey numbers, *Discrete Math.* 185 (1998), 255-258.
- [33] R.W. Irving, A bipartite Ramsey problem and Zarankiewics numbers, *Glasg. Math. J.* 19 (1978) 13-26.
- [34] C. Jayawardene and L. Samarasekara, Size multipartite Ramsey numbers for stripes versus stripes, *Ars Combinatoria*, 29 (2016):357-366.
- [35] J.G. Kalbfleisch. Contruction dan special edge-chromatic graphs, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965) 575-584.
- [36] G. Kery. On a theorem of Ramsey (in Hungaria), *Matematikai Lapok*, 15 (1964) 204-224.
- [37] V. Longani. Some bipartite Ramsey numbers, *Southeast Asian Bull. Math.* 26 (2002), 583-592.
- [38] D. McKay dan S.P. Radziszowski.  $R(4, 5) = 25$ , *J. Graph Theory*, 19: 3 (1995) 309-322.
- [39] J.Moon dan L.Moser. On Hamiltonian bipartite graphs, *Israel J. Math.* 1 (1963), 163–165.
- [40] Narwen, Effendi, dan Syafrizal Sy. On size multipartite Ramsey numbers for paths versus stars, *Far East J. Math. Sci.* Vol. 100, no. 9, 2016.
- [41] S.P. Radziszowski. Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.*, <http://www.combinatorics.org>, ElJC revision #16 (2021).
- [42] F.P. Ramsey. On a problem in formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, 30 (1930) 264 - 286.
- [43] V. Rosta. Ramsey theory applications, *Electron. J. Combin.*, (2004), DSI. 13.
- [44] Surahmat dan Syafrizal Sy. Star-path size multipartite Ramsey numbers, *Applied Mathematical Sciences.* 8. No. 75, (2014), 3733 – 3736.
- [45] Syafrizal Sy dan Edy Tri Baskoro. Bilangan Ramsey Multipartit Ukuran, *LPPM Universitas Andalas* ISBN : 978-623-395-211-8, (2021).
- [46] Syafrizal Sy., E.T. Baskoro dan S. Uttunggadewa. The size multipartite Ramsey numbers for paths, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 55 (2005) 103-107.
- [47] Syafrizal Sy, E.T. Baskoro dan S. Uttunggadewa. The size multipartite Ramsey numbers for small paths versus other graphs, *Far East J. Appl. Math.* 28, Issue 1 (2007) 131-138.
- [48] Syafrizal Sy, E.T. Baskoro, S. Uttunggadewa dan H. Assiyatun. Path-path size multipartite Ramsey numbers, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 71 (2009), 265–271.

- [49] Syafrizal Sy. On size multipartite Ramsey numbers for paths versus cycles of three or four vertices, *Far East J. Appl. Math.*, Volume 44 No. 2 July Issue (2010), 109–116.
- [50] Syafrizal Sy. On the size multipartite Ramsey numbers for small path versus cocktail party graphs, *Far East J. Appl. Math.*, Volume 55 No. 1 June Issue (2011), 53–60.
- [51] Syafrizal Sy dan E.T. Baskoro. Lower bounds of the size multipartite Ramsey numbers  $m_j(P_n, K_{j \times b})$ , *American Institute of Physics Proc.*, **1450** (2012), 259-261. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4724150>
- [52] Syafrizal Sy dan E.T. Baskoro. Lower bounds for size multipartite Ramsey numbers  $m_j(P_n, K_{j \times b})$ , *American Institute of Physics Proc.* Vol. 1450, 2012.
- [53] Syafrizal Sy. Tree-path size bipartite Ramsey numbers, *Far East J. Math. Sci*, Vol. 76 No. 1 (2013), pp 139 – 145.
- [54] Yaser Rowshan, Mostafa Gholami, dan Stanford Shateyi. The size multipartite ramsey numbers for  $nk_2$  versus pathpath and cycle, *Mathematics*, **9**, 764, (2021) 1–12, <https://doi.org/10.3390/math9070764>

## List of General Symbols for Graph Theory

$A$	arc himpunan
$\mathbf{A}$	matrik ketetanggaan dari graf
$\mathbf{A}$	matrik ketetanggaan dari graf berarah
$b(f)$	batas $f$
$\mathcal{B}$	ruang bond
$c(GB)$	tutupan (closure) dari $G$
cap $K$	kapasitas dari cut $K$
$\mathcal{C}$	ruang cycle
$d_G(v)$	derajat titik $v$ di $G$
$d_G(f)$	derajat muka $f$ di $G$
$d_{D^-}(v)$	derajat masuk titik $v$ di $G$
$d_{D^+}(v)$	derajat keluar titik $v$ di $G$
$d_G(u, v)$	jarak antara $u$ dan $v$ di $G$

## Daftar Riwayat Hidup Singkat Penulis



**Syafrizal Sy** lahir di Pekanbaru, pada tanggal 7 Agustus 1967. Penulis menempuh pendidikan di SMA N 1 Pekanbaru lulus tahun 1986, kemudian melanjutkan ke Universitas Riau di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam lulus 1992. Selanjutnya penulis menempuh Pendidikan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung (FMIPA ITB) lulus 2003. Akhirnya, penulis melanjutkan ke Program Doktor Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung (FMIPA ITB) lulus 2009.

Penulis aktif dikegiatan Masyarakat Matematika Kombinatorika Indonesia (Indonesian Combinatorics Society, disingkat InaCombS) dan juga aktif di Himpunan Matematika Indonesia (The Indonesian Mathematical Society, disingkat IndoMS). Penulis pernah diberi amanah sebagai Gubernur Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Sumatera Bagian Tengah tahun 2014. Selanjutnya, penulis diberi amanah sebagai Wakil Presiden I Bidang Organisasi dan Kerjasama di Himpunan Matematika Indonesia pada tahun 2016.

Pada tahun 2013, penulis meraih gelar jabatan Akademik tertinggi Professor. Hingga kini pekerjaan penulis adalah Dosen Matematika FMIPA UNAND. Jabatan struktural yang pernah diamanahkan kepada penulis adalah sebagai Sekretaris Jurusan Matematika tahun 1999, Ketua Jurusan Matematika tahun 2009, Wakil Dekan I FMIPA UNAND tahun 2012, Dekan FMIPA UNAND tahun 2015, dan Wakil Rektor II UNAND tahun 2017. Kini penulis diberi amanah sebagai Ketua Senat Universitas Andalas sejak 2021 dan *ex-officio* sebagai Anggota Majelis Wali Amanat Universitas Andalas.



**Edy Tri Baskoro** lahir di Jombang, Indonesia 22 Mei 1964, menerima gelar sarjana dalam bidang matematika dari Institut Teknologi Bandung (ITB) pada tahun 1987, dan gelar doktor dari University of Newcastle Australia pada tahun 1996. Saat ini, beliau memiliki memegang posisi akademik senior di ITB. Beliau diberikan kepercayaan untuk memimpin Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) ITB sebagai dekan dari 2015 hingga 2020. Jabatan guru besar di ITB diembannya sejak tahun 2006.

Dia juga seorang conjoint profesor di University of Newcastle Australia (2010-2015) dan Abdus Salam School of Mathematical Sciences Universitas GC, Pakistan Lahore (2006-2015). Bidang penelitian utama yang dikembangkan adalah teori graf dan matematika kombinatorika. Beliau merupakan salah satu pelopor dalam pengembangan teori graf dan matematika kombinatorika di Indonesia, dan merupakan pendiri Masyarakat Matematika Kombinatorika Indonesia (Indonesian Combinatorics Society, disingkat InaCombS).

Beliau diberikan amanah sebagai Presiden Masyarakat Matematika Kombinatorika pada tahun 2006-2013 dan sebagai Presiden Himpunan Matematika Indonesia pada tahun 2006-2008. Karena kontribusi dan karyanya dalam bidang teori graf dan kombinatorika, beliau dianugerahi sejumlah penghargaan: Habibie Award dalam bidang Ilmu Dasar (2009), Australian Alumni Award dalam bidang pendidikan (2009), dan penghargaan Apresiasi Kekayaan Intelektual Luar Biasa - AKIL (2010). Ia juga memainkan peran penting dalam pengembangan matematika di kawasan Asia Tenggara sebagai Presiden Himpunan Matematika se Asia Tenggara (SEAMS) pada tahun 2014-2015, dan sebagai anggota Komite Ilmiah CIMPA (2009 - 2020). Ia juga berkontribusi pada pengembangan standar nasional untuk pendidikan dari sekolah dasar hingga pendidikan tinggi di Indonesia, sebagai anggota Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) 2005-2014, yang langsung bertanggungjawab kepada Menteri Pendidikan dan Kebudayaan. Hingga Juni 2021 beliau telah menghasilkan lebih dari 174 makalah ilmiah yang diterbitkan dalam jurnal internasional terkemuka (terindeks dalam Scopus) dengan sitasi 1455 dan h-indeks 19. Beliau telah menghasilkan lebih dari 28 lulusan doktor yang sekarang menjadi dosen/guru besar di berbagai universitas di Indonesia dan luar negeri.