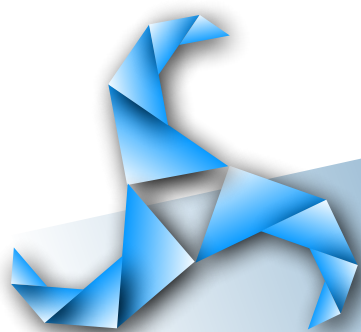


ISSN 1881-6134

# 鳥取大学数学教育研究

*Tottori Journal for Research in Mathematics Education*



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

小中接続期における分数の表記に関する研究  
～ATDにおけるプラクセオロジー分析を基に～

山本匠悟 *Shogo Yamamoto*

vol.20, no.3  
Feb. 2018



## 目次

- 第 1 章 本研究の目的と方法
  - 1.1 本研究の動機
  - 1.2 本研究の目的
  - 1.3 本研究の方法
  
- 第 2 章 本研究で用いる理論について
  - 2.1 教授学的転置理論について
  - 2.2 プラクセオロジーについて
  
- 第 3 章 教授学的転置の過程について
  - 3.1 学術的知識
  - 3.2 教えられるべき知識
  - 3.3 教えられた知識
  - 3.4 学ばれた利用可能な知識
  
- 第 4 章 各転置の **institution** における条件と制約
  - 4.1 学術的知識
  - 4.2 教えられるべき知識
  - 4.3 教えられた知識
  - 4.4 学ばれた利用可能な知識
  
- 第 5 章 まとめ
  - 5.1 本研究の結論
  - 5.2 残された課題

引用・参考文献

参考資料

## 第 1 章

### 本研究の目的と方法

- 1.1 本研究の動機
- 1.2 本研究の目的
- 1.3 本研究の方法
- 1.4 先行研究

本章では、本研究の目的や方法について述べる。

1.1 では、本研究のテーマを設定した背景を述べる。

1.2 では、本研究の目的を述べる。

1.3 では、本研究の方法について述べる。

1.4 では、先行研究のレビューについて述べる。

## 1.1 本研究の動機

筆者は数学に関する大学の講義内で、小学校の分数の分野における教科書分析をグループで行った。教科書分析を進めていく中で、教科書の記述や表記のしかたについて疑問を抱いた点を挙げていき、それらを解決する方法を提案した実験教科書を作成した。教科書分析を進めていく中で、あるところから突然、何の断りもなく分数の分母分子内に式が表記されていることに、筆者は疑問を抱いた。

## 1.2 本研究の目的

本研究の目的は、分数の表記について児童・生徒がどのような意識を持っており、分数を理解する上でどのような困難さがあるのか、また、分数を指導する教師にとってどのような障壁があるのかを考察することである。

## 1.3 本研究の方法

上記の目的を達成する方法として、本研究では、まず、本研究を進める上での理論的基盤として援用する教授人間学理論について述べる。また本研究では、教授人間学理論における教授学的転置やそれを外在的に視るための基本認識論モデル、人間によって遂行された行為について記述するプラクセオロジーの概念を用いるため、これらについて述べる。(第2章)次に、教授学的転置の過程を一つ一つ明らかにしていき、(第3章)教授学的転置の過程におけるそれぞれ *institution* において、どのような制約や条件があるのかを考察する。(第4章)最後に、本研究の結論と残された課題を明らかにする。(第5章)

## 1.4 先行研究

本研究を進めるにあたり、先行研究のレビューを行った。筆者が調べた限りでは、分数の計算の指導についての研究はみら

れたものの、分数の分母分子の式表記についての先行研究は、みあたらなかった。そこで、分数の計算の指導についての研究のレビューをするために、佐藤・川島・石川(2014)、京極(2015)、黒崎・圓井(2011)を参照した。しかし、分数の指導法の改善についての考察はされていたものの、分数の分母分子の式表記についての言及はみられなかった。

## 第 2 章 本研究で用いる理論

- 2.1 教授人間学理論
- 2.2 教授学的転置と基本認識論モデル
- 2.3 プラクセオロジー分析

本章では、本研究で援用する理論について述べる。

2.1 では、本研究の理論的基盤である、教授人間学理論について説明する。

2.2 では、数学者などによって生産された知が学習者に学ばれるまでの過程を捉える教授学的転置理論について説明する。

2.3 では、人間によって遂行された行為を分析する枠組みであるプラクセオロジーの概念について説明する。

## 2.1 教授人間学理論

学校で教えられる(数学の)内容あるいは知識は、社会のニーズによって学校教育(学校数学)に持ち込まれたものである。また、学校教育に持ち込む作業の過程において、様々な制約や条件を基に転置が行われていると考えられる。このように、何らかの知に対して転置を視る理論として、教授学的転置理論がある。この理論に、プラクセオロジーなどの知の本性或知の構成の概念を取り入れて拡大したものが教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic, 以下 ATD) である。

## 2.2 教授学的転置理論

教授学的転置過程は、学校数学を適切に解釈しようとするものであり、その各々の起源が数学的知識を生み出す *institution*, すなわち数学を扱う特定の社会 (集団) や場所の中にあるとする。その中において、「教えられるべき知識」は学術的知識の中から *institution* の何らかの条件や制約が働いたうえで、選択したことが認められる。この条件・制約は国や学校、教室が異なれば、*institution* も異なるため、その結果として顕在化する「教えられた知識」も異なる。しかしながら、それは必ずしも教室内の要因によるものだけではなく、より上位の *institution* での知の決定に影響を受けていると指摘される。

また、小学校で導入されるときに扱われる単位分数など、分数は有理数の表現形式のひとつとして考えられているが、中学校で扱われる文字式や方程式に分数が含まれるときなどでは、そのような意味とは別に存在していると考えられる。分数の見方は1つではないと考えられるが、小学校、中学校の教員や教科書執筆者ではどのような視点をもって分数が含まれる教材の指導が行われており、その中で何が教えられており、何が教えられていないか、つまり、そこには *institution* のどのような条件・制約があるのかを明らかにする必要があると考えられる。



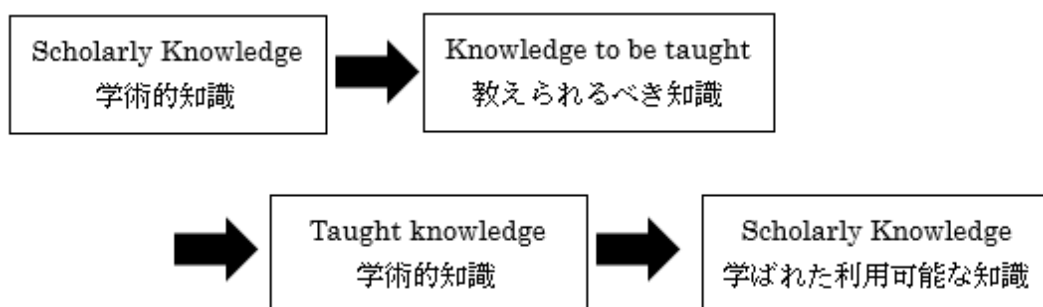


図 2.2.1 教授学的転置過程

さらに、筆者も含む研究を行う研究者は、この転置の過程におけるどの *institution* にも属さない。これは、それぞれの知識や *institution* の条件や制約を視るためには、研究者はこれらの知識とは断絶してみることを要求されるためである。したがって、それぞれの知識や *institution*、さらには転置の間を視るために、外的な立場として、基本認識論モデル (Reference Epistemological Models, 以下 REM) を設ける必要がある。

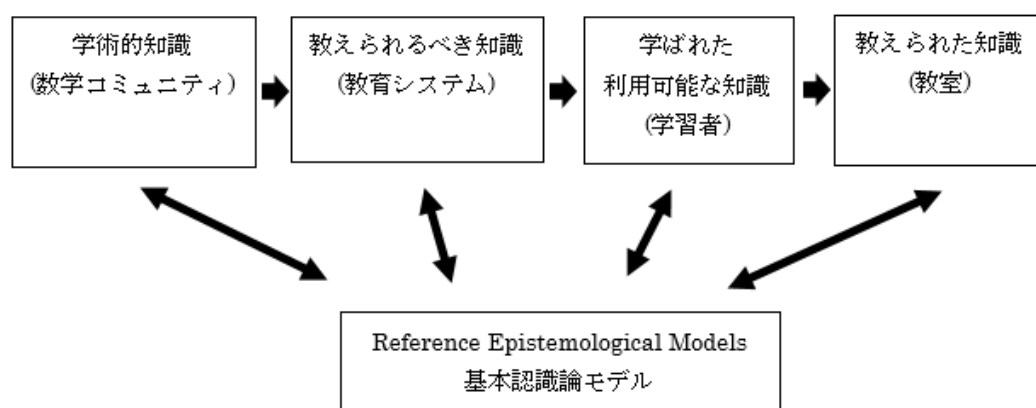


図 2.2.2 研究者の(外的な)立場を示す基本認識論モデル

## 2.3 プラクセオロジー

プラクセオロジー(plaxeology)とは、「praxis (実践)」と「logos (理論)」という 2 つが組み合わさった造語であり，人間が行った行為について，その背景にはどのような理由があると考えられるのか分析する概念である。構成要素として，タスクタイプ(type of tasks), テクニック(techniques), テクノロジー(technology), セオリー(theory)の 4 つからなり，タスクタイプとテクニックをまとめて実践部分(praxis block)といい，テクノロジーとセオリーを(logos block)という。

以上のように，プラクセオロジーは人間によって遂行されたいかなる行為も分析することを可能にする。この概念を本研究に用いることで，分数を視ただけではわからない，分数に表したことの意図についてその背景となっている既知の内容や図，言葉などから，セオリーの違いを分析する。換言すると，ある分数や分数同士の計算についてのテクニックの違いを視ることが目的ではなく，そのテクニックを行うこと背景にあるテクノロジーやセオリーの違いを視ることによって様々な視点があり，その視点の違いからどのような差が考えられるのかについて分析する。

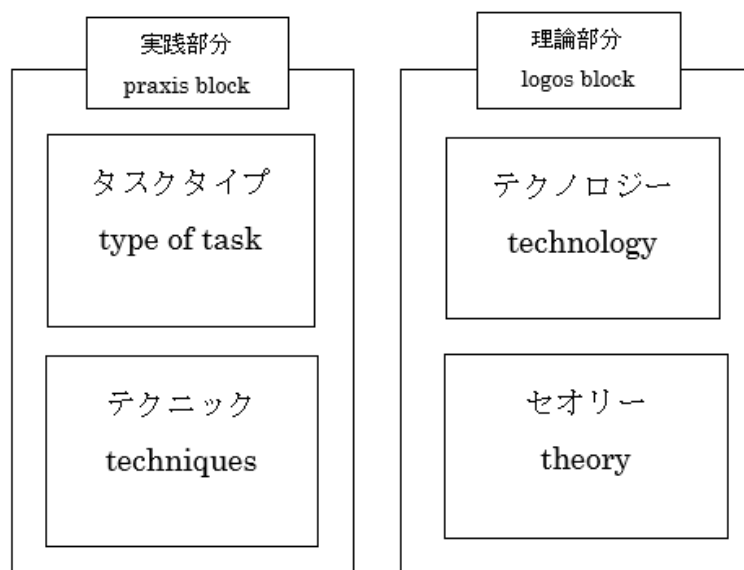


図 2.3.1 プラクセオロジーとその構成要素

## 第3章 教授学的転置の過程について

- 3.1 学術的知識
- 3.2 教えられるべき知識
- 3.3 教えられた知識
- 3.4 学ばれた利用可能な知識

本章では、教授学的転置理論に基づいて、それぞれの過程において、分数がどのように扱われているのかを明らかにする。

3.1 では、分数の誕生や歴史について示す。

3.2 では、現行の小学校の学習指導要領において分数がどのように扱われているかを明らかにした上で、現行の教科書の分析を行う。

3.3 では、現職の教員を対象としたアンケートについて述べる。

3.4 では、児童・生徒を対象としたアンケートについて述べる。

### 3.1 学術的知識

ここでは、分数が誕生したきっかけやその後の歴史について述べていく。分数がどのようにして誕生したのかについて、大矢ら(1957)は次のように述べている。

人間がまだ未開であった時代には、人々は、ひとつ、ふたつ、みつつ、……というような数すなわち整数で間に合った。もちろん、物を分配するときなどは、それだけでは都合の悪いこともあったが、しかし、なるべくならば、これですませようとしたのである。

つまり品物がたくさんある場合なら、きっちり同じにするということをやめて、特別な人間(たとえば、地位の高い、あるいは功労などのあった人)にたくさんやるということにすれば、品物を分割する必要はなくなってくる。われわれも、このような分配方法をとることがある。

しかし品物が少ない場合には、どうしても分割しなければならないことがおこる。これが分数のそもそものおこりである。

(中略)

D. E. スミスの数学史の第2巻には、この問題について、おおよそつぎのように述べられている。

分数の加法及び減法において、初期の若者たちは、与えられた分数の分母の積をとって、新しい分母とするのが常であった。そしてその結果約分できる場合には約分するのである。

例えば  $\frac{3}{4}$  と  $\frac{5}{6}$  とを加える場合にはつぎのようにする。

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$$

(中略)

分数の掛算の运算形式には非常にいろいろなものがあった。それらの大部分はアラビアから来たのであるが、中でも、アルカルキ(1020年頃)が始めたつぎのやり方は、その典型的なものである。

それは今の表し方をすれば

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

のようなやり方で、これは分数の掛算を、分数を整数で割ることに変えているものである。

つまり、小さい数を大きな数で割ることがどうしても必要となってきたことで、分数は誕生したと考えられる。また、分数の表記については、分数の計算過程は記されていたものの、分母分子に計算式が含まれる計算過程の記述はみあたらなかった。しかし、分数の起源をみると、分数の分母分子に式を表記することを想定していないことから、分母分子に式を表記することで何らかの困難さがあると考えられ、学習の内容に位置づけられることは容易に考えられる。

## 3.2 教えられるべき知識

ここでは、現在の日本の算数教育において分数がどのように扱われているのかを明らかにするために、教育課程の基準とされている学習指導要領と、その学習指導要領に基づいて作成された検定教科書を分析する。

### 3.2.1 現行の学習指導要領

分数の指導において、日本の数学教育の中でどのように扱われているのかについて、現行の学習指導要領をもとに分析する。以下の表は、平成 20 年 3 月に告示された小学校学習指導要領算数科の中で、分数に関係のある目標や内容をまとめたものである。

学年	目標	内容
小学第 2 学年	具体物を用いた活動などを通して、数についての感覚を豊かにする。数の意味や表し方についての理解を深めるとともに、加法及び減法についての理解を深め、用いることができるようにする。また、乗法の意味について理解し、その計算の仕方を考え、用いることができるようにする。	A 数と計算 (1) 数の意味や表し方について理解し、数を用いる能力を伸ばす。  オ $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{4}$ など簡単な分数について知ること。
	加法及び減法を適切に用いることができるようにするとともに、乗法についての理解を深め、適切に用いることができるようにする。また、除法の意味について理解し、その	A 数と計算 (6) 分数の意味や表し方について理解できるようにする。  ア 等分してできる部分の大きさや端数部分の大きさ

<p>小学第3学年</p>	<p>計算の仕方を考え、用いることができるようにする。さらに、小数及び分数の意味や表し方について理解できるようにする。</p>	<p>を表すのに分数を用いること。また、分数の表し方について知ること。</p> <p>イ 分数は、単位分数の幾つかかで表せることを知ること。</p> <p>ウ 簡単な場合について、分数の加法及び減法の意味について理解し、計算の仕方を考えること。</p>
<p>小学第4学年</p>	<p>除法についての理解を深め、適切に用いることができるようにする。また、小数及び分数の意味や表し方についての理解を深め、小数及び分数についての加法及び減法の意味を理解し、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。さらに、概数について理解し、目的に応じて用いることができるようにする。</p>	<p>A 数と計算</p> <p>(6) 分数についての理解を深めるとともに、同分母の分数の加法及び減法の意味について理解し、それらを用いることができるようにする。</p> <p>ア 簡単な場合について、大きさの等しい分数があることに着目すること。</p> <p>イ 同分母の分数の加法及び減法の計算の仕方を考え、それらの計算ができること。</p>
	<p>整数の性質についての理解を深める。また、小数の乗法及び除法や分数の加法及び減法</p>	<p>A 数と計算</p> <p>(4) 分数についての理解を深めるとともに、異分母の分数の</p>

<p>小学第5学年</p>	<p>の意味についての理解を深め、それらの計算の仕方を考え、用いることができるようにする。</p>	<p>加法及び減法の意味について理解し、それらを用いることができるようになる。</p> <p>ア 整数及び小数を分数の形に直したり、分数を小数で表したりすること。</p> <p>イ 整数の除法の結果は、分数を用いると常に一つの数として表すことができることを理解すること。</p> <p>ウ 一つの分数の分子及び分母に同じ数を乗除してできる分数は、元の分数と同じ大きさを表すことを理解すること。</p>
<p>小学第5学年</p>		<p>エ 分数の相等及び大小について考え、大小の比べ方をまとめること。</p> <p>オ 異分母の分数の加法及び減法の計算の仕方を考え、それらの計算ができること。</p> <p>カ 乗数や除数が整数である場合の分数の乗法及び除</p>



		<p>法の意味について理解し，計算の仕方を考え，それらの計算ができること。</p>
<p>小学第6学年</p> <p>小学第6学年</p>	<p>分数の乗法及び除法の意味についての理解を深め，それらの計算の仕方を考え，用いることができるようにする。</p>	<p>A 数と計算</p> <p>(1) 分数の乗法及び除法の意味についての理解を深め，それらを用いることができるようにする。</p> <p>ア 乗数や除数が整数や小数である場合の計算の仕方を基にして，乗数や除数が分数である場合の乗法及び除法の意味について理解すること。</p> <p>イ 分数の乗法及び除法の計算の仕方を考え，それらの計算ができること。</p> <p>ウ 分数の乗法及び除法についても，整数の場合と同じ関係や法則が成り立つことを理解すること。</p>

上の表から分かるように、現行の小学校学習指導要領において、分数の意味や表し方について理解することについては明文化されているが、分数の表記については明文化されていない。また、小学第 5 学年の内容の中に、次のような項目がある。

「一つの分数の分子及び分母に同じ数を乗除してできる分数は、元の分数と同じ大きさを表すことを理解すること。」

ここで注目したいのは、「一つの分数の分子及び分母に同じ数を乗除して」という部分である。この部分を読むと、乗除の計算をする際、分母分子内に式を表記してもよいか否かが不明瞭である。そのため、検定教科書を出版する教科書会社ごとにこの部分の捉え方が異なり、教科書会社ごとに制約や条件が異なると考えられる。また、学習指導要領は、先ほどの学習内容を位置付けていないことから、少なくとも学習指導要領においては、分母分子に式を表記することに困難さがあるようには見られない。

### 3.2.1 教科書分析

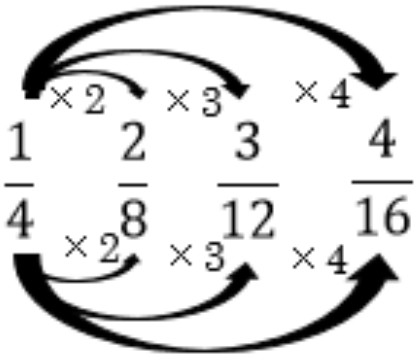
現行の学習指導要領によって定められた目標や内容に沿って作成された検定教科書の分析をおこなった。分析対象は、分数を含む計算を学習する小学第 4 学年から中学第 1 学年までの教科書とし、T 社、K 社、G 社の 3 社の教科書を分析した。教科書の記述について分数の表記に着目し、留意していることがあるかどうかを考察する。また、教科書で扱われている分数の計算問題について分析する場合は、ATD のプラクセオロジーの概念を用いて記述する。

まず、小学第 4 学年からみていく。小学第 4 学年では、同分母の加減の計算が記述されていた。同分母の分数の和や差を求める場合、分子同士を足したり割ったりすることで求めること

ができることを記述していた。しかし、分数の分子に式を表記する計算過程の記述はしていないことから、分数の分子に式を表記することに慎重になっていると考えられる。

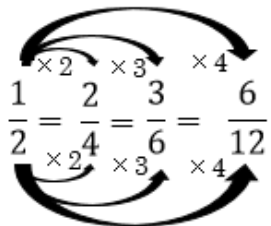
第5学年になると異分母どうし分数の加減や分数の乗除の計算を学習する。異分母どうしの分数の加法を計算するためには通分や約分をすることが必要になるため、その前に大きさの等しい分数を求める方法を考える問題が扱われていた。この問題についてプラクセオロジー分析を行うと、以下の表のようになった。

### T社

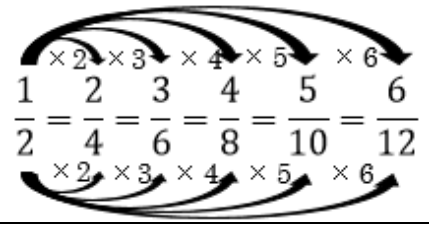
<p>タスクタイプ：</p> <p>下の図を見て<math>\frac{1}{4}</math>と大きさの等しい分数のつくり方を考えましょう。</p> 	<p>テクノロジー：</p> <p>記述なし (分母分子に同じ数をかけても分数の大きさは変わらない。)</p>
<p>テクニック：</p> $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$ $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$	<p>セオリー：</p> <p>記述なし (☆比の概念)</p>

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{4 \times 4} = \frac{4}{16}$	
--	--

### K社

<p>タスクタイプ：</p> <p><math>\frac{1}{2}</math>に等しい分数<math>\frac{2}{4}</math>、<math>\frac{3}{6}</math>、<math>\frac{4}{8}</math>の つくり方をいみましょう。</p>	<p>テクノロジー：</p> <p>記述なし (分母分子に同じ数をかけても 分数の大きさは変わらない。)</p>
<p>テクニック：</p> 	<p>セオリー：</p> <p>記述なし (比の概念)</p>

### G社

<p>タスクタイプ：</p> <p>数直線の図から<math>\frac{1}{2}</math>と大きさ の等しい分数を見つけ、分母 分子がそれぞれ何倍になって いるか考える。</p>	<p>テクノロジー：</p> <p>記述なし (分母分子に同じ数をかけても 分数の大きさは変わらない。)</p>
<p>テクニック：</p> 	<p>セオリー：</p> <p>記述なし (比の概念)</p>

タスクタイプはある分数と大きさの等しい分数を見つけることである。このタスクを遂行するテクニックとして、T社はここで分母分子に式を表記する計算過程を記述していた。この時点で分母分子に式を表記する分数を定義する記述はされていないため、分数の分母分子に式を表記することに対して留意していないと考えられそうである。しかしこの直後に、分母分子に式が表記される分数の定義がされており、他の2社においても同様のタイミングで式が表記される分数の定義をしていることから、3社とも分母分子に式を表記する分数を記述しないように留意していたものの、これ以降で分数の乗除の計算を学習し、分母分子をかけたり割ったりする作業がでてくることから、やむを得ず分母分子に式を表記する分数の記述をしたと考えられる。分母分子に式を表記する分数を定義した以降の分数の計算においては、分母分子に式を表記する分数を自然に記述していた。

したがって、今回分析対象とした3社の教科書執筆者 *institution* においては、分数の分母分子の式表記について意識していると考えられる。

### 3.2.2 REM の抽出

前節において、分母分子内に式を表記する分数が記述され始めた問題についてプラクセオロジー分析を行った。その結果、分数には2つの機能があることを見出した。1つ目は「数の表し方」としての機能をもつ分数である。これは、 $\frac{1}{3}$  や  $\frac{15}{20}$  のように数を表すための分数として扱われているものを指す。2つ目は「数を求めるための式」としての機能をもつ分数である。これは、 $\frac{15 \div 5}{20 \div 5}$  というように他の数を求めるための道具として

扱われているものを指す。この2つの視点を本研究では分数の表記についてのREMとして設定し、次節以降の教えられた知識と学ばれた利用可能な知識を分析するときの研究の立場とする。

### 3.3 教えられた知識

#### 3.3.1 教師のアプリオリ分析

教員用のアンケートのアプリオリ分析については、筆者の能力や教師としての経験が不足しており、プラクセオロジーを用いた分析は困難であると判断したため、今回は行わないこととする。

#### 3.3.2 教師のアポステリオリ分析

各アンケートの記述について、プラクセオロジー分析を行うと、以下のようなになる。

##### 教授プラクセオロジー①

実践部	理論部
タスクタイプ： 分数の分母分子に式を表記すること	テクノロジー： (図がないため不明)
テクニック： 図で考えさせる	セオリー：—

##### 教授プラクセオロジー②

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー： (図がないため不明)
テクニック：図と共に式の意	セオリー：—

味づけを行う	
--------	--

### 教授プラクセオロジー③

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授（帯分数から仮分数）	テクノロジー：
テクニック： $\textcircled{1} \frac{3}{5} \Rightarrow \left(\frac{5+3}{5}\right) \Rightarrow \frac{8}{5}$ ○で囲む ここはかかない	セオリー：

### 教授プラクセオロジー④

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

### 教授プラクセオロジー⑤

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：
テクニック：単位分数の何個分かを考えさせる	セオリー：

### 教授プラクセオロジー⑥

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母	テクノロジー：—

分子に式を表記すること」の教授	
テクニック：—	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑦

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑧

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑨

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑩

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—



テクニック：手際よく計算するための方法として、一つの分数として表す学習指導を行う	セオリー：—
--	--------

教授プラクセオロジー⑪

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー： (図がないため不明)
テクニック：	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑫

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

教授プラクセオロジー⑬

実践部	理論部
タスクタイプ：「分数の分母分子に式を表記すること」の教授	テクノロジー：—
テクニック：—	セオリー：—

「留意したことがない」という回答もみられたが、プラクセオロジー分析の結果から、アンケートの問いについてそもそも理解していないものもみられた。それらは、アンケート調査の目的を「分数の表記」ではなく、「分数の計算の理解」であると捉え

て、回答されたものが多分に視られた。これは、教員の日々の教授・学習において、「分数を含んだ計算の理解」について考慮されていることが理由として考えられる。また、これらの回答は、分数の分母分子に式を表記することについては留意していない、つまり、困難さを感じておらず、障壁として捉えていないと考えられる。

また、テクニックとして、「分数と図を結びつける」というものが視られた。これについて、どのような図を指しているのかまでは回答になかったため、そのテクノロジー理論部について記述はできない。しかしながら、教科書などをもとに、図について例を挙げると、例えば以下のようなものが考えられる。

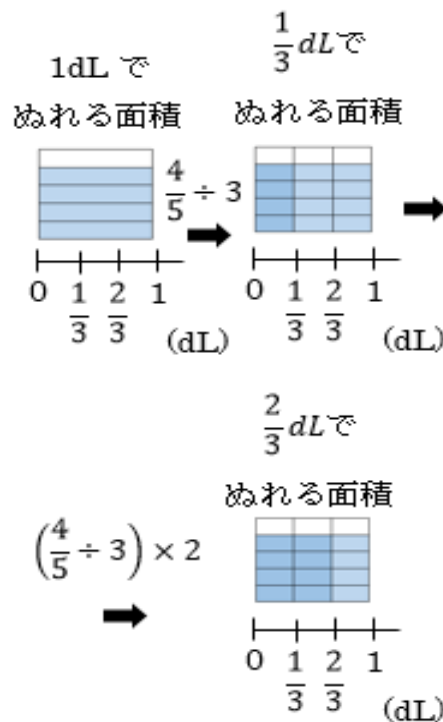


図 3.3.2.1 分数の意味付けの図

またそのプラクセオロジーは以下のように記述される。

数学プラクセオロジー①

実践部分	理論部分
<p>タスクタイプ：</p> <p>1dL で、板を <math>\frac{4}{5}</math> m<sup>2</sup>ぬれるペンキ があります。このペンキ <math>\frac{2}{3}</math> dL では、板を何m<sup>2</sup>ぬれます か。</p>	<p>テクノロジー：</p> <p>記述なし (一方の数を大きくすると、も う一方の数も大きくなる)</p>
<p>テクニック：</p> $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ $= \left(\frac{4}{5} \div 3\right) \times 2$ $= \frac{4}{5 \times 3} \times 2$ $= \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$ $= \frac{8}{15}$	<p>セオリー：</p> <p>記述なし (倍概念)</p>

### 3.4 学ばれた利用可能な知識

前節では、分数の分母分子に式が表記されることで、数学(算数)を指導する教員にとってどのような困難さや障壁があるのかについて分析・考察した。本節では、学習者(児童・生徒)が分数を学習するにあたり、分数の分母分子に式が表記されることで、どのような困難さがあるのかを ATD のプラクセオロジーの概念を用いて分析・考察する。

#### 3.4.1 学習者のアプリオリ分析

##### 3.4.1.1 (1)について

実践部分	理論部分
タスクタイプ： $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$	テクノロジー： 同分母どうしの分数の差は、分子の大きさの差を求めることで求まる
テクニック： ① $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ ② $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8-4}{5} = \frac{4}{5}$ ③ $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5+3}{5} - \frac{4}{5}$ $= \frac{5+3-4}{5} = \frac{4}{5}$	セオリー： 同分母どうしの分数の和や差の求め方

(1)についての3つのテクニックにおいて、テクノロジーやセオリーは同じであるが、分子に式を表記するものとそうでないものを提示することで、分数を「数の表し方」として認識しているか、もしくは「数を求めるための式」として認識している

かが明らかになると考えられる。

また、調査実施校で使用されている教科書では、分数の減法を計算する際、分子に式が含まれる計算過程は記述されていない。そのため、(1)においては分子に式が含まれる途中式が記述されていない①を選ぶ児童(生徒)が多くなり、分数が「数を求めるための式」となっていることに違和感を抱く学習者が出てくると予想される。

### 3.4.1.2 (2)について

実践部分	理論部分
タスクタイプ： $\frac{3}{10} \times 2$	テクノロジー： 分数と整数の積は、分数の分子に整数をかけることで求まる
テクニック： ① $\frac{3}{10} \times 2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{10} \times 2 = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{10} \times 2 = \frac{1}{10} \times (3 \times 2)$ $= \frac{1}{10} \times 6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	セオリー： 同数累加

調査実施校で使用されている教科書では、分数の乗法を計算する際、分母と分子をそれぞれかけ、分母分子に式を表記する計算過程の記述がされている。そのため、分数を含む乗法においては、分子に式が含まれる計算過程の記述に違和感を抱く学習者と抱かない学習者の両者が出てくると考えられる。

したがって、(2)においては、分子に式が含まれる計算過程を

記述していない①と，教科書の記述に最も近い②を選択する学習者が多くなると予想される。

### 3.4.1.3 (3)について

実践部分	理論部分
タスクタイプ： $\frac{a}{4} \div \frac{3}{2}$	テクノロジー： ①②分数どうしの商は，割る数の逆数をかけることで求まる  ③等しい分数の求め方
テクニック： ① $\frac{a}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{a}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2a}{12} = \frac{a}{6}$ ② $\frac{a}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{a}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{a \times 2}{4 \times 3}$ $= \frac{2a}{12} = \frac{a}{6}$ ③ $\frac{a}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{a \div 3}{4 \div 2}$ $= \frac{a \div 3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{a}{6}$	セオリー： ①②分数どうしの商の求め方  ③比の概念

調査実施校で使用されている教科書では，2つの分数の除法の計算において，分母分子に式を表記する計算過程の記述はなかったが，乗除を含む3つの分数の計算過程では，分母分子に式が表記される計算過程の記述が見られた。一方，比の概念を用いて分母分子に同じ数をかけたり割ったりする方法の記述は見当たらなかった。

したがって，分母分子内に式が含まれない(1)と分母分子内に

式が含まれる(2)のいずれかを選ぶ者が多くなると予想される。

### 3.4.2 学習者のアポステリオリ分析

分数の表記に関する記述をしていた学習者のプラクセオロジー分析をすると、以下のようになる。

#### プラクセオロジー①

実践部	理論部
タスクタイプ： $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$	テクノロジー： ②は、 $\frac{8-4}{5}$ という分らない分数があったから。③は、いちばん長くて $\frac{5+3}{5}$ や $\frac{5+3-4}{5}$ があったから。
テクニック： ① $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$	セオリー： 分数表記

#### プラクセオロジー②

実践部	理論部
タスクタイプ： $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$	テクノロジー： ②をえらばなかったわけは、 $8-4$ と小数になってなかったからです。③をえらばなかったのは、 $\frac{5+3}{5} - \frac{4}{5}$ は、少数はあるけど+という $5+3$ がちがう

	とおもったからです。
テクニック： ① $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$	セオリー： 分数表記

実践部	理論部
タスクタイプ： $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$	テクノロジー： ②は考える時間がながくなるから。③は考える時間がながくなるから。
テクニック： ① $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$	セオリー： 四則演算

プラクセオロジー分析の結果から、分数の分母分子内に式を表記することについて違和感を覚えている回答もみられた。例えば、(1)において①を選択した児童は「②をえらばなかったわけは、8-4と小数になってなかったからです。」と記述している。これは、分数を「数の表し方」として捉えており、分子を分母で割ったものが小数にならない分数を記述することに違和感を抱いていると考えられる。

一方で、どの学年にも分数の計算を短時間で正確に解きたいことを理由として回答されたものが多分に見られた。これは、学習者の日々の学習やテストにおいて、「なるべく早く正確に計算すること」を求められていることが理由として考えられる。またこのような回答は、分数の分母分子に式を表記するこ



とについては留意していない。つまり，困難さを感じていない  
と考えられる。

## 第 4 章

### 各転置の institution における条件と制約

- 4.1 学術的知識
- 4.2 教えられるべき知識
- 4.3 教えられた知識
- 4.4 学ばれた利用可能な知識

本章では, 前章で明らかになった, それぞれの過程における institution において, どのような制約や条件が含まれているのかについて考察する.

#### 4.1 学術的知識

人間が未開であった頃の人々 *institution* において「少ない品物の分配をするために用いること」が学術的知識の *institution* における条件であると考えられる。

#### 4.2 教えられるべき知識

文部科学省 *institution* において、等分してできる部分の大きさや端数部分の大きさを表すために分数を用いることが条件として考えられる。

#### 4.3 教えられた知識

教師を対象としたアンケート調査から、教員の日々の教授・学習において、「分数を含んだ計算の理解」について考慮させられていることが考えられ、これが教師 *institution* の制約となり、働いたと考えられる。

#### 4.4 学ばれた利用可能な知識

前節に続き、筆者が実施したアンケート調査から。「分数の計算を早く正確に行うこと」が学習者 *institution* において、制約として働いたと考えられる。

## 第5章 まとめ

- 5.1 本研究の結論
- 5.2 残された課題

本章では，本研究の結論と残された課題について述べる。

## 5.1 本研究の結論

第1章で示したように、本研究の研究課題は以下の通りであった。

分数の分母分子に式が表記されることによって、児童や生徒が分数を理解する上でどのような困難さがあるのか。また、算数(数学)を指導する教師にとってどのような困難さや障壁があるのか

上記の研究課題について、その結論を述べる。まず、現行の教科書では、分数の分母分子内に式を表記しないように留意していたものの、大きさの等しい分数や、分数の乗除の計算において分数の分母分子に式を表記する必要性が出てきたことから、分母分子内に式を表記してもよいことを定義して、分数を「数の表し方」または「数を求めるための式」として用いることを示していた。

また、教師を対象としたアンケート調査では「分数の計算をどのように理解させるか」について留意している回答が見られ、分数の分母分子に式を表記することについて、困難さや障壁はみられないと考えられる。

さらに、学習者を対象としたアンケート調査では、分数の計算を早く正確に行うことができることを重視していることから、教師と同様に分数の分母分子に式を表記することについて困難さはみられないと考えられる。

## 5.2 残された課題

プラクセオロジー分析が適切に行えていない部分があることや、教授学的転置のそれぞれの *institution* における制約や条件をさらに理論的に考察していくことが今後の課題として挙げられた。

## 引用・参考文献

宮川健 (2009/2011) 「フランスを起源とする数学教育学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, Vol.94, pp.37-68

ボスク.M, ガスコン.J (2017) 大滝孝治・宮川健(訳) 「教授学的転置の 25 年」『上越数学教育研究』第 32 号, pp105-118

大矢真一, 徳永吉晴, 安藤泰三 (1957) 「分数と小数」, 新興出版社・啓林館

文部科学省(2008) 小学校学習指導要領解説 算数編

文部科学省(2008) 中学校学習指導要領解説 数学編

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導いただいた多くの方々に、心より感謝申し上げます。

指導教官である溝口先生には、1回生の早い時期から数学の講義をどのように履修していけばよいかを教えていただき、余裕を持って講義を履修することができました。また、本研究を進めるにあたり、どのように研究を進めればよいか分からなかった私に、丁寧にかつ、熱心にご指導いただいたこと、深く感謝いたします。

研究室の先輩である荻原友裕さんには、1回生の頃から様々な面でご助言やご指導をいただきました。工学部の数学の講義の内容をどのように勉強していけばよいか教えていただいたことで、落ち着いて授業に臨むことができたり、やるべきことや論文の書き方などを丁寧に教えていただいたりしました。心から感謝いたします。同じく、研究室の先輩である若林直広さんも、私が3回生で初めて夏合宿に参加した際、どのように行動すればよいか分からなかった時に分かりやすく教えてくださったり、数学の授業の内容が分からないときに一緒に考えていただいたりしたことなど、様々な場面でお世話になりました。

また、蒜山で催された夏合宿では、大阪教育大学の真野先生、埼玉大学の松寄先生や鳴門教育大学の早田先生をはじめ、大阪教育大学の皆様、埼玉大学の皆様、鳴門教育大学の皆様、溝口研究室のOBの皆様から、たくさんのご助言、ご指導をいただきましたこと、心より感謝申し上げます。

以上のように本当に多くの方に支えられて、無事に本研究を完成させることができましたこと、深く御礼申し上げます。

平成30年1月  
山本匠悟

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

#### 編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 [tsyabe@rs.tottori-u.jp](mailto:tsyabe@rs.tottori-u.jp)

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 [mizoguci@rs.tottori-u.ac.jp](mailto:mizoguci@rs.tottori-u.ac.jp)

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

#### 投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育及び数学教育学に関わる、研究論文／実践報告
  - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDF とします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー(vol.9 以降)を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101(溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>