Van der Waerdenin lauseen algebrallinen todistus

Pro gradu -tutkielma
Mauno Hepola
Y48373746
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2022

Tiivistelmä

Tämä tutkielma esittelee van der Waerdenin lauseen ja erään tavan todistaa se algebrallisesti. Lause väittää, että mielivaltaisesti äärelliseen määrään osajoukkoja ositetussa luonnollisten lukujen joukossa johonkin osajoukkoon sisältyy halutun mittainen (mutta äärellinen) aritmeettinen sarja. Usein tämä ilmaistaan myös luonnollisten lukujen värittämisenä ja yksivärisenä sarjana. Van der Waerden todisti lauseen kombinatoriikan avulla. Samoin ovat tehneet monet muut hänen jälkeensä.

Tässä tutkielmassa esitellään kuitenkin algebrallinen todistus. Vuonna 1978 Bergelson, Furstenberg, Hindman ja Katznelson julkaisivat todistuksen, joka käyttää luonnollisten lukujen kompaktisointia ja idempotentteja.

Ennen varsinaista todistamista esitellään tarvittavia apuneuvoja, kuten Zornin lemma, luonnollisten lukujen Stone–Čech-kompaktisointi $\beta\mathbb{N}$ sekä ideaalien ja idempotenttien ominaisuuksia. Avaruudesta $\beta\mathbb{N}$ ja ei-kommutatiiviseksi osoittautuvasta yhteenlaskusta muodostetaan puoliryhmä, lopulta kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä, jossa halutun mittaisen aritmeettisen sarjan olemassaolo jossakin osajoukossa saadaan lyhyesti todistetuksi.

Todistusta varten luodaan joukko kaikista halutun pituisista aritmeettisista sarjoista ja tämän joukon sulkeuma avaruudessa $\beta\mathbb{N}$. Osoitetaan, että sulkeumaan sisältyy välttämättä idempotenttisarja ja tämä vastaa juuri etsittyä yksiväristä sarjaa.

Tämä idempotenttimenetelmä osoittautui hyvin käyttökelpoiseksi. Sillä todistettiin monia muitakin lauseita. Tutkielman lopussa esitellään esimerkkinä Hales–Jewettin lause ja sen todistaminen.

Tutkielman päälähteenä on Bergelsonin, Furstenbergin, Hindmanin ja Katznelsonin artikkeli *An Algebraic Proof of van der Waerden's Theorem*. Tärkeimpänä apulähteenä on Hindmanin ja Straussin teos *Algebra in the Stone–Čech Compactification*.

Abstract

This study presents the van der Waerden's theorem and one method of proving it algebraically. The theorem states that if the natural numbers are arbitrarily partitioned into finitely many subsets, one of these subsets will contain an arithmetic progression of a desired length (although finite). This is often also expressed as the colouring of the natural numbers and as monochromatic arithmetic progression. Van der Waerden proved the theorem using combinatorics. Many others have since done the same.

This study, however, presents algebraic proof. In 1978, Bergelson, Furstenberg, Hindman and Katznelson published a proof which uses the compactification of natural numbers and idempotents.

Before the actual proof, the necessary tools will be presented, such as Zorn's lemma, the Stone–Čech compactification of natural numbers $\beta\mathbb{N}$, and the properties of ideals and idempotents. From space $\beta\mathbb{N}$ and non-commutative addition, it is possible to form a semigroup, ultimately a compact Hausdorff right topological semigroup, in which the existence of an arithmetic progression of the desired length in a subset is briefly proven.

For the proof, a set of all arithmetic progressions of the desired length and this set's closure in space $\beta\mathbb{N}$ are created. It will be shown that the closure must contain a set of idempotents, and this corresponds precisely to the monochromatic arithmetic progression that is sought.

This idempotent method proved to be very practicable. It was also used to prove many other theorems. Finally, the study presents the Hales–Jewett theorem and its proof as an example.

The primary source for this study is Bergelson's, Furstenberg's, Hindman's and Katznelson's article *An Algebraic Proof of van der Waerden's Theorem*. The most important auxiliary source is Hindman's and Strauss' work *Algebra in the Stone–Čech Compactification*.

Sisältö

Lukujoukoista

Huomautus luonnollisten lukujen joukosta:

Matemaattisessa kirjallisuudessa on kaksi käytäntöä siinä suhteessa, lasketaanko nolla luonnollisiin lukuihin vai ei. Tässä tutkielmassa – lähdekirjallisuutta seuraten – nolla ei ole luonnollinen luku. Siis

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

Kun tarvitaan nolla mukaan, käytetään merkintää

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on van der Waerdenin lause ja erityisesti sen algebrallinen todistaminen. Lauseen julkaisi v. 1927 hollantilainen matemaatikko Bartel Leendert van der Waerden. Sen pohjana oli aiempi Baudet'n olettamus. Olettamuksen mukaan luonnolliset luvut voidaan jakaa mielivaltaisesti kahteen joukkoon, joista toiseen sisältyy aina annetun pituinen aritmeettinen sarja.

Van der Waerdenin lause kuuluu laajemman Ramsayn teorian piiriin. Lause väittää, että mielivaltaisesti äärelliseen määrään joukkoja ositetussa luonnollisten lukujen joukossa johonkin osajoukkoon sisältyy halutun mittainen (mutta äärellinen) aritmeettinen sarja.

Ensimmäinen luku on lyhyt katsaus lauseen ja sen todistamisen historiaan. Useimmat esitetyt van der Waerdenin lauseen todistukset, alkuperäinen todistus mukaan lukien, ovat olleet joukko-opillisia, kombinatoriikkaan perustuvia. Algebrallinen todistaminen osoittautui haastavammaksi. Vuonna 1978 esitettiin lyhyt ja kaunis algebrallinen todistus artikkelissa Bergelson - Furstenberg - Hindman - Katznelson: *An Algebraic Proof of van der Waerden's Theorem* [1]. Juuri tätä todistusta käsitellään tässä tutkielmassa.

Toinen luku on omistettu Zornin lemmalle, joka on valinta-aksiooman ja hyvinjärjestyslauseen kanssa ekvivalenttinen ja jota käytetään tarkasteltavassa todistuksessa. Lemma todistetaan valinta-aksiooman avulla.

Kolmannessa luvussa todistajan apuvälineeksi otetaan luonnollisten lukujen Stone-Čech-kompaktisointi $\beta\mathbb{N}$, sillä kompaktissa avaruudessa jonkin olemassa oleminen voidaan todistaa helpommin kuin ei-kompaktissa. Luonnollisten lukujen joukkohan ei ole kompakti.

Neljännessä luvussa määritellään käsitteet ideaali, identiteetti ja idempotentti sekä käsitellään koko joukko niihin liittyviä lauseita. Algebrallisena rakenteena käytetään puoliryhmää.

Viidennessä luvussa muodostetaan luonnollisten lukujen kompaktisoinnista puoliryhmä yhteenlaskun kanssa. Kun osoittautuu, ettei yhteenlasku säilytä kommutatiivisuuttaan, todistuksessa käytetään oikeaa topologista puoliryhmää, jossa oikea yhteenlasku on jatkuva.

Kuudes luku sisältää viimein van der Waerdenin lauseen algebrallisen todistuksen. Kuitenkin ennen sitä täsmennetään vielä, että minimaaliset vasemmat ideaalit ja idempotentit ovat aina olemassa kompaktissa Hausdorffin oikeassa topologisessa puoliryhmässä, joka tässä vaiheessa on valittu todistamisessa käytettäväksi avaruudeksi. Muodostetaan aritmeettisten sarjojen joukot, joiden avulla todistaminen onnistuu.

Todistaminen tapahtuu lopulta alaluvussa 6.4 hyvin lyhyesti. Idempotenttien käyttäminen yksinkertaistaa sarjan matemaattista muotoa merkittävästi, ja osoittautuu, että tällainen idempotenttisarja toteuttaa van der Waerdenin lauseen.

Neil Hindman kumppaneineen on käyttänyt samankaltaista kompaktisoinnin ja idempotenttien yhdistelmää myös muiden lauseiden todistamiseen. (Katso lisäesimerkkejä ja tarkempia yksityskohtia lähteestä [5].) Tällaisesta esimerkkinä on luvussa seitsemän Hales–Jewettin lause.

1 Historia

1.1 Lauseen syntyhistoria

Hollantilainen matemaatikko Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) keksi vuonna 1926 Emil Artinin ja Otto Schreierin kanssa ([3], 118) todistuksen Baudet'n olettamukselle: "Jos kokonaislukujen jono 1,2,3,... jaetaan kahteen luokkaan, vähintään toisessa luokassa on l termin aritmeettinen sarja: $a, a+b, a+2b, \dots, a+(l-1)b$ riippumatta siitä, kuinka suuri pituus l on."

Van der Waerden ystävineen visualisoi ongelman ja päätyi numeroiden värittämiseen ja kombinatoriseen ratkaisuun. Värejä saattoi olla enemmänkin, $k < \infty$. Kombinatoriikassa tarkastellaan värien tms. eri järjestyksiä. Näin laajennettuna k väriin ja l termin aritmeettiseen sarjaan Baudet'n olettamuksesta muotoutui van der Waerdenin lause. Se voidaan ilmaista näin:

Lause 1.1. (Van der Waerdenin lause) *Olkoot l ja k positiivisia kokonaislukuja. Jokainen positiivisten kokonaislukujen k-väritys sisältää yksivärisen l-jäsenisen aritmeettisen sarjan. Lisäksi on olemassa positiivinen kokonaisluku $N = N(l,k)$ siten, että välillä $[1,N]$ positiivisia kokonaislukuja mikä tahansa k-väritys sisältää yksivärisen l-jäsenisen aritmeettisen sarjan.*

Tässä tutkielmassa ei paneuduta lauseen jälkimmäiseen osaan eli lukuun $N = N(l,k)$.

Van der Waerden julkaisi todistuksen vuonna 1927 artikkelissaan *Beweis einer Baudet'schen Vermutung* [9].

Voisiko lausetta vieläkin laajentaa? Kun aritmeettinen sarja saa olla mielivaltaisen pitkä, voisiko se olla ääretön? Ei voi. On helppo luoda sellainen väritys kahdesta väristä, ettei millään arvoilla a ja b voi olla äärettömän pitkää yksiväristä aritmeettista sarjaa: $a, a+b, a+2b, \dots$.

Luodaan väritys seuraavasti väreistä P(unainen) ja S(ininen)([7], s. 2):

$$PSSPPPSSSSPPPPP...$$

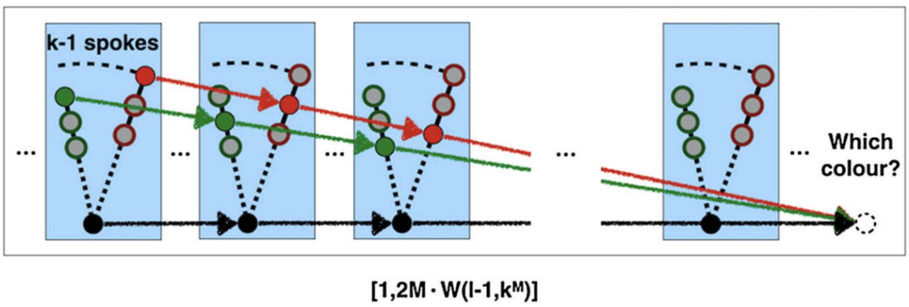
Luku yksi on siis punainen, kaksi ja kolme sinisiä, neljä, viisi ja kuusi punaisia. Yksivärisen jakson pituus kasvaa aina yhdellä. Tällöin on olemassa yksi jakso, jonka pituus on b. Tähän jaksoon osuu täsmälleen yksi aritmeettisen sarjan jäsen, jos a on pienempi tai yhtäsuuri kuin tämän jakson viimeinen kokonaisluku. Sarjan seuraava jäsen on välttämättä erivärinen.

Jos a on suurempi kuin edellä oletettiin, silloin koko sarja sisältyy jaksoihin, joiden pituus on suurempi kuin b. Sarjassa ei silloin voida hypätä enempää sinisten kuin punaistenkaan jaksojen yli. Ääretön aritmeettinen sarja ei siis voi olla yksivärinen edellä luodussa värityksessä.

1.2 Joukko-opilliset todistukset

Van der Waerdenin lause on kiinnostanut matemaatikkoja suuresti. Erilaisia todistuksia on julkaistu useita. Suuri osa niistä on alkuperäisen todistuksen lailla kombinatorisia. Visuaalisuuskin niissä näkyy mm. siinä, että julkaisu sisältää värikkäitä kaavakuvia. Tällainen on esimerkiksi Blondalin ja Jungićin artikkeli *Proof of van der Waerden's Theorem in Nine Figures* [2].

Näytteenä ratkaisukuva 1 ([2], s. 168, Kuvio 9), jossa viimeinen valinta tuottaa punaisen, vihreän tai mustan aritmeettisen sarjan, valittiinpa viimeisessä kohdassa mikä väri tahansa.



Kuva 1: Blondal–Jungić 2018: Punainen, musta tai vihreä sarja syntyy.

1.3 Algebrallisia todistuksia

Algebrallisia todistuksia ei ole esitetty monia. Tämän tutkielman aiheena on niistä yksi, vuonna 1978 julkaistu todistus. Se pohjautuu topologiaan ja käyttää luonnollisten lukujen kompaktisointia ja idempotentteja, joiden avulla varsinainen todistaminen sujuu nopeasti ja lyhyesti.

2 Zornin lemma

Olemassa olemisen todistuksissa käytetään usein Zornin lemmaa tai muita sen kanssa yhtäpitäviä lauseita. Näin tehdään myös van der Waerdenin lauseen todistamisessa.

Seuraavaa lemmaa kutsutaan Zornin lemmaksi.

Lemma 2.1. (Zornin lemma) *Jokaisella osittain järjestetyllä joukolla X, jossa jokaisella ketjulla C on yläraja, on suurin (maksimaalinen) alkio.*

On olemassa useita lauseita, jotka ovat ekvivalentteja Zornin lemman kanssa. Näitä ovat mm. valinta-aksiooma ja hyvinjärjestyslause. Ekvivalentteja ne ovat siinä mielessä, että muut voidaan osoittaa oikeiksi, kun yksi otetaan lähtökohdaksi. Tässä käytän lähteenä Jonathan Lewiniä [6], joka todistaa Zornin lemman oikeaksi valinta-aksiooman pohjalta.

Zornin lemman käsitteitä ovat järjestetty joukko, ketju, yläraja ja maksimaalinen alkio.

Järjestetty joukko edellyttää, että joukon alkioita voidaan vertailla jonkin ominaisuuden suhteen, esim. a on pienempi kuin b tai A on B:n osajoukko. Tässä yhteydessä käytetään symbolia $\leq$, vaikka vertailtavana olisi esim. sisältyminen toiseen joukkoon osajoukkona. Käsite maksimaalinen on myös ymmärrettävä näin laajennetussa merkityksessä.

Joukko A on täysin järjestetty, jos jokaisella $a, b \in A$ on voimassa joko $a \leq b$ tai $b \leq a$. Osittain järjestetyssä joukossa vertailu ei välttämättä ole mahdollista kaikkien alkioiden välillä.

Ketjuksi kutsutaan osajoukkoa, joka on täysin järjestetty. Ketjulla C on yläraja y, jos jokainen ketjun alkio on pienempi tai yhtäsuuri kuin $y \in X$ eli $a \leq y$ kaikilla $a \in C$. Yläraja y ei ole yksikäsitteinen eikä sen tarvitse kuulua ketjuun C.

Joukon X suurin eli maksimaalinen alkio on sellainen alkio $M \in X$, että jos $x \in X$ ja $x \geq M$, niin $x = M$.

Otetaan käyttöön merkintä $P(C, x)$ tarkoittamaan *alkuosaa* ketjusta C, eli niitä jäseniä, jotka ovat pienempiä kuin x:

$$P(C, x) = \{y \in C | y < x\}.$$

Todistus. Zornin lemman todistus

Tehdään vastaoletus, että joukossa X ei ole suurinta alkiota. Olkoon u ketjun C yläraja ja valitaan alkio $x > u$ joukosta X. Silloin $y < x$ kaikilla $y \in C$, ja $x \notin C$. Erona sellaiseen ylärajaan, joka voi kuulua joukkoon, tästä joukon ulkopuolella olevasta ylärajasta käytetään tässä todistuksessa nimeä *ulkoinen yläraja*. Valinta-aksiooman perusteella voidaan valita funktio f, joka määrittää jokaiselle ketjulle $C \in X$ ulkoisen ylärajan $f(C)$.

Määritellään vielä termi *konformoiva* seuraavasti:

Määritelmä 2.2. Joukko $A \subset X$ on konformoiva, jos seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat.

1) Joukko A on täysin järjestetty.
2) Kaikilla alkioilla $x \in A$ on totta, että $x = f(P(A,x))$.

Todistetaan seuraavaksi aputulos:

Lemma 2.3. *Jos A ja B ovat konformoivia joukon X osajoukkoja ja $A \neq B$, silloin toinen näistä on toisen alkuosa, $A = P(B,x)$ tai $B = P(A,x)$ jollakin $x \in X$.*

Todistus. Oletetaan, että $A \setminus B \neq \emptyset$. Määritellään, että x on pienin alkio joukossa $A \setminus B$. On osoitettava, että $P(A,x) = B$. Tehdään vastaoletus: $B \setminus P(A,x) \neq \emptyset$. Olkoon y pienin alkio joukossa $B \setminus P(A,x)$. Jos on annettu alkiot $u \in P(B,y)$ ja $v \in A$, joille $v < u$, silloin $v \in P(B,y)$. Jos z on pienin jäsen joukossa $A \setminus P(B,y)$, saadaan $P(A,z) = P(B,y)$. Huomaa, että $z \leq x$. Mutta koska

$$z = f(P(A,z)) = f(P(B,y)) = y$$

ja koska $y \in B$, ei voi olla $z = x$. Siksi $z < x$ ja on pääteltävä, että $y = z \in P(A,x)$, mikä on ristiriidassa alkion y valinnan kanssa. Näin vastaoletus on väärä ja Lemma 2.3 on tosi. □

Jatketaan nyt Zornin lemman todistamista:

Käyttäen konformoivien joukkojen vertailtavuutta, joka juuri todistettiin, huomataan, että jos joukko A on konformoiva joukon X osajoukko ja $x \in A$, silloin aina, jos $y < x$, joko $y \in A$ tai y ei kuulu mihinkään konformoivaan joukkoon. Nyt seuraa helposti, että joukon X kaikkien konformoivien osajoukkojen joukko U on myös konformoiva. Tästä taas seuraa, että jos $x = f(U)$, niin joukko $U \cup \{x\}$ on konformoiva. Siispä $x \in U$, mikä aiheuttaa ristiriidan sen kanssa, että x on joukon U ulkoinen yläraja. Niinpä tässäkin vastaoletus on väärä ja Zornin lemma on todistettu. □

Zornin lemma osoittaa siis, että joukossa on suurin alkio ottamatta kantaa siihen, mikä tämä alkio on. Van der Waerdenin lauseen todistuksessa Zornin lemmaa käytetään päinvastoin osoittamaan, että joukossa on pienin alkio. Tähänkin lemma soveltuu hyvin. Perustuuhan se järjestykseen, ja sellaisena voidaan käyttää yhtä hyvin pienemmyyttä kuin suuremmuutta, osajoukkona olemista kuin osajoukon sisältämistä. Lemmassa tarvitsee vaihtaa vain yläraja alarajaksi ja suurin pienimmäksi. Monissa matemaattisissa teksteissä puhutaan erikseen maksimi- ja minimiperiaatteista, mutta monissa taas erottelu jätetään tekemättä.

3 Diskreetin avaruuden kompaktisointi

Van der Waerdenin lauseen todistaminen, kuten moni muukin todistaminen, perustuu siihen, että osoitetaan jotakin olevan välttämättä olemassa. Kompaktilla avaruudella on ominaisuuksia, jotka helpottavat tavoitteeseen pääsemistä. Valitettavasti luonnollisten lukujen joukko ei ole kompakti. On kuitenkin olemassa menetelmiä, joilla ei-kompakti joukko tai avaruus voidaan laajentaa kompaktiksi. Yksi tällainen on Stone–Čech-kompaktisointi.

Luonnollisten lukujen joukko on diskreetti avaruus. Siksi tässä tutkielmassa keskitytään Stone–Čech-kompaktisoinnin osalta vain diskreetteihin avaruuksiin.

Stone–Čech-kompaktisointi voidaan muodostaa useilla tavoilla. Tässä menetelmänä ovat ultrafiltterit. Lähdetekstinä on N. Hindmanin ja D. Straussin *Algebra in the Stone–Čech Compactification* ([5], s. 56–84). Lemman 3.8 todistus on Tero Vedenjuoksun pro gradu -tutkielmasta ([8], s. 36–38). Lisäsin itse todistuksen Esimerkkeihin 3.2 ja 3.4. Lauseesta 3.6 karsin pois osan ekvivalenteista väittämistä, joten jouduin siinäkin kirjoittamaan todistuksen uudelleen.

3.1 Filtterit ja ultrafiltterit

Määritelmä 3.1. Olkoon D mikä tahansa epätyhjä joukko. Joukon D filtteri on joukon D osajoukkojen epätyhjä joukko $\mathcal{U}$, jolla on seuraavat omainaisuudet:

1. Jos $A, B \in \mathcal{U}$, silloin $A \cap B \in \mathcal{U}$.
2. Jos $A \in \mathcal{U}$ ja $A \subseteq B \subseteq D$, niin $B \in \mathcal{U}$.
3. $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

Esimerkki 3.2. Olkoon D ääretön joukko. Osajoukko $\mathcal{U} \subseteq D$, johon kuuluvat ne joukon D äärettömät osajoukot, joiden komplementti on äärellinen, on filtteri joukossa D.

Todistus. 1. Olkoot $A, B \in \mathcal{U}$. Silloin A^C, B^C ovat äärelllisiä ja $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$ on äärellinen. Tällöin $A \cap B \in \mathcal{U}$.

2. Olkoon $A \in \mathcal{U}$ ja $A \subseteq B \subseteq D$. Silloin A^C on äärellinen ja $B^C \subseteq A^C$, joten myös B^C on äärellinen. Siispä $B \in \mathcal{U}$.

3. Tyhjä joukko ei ole ääretön ja sen komplementti D on ääretön, joten tyhjä joukko ei kuulu joukkoon $\mathcal{U}$.

Kaikki kolme ehtoa toteutuvat, joten $\mathcal{U}$ on filtteri. □

Määritelmästä seuraa, että filtterillä on ns. *äärellisen leikkauksen ominaisuus* eli minkä tahansa äärellisen osajoukon leikkaus on epätyhjä ja kuuluu tähän filtteriin.

Määritelmä 3.3. Joukon D *ultrafiltteriksi* kutsutaan filtteriä, joka ei ole joukossa D minkään toisen filtterin aito osajoukko.

Esimerkki 3.4. Olkoot $a \in D$ ja $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(D) : a \in A\}$, missä $\mathcal{P}(D)$ on potenssijoukko eli joukon D kaikkien osajoukkojen joukko. Tällöin $\mathcal{U}$ on filtteri, sillä se toteuttaa kaikki edellä esitetyt kolme ehtoa. Koska yksiö $\{a\} \in \mathcal{P}(D)$, sekin on joukon $\mathcal{U}$ alkio ja filtteri $\mathcal{U}$ on myös ultrafiltteri seuraavan todistuksen mukaan:

Todistus. Vastaväite: On olemassa isompi filtteri $\mathcal{V}$, johon kuuluvat kaikki filtterin $\mathcal{U}$ joukot ja lisäksi ainakin joukko $B \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Tällöin $\{a\}$ ja B kuuluvat molemmat filtteriin $\mathcal{V}$ ja niin ollen niiden leikkauskin $\{a\} \cap B$ kuuluu siihen. Nyt $\{a\}$ on yksiö, joten sitä ei voi jakaa ja $a \notin B$, joten $\{a\} \cap B = \emptyset$. Tyhjä joukko ei kuulu filtteriin, joten vastaväite on väärä ja $\mathcal{U}$ on ultrafiltteri. $\square$

Yhden alkion näin määrittämää ultrafiltteriä kutsutaan *prinsipaaliseksi ultrafiltteriksi*. Käsitettä tarvitaan Stone–Čech-kompaktisoinnissa. Määritellään funktio, joka muodostaa alkiosta prinsipaalisen ultrafiltterin.

Määritelmä 3.5. Olkoon D joukko ja $a \in D$. Silloin $e(a) = \{A \subseteq D : a \in A\}$.

Prinsipaalinen ultrafiltteri on ainoa implisiittisesti määriteltävissä oleva ultrafiltterityyppi. Jokainen äärellisistä joukoista rakennettu filtteri sisältyy prisipaalisiin ultrafilttereihin eikä siksi ole ultrafiltteri. Ei-prinsipaalisia ultrafilttereitä on kuitenkin olemassa. Ne rakentuvat äärettömistä joukoista. Joukkojen yhteinen leikkaus pakenee aina vain kauemmaksi äärettömyyteen ja siksi nämä ultrafiltterit eivät sisälly mihinkään prinsipaaliseen ultrafiltteriin.

Lause 3.6. *Olkoot D joukko ja $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:*

a) $\mathcal{U}$ on ultrafiltteri joukossa D.

b) $\mathcal{U}$ on joukossa D suurin sellainen osajoukkojen joukko, jolla on äärellisen leikkauksen ominaisuus. (Toisin sanoen $\mathcal{U}$ on suurin jäsen joukossa $\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D)$: Joukossa $\mathcal{V}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus$\}$).

c) $\mathcal{U}$ on filtteri joukossa D ja kaikilla $A \subseteq D$ pätee joko $A \in \mathcal{U}$ tai $D \setminus A \in \mathcal{U}$.

Todistus. 1° Kohdasta a) seuraa kohta b): Filtterin Määritelmän 3.1 mukaan filtteriin $\mathcal{U}$ kuuluvien joukkojen leikkaus kuuluu filtteriin, mutta tyhjä joukko ei kuulu. Niinpä leikkaus ei ole koskaan tyhjä ja joukossa $\mathcal{U}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus.

Olkoon $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Poimitaan $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ ja $B \in \mathcal{U}$. Tällöin $A \cap B = \emptyset$. Koska joukot A ja B kuuluvat joukkoon $\mathcal{V}$, ei joukossa $\mathcal{V}$ ole äärellisen leikkauksen omainaisuutta. Siispä $\mathcal{U}$ on suurin tällaisista joukoista.

2° Kohdasta b) seuraa kohta a): On osoitettava, että suurin äärellisen leikkauksen ominaisuudella varustettu osajoukko joukossa D on ultrafiltteri. Määritelmän 3.1 kolmas ehto toteutuu: Jos $\emptyset, A \in \mathcal{U}$, niin $\emptyset \cap A = \emptyset$, mitä se ei saa olla joukossa $\mathcal{U}$. Siispä $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

Jos $A, B \in \mathcal{U}$, niin $A \cap B \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$ ja määritelmän ensimmäinen ehto toteutuu.

Oletetaan, että $A \in \mathcal{U}$ ja $A \subsetneq B \subseteq D$. Nyt $A \cap B = A$ ja joukon A leikkaus kaikkien muiden joukkoon $\mathcal{U}$ kuuluvien joukkojen kanssa on epätyhjä. Näin ollen B kuuluu joukkoon, jossa on äärellisen leikkauksen ominaisuus, ja koska $\mathcal{U}$ on tällaisista joukoista suurin, täytyy joukon B kuulua siihen. Siispä myös ehto 2 toteutuu ja $\mathcal{U}$ on filtteri.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V} \subseteq D$ ja myös $\mathcal{V}$ on filtteri. Silloin joukon $C \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ leikkaus kaikkien joukon $\mathcal{U}$ joukkojen kanssa kuuluu joukkoon $\mathcal{V}$ eikä ole tyhjä. Näin ollen äärellisen leikkauksen ominaisuus toteutuu joukossa $\mathcal{U} \cup C$. Koska $\mathcal{U}$ on suurin sellainen joukko, täytyy toteutua $C \in \mathcal{U}$, mikä on ristiriita. Siispä $\mathcal{U}$ ei ole minkään filtterin aito osajoukko eli on ultrafiltteri.

3° Kohdasta b) seuraa kohta c): Olkoon $\mathcal{U}$ joukossa D suurin sellainen osajoukkojen joukko, jolla on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Oletetaan, että $A \subseteq D$ ja $A \in \mathcal{U}$. Silloin $D \setminus A \notin \mathcal{U}$, sillä $A \cap (D \setminus A) = \emptyset$. Vastaavasti, jos $D \setminus A \in \mathcal{U}$, niin $A \notin \mathcal{U}$. Jos taas $A \notin \mathcal{U}$ ja $D \setminus A \notin \mathcal{U}$, täytyy olla olemassa $B, C \in \mathcal{U}$, joille on totta: $B \cap A = \emptyset$, $C \cap (D \setminus A) = \emptyset$. Muussa tapauksessa äärellisen leikkauksen ominaisuus toteutuisi suuremmassa joukossa kuin $\mathcal{U}$. Koska $B, C \in \mathcal{U}$, niin $B \cap C \neq \emptyset$. Nyt siis $(B \cap C) \cap A = \emptyset$ ja $(B \cap C) \cap (D \setminus A) = \emptyset$, mikä on mahdotonta. Väite c) on näin ollen totta.

4° Kohdasta c) seuraa kohta a): Olkoon nyt c) totta. Silloin $\mathcal{U}$ on oletuksen mukaan filtteri. Täytyy osoittaa, että se ei ole jonkun toisen filtterin aito osajoukko. Oletetaan, että on olemassa filtteri $\mathcal{V}$, jolle $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V} \subseteq D$. Olkoon $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Silloin $A \notin \mathcal{U}$, vaan $D \setminus A \in \mathcal{U}$. Näin siis $A \in \mathcal{V}$ ja $D \setminus A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, mikä on ristiriita. On siis todistettu, että $\mathcal{U}$ on ultrafiltteri ja samalla saatettiin loppuun kolmen väitteen ekvivalenttisuuden todistaminen. $\square$

3.2 Stone–Čech -kompaktisointi βD

Määritellään avaruuden D kaikkien ultrafiltterien joukon topologia ja joitakin ominaisuuksia.

Määritelmä 3.7. Olkoon D diskreetti topologinen avaruus. Silloin

a) $\beta D = \{p : p$ on ultrafiltteri joukossa D$\}$.

b) Jos on annettu $A \subseteq D$, niin $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\}$.

c) Avaruuden βD topologian kannan muodostavat $\widehat{A}$-muotoiset joukot.

Joukko $\widehat{A}$ on siis avaruudessa βD niiden ultrafiltterien joukko, jotka sisältävät joukon A. Seuraava lemma kuvaa joitakin tällaisten joukkojen ominaisuuksia.

Lemma 3.8. *Olkoon D joukko ja olkoot $A, B \subseteq D$. Silloin*

a) $\widehat{(A \cap B)} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$,

b) $\widehat{(A \cup B)} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$,

c) $\widehat{(D \setminus A)} = \beta D \setminus \widehat{A}$,

d) $\widehat{A} = \emptyset$ *jos ja vain jos* $A = \emptyset$,

e) $\widehat{A} = \beta D$ *jos ja vain jos* $A = D$,

f) $\widehat{A} = \widehat{B}$ *jos ja vain jos* $A = B$.

Todistus. a) Koska $A \cap B \subseteq A$ ja $A \cap B \subseteq B$, kaikilla ultrafilttereillä p joukossa D pätee, että $A \cap B \in p$ jos ja vain jos $A \in p$ ja $B \in p$. Niinpä

$$\widehat{A \cap B} = \{p \in \beta D : A \cap B \in p\} = \{p \in \beta D : A \in p \text{ ja } B \in p\}$$

$$= \{p \in \beta D : A \in p\} \cap \{p \in \beta D : B \in p\} = \widehat{A} \cap \widehat{B}.$$

b) Olkoon $p \in \widehat{A \cup B}$. Oletetaan, että $A \notin p$ ja $B \notin p$. Koska p on ultrafiltteri, niin Lauseen 3.6 kohdan c) mukaan $D \setminus A \in p$ ja $D \setminus B \in p$. Silloin $(D \setminus A) \cap (D \setminus B) = D \setminus (A \cup B) \in p$, mikä on ristiriita. Siksi $A \in p$ tai $B \in p$, mistä seuraa, että $\widehat{A \cup B} \subseteq \widehat{A} \cup \widehat{B}$.

Toisaalta olkoon $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$. Silloin $A \in p$ tai $B \in p$. Koska $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$, silloin $A \cup B \in p$ eli $p \in \widehat{A \cup B}$. Näin $\widehat{A} \cup \widehat{B} \subseteq \widehat{A \cup B}$, mistä seuraa, että $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$, kuten pitikin.

c) $\widehat{D \setminus A} = \{p \in \beta D : D \setminus A \in p\} = \{p \in \beta D : A \notin p\} = \beta D \setminus \widehat{A}$.

d) Oletetaan, että $\widehat{A} = \emptyset$. Jos $A \neq \emptyset$, silloin voidaan poimia alkio $x \in A$. Olkoon p prinsipaalinen ultrafiltteri, joka vastaa alkiota x. Nän $A \in p$ ja edelleen $\widehat{A} \neq \emptyset$, mikä on ristiriita.

Toisaalta oletetaan, että $A = \emptyset$. Silloin $\widehat{A} = \emptyset$, koska $A = \emptyset \notin p$ kaikilla ultrafilttereillä p joukossa D.

e) Olkoon $\widehat{A} = \beta D$, toisin sanoen $A \in p$ kaikilla ultrafilttereillä p joukossa D. Jos $A \neq D$, silloin $D \setminus A \neq \emptyset$ ja sisältyy johonkin ultrafiltteriin q. Nyt $A \notin q$, mikä on ristiriita. Näin $A = D$.

Toisaalta oletetaan, että $A = D$. Koska $D \in p$ kaikilla ultrafilttereillä p joukossa D, $\widehat{A} = \beta D$.

f) Oletetaan, että $\widehat{A} = \widehat{B}$. Silloin $A \in p$ jos ja vain jos $B \in p$ kaikilla $p \in \beta D$. Jos $A \neq B$, silloin $B \setminus A \neq \emptyset$ ja niin on olemassa ultrafiltteri p, joka sisältää joukon $B \setminus A$. Koska $B \setminus A \subseteq B$ ja $B \setminus A \in p$, myös $B \in p$. Näin $A \in p$, mistä seuraa, että $(B \setminus A) \cap A = \emptyset \in p$, mikä on mahdotonta.

Toinen suunta on selvä. □

Lause 3.9. *Olkoon D mikä tahansa joukko. Silloin βD on kompakti Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Oletetaan, että p ja q ovat eri alkioita (ultrafilttereitä) joukossa βD. Jos $A \in p \setminus q$, silloin $A \notin q$ ja $D \setminus A \in q$. Niinpä $\widehat{A}$ ja $\widehat{D \setminus A}$ ovat erillisiä avoimia avaruuden βD osajoukkoja ja ne sisältävät ultrafiltterit p ja q vastaavasti. Täten βD on Hausdorffin avaruus.

Kompaktiuden osoittamiseen on käyttökelpoinen topologian peruskursseilla todistettava lause, jonka mukaan avaruus X on kompakti täsmälleen silloin, kun jokaisella avaruuden X suljettujen äärellisen leikkauksen ominaisuudella varustettujen joukkojen perheellä on epätyhjä leikkaus.

Huomaamme, että $\widehat{A}$-muotoiset joukot ovat myös suljettujen joukkojen kanta, koska $\beta D \setminus \widehat{A} = \widehat{D \setminus A}$. Niinpä sen osoittamiseksi, että βD on kompakti, muodostetaan joukkoperhe $\mathcal{A}$ kaikista $\widehat{A}$-muotoisista joukoista (joilla on äärellisen leikkauksen ominaisuus) ja osoitetaan, että joukossa $\mathcal{A}$ on epätyhjä leikkaus.

Olkoon $\mathcal{B} = \{A \subseteq D : \widehat{A} \in \mathcal{A}\}$. Jos $\mathcal{F}$ on äärellinen osaperhe joukosta $\mathcal{B}$, niin on olemassa $p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A}$. Lemman 3.8 a)-kohdan mukaan silloin $p \in \widehat{\bigcap_{A \in F} A}$, joten $\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset$. Näin joukossa $\mathcal{B}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus, joten Lauseen 3.6 nojalla poimitaan $q \in \beta D$, jolle $\mathcal{B} \subseteq q$. Silloin $A \in q$ kaikilla $A \in \mathcal{B}$, niin että $q \in \widehat{A}$ kaikilla $A \in \mathcal{B}$. Siksi $q \in \bigcap \widehat{A}$, mikä osoittaa, että $\bigcap \widehat{A} \neq \emptyset$. Näin joukossa $\mathcal{A}$ on epätyhjä leikkaus ja βD on kompakti. □

Stone–Čech-kompaktisoinnin määritelmässä tarvitaan käsitettä *upotus*. Upotus on laajennus homeomorfismista. Homeomorfismi on jatkuva bijektio ja sen käänteisfunktionkin tulee olla jatkuva.

Homeomorfismi osoittaa kaksi topologista avaruutta yhteneviksi. Jokaista lähtöjoukon alkiota vastaa täsmälleen yksi maalijoukon alkio ja päinvastoin. Upotus puolestaan on injektio: jokaista lähtöjoukon alkiota vastaa täsmälleen yksi maalijoukon alkio ja jokaista maalijoukon alkiota vastaa joko yksi tai ei yhtään lähtöjoukon alkiota.

Upotus $\varphi : X \to Z$ määrittelee samalla homeomorfismin $\varphi : X \to \varphi(X) \subseteq Z$.

Kompaktisoinnin määritelmän lähtökohtana on täydellisen säännöllinen topologinen avaruus. Määritellään ensin, mitä sillä tarkoitetaan.

Määritelmä 3.10. Topologista avaruutta X kutsutaan *täydellisen säännölliseksi*, jos aina, kun avaruudesta otetaan suljettu joukko $A \subseteq X$ ja piste $x \notin A$, on olemassa jatkuva funktio f, jolla $f(x) = 0$ ja $f(A) = 1$.

Esimerkki 3.11. Diskreettisenä avaruutena luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on triviaalisti täydellisen säännöllinen.

Määritelmä 3.12. Olkoon X täydellisen säännöllinen topologinen avaruus. Avaruuden X *Stone–Čech-kompaktisointi* on pari (φ, Z), jossa

a) Z on kompakti avaruus,

b) φ on upotus avaruudesta X avaruuteen Z,

c) $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Z ja

d) jos on annettu kompakti avaruus Y ja mikä tahansa jatkuva funktio $f : X \to Y$, on olemassa jatkuva funktio $g : Z \to Y$, jolle $g \circ \varphi = f$.

Stone–Čech-kompaktisointi on yksikäsitteinen siinä mielessä, että saman avaruuden kompaktisoinnit ovat homeomorfisia keskenään. Jos siis on olemassa täydellisen säännöllisen avaruuden X Stone–Čech-kompaktisoinnit (φ, Z) ja (τ, W), on olemassa homeomorfismi $\gamma : Z \to W$ ja $\gamma \circ \varphi = \tau$.

Seuraavan lauseen todistamisessa ja myöhemminkin tässä tutkielmassa käyttökelpoinen käsite on sulkeuma Stone–Čech-kompaktisoidussa avaruudessa. Määritellään sulkeuma tässä.

Määritelmä 3.13. Olkoon D diskreetti avaruus ja βD sen Stone–Čech-kompaktisointi. Olkoon $A \subseteq D \subset \beta D$. Käytetään joukon A *sulkeumasta* avaruudessa D merkintää $cl_D A$ ja avaruudessa βD vastaavasti $cl_{\beta D} A$. Avaruuden tunnus voidaan jättää mainitsematta, jos epäselvyyttä ei synny.

Olkoot nyt $b \in cl_D A$ ja $c \in cl_{\beta D} A$ sekä joukot $U \subseteq D$ ja $V \subseteq \beta D$ pisteiden b ja c avoimet ympäristöt vastaavasti. Silloin kaikilla ympäristöillä U leikkaus $U \cap A$ on epätyhjä ja samoin kaikilla ympäristöillä V leikkaus $V \cap A$ on epätyhjä.

Lause 3.14. *Olkoon D diskreetti avaruus. Silloin $(e, \beta D)$ on avaruuden D Stone–Čech-kompaktisointi. Tässä e on Määritelmän 3.5 mukainen prinsipaalisen ultrafiltterin luova funktio.*

Todistus. Määritelmän 3.12 kohta a) toteutuu Lauseen 3.9 perusteella. Kohta b) toteutuu, sillä e on injektio: jos $a, b \in D$ ja $a \neq b$, niin $D \setminus \{a\} \in e(b) \setminus e(a)$ eli $e(a) \neq e(b)$.

Kohta c): $e(D)$ on tiheä avaruudessa βD, jos avaruuden minkä tahansa pisteen kaikilla avoimilla ympäristöillä on yhteisiä pisteitä joukon $e(D)$ kanssa. Olkoon $\widehat{A}$ epätyhjä avaruuden βD topologiaan kuuluva joukko, jolloin $A \neq \emptyset$. Kaikille $a \in A$ on totta, että $e(a) \in e(D) \cap \widehat{A}$, joten $e(D) \cap \widehat{A} \neq \emptyset$. Näin $e(D)$ on tiheä avaruudessa βD.

Kohta d): Olkoon Y kompakti avaruus ja olkoon kuvaus $f : D \to Y$. Olkoon lisäksi jokaista $p \in \beta D$ kohti joukkoperhe $\mathcal{A}_p = \{\mathrm{cl}_Y f(A) : A \in p\}$. Silloin aina, kun $p \in \beta D$, joukkoperheessä $\mathcal{A}_p$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Nimittäin jos $A, B \in p \in \beta D$, silloin $A \cap B \neq \emptyset$, ja voidaan poimia $a \in A \cap B$. Nyt $f(a) \in f(A)$ ja $f(a) \in f(B)$ eli $f(a) \in f(A) \cap f(B)$. Näin leikkaus ei ole tyhjä. Valitaan sitten $g(p) \in \bigcap \mathcal{A}_p$. Nyt on osoitettava, että g on jatkuva funktio ja että $g \circ e = f$.

Olkoon $x \in D$. Silloin $\{x\} \in e(x)$, joten $g(e(x)) \in \mathrm{cl}_Y f(\{x\}) = \mathrm{cl}_Y(\{f(x)\}) = \{f(x)\}$ eli $g \circ e = f$.

Jatkuvuuden todistamiseksi olkoon $p \in \beta D$ ja olkoon U pisteen $g(p)$ ympäristö avaruudessa Y. Koska Y on säännöllinen, poimitaan sellainen pisteen $g(p)$ ympäristö V, että $\mathrm{cl}_Y V \subseteq U$ ja olkoon $A = f^{-1}(V)$. Jatkuvuus edellyttäisi, että $A \in p$. Oletetaan, että $D \setminus A \in p$. Silloin $g(p) \in \mathrm{cl}_Y f(D \setminus A)$ ja V on pisteen $g(p)$ ympäristö, joten $V \cap f(D \setminus A) \neq \emptyset$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $A = f^{-1}(V)$. Täten $\widehat{A}$ on pisteen p ympäristö. Nyt pitäisi olla $g(\widehat{A}) \subseteq U$, mutta oletetaan päinvastoin. Olkoon $q \in \widehat{A}$ ja $g(q) \notin U$. Silloin $Y \setminus \mathrm{cl}_Y V$ on pisteen $g(q)$ ympäristö ja $g(q) \in \mathrm{cl}_Y f(A)$, joten $(Y \setminus \mathrm{cl}_Y V) \cap f(A) \neq \emptyset$. Tämä on taas ristiriidassa sen kanssa, että $A = f^{-1}(V)$. Näin g on jatkuva. □

Huomautus 3.15. Funktio e on upotus avaruudesta D avaruuteen βD ja määrittelee homeomorfismin $e : D \to e(D)$. Siksi usein samastetaan D ja $e(D) \in \beta D$ sekä $a \in D$ ja $d(a) \in \beta D$. Sanotaan esim. $D \subseteq \beta D$.

4 Puoliryhmä ja sen ideaalit, identiteetit ja idempotentit

Seuraavaksi van der Waerdenin lauseen todistamisessa tarvitaan algebrallista rakennetta ’puoliryhmä’.

Puoliryhmä on ryhmää väljempi algebrallinen rakenne, joka koostuu joukosta ja laskutoimituksesta. Van der Waerdenin lauseen todistamisen kannalta merkityksellinen laskutoimitus on yhteenlasku.

Tässä luvussa käytetään lähteenä Hindman–Straussia [5] (s. 3–37).

4.1 Puoliryhmä $(S,*)$

Määritelmä 4.1. Puoliryhmä $(S,*)$ on epätyhjä joukko S yhdistettynä assosiatiiviseen binääriseen operaatioon $*: S \times S \to S : (s,t) \to s * t$. Operaation merkki jätetään usein merkitsemättä, jos epäselvyyttä ei synny, siis $s * t = st$.

Esimerkki 4.2. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ja yhteenlasku muodostavat puoliryhmän $(\mathbb{N},+)$, sillä joukossa $\mathbb{N}$ yhteenlasku on binäärinen. Onhan kaikilla luonnollisilla luvuilla $m,n \in \mathbb{N}$ myös summa luonnollinen luku, $n+m \in \mathbb{N}$. Ja yhteenlasku on assosiatiivinen eli $(k+l)+m = k+(l+m)$ kaikilla $k,l,m \in \mathbb{N}$.

Tarvitaan vielä joukko käsitteitä, jotta van der Waerdenin lause ja viimeisen luvun Hales–Jewettin lause saadaan todistetuksi. Keskeisiä käsitteitä ovat ideaalit, identiteetit ja idempotentit.

4.2 Määritelmiä

Määritellään ensin ideaalit.

Määritelmä 4.3. Olkoon S puoliryhmä.

a) L on *vasen ideaali* joukossa S täsmälleen silloin, kun $\emptyset \neq L \subseteq S$ ja $SL \subseteq L$.

b)R on *oikea ideaali* joukossa S täsmälleen silloin, kun $\emptyset \neq R \subseteq S$ ja $RS \subseteq R$.

c) I on *(kaksisuuntainen) ideaali* joukossa S täsmälleen silloin, kun I on sekä oikea että vasen ideaali joukossa S.

Seuraavaksi määritellään minimaaliset ideaalit ja yksinkertaiset puoliryhmät.

Määritelmä 4.4. Olkoon S puoliryhmä.

a) L on *minimaalinen vasen ideaali* joukossa S täsmälleen silloin, kun L on vasen ideaali joukossa S ja aina, kun J on vasen ideaali joukossa S ja $J \subseteq L$, on totta, että $J = L$.

b) R on *minimaalinen oikea ideaali* joukossa S täsmälleen silloin, kun R on oikea ideaali joukossa S ja aina, kun J on oikea ideaali joukossa S ja $J \subseteq R$, on totta, että $J = R$.

c) S on *vasen yksinkertainen puoliryhmä* täsmälleen silloin, kun S on minimaalinen vasen ideaali joukossa S.

d) S on *oikea yksinkertainen puoliryhmä* täsmälleen silloin, kun S on minimaalinen oikea ideaali joukossa S.

e) S on *yksinkertainen puoliryhmä* täsmälleen silloin, kun S on ainoa ideaali joukossa S.

Tarvitaan määritelmä myös käsitteelle identiteetti.

Määritelmä 4.5. Olkoon $(S,*)$ puoliryhmä ja olkoon $a \in S$.

a) Alkio a on *vasen identiteetti* joukossa S täsmälleen silloin, kun $ax = x$ kaikilla $x \in S$.

b) Alkio a on *oikea identiteetti* joukossa S täsmälleen silloin, kun $xa = x$ kaikilla $x \in S$.

c) Alkio a on *(kaksipuolinen) identiteetti* joukossa S täsmälleen silloin, kun se on sekä vasen että oikea identiteetti.

Huomautus 4.6. Puoliryhmän kaikki alkiot voivat olla identiteettejä eli nolla-alkioita. Tällöin puoliryhmää kutsutaan *nollapuoliryhmäksi*.

Huomautus 4.7. Olkoon S puoliryhmä. Jos e on vasen identiteetti joukossa S ja f on oikea identiteetti joukossa S, silloin $e = f$. Tästä seuraa myös, että puoliryhmässä voi olla enintään yksi kaksipuolinen identiteetti.

Määritellään vielä käsite idempotentti, idempotenttien joukko $E(S)$ ja aliryhmät sekä $H(e)$ eli sellaisten aliryhmien yhdiste, joihin sisältyy identiteetti.

Määritelmä 4.8. Olkoon S puoliryhmä.

a) Alkio $x \in S$ on *idempotentti* täsmälleen silloin, kun $xx = x$.

b) $E(S) = \{x \in S : x \text{ on idempotentti}\}$.

c) T on *alipuoliryhmä* joukossa S täsmälleen silloin, kun $T \subseteq S$ ja T on puoliryhmä saman operaation kanssa kuin S.

d) T on *aliryhmä* joukossa S täsmälleen silloin, kun $T \subseteq S$ ja T on ryhmä saman operaation kanssa kuin S.

e) Olkoon $e \in E(S)$. Silloin $H(e) = \bigcup\{G : G \text{ on aliryhmä joukossa } S \text{ ja } e \in G\}$.

Huomautus 4.9. Identiteetti e – niin vasen, oikea kuin kaksipuolinenkin – on aina idempotentti. Onhan $ee = e$ kaikissa näissä tapauksissa. Idempotentin ei aina tarvitse olla identiteetti. Jos valitaan avaruudeksi Y seitsemän määrittämä jäännösluokka ja laskutoimitus * määritellään avaruuden Y alkioiden a ja b välille seuraavasti: $a*b = a\cdot b+5$, puoliryhmässä $(Y,*)$ ovat idempotentteja alkiot 2 ($2*2 = 2\cdot 2+5 = 9 = 2$) ja 6 ($6*6 = 6\cdot 6+5 = 41 = 6$). Kumpikaan ei kuitenkaan ole identiteetti, sillä $2*0 = 6*0 = 5$.

4.3 Ideaalit

Lemma 4.10. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Olkoot L_1 ja L_2 vasempia ideaaleja joukossa S. Silloin $L_1 \cap L_2$ on vasen ideaali joukossa S täsmälleen silloin, kun $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

b) Olkoon L vasen ideaali joukossa S ja olkoon R oikea ideaali joukossa S. Silloin $L \cap R \neq \emptyset$.

Todistus. Väittämä a) on ilmeinen: Jos $x \in L_1 \cap L_2$, niin $Sx \subseteq SL_1 \subseteq L_1$ ja $Sx \subseteq SL_2 \subseteq L_2$. Näin ollen $S(L_1 \cap L_2) \subseteq L_1 \cap L_2$.

Osoittaaksemme, että b)-kohta on totta, olkoon $x \in L$ ja $y \in R$. Silloin $yx \in L$, koska $x \in L$, ja $yx \in R$, koska $y \in R$. □

Lemma 4.11. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Olkoon $x \in S$. Silloin xS on oikea ideaali, Sx on vasen ideaali ja SxS on (kaksipuolinen) ideaali.

b) Olkoon $e \in E(S)$. Silloin e on vasen identiteetti joukossa eS, oikea identiteetti joukossa Se ja kaksipuolinen identiteetti joukossa eSe.

Todistus. a) $xSS \subseteq xS$, koska $SS \subseteq S$ puoliryhmän binäärisyyden vuoksi ja näin xS on oikea ideaali. Vastaavasti $SSx \subseteq Sx$, $SSxS \subseteq SxS$ ja $SxSS \subseteq SxS$.

b) Olkoon $e \in E(S)$. Nähdäksemme, että e on vasen identiteetti joukossa eS, olkoon $x \in eS$ ja poimitaan $t \in S$, jolla $x = et$. Silloin $ex = eet = et = x$. Vastaavasti e on oikea identiteetti joukossa Se ja sekä vasen että oikea identiteetti joukossa eSe. □

Lause 4.12. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Jos S on vasen yksinkertainen puoliryhmä ja $e \in E(S)$, niin e on oikea identiteetti joukossa S.

b) Jos L on vasen ideaali joukossa S ja $s \in L$, niin $Ss \subseteq L$.

c) Olkoon $\emptyset \neq L \subseteq S$. Silloin L on minimaalinen vasen ideaali joukossa S täsmälleen silloin, kun jokaisella $s \in L$, $Ss = L$.

Todistus. a) Lemman 4.11 a)-kohdan mukaan Se on vasen ideaali joukossa S, ja $Se = S$, koska S on yksinkertainen puoliryhmä, ja niin Lemman 4.11 b)-kohta on voimassa.

b) Tämä seuraa välittömästi vasemman ideaalin määritelmästä.

c) 1°: Lemman 4.11 a)-kohdan mukaan Ss on vasen ideaali ja tämän lauseen b)-kohdan mukaan $Ss \subseteq L$, joten $Ss = L$, koska L on minimaalinen.

2°: Koska $L = Ss$ jollakin $s \in L$, L on vasen ideaali. Olkoon J vasen ideaali joukossa S ja $J \subseteq L$ ja poimitaan $s \in J$. Silloin b)-kohdan mukaan $Ss \subseteq J$, joten $J \subseteq L = Ss \subseteq J$. Näin siis $J = L$ eli L on minimaalinen vasen ideaali. □

4.4 Idempotentit

Lause 4.13. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $e \in E(S)$.*

a) Jos e on jonkin minimaalisen vasemman ideaalin alkio (yhtäpitävästi jos Se on minimaalinen vasen ideaali), silloin e on minimaalinen idempotentti.

b) Jos S on yksinkertainen puoliryhmä ja e minimaalinen, silloin Se on minimaalinen vasen ideaali.

c) Jos jokainen vasen ideaali joukossa S sisältää idempotentin ja e on minimaalinen, silloin Se on minimaalinen vasen ideaali.

d) Jos S on yksinkertainen puoliryhmä tai jokaisella vasemmalla ideaalilla joukossa S on idempotentti, silloin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

1) e on minimaalinen.

2) e on jonkin minimaalisen vasemman ideaalin alkio joukossa S.

3) Se on minimaalinen vasen ideaali joukossa S.

Todistus. a) Olkoon L minimaalinen vasen ideaali ja $e \in L$. (Tällaisen joukon olemassaolo on Lauseen 4.12 c-kohdan mukaan yhtäpitävä sen kanssa, että Se on minimaalinen.) Silloin $L = Se$. Olkoon $f \in E(S)$ ja $f \leq e$. Tällöin $f = fe$, joten $f \in L$. Edelleen (Lauseen 4.12 c-kohdan mukaan) $L = Sf$, joten $e \in Sf$, ja niin Lemman 4.11 b-kohdan mukaan $e = ef$. Näin $e = ef = f$ ja e on minimaalinen idempotentti.

b) Olkoon L vasen ideaali ja $L \subseteq Se$. Osoitetaan, että $Se \subseteq L$ (ja siksi $Se = L$). Poimitaan $s \in L$. Silloin $s \in Se$, joten Lemman 4.11 b-kohdan mukaan $s = se$. Edelleen, koska S on yksinkertainen puoliryhmä, $SsS = S$. Poimitaan u ja v joukosta S niin, että $e = vsu$. Olkoon $r = eue$ ja $t = ev$. Silloin $tsr = evseue = evsue = eee = e$ ja $er = eeue = eue = r$. Olkoon $f = rts$. Silloin $ff = rtsrts = r(tsr)ts = rets = reevs = revs = rts = f$, joten $f \in E(S)$. Edelleen $fe = rtse = rts = f$ ja $ef = erts = rts = f$, joten $f \leq e$, joten $f = e$. Näin $Se = Sf = Srts \subseteq Ss \subseteq L$.

c) Olkoon L vasen ideaali ja $L \subseteq Se$. Nähdään, että $e \in L$ (niin, että $Se \subseteq L$ ja siten $Se = L$). Poimitaan idempotentti $t \in L$ ja olkoon $f = et$. Silloin $f \in L$. Koska $t \in Se$, $t = te$. Näin $f = et = ete$. Siksi $ff = etet = ett = et = f$, joten $f \in E(S)$. Edelleen $ef = eete = ete = f$ ja $fe = etee = ett = et = f$, joten $f = e$ ja siten $e \in L$.

d) Tämä seuraa kohdista a), b) ja c). □

Lause 4.14. *Olkoon $(S,*)$ puoliryhmä. Seuraavat väittämät ovat ekvivalenttisia:*

a) $(S,*)$ on ryhmä.

b) On olemassa kaksipuolinen identiteetti e joukossa S niin, että jokaista $x \in S$ vastaa $y \in S$, joilla alkio y on alkion x e-vasta-alkio.

c) On olemassa oikea identiteetti joukossa S. Jos on annettu mikä tahansa oikea identiteetti e joukosta S ja mikä tahansa alkio x joukosta S, on olemassa $y \in S$, joka on alkion x oikea e-vasta-alkio.

Todistus. 1° Kohdasta a) seuraa kohta b): Poimitaan e, sillä ryhmässä on välttämättä neutraalialkio eli identiteetti. Lisäksi ryhmässä on jokaisella alkiolla e-vasta-alkio, joten olkoon $x \in S$ annettu ja olkoon y alkion x vasen e-vasta-alkio. Olkoon z alkion y vasen e-vasta-alkio. Silloin $xy = e(xy) = (zy(xy) = z(y(xy)) = z((yx)y) = z(ey) = zy = e$, eli alkio y on myös alkion x oikea e-vasta-alkio ja kaksipuolisuus toteutuu.

Osoitetaan vielä, että e on oikea identiteetti joukossa S. Olkoon $x \in S$ annettu. Poimitaan alkion x e-vasta-alkio y. Silloin $xe = x(yx) = (xy)x = ex = x$.

2° Kohdasta b) seuraa kohta c): Poimitaan kohdan b) mukainen identiteetti e. Jos on annettu mikä tahansa identiteetti f joukosta S, saadaan Huomautuksen 4.7 mukaan, että $e = f$, joten jokaisella joukon S alkiolla on f-vasta-alkio.

3° Kohdasta c) seuraa kohta a) triviaalisti. □

Lause 4.15. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon e vasen identiteetti joukossa S niin, että jokaisella $x \in S$ on olemassa $y \in S$, jolla $xy = e$. Olkoon $Y = E(S)$ ja olkoon $G = Se$. Silloin Y on oikea nollapuoliryhmä, G on ryhmä ja joukko $S = GY$ on homomorfinen joukon $G \times Y$ kanssa.*

Todistus. Ensin huomataan, että:

$$\text{Kaikilla } x \in Y \text{ ja kaikilla } y \in S,\ xy = y. \tag{1}$$

Väitteen (1) vahvistamiseksi olkoot $x \in Y$ ja $y \in S$ annetut. Poimitaan $z \in S$ siten, että $xz = e$. Silloin $xe = xxz = xz = e$. Siksi $xy = x(ey) = (xe)y = ey = y$, kuten pitikin.

Väitteestä (1) seuraa, että $xy = y$ kaikilla $x, y \in Y$ ja lisäksi $Y \neq \emptyset$, koska $e \in Y$. Nähdäksemme, että Y on oikea nollapuoliryhmä, on osoitettava, että se on puoliryhmä eli että Y on suljettu. Mutta myös tämä seuraa väitteestä (1), koska annetuilla $x, y \in Y$ saadaan $xy = y \in Y$.

Nyt osoitamme, että $G = Se$ on ryhmä. Lemman 4.11 b-kohdan mukaan e on oikea identiteetti joukossa $Se = G$. Nyt jokaisella alkiolla joukossa S on Lauseen 4.14 c)-kohdan mukaan oikea e-vasta-alkio joukossa S. Niinpä jokaisella alkiolla myös joukossa G on oikea e-vasta-alkio joukossa S. Lauseen 4.14 mukaan tarvitsee vain osoittaa, että jokaisella alkiolla joukossa G on oikea e-vasta-alkio joukossa G. Päästäksemme tähän olkoon $x \in G$ annettu ja poimitaan $y \in S$ siten, että $xy = e$. Silloin $ye \in G$ ja

$xye = ee = e$, joten ye on oikea e-vasta-alkio joukossa G, kuten vaadittiin. Koska lisäksi on totta, että $GG = SeSe \subseteq SSSe \subseteq Se = G$ eli G on suljettu, seuraa tästä, että G on ryhmä.

Nyt määritellään $\varphi : G \times Y \to S$ yhtälöllä $\varphi(g,y) = gy$. Nähdäksemme, että φ on homomorfismi, olkoon $(g_1,y_1),(g_2,y_2) \in G \times Y$. Silloin

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1,y_1)\varphi(g_2,y_2) &= g_1y_1g_2y_2 \\
&= g_1g_2y_2 && \text{(väite (1))} \\
&= g_1g_2y_1y_2 && \text{(väite (1))} \\
&= \varphi(g_1g_2,y_1y_2).
\end{aligned}$$

Nähdäksemme, että φ on surjektio, olkoon $s \in S$ annettu. Silloin $se \in Se = G$ ja niin on olemassa $x \in Se$ siten, että $x(se) = (se)x = e$. Väitämme, että $xs \in Y = E(S)$. Todella,

$$\begin{aligned}
xsxs &= xsexs && \text{(koska } x \in G,\ ex = x\text{)} \\
&= xes \\
&= xs && \text{(koska } x \in G,\ xe = x\text{)}.
\end{aligned}$$

Näin $(se,xs) \in G \times Y$ ja $\varphi(se,xs) = sexs = es = s$. Näin jokaisella joukon S alkiolla s on alkukuva (se,xs) joukossa $G \times Y$. Koska φ on surjektio joukossa S, saatiin todistetuksi, että $S = GY$.

Lopulta näytetään, että φ on injektio. Olkoon $(g,y) \in G \times Y$ ja olkoon $s = \varphi(g,y)$. Osoitamme, että $g = se$ ja $y = xs$, missä x on (yksikäsitteinen) vasta-alkio alkiolle se joukossa Se. Nyt $s = gy$, joten

$$\begin{aligned}
se &= gye \\
&= ge && \text{(väitteen (1) mukaan } ye = e\text{)} \\
&= g && \text{(koska } g \in Se\text{)}.
\end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned}
xs &= xgy \\
&= xgyey && (ye \in Y, \text{ joten väitteen (1) mukaan } yey = y) \\
&= xsey \\
&= ey \\
&= y.
\end{aligned}$$

Näin jokainen joukon $G \times Y$ alkio on muotoa (se,xs) eli jokaisella alkiolla on kuva joukossa S. Siispä φ on injektio ja myös bijektio. Joukot GY ja $G \times Y$ ovat homomofrisia. $\square$

4.5 Minimaaliset vasemmat ideaalit

Tässä alaluvussa on koko joukko lauseita, jotka liittyvät minimaalisiin vasempiin ideaaleihin. Ne pohjustavat van der Waerdenin ja Hales–Jewettin lauseiden todistamista.

Lause 4.16. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa minimaalinen vasen ideaali L joukossa S ja siinä idempotentti e. Silloin joukko $L = XG$ on homomorfinen joukon $X \times G$ kanssa, missä X on joukon L idempotenttien vasen nollapuoliryhmä ja $G = eL = eSe$ on ryhmä. Kaikki maksimaaliset ryhmät joukossa L ovat isomorfisia joukon G kanssa.*

Todistus. Jos on annettu $x \in L$, Lx on vasen ideaali joukossa S ja $Lx \subseteq L$, joten $Lx = L$. Tällöin on olemassa $y \in L$ siten, että $yx = e$. Lemman 4.11 b-kohdan mukaan e on oikea identiteetti, $Le = L$. Siksi oikea-vasenvaihto Lauseessa 4.15 toimii (vaihtaen L S:ään). On rutiiniharjoitus osoittaa, että maximaalist ryhmät $X \times G$ ovat $\{x\} \times G$-muotoisia joukkoja. □

Lause 4.17. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon L vasen ideaali joukossa S ja olkoon T vasen ideaali joukossa L.*

a) Kaikilla $t \in T$ on Lt vasen ideaali joukossa S ja $Lt \subseteq T$.

b) Jos L on minimaalinen vasen ideaali joukossa S, silloin $T = L$. (Joten minimaaliset vasemmat ideaalit ovat vasempia yksinkertaisia puoliryhmiä.)

c) Jos T on minimaalinen vasen ideaali joukossa L, silloin T on minimaalinen vasen ideaali joukossa S.

Todistus. a) $S(Lt) = (SL)t \subseteq Lt$ ja $Lt \subseteq LT \subseteq T$.

b) Poimitaan mikä tahansa $t \in T$. a)-kohdan mukaan Lt on vasen ideaali joukossa S ja $Lt \subseteq T \subseteq L$, ja koska L on minimaalinen, on oltava $Lt = L$. Tästä seuraa välttämättä myös, että $T = L$.

c) Nähdäksemme, että T on vasen ideaali joukossa S poimitaan mikä tahansa $t \in T$. a)-kohdan mukaan Lt on vasen ideaali joukossa S, joten Lt on myös vasen ideaali joukossa L. Edellisen b-kohdan mukaan $Lt = T$, koska $Lt \subseteq T$. Siksi $ST = S(Lt) = (SL)t \subseteq Lt = T$. Nähdäksemme, että T on minimaalinen joukossa S olkoon J vasen ideaali joukossa S ja $J \subseteq T$. Silloin J on vasen ideaali joukossa L ja T on minimaalinen vasen ideaali, joten $J = T$. □

Lemma 4.18. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon I ideaali joukossa S ja olkoon L minimaalinen vasen ideaali joukossa S. Silloin $L \subseteq I$.*

Todistus. Koska L on minimaalinen vasen ideaali, $Sx = L$ kaikilla $x \in L$ Lauseen 4.12 c-kohdan mukaan. Silloin myös $Ix \subseteq L$ ja $IL \subseteq L$. Edelleen IL

on vasen ideaali, sillä $SIL \subseteq IL$, onhan $SI \subseteq I$. Koska L on minimaalinen, täytyy olla $IL = L$. Toisaalta, koska I on kaksipuolinen ideaali, $L = IL \subseteq I$. Näin $L \subseteq I$. □

Lause 4.19. *Olkoon S puoliryhmä, olkoon L minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja olkoon $T \subseteq S$. Silloin T on minimaalinen vasen ideaali joukossa S jos ja vain jos on olemassa $a \in S$ siten, että $T = La$.*

Todistus. 1° Poimitaan $a \in T$. Silloin $SLa \subseteq La$ ja $La \subseteq ST \subseteq T$, joten La on vasen ideaali joukossa S sisältyen joukkoon T, joten $La = T$.

2° Koska $SLa \subseteq La$, La on vasen ideaali joukossa S. Oletetaan, että B on vasen ideaali joukossa S ja $B \subseteq La$. Olkoon $A = \{s \in L : sa \in B\}$. Silloin $A \subseteq L$ ja $A \neq \emptyset$. Väitämme, että A on vasen ideaali joukossa S, joten olkoon $s \in A$ ja olkoon $t \in S$. Silloin $sa \in B$, joten $tsa \in B$ ja, koska $s \in L, ts \in L$, joten $ts \in A$, kuten vaadittiin. Täten $A = L$, joten $La \subseteq B$, ja näin ollen $La = B$. □

Seuraus 4.20. *Olkoon S puoliryhmä. Jos joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, silloin kaikki vasemmat ideaalit joukossa S sisältävät minimaalisen vasemman ideaalin.*

Todistus. Olkoon L minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja olkoon J vasen ideaali joukossa S. Poimitaan $a \in J$. Silloin Lauseen 4.19 mukaan La on minimaalinen vasen ideaali, joka sisältyy ideaaliin J. □

Lause 4.21. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $e \in E(S)$. Väittämät a)–f) ovat ekvivalentteja ja niistä seuraa väittämä g). Jos joko S on yksinkertainen puoliryhmä tai jokaisessa vasemmassa ideaalissa joukossa S on idempotentti, silloin kaikki väittämät ovat ekvivalentteja.*

a) Se on minimaalinen vasen ideaali.
b) Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä.
c) eSe on ryhmä.
d) $eSe = H(e)$.
e) eS on minimaalinen oikea ideaali.
f) eS on oikea yksinkertainen puoliryhmä.
g) e on minimaalinen idempotentti.

Todistus. Lauseen 4.13 a-kohdan mukaan näemme, että a)-kohdasta seuraa g)-kohta ja Lauseen 4.13 d-kohdan mukaan, jos joko S on yksinkertainen puoliryhmä tai kaikilla joukon S vasemmilla ideaaleilla on idempotentti, silloin g)-kohdasta seuraa a)-kohta.

Osoitetaan, että a)-kohdasta seuraa b)-kohta, josta seuraa c)-kohta, siitä taas d)-kohta ja tästä puolestaan a)-kohta. Tästä ketjusta seuraa toinen ketju vasen-oikea-dualismin kautta ja sillä perusteella, että c)- ja d)-kohdat ovat kaksipuolisia. Eli e)-kohdasta seuraa f)-kohta, josta seuraa c)-kohta, josta edelleen seuraa d)-kohta ja tästä e)-kohta.

Se, että a)-kohdasta seuraa b)-kohta, perustuu Lauseen 4.17 b-kohtaan.

b)-kohdasta seuraa c): Triviaalisti eSe on suljettu. Lemman 4.11 mukaan e on kaksipuolinen identiteetti joukossa eSe. Olkoon myös $x = ese \in eSe$ annettu. Saadaan, että $x \in Se$, joten Sx on vasen ideaali joukossa Se ja siksi $Sx = Se$, koska Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä. Näin $e \in Sx$, joten poimitaan $y \in S$, jolla $e = yx$. Silloin $eye \in eSe$ ja $eyex = eyx = ee = e$, joten alkiolla x on e-vasta-alkio joukossa eSe.

c)-kohdasta seuraa d): Koska eSe on ryhmä ja $e \in eSe$, saadaan $eSe \subseteq H(e)$. Toisaalta e on identiteetti joukossa $H(e)$, sillä $H(e)$ on yhdiste aliryhmistä G_i, joihin kaikkiin identiteetti e kuuluu. Poimitaan $x \in G_i$ jollakin i, jolloin $ex = xe = x \in G_i \subseteq H(e)$. Nyt siis $x \in H(e)$ ja saadaan $x = exe \in eSe$, joten $H(e) \subseteq eSe$ eli $eSe = H(e)$.

d)-kohdasta seuraa a): Olkoon L vasen ideaali joukossa S ja $L \subseteq Se$ ja poimitaan $t \in L$. Silloin $t \in Se$, joten $et \in eSe$. Poimitaan $x \in eSe$, jolla $x(et) = e$. Silloin $xt = (xe)t = x(et) = e$, joten $e \in L$ ja $Se \subseteq SL \subseteq L$. Näin Se on minimaalinen. □

Huomataan, että puoliryhmässä $(\mathbb{N}, \cdot)$ on 1 ainoa idempotentti ja se on siksi minimaalinen, kun taas $\mathbb{N}1$ ei ole minimaalinen vasen ideaali. Näin Lauseen 4.21 g-kohta ei yleisesti johda muihin väittämiin Lauseessa 4.21.

Palautettakoon mieleen, että renkaassa voi olla monta minimaalista kaksipuolista ideaalia. Näin voi olla, koska renkaan minimaalinen ideaali on pienin niiden ideaalien joukossa, jotka ovat eri suuria kuin $\{0\}$, ja voi olla ideaalit I_1 ja I_2, joilla $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Toisaalta näemme, että puoliryhmässä voi olla enintään yksi minimaalinen kaksipuolinen ideaali.

Lemma 4.22. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon K ideaali joukossa S. Jos K on minimaalinen joukossa $\{J : J \text{ on ideaali joukossa } S\}$ ja I on ideaali joukossa S, silloin $K \subseteq I$.*

Todistus. Lemman 4.10 b-kohdan mukaan $K \cap I \neq \emptyset$, joten $K \cap I$ on ideaali, joka sisältyy joukkoon K, joten $K \cap I = K$. □

Määritelmä 4.23. Olkoon S puoliryhmä. Jos joukossa S on pienin ideaali, silloin $K(S)$ on tämä pienin ideaali.

Lause 4.24. *Olkoon S puoliryhmä.*

Jos joukossa S on minimaalinen vasen ideaali, silloin $K(S)$ on olemassa ja $K(S) = \bigcup\{L : L \text{ on minimaalinen vasen ideaali joukossa } S\}$.

Todistus. Olkoon $I = \bigcup\{L : L \text{ on minimaalinen vasen ideaali joukossa } S\}$. Lemman 4.18 mukaan, jos J on mikä tahansa ideaali joukossa S, silloin $I \subseteq J$, joten riittää osoittaa, että I on ideaali joukossa S. Oletuksen mukaan

$I \neq \emptyset$, joten olkoon $x \in I$ ja olkoon $s \in S$. Poimitaan minimaalinen vasen ideaali L joukosta S, jolla $x \in L$. Silloin $sx \in L \subseteq I$. Samoin Lauseen 4.19 mukaan Ls on minimaalinen vasen ideaali joukossa S, joten $Ls \subseteq I$, koska $xs \in Ls$. □

Lemma 4.25. *Olkoon S puoliryhmä.*

a) Olkoon L vasen ideaali joukossa S. Silloin L on minimaalinen jos ja vain jos $Lx = L$ kaikilla $x \in L$.

b) Olkoon I ideaali joukossa S. Silloin I on pienin ideaali jos ja vain jos $IxI = I$ kaikilla $x \in I$.

Todistus. a) 1° Jos L on minimaalinen ja $x \in L$, silloin Lx on vasen ideaali joukossa S ja $Lx \subseteq L$, joten $Lx = L$.

2° Nyt oletetaan, että $Lx = L$ kaikilla $x \in L$ ja olkoon J vasen ideaali joukossa S ja $J \subseteq L$. Poimitaan $x \in J$. Silloin $L = Lx \subseteq LJ \subseteq J \subseteq L$.

b) 1° Olkoon I pienin ideaali joukossa S ja $x \in I$. Silloin $Ix \in S$ ja $SI \subseteq I$, joten myös $IxI \subseteq I$. Toisaalta IxI on Lauseen 4.11 a-kohdan mukaan ideaali. Koska I on pienin ideaali, täytyy olla $I \subseteq IxI$. Näin ollen $I = IxI$ kaikilla $x \in I$.

2° Olkoon $IxI = I$ kaikilla $x \in I$ ja olkoon $J \subseteq I$ myös ideaali joukossa S. Poimitaan $x \in J$, jolloin $I = IxI \subseteq IJI \subseteq JI \subseteq J \subseteq I$, koska J on sekä vasen että oikea ideaali. Näin siis $J = I$ eli I on pienin ideaali. □

Lause 4.26. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että $K(S)$ on olemassa ja $e \in E(S)$. Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja ja ovat seurausta mistä tahansa Lauseen 4.21 ekvivalenteista väittämistä a)–f).*

h) $e \in K(S)$.

i) $K(S) = SeS$.

Todistus. Lauseesta 4.24 seuraa, että Lauseen 4.21 a-kohta johtaa tämän lauseen h)-kohtaan: Se on siis minimaalinen vasen ideaali ja $K(S)$ minimaalisten vasempien ideaalien yhdiste. Koska $e \in Se$, kuuluu se yhdisteeseenkin eli $e \in K(S)$.

h)-kohta johtaa i)-kohtaan: Koska SeS on ideaali, saadaan $K(S) \subseteq SeS$. Koska $e \in K(S)$, saadaan $SeS \subseteq K(S)$. Näin $K(S) = SeS$.

i)-kohta johtaa h)-kohtaan: Saadaan $e = eee \in SeS = K(S)$. □

4.6 Minimaaliset vasemmat ideaalit, joissa on idempotentteja

Lause 4.27. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja siinä idempotentti. Silloin jokaisessa minimaalisessa vasemmassa ideaalissa on idempotentti.*

Todistus. Olkoon L minimaalinen vasen ideaali ja siinä idempotentti e ja olkoon J minimaalinen vasen ideaali. Lauseen 4.19 mukaan on olemassa sellainen $x \in S$, että $J = Lx$. Lauseen 4.16 mukaan $eL = eSe$ on ryhmä, joten olkoon $y = eye$ alkion exe käänteisalkio tässä ryhmässä. Silloin $yx \in Lx = J$ ja $yxyx = (ye)x(ey)x = y(exe)yx = eyx = yx$. □

Lemma 4.28. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja siinä idempotentti. Silloin on olemassa minimaalinen oikea ideaali, jossa on idempotentti.*

Todistus. Poimitaan minimaalinen vasen ideaali L joukosta S ja idempotentti $e \in L$. Lauseen 4.12 c-kohdan mukaan Se on minimaalinen vasen ideaali joukossa S, joten Lauseen 4.21 mukaan eS on minimaalinen oikea ideaali joukossa S ja e on idempotentti joukossa eS. □

Lause 4.29. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja siinä idempotentti. Olkoon $T \subseteq S$.*

a) T on minimaalinen vasen ideaali joukossa S jos ja vain jos on olemassa sellainen $e \in E(K(S))$, että $T = Se$.

b) T on minimaalinen oikea ideaali joukossa S jos ja vain jos on olemassa sellainen $e \in S(K(S))$, että $T = eS$.

Todistus. Poimitaan minimaalinen vasen ideaali L joukosta S ja idempotentti $f \in L$.

a) 1°: Koska Sf on vasen ideaali joukossa L, $Sf = L$.Näin Lauseen 4.21 mukaan fSf on ryhmä. Poimitaan mikä tahansa $a \in T$. Silloin $faf \in fSf$, joten poimitaan $x \in fSf$ siten, että $x(faf) = f$. Silloin

$$\begin{aligned} xaxa &= (xf)a(fx)a \\ &= (xfaf)xa \\ &= fxa \\ &= xa. \end{aligned}$$

Siispä xa on idempotentti. Edelleen $xa \in T$, koska $T \subseteq K(S)$ Lauseen 4.24 mukaan, joten $xa \in E(K(S))$. Lopulta Sxa on vasen ideaali joukossa T, joten $T = Sxa$.

2°: Koska $e \in K(S)$, poimitaan Lauseen 4.24 mukaan minimaalinen vasen ideaali I joukosta S ja $e \in I$. Silloin $Se = I$ Lauseen 4.12 c-kohdan mukaan.

b) Lemman 4.28 perusteella tämä seuraa vasen-oikeavaihdolla. □

Lause 4.30. *Olkoon S puoliryhmä ja oletetaan, että on olemassa minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja siinä idempotentti, ja olkoon $e \in E(S)$. Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:*

a) Se on minimaalinen vasen ideaali.

b) Se on vasen yksinkertainen puoliryhmä.

c) eSe on ryhmä.

d) $eSe = H(e)$.

e) eS on minimaalinen oikea ideaali.

f) eS on oikea yksinkertainen puoliryhmä.

g) e on minimaalinen idempotentti.

h) $e \in K(S)$.

i) $K(S) = SeS$.

Todistus. Seurauksen 4.20 ja Lauseen 4.27 mukaan jokainen vasen ideaali joukossa S sisältää idempotentin, joten Lauseen 4.21 mukaan väittämät a)–g) ovat ekvivalentteja. Lauseiden 4.24 ja 4.26 mukaan tarvitsee vain osoittaa, että h):sta seuraa a). Mutta tämä seuraa Lauseesta 4.29. □

Lause 4.31. *Olkoon S puoliryhmä, joka sisältää minimaalisen vasemman ideaalin, johon sisältyy idempotentti. Olkoon T alipuoliryhmä joukossa S, joka myös sisältää idempotentillisen minimaalisen vasemman ideaalin, ja oletetaan, että $T \cap K(S) \neq \emptyset$. Silloin seuraavat väittämät ovat tosia:*

1) $K(T) = T \cap K(S)$.

2) Minimaaliset vasemmat ideaalit joukossa T ovat täsmälleen ne epätyhjät joukot muotoa $T \cap L$, missä L on minimaalinen vasen ideaali joukossa S.

3) Minimaaliset oikeat ideaalit joukossa T ovat täsmälleen ne epätyhjät joukot muotoa $T \cap L$, missä L on minimaalinen oikea ideaali joukossa S.

4) Jos T on kaksipuolinen ideaali joukossa S, niin $K(T) = K(S)$.

Todistus. 1) Lauseen 4.24 mukaan $K(T)$ on olemassa, joten koska $K(S) \cap T$ on ideaali joukossa T, $K(T) \subseteq K(S) \cap T$. Päästäksemme päinvastaiseen johtopäätökseen, olkoon annettu $x \in K(S) \cap T$. Silloin Tx on vasen ideaali, joten Seurauksen 4.20 ja Lauseen 4.27 mukaan Tx sisältää minimaalisen vasemman ideaalin $Te \in T$ eräällä idempotentilla $e \in T$. Nyt $x \in K(S)$, joten Lauseen 4.24 mukaisesti poimitaan minimaalinen vasen ideaali L joukosta S niin, että $x \in L$. Silloin $L = Sx$ ja $e \in Tx \subseteq Sx$, joten $L = Se$, joten $x \in Se$, joten Lemman 4.11 mukaan $x = xe \in Te \subseteq K(T)$.

2) Huomaamme ensin, että jokaisella idempotentilla $e \in T$ $Se \cap T = Te$. Jotta näkisimme tämän, olkoon $x \in Se \cap T$. Silloin $x = xe \in Te$. Niinpä $Se \cap T \subseteq Te$. Ja vastakkainen johtopäätös on ilmeinen.

Oletetaan, että L on minimaalinen vasen ideaali joukossa S ja $T \cap L \neq \emptyset$. Seurauksen 4.20 mukaan $T \cap L$ sisältää minimaalisen vasemman ideaalin

M joukossa T ja Lauseen 4.27 mukaan on olemassa idempotentti e joukossa M. Nyt Se on vasen ideaali joukossa S ja Te vasen ideaali joukossa T, joten $Se = L$ ja $Te = M$. Näin $L \cap T = Se \cap T = Te = M$.

3) Tämä todistus on saadaan edellisestä vaihtamalla vasen oikeaksi.

4) Jos T on ideaali joukossa S, niin $K(S) \subseteq T$. Niinpä $K(T) = T \cap K(S) = K(S)$. □

5 Puoliryhmä $(\beta\mathbb{N}, +)$

Puoliryhmien yleisen teorian jälkeen siirrytään nyt avaruuden $\beta\mathbb{N}$ ja yhteenlaskun muodostamaan puoliryhmään $(\beta\mathbb{N}, +)$. Se on ensin osoitettava puoliryhmäksi. Sittenkään merkintä ei ole täsmällinen. Seuraavassa alaluvussa nimittäin osoitetaan, että yhteenlasku menettää kommutatiivisuutensa joukossa $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ eli $p + q$ ei välttämättä ole yhtä suuri kuin $q + p$. Yhteenlaskun tunnuksena käytetään kuitenkin merkkiä + edelleen silloin, kun ei ole tarpeen määritellä, kumman suuntaista yhteenlaskua tarkoitetaan.

Tässä luvussa käytetään lähteitä [1] (s. 210-211) ja [5] (s. 95-96).

Määritelmän 3.12 mukaan jatkuvat funktiot ovat laajennettavissa avaruudesta S avaruuteen βS. Yhteenlasku on laajennettava erikseen vasemmaksi yhteenlaskuksi λ ja oikeaksi yhteenlaskuksi ρ. Määritellään vasemmat ja oikeat laskutoimitusten laajennukset kuitenkin yleisellä tasolla kaikkia binäärisiä operaatiota koskevina.

Määritelmä 5.1. Olkoon S diskreetti avaruus ja βS sen Stone-Čech-kompaktisointi. Olkoon lisäksi $\cdot$ binäärinen operaatio avaruudessa S ja $*$ binäärinen operaatio, joka on funktion $\cdot$ laajennus avaruuteen βS. Erotetaan oikealta ja vasemmalta operoiminen seuraavasti:

a) Oikeaa operaatiota merkitään $\rho_q : \beta S \to \beta S$, missä $\rho_q(p) = p * q$.

b) Vasenta operaatiota merkitään $\lambda_q : \beta S \to \beta S$, missä $\lambda_q(p) = q * p$.

Seuraava lause osoittaa, että nämä ovat olemassa jatkuvina avaruudessa βS.

Lause 5.2. *Olkoon S diskreetti avaruus ja olkoon $\cdot$ binäärinen operaatio avaruudessa S. Silloin on olemassa yksikäsitteinen binäärinen operaatio $* : \beta S \times \beta S \to \beta S$, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:*

a) Kaikilla $s, t \in S$, $s * t = s \cdot t$.

b) Kaikilla $q \in \beta S$ funktio $\rho_q : \beta S \to \beta S$ on jatkuva, missä $\rho_q(p) = p * q$.

c) Kaikilla $s \in S$ funktio $\lambda_s : \beta S \to \beta S$ on jatkuva, missä $\lambda_s(q) = s * q$.

Todistus. Määritellään operaatio $*$ aluksi avaruudessa $S \times \beta S$. Jos on annettu mikä tahansa $s \in S$, määritellään $\ell_s : S \to S \subseteq \beta S$ seuraavasti: $\ell_s(t) = s \cdot t$. Koska S on diskreetti avaruus, on funktio ℓ_s jatkuva. Avaruus βS on kompakti. Silloin Määritelmän 3.12 ja Lauseen 3.14 mukaan on olemassa jatkuva funktio $\lambda_s : \beta S \to \beta S$, jolle $\lambda_s|_S = \ell_s$. Jos $s \in S$ ja $q \in \beta S$, määritellään $s * q = \lambda_s(q)$. Silloin kohta c) pätee, samoin a), koska λ_s laajentaa funktion ℓ_s. Edelleen laajennus λ_s on yksikäsitteinen, koska jatkuvat funktiot, jotka saavat samat arvot tiheässä aliavaruudessa, ovat samoja. Näin saatiin ainoa mahdollinen kohdat a) ja c) toteuttava määrittely operaatiolle $*$.

Nyt laajennetaan $*$ muualle avaruuteen $\beta S \times \beta S$. Kun on annettu $q \in \beta S$, määritellään $r_q : S \to \beta S$, jolle $r_q(s) = s * q$. Myös funktio r_q on jatkuva, koska S on diskreetti avaruus. Silloin on olemassa jatkuva funktio $\rho_q : \beta S \to \beta S$, jolle $\rho_q|_S = r_q$. Jokaiselle $p \in \beta S \setminus S$ määritellään $p * q = \rho_q(p)$ ja huomataan, että jos $s \in S$, $\rho_q(s) = r_q(s) = s * q$. Niinpä kaikille $p \in \beta S$, $\rho_q(p) = p * q$. Nyt huomataan, että b) toteutuu. Taas jatkuvien funktioiden yksikäsitteisyyden nojalla tämä on ainoa mahdollinen määrittely, joka toteuttaa vaaditut ehdot. □

Tarvitaan vielä assosiatiivisuuden todistaminen, jotta $(\beta S, \cdot)$ olisi puoliryhmä. Operaatiot avaruudessa βS voidaan ilmaista raja-arvon käsittein.

Määritellään ensin raja-arvo kompaktisoidussa avaruudessa.

Määritelmä 5.3. Olkoon D diskreetti avaruus ja βD sen Stone–Čech-kompaktisointi. Olkoon lisäksi $A \subseteq D$, $s \in A$ ja $p \in \beta D$. Silloin raja-arvo $\lim_{s \to p} s = p$ täsmälleen silloin, kun jokaisella pisteen p ympäristöllä V on olemassa pisteen s ympäristö U niin, että $A \cap U \subseteq V$.

Tästä huomataan, että jos raja-arvo $\lim_{s \to p} s$ on olemassa, se on yksikäsitteinen.

Seuraavien huomautusten väitteet seuraavat välittömästi siitä, että λ_s on jatkuva kaikille $s \in S$ ja ρ_q on jatkuva kaikille $q \in \beta S$. Tässä s ja t edustavat avaruuden S alkioita.

Huomautus 5.4. Olkoon $\cdot$ binäärinen operaatio diskreetissä avaruudessa S.

a) Jos $s \in S$ ja $q \in \beta S$, niin $s \cdot q = \lim_{t \to q} s \cdot t$.

b) Jos $p, q \in \beta S$, silloin $p \cdot q = \lim_{s \to p} (\lim_{t \to q} s \cdot t)$.

Lause 5.5. *Olkoon $(S, \cdot)$ puoliryhmä. Silloin laajennettu operaatio avaruudessa βS on assosiatiivinen.*

Todistus. Olkoot $p, q, r \in \beta S$. On tunnettua, että $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ kaikilla $a, b, c \in S$. Nyt $\lim_{a \to p} \lim_{b \to q} \lim_{c \to r} (a \cdot b) \cdot c = \lim_{a \to p} \lim_{b \to q} (a \cdot b) \cdot r$, koska funktio $\lambda_{a \cdot b}$ on jatkuva. Edelleen tämä on yhtä kuin $\lim_{a \to p} (a \cdot q) \cdot r$, koska funktio $\rho_r \circ \lambda_a$ on jatkuva. Ja viimein tämä on yhtä kuin $(p \cdot q) \cdot r$, koska funktio $\rho_r \circ \rho_q$ on jatkuva.

Vastaavasti $\lim_{a\to p} \lim_{b\to q} \lim_{c\to r} a \cdot (b \cdot c) = p \cdot (q \cdot r)$.

Näin ollen $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ ja operaation laajennus on assosiatiivinen. □

Kaiken kaikkiaan $(\beta S, \cdot)$ ja erityistapauksena $(\beta\mathbb{N}, +)$ ovat puoliryhmiä.

Huomautus 5.6. Onko myös $(\beta\mathbb{R}, \cdot)$ puoliryhmä, missä $\beta\mathbb{R}$ on reaalilukuavaruuden $\mathbb{R}$ Stone–Čech-kompaktisointi? Hindman–Straussin mukaan näin ei ole.([5], s. 318–.) Tässä tutkielmassa on käsitelty vain diskreettejä avaruuksia, mutta reaalilukuavaruus ei ole diskreetti.

5.1 Yhteenlasku avaruudessa $\beta\mathbb{N}$

Tässä alaluvussa osoitetaan, että yhteenlasku avaruudessa $\beta\mathbb{N}$ ei ole kommutatiivinen. Tarvitaan siis erikseen vasen ja oikea yhteenlasku, jotka ovat laajennettavissa avaruuteen $\beta\mathbb{N}$ Määritelmän 3.12 kohdan d) mukaisesti.

Tässäkin on käytetty lähdettä [5] (s. 89–90, 96), jossa tosin asiat esitetään yleisemmällä tasolla. Koska nyt on tarve vain yhteenlaskulle, keskitytään tässä pääosin siihen. Lauseen 5.8 a)-kohdan todistukseen lisäsin välivaiheita, b)-kohdan todistuksen kirjoitin kokonaan, samoin Lauseen 5.10 ja Seurauksen 5.11 todistukset.

Sovitaan aluksi merkintätavoista. Tämä määritelmä on tässä sekä yleisenä että yhteenlaskuun sovellettuna, sillä Hales–Jewettin lausetta varten sitä tarvitaan myös yleisenä.

Määritelmä 5.7. Olkoot $(S, \cdot)$ puoliryhmä, $A \subseteq S$ ja $s \in S$.

Laskutoimituksen lajista riippumatta:

(a) $s^{-1}A = \{t \in S : st \in A\}$.

(b) $As^{-1} = \{t \in S : ts \in A\}$.

Laskutoimituksena yhteenlasku:

(c) $-s + A = \{t \in S : s + t \in A\}$.

(d) $A - s = \{t \in S : t + s \in A\}$.

Nämä ovat siis nimenomaan merkintätapoja, sillä puoliryhmässä ei tarvitse olla käänteis/vasta-alkioita.

Lause 5.8. *Olkoot $(S, +)$ puoliryhmä ja $A \subseteq S$.*

a) Kaikilla $s \in S$ ja $q \in \beta S$, $A \in s + q$ täsmälleen silloin, kun $-s + A \in q$.

b) Kaikilla $p, q \in \beta S$, $A \in p+q$ täsmälleen silloin, kun $\{s \in S : -s+A \in q\} \in p$.

Todistus. a) Oletetaan aluksi, että $A \in s+q$. Silloin $\widehat{A}$ on alkion $\lambda_s(q) = s+q$ ympäristö, joten poimitaan $B \in q$, jolla $\lambda_s(\widehat{B}) = s + \widehat{B} \subseteq \widehat{A}$. Nyt $B \in q$, joten $q \in \widehat{B}$ ja $s + q \in s + \widehat{B}$. Olkoon $b \in B$ joukon B alkio. Tällöin ultrafiltteri b sisältyy joukkoon $\widehat{B}$ ja ultrafiltteri $s+b$ sisältyy joukkoon $s+\widehat{B}$. Jotta joukko A sisältyisi jokaiseen joukon $s + \widehat{B}$ ultrafiltteriin, on välttämätöntä, että $s + b \in A$ eli $s+B \subseteq A$. Nyt $B \subseteq \{t \in S : s+t \in A\} = -s+A$, joten $-s+A \in q$ filtterin määritelmän toisen ehdon mukaan (Määritelmä 3.1).

Oletetaan sitten, että $-s+A \in q$ mutta $A \notin s+q$. Silloin $S \setminus A \in s+q$, joten äskeisen perusteella $-s + (S \setminus A) \in q$. Tämä on ristiriita, sillä $(-s+A) \cap (-s + (S \setminus A)) = \emptyset$. Näin ollen $A \in s+q$.

b) Oletetaan, että $A \in p+q$. Taas $\widehat{A}$ on alkion $\lambda_p(q) = p+q$ ympäristö. Poimitaan $B \in p$ ja $C \in q$, joilla $\widehat{B} + \widehat{C} \subseteq \widehat{A}$. Edelleen $B \in p$, joten $p \in \widehat{B}$ ja $C \in q$, joten $q \in \widehat{C}$, niinpä $p+q \in \widehat{B} + \widehat{C}$. Vastaavasti kuin edellä olkoot $b \in B$ ja $c \in C$. Jotta joukko A sisältyisi jokaiseen joukon $\widehat{B} + \widehat{C}$ ultrafiltteriin, on välttämätöntä, että $b+c \in A$ eli $B+C \subseteq A$. Nyt $C \subseteq \{t \in S : s+t \in A\} = -s+A$, joten $-s+A \in q$. $B \subseteq \{s \in S : -s+A \in q\}$ eli $\{s \in S : -s+A \in q\} \in p$.

Jos taas oletetaan, että $\{s \in S : -s+A \in q\} \in p$, mutta $A \notin p+q$, niin $S \setminus A \in p+q$. Tällöin edellisen perusteella $\{s \in S : -s + (S \setminus A) \in q\} \in p$. Taas joudutaan ristiriitaan, koska $(-s+A) \cap (-s + (S \setminus A)) = \emptyset$. Näin ollen $A \in p+q$. $\square$

Lemma 5.9. *Olkoon $(S,+)$ puoliryhmä ja olkoot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jonoja avaruudessa S sekä olkoon $p, q \in \beta\mathbb{N}$. Jos $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq q$ ja $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$, silloin $\{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N}$ ja $k < n\} \in p+q$.*

Todistus. Merkitään:

$$A = \{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N} \text{ ja } k < n\},$$

$$B = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \in p,$$

$$C = \{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \in q,$$

Nyt $-y_k + A = \{x_n \in S : y_k + x_n \in A\} = \{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} = C \in q$. Tällöin $\{y_k \in S : -y_k + A \in q\} \subseteq B \in p$, joten Lemman 5.8 kohdan b) nojalla $A \in p+q$. $\square$

Lause 5.10. *Olkoon $(S,+)$ puoliryhmä. Silloin $(\beta S,+)$* ***ei ole kommutatiivinen*** *täsmälleen silloin, kun on olemassa jonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, joilla $\{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N}, k < n\} \cap \{x_k + y_n : k, n \in \mathbb{N}, k < n\} = \emptyset$.*

Todistus. 1° Oletetaan, että $(\beta S,+)$ ei ole kommutatiivinen. Poimitaan p ja q joukosta βS niin, että $p+q \neq q+p$. Poimitaan $A \subseteq S$ niin, että $A \in p+q$ ja

$S \setminus A \in q+p$. Olkoon $B = \{s \in S : -s + A \in q\}$ ja $C = \{s \in S : -s + (S \setminus A) \in p\}$. Silloin $B \in p$ ja $C \in q$. Valitaan $x_1 \in B$ ja $y_1 \in C$. Induktiivisesti annetaan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sekä valitaan $x_{n+1} \in B \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(-y_k + (S \setminus A) \Big)$ ja $y_{n+1} \in C \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(-x_k + A \Big)$. Silloin $\{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N}$ ja $k < n\} \subseteq S \setminus A$ ja $\{x_k + y_n : k, n \in \mathbb{N}$ ja $k < n\} \subseteq A$ eli niiden leikkaus on tyhjä joukko.

2° Olkoon puoliryhmässä $(\beta S, +)$ jonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, joilla $\{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N}, k < n\} \cap \{x_k + y_n : k, n \in \mathbb{N}, k < n\} = \emptyset$. Nyt tiedetään, että joukossa $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus, sillä avaruus βS on kompakti ja muodostetut jonot ovat suljettuja joukkoperheitä ultrafilttereistä, joilla on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Siispä molemmissa jonoissakin on tämä ominaisuus. Nyt valitaan $p \in \beta S$ niin, että $\{\{x_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq p$. Vastaavasti valitaan $q \in \beta S$ niin, että $\{\{y_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq q$. Silloin Lemman 5.9 mukaan $\{y_k + x_n : k, n \in \mathbb{N}$ ja $k < n\} \in q + p$ ja $\{x_k + y_n : k, n \in \mathbb{N}$ ja $k < n\} \in p + q$. Oletuksen mukaan näiden leikkaus on tyhjä, joten $p + q \neq q + p$ eli $(\beta S, +)$ ei ole kommutatiivinen. □

Seuraus 5.11. $(\beta\mathbb{N}, +)$ *ei ole kommutatiivinen.*

Todistus. Muodostetaan jonot Fibonaccin luvuista. Fibonaccin luvut saadaan lähtien ykkösestä ja kakkosesta ja muodostamalla seuraava luku kahden edellisen summana: $F = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$. Kaksi jonoa saadaan ottamalla molempiin jonoihin ykkönen ja valitsemalla luvuista joka toinen toisesta ja kolmannesta alkaen. Olkoot siis $(x_n) = \{1, 2, 5, 13, 34, \ldots\}$ ja $(y_n) = \{1, 3, 8, 21, 55, \ldots\}$, missä $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Nyt $x_1 + y_0 = 2 + 1 = 3 \in A$ ja $y_1 + x_0 = 3 + 1 = 4 \in B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$. Näin siis $A_1 = \{3\}$ ja $B_1 = \{4\}$. Edelleen $x_2 + y_0 = 5 + 1 = 6 \in A$ ja $x_2 + y_1 = 5 + 3 = 8 \in A$ sekä $y_2 + x_0 = 8 + 1 = 9 \in B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$ ja $y_2 + x_1 = 8 + 2 = 10 \in B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$. Nyt $A_2 = \{3, 6, 8\}$ ja $B_2 = \{4, 9, 10\}$.

Osoitetaan induktiolla, että $x_n + y_i \notin B_n$ ja $y_n + x_i \notin A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq n-1$.

Edeltä nähdään, että väite pätee, kun $n = 2$. Oletetaan, että väite pätee mielivaltaiseen lukuun k asti. Osoitetaan, että se pätee myös luvulle $k+1$.

Joukon A_k suurin alkio on $a_{max} = x_k + y_{k-1}$ ja joukon B_k suurin alkio on $b_{max} = y_k + x_{k-1}$. Koska jonoissa on Fibonaccin lukuja, $x_{k+1} = x_k + y_k$ ja $y_{k+1} = x_{k+1} + y_k$. Niinpä joukkoon A lisättävät luvut $x_{k+1} + y_i \geq x_{k+1} = x_k + y_k = x_{k-1} + y_{k-1} + y_k \geq x_{k-1} + y_k = b_{max}$, joten $x_k + y_i \notin B_k$, kun $1 \leq i \leq k-1$.

Vastaavasti joukkoon B lisättävät luvut $y_{k+1} + x_i \geq y_{k+1} = x_{k+1} + y_k = x_k + 2y_k \geq x_k + y_k = x_k + x_k + y_{k-1} \geq x_k + y_{k-1} = a_{max}$, joten $y_k + x_i \notin A_k$, kun $1 \leq i \leq k-1$.

Näin ollen $A_n \cap B_n = \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.10 nojalla puoliryhmä $(\beta\mathbb{N}, +)$ ei ole kommutatiivinen. □

5.2 Oikea topologinen puoliryhmä

Nyt kun on määritelty käsitteet puoliryhmä, kompaktisointi $\beta\mathbb{N}$ ja ei-kommutatiivinen yhteenlasku, voidaan määritellä van der Waerdenin lauseen todistamisessa käytetty oikea topologinen puoliryhmä.

Määritelmä 5.12. *Oikea topologinen puoliryhmä* on kolmikko $(S,\cdot,\mathcal{T})$, missä $(S,\cdot)$ on puoliryhmä, $(S,\mathcal{T})$ on topologinen avaruus ja kaikilla $x \in S$ Määritelmän 5.1 mukainen funktio $\rho_x : S \to S$ on jatkuva.

Todistuksessa käytettävä oikea topologinen puoliryhmä on $(\beta\mathbb{N},+,\mathcal{T})$, missä topologian kannan muodostavat $\widehat{A}$-muotoiset joukot (ks. Määritelmä 3.7).

Seuraavassa lemmassa esitellään van der Waerdenin lauseen todistamisessa hyödyllinen avaruuden $\beta\mathbb{N}$ ominaisuus.

Lemma 5.13. *Jos* $\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$ *on äärellinen luonnollisten lukujen joukon* $\mathbb{N}$ *ositus, niin* $\{clA_1,clA_2,\ldots,clA_m\}$ *on avaruuden* $\beta\mathbb{N}$ *ositus niin, että* clA_i *on avoin kaikilla* $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Todistus. Olkoon $Y = \{1,2,\ldots,m\}$ ja sillä diskreetti topologia sekä määritellään $f : \mathbb{N} \to Y$, $f(n) = i$, jos $n \in A_i$ ja $f(n) = 0$, jos $n \notin A_i$. Olkoon jokaista $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ kohti olemassa $B_i = \{p \in \beta\mathbb{N} : f^\beta(p) = i\}$, missä f^β on funktion f laajennus avaruuteen $\beta\mathbb{N}$.

Tällöin $\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}$ on avaruuden $\beta\mathbb{N}$ ositus, sillä joukkojen B_i täytyy olla erillisiä. Jos oletamme, että on olemassa $p \in \beta\mathbb{N}$, joka kuuluu kahteen eri osajoukkoon, $p \in B_i$ ja $p \in B_j$, $i \neq j$, saamme $f^\beta(p) = i$ ja $f^\beta(p) = j$ eli $i = j$. Tämä on kuitenkin vastoin oletusta, joten yksikään piste p ei kuulu useaan osajoukkoon B_i.

Lisäksi, kun $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $B_i = (f^\beta)^{-1}(\{i\})$. Koska $\{i\}$ on avoin ja suljettu joukossa Y ja f^β on jatkuva, B_i on avoin ja suljettu.

On vielä näytettävä, että B_i on sama kuin clA_i. Koska $A_i \subseteq B_i$ ja B_i on suljettu, on $clA_i \subseteq B_i$. Nähdäksemme, että $B_i \subseteq clA_i$, olkoon $x \in B_i$ ja olkoon U pisteen x ympäristö. Koska $\mathbb{N}$ on tiheä avaruudessa $\beta\mathbb{N}$, valitaan $y \in \mathbb{N} \cap (U \cap B_i)$. Koska $y \in B_i$, $f(y) = i$ ja niin $y \in A_i$. Täten $U \cap A_i \neq \emptyset$, jolloin $x \in clA_i$ ja $B_i \subseteq clA_i$. Nyt siis $B_i = clA_i$ ja $\{clA_1,clA_2,\ldots,clA_m\}$ on avaruuden $\beta\mathbb{N}$ ositus ja clA_i on avoin (ja suljettu). $\square$

6 Van der Waerdenin lauseen todistaminen

Van der Waerdenin lauseen todistaminen onnistuu lopulta varsin lyhyesti, mutta pohjustetaan vielä muutamalla lauseella.

Tämä luku pohjautuu päälähteeseeni [1], s. 212-215. Artikkelissa käytetään varsin tiivistä matemaattista ilmaisua. Olen lisännyt jonkin verran välivaiheita ja perusteluita.

6.1 Idempotentti apuvälineenä

Edellä esitetyt lauseet sisälsivät ehdon: jos ideaalissa on idempotentti. Osoitetaan nyt, että puoliryhmässä S välttämättä on idempotentti, jos S on kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä, kuten van der Waerdenin lauseen todistamisessa sen halutaan olevan.

Samoin edellä jätettiin nimeämättä, mitä laskutoimitusta puoliryhmässä käytettiin. Tässä luvussa laskutoimituksena on (vasen tai oikea) yhteenlasku.

Van der Waerdenin lauseessa on mielenkiinnon kohteena l-pituinen aritmeettinen sarja. Luvusta a alkavana ja b-pituisin välein se voidaan kirjoittaa muotoon $(a, a+b, a+2b, \ldots, a+(l-1)b)$. Parin rajauksen avulla tämä saadaan merkittävästi yksinkertaisempaan muotoon.

Jos kompaktissa Hausdorffin oikeassa topologisessa puoliryhmässä siis on idempotentteja, silloin b:n monikerrat palautuvat yksinkertaiseksi b:ksi tapauksissa, joissa b on idempotentti. Todistetaan nyt idempotenttien olemassaolo.

Lemma 6.1. *Olkoon S kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä. Silloin joukossa S on idempotentti eli siellä on $x \in S$, jolle $x + x = x$.*

Todistus. Olkoon $\mathscr{A} = \{A \subseteq S : A \neq \emptyset, A$ on kompakti ja $A + A \subseteq A\}$. Nyt $\mathscr{A} \neq \emptyset$, sillä $S \in \mathscr{A}$. Olkoon $\mathscr{C}$ ketju A:ssa. Tällöin $\mathscr{C}$ on kokoelma suljettuja S:n osajoukkoja, joilla on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Niinpä $\cap\mathscr{C} \neq \emptyset$ ja $\cap\mathscr{C}$ on kompakti. Triviaalisti $(\cap\mathscr{C}) + (\cap\mathscr{C}) \subseteq \cap\mathscr{C}$, joten $\cap\mathscr{C}$ on ketjun $\mathscr{C}$ alaraja. Poimitaan Zornin lemman mukaisesti joukon $\mathscr{A}$ pienin jäsen A.

Poimitaan $x \in A$ ja olkoon $B = A + x$. Nyt $B = \rho_x(A)(= \{\rho_x(y) : y \in A\})$, joten jatkuvana kuvana kompaktista joukosta B on kompakti (ja triviaalisti epätyhjä). Siis $B + B = A + x + A + x \subseteq A + A + A + x \subseteq A + x = B$. Näin $B \in \mathscr{A}$. Koska $B = A + x \subseteq A + A \subseteq A$ ja A on pienin, niin $B = A$, joten $x \in B = A + x$. Toisin sanoen on olemassa $y \in A$, jolle $x = y + x$.

Olkoon $C = \{y \in A : x = y + x\}$. Funktio ρ_x on jatkuva, joten $\rho_x^{-1}(\{x\})$ on suljetun joukon kuvana suljettu. Täten C on suljettu ja edelleen kompakti, koska S on kompakti. Todetaksemme, että $C + C = C$, olkoot $y, z \in C$. Silloin $y + z \in A$ ja $(y + z) + x = y + (z + x) = y + x = x$, joten $y + z \in C$. Täten $C \in \mathscr{A}$. Koska $C \subseteq A$ ja A on pienin, niin $C = A$. Silloin $x \in C$ ja $x + x = x$, eli idempotentti on olemassa. $\square$

Valitaan nyt b siten, että $b+b=b$. Silloin aritmeettinen sarja saa muodon $(a, a+b, a+b, \ldots, a+b)$. Vielä yksinkertaisempi muoto saadaan, jos valitaan a ja b yhtäsuuriksi. Silloin sarja saa muodon $(a, a, a, \ldots, a)$. Jos näin rajatusta aritmeettisten sarjojen joukosta löytyisi – väritermein – yksivärinen sarja, todistamisessa säästyttäisiin paljolta lisätyöltä.

6.2 Minimaaliset vasemmat ideaalit oikeissa topologisissa puoliryhmissä

Todistamisen avuksi tarvitaan vielä muutama lause minimaalisista vasemmista ideaaleista, tapauksessa, jossa S on kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä.

Lemma 6.2. *Olkoon S kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä. Jokaiseen vasempaan ideaaliin sisältyy minimaalinen vasen ideaali, ja minimaaliset vasemmat ideaalit ovat suljettuja.*

Todistus. Olkoot joukko L vasen ideaali joukossa S ja joukko $\mathscr{A} = \{A \subseteq L :$ A on kompakti vasen ideaali$\}$. Valitaan $x \in L$. Silloin $S+x = \rho_x(S)$ eli jatkuva kuva kompaktista avaruudesta. Näin ollen $S+x$ on kompakti. Edelleen $S+(S+x) = (S+S)+x \subseteq S+x$ eli $S+x$ on vasen ideaali. Koska $S+x \subseteq S+L \subseteq L$, tiedämme, että $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Joukon L osajoukoista voi muodostaa ketjuja osajoukkouden perusteella (ketjuksi riittää yksikin alkio). Kussakin ketjussa joukkojen leikkaus on ketjun pienin joukko, joka siis on joukon $\mathscr{A}$ alkio. Valitaan Zornin lemman mukaisesti joukosta $\mathscr{A}$ pienin jäsen A.

Nähdäksemme, että A todella on minimaalinen vasen ideaali, oletamme, että $B \subseteq A$ on vasen ideaali ja poimimme $x \in B$. Silloin, kuten edellä, $S+x \in \mathscr{A}$ ja $S+x \subseteq S+B \subseteq B \subseteq A$ ja, koska A on minimaalinen, niin $A \subseteq S+x$ eli $S+x = A$, joten $B = A$. □

Määritellään seuraavaksi minimaalisten vasempien ideaalien yhdiste $M(S)$.

Määritelmä 6.3. Olkoon S puoliryhmä. Silloin $M(S) = \cup\{L : L$ on minimaalinen vasen ideaali joukossa $S\}$.

Osoitetaan, että tällainen yhdiste on aina epätyhjä kompaktissa Hausdorffin oikeassa topologisessa puoliryhmässä ja se sisältyy kaksipuoliseen ideaaliin.

Lemma 6.4. *Olkoon S kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä ja olkoon I kaksipuolinen ideaali joukossa S. Silloin $M(S) \neq \emptyset$ ja $M(S) \subseteq I$.*

Todistus. Koska S itse on vasen ideaali joukossa S, siihen sisältyy Lemman 6.2 mukaan minimaalinen vasen ideaali, joten $M(S) \neq \emptyset$. $M(S) = \bigcup L$, missä L on minimaalinen vasen ideaali, joten $S + M(S) = S + \bigcup L = \bigcup(S + L) = \bigcup L = M(S)$, joten $M(S)$ on vasen ideaali.

Todetaan, että $I + L \subseteq I \cap L$, koska I on oikea ideaali ja L on vasen ideaali. Samalla huomataan, että $I \cap L \neq \emptyset$. Ja, koska I on myös vasen ideaali, saadaan $S + (I \cap L) = (S + I) \cap (S + L) \subseteq I \cap L$ eli $I \cap L$ on vasen ideaali. Koska $I \cap L \subseteq L$ ja L on minimaalinen, täytyy olla $I \cap L = L$. Kun vielä $I \cap L \subseteq I$, on siis $L \subseteq I$ eli $M(S) \subseteq I$. □

Seuraava lemma siirtää löydetyt ominaisuudet koskemaan myös avaruuksien karteesista tuloa.

Lemma 6.5. *Olkoot S_1 ja S_2 kompakteja oikeita topologisia puoliryhmiä ja olkoon $S_1 \times S_2$ varustettu tulotopologialla ja koordinaattikohtaisilla laskutoimituksilla. Silloin $S_1 \times S_2$ on kompakti oikea topologinen puoliryhmä. Jos on annettu $x \in S_1$ ja $y \in S_2$, ρ_x ja ρ_y voivat olla jatkuvia tai epäjatkuvia (missä $\rho_x(t) = x + t$). Jos $\rho_x : S_1 \to S_1$ ja $\rho_y : S_2 \to S_2$ ovat jatkuvia, silloin myös $\rho_{(x,y)} : S_1 \times S_2 \to S_1 \times S_2$ on jatkuva.*

Todistus. Tulojoukko $S_1 \times S_2$ on kompakti, koska S_1 ja S_2 ovat kompakteja. Koska S_1 on oikea topologinen puoliryhmä, funktio $\rho_x : S_1 \to S_1$ on jatkuva. Vastaavasti $\rho_y : S_2 \to S_2$ on jatkuva, koska S_2 on oikea topologinen puoliryhmä. Silloin myös $S_1 \times S_2$ on oikea topologinen puoliryhmä, sillä $\rho_{(x,y)} : S_2 \times S_2 \to S_1 \times S_2$ voidaan kirjoittaa muotoon $\rho_{(x,y)} = (f_1, f_2)$, missä $f_1 : S_1 \times S_2 \to S_1$ on määritelty: $f_1(s,t) = \rho_x(s) = s + x$, ja vastaavasti $f_2 : S_1 \times S_2 \to S_2, \quad f_2(s,t) = \rho(t) = t + y$. Nyt funktiot f_1 ja f_2 ovat jatkuvia, joten myös funktio $f_{(x,y)}$ on jatkuva. □

Induktiolla on osoitettavissa, että karteesinen tulo säilyy oikeana topologisena puoliryhmänä ja funktiot jatkuvina silloinkin, kun karteesinen tulo otetaan useammasta kuin kahdesta joukosta.

6.3 Aritmeettisten sarjojen joukot

Van der Waerdenin lauseessa $l \in \mathbb{N}$ on kiinteä luku ja luonnolliset luvut ositetaan mielivaltaisella tavalla m osajoukkoon. Silloin väitteen mukaan yhteen osajoukkoon sisältyy l-pituinen aritmeettinen sarja. Luodaan nyt aritmeettisten sarjojen pohjalta neljä nimettyä joukkoa, joiden alkiot ovat l-pituisia vektoreita.

Määritelmä 6.6. a) Olkoon $Y = (\beta\mathbb{N})^l$ l-ulotteinen avaruus, joka on varustettu tulotopologialla ja koordinaattikohtaisilla laskutoimituksilla.

b) $E^* = \{(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d) : a \in \mathbb{N} \text{ ja } d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
c) $I^* = \{(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d) : a, d \in \mathbb{N}\}$.
d) $E = \mathrm{cl}_Y E^*$
e) $I = \mathrm{cl}_Y I^*$

Lemmojen 5.2 ja 6.5 perusteella Y on kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä ja siinä vasen yhteenlasku λ_x on jatkuva, kun $\mathbf{x} = (s_1, s_2, \ldots, s_l) \in \mathbb{N}^l$.

Lemma 6.7. *E on kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä ja I on kaksipuolinen ideaali joukossa E.*

Todistus. Kompaktius on ilmeinen ja Hausdorff-ominaisuus ja oikealta jatkuvuus periytyvät avaruudesta Y. Selväsi $I \subseteq E$, sillä $E^* = I^* \cup \{(a, a, \ldots, a) : a \in \mathbb{N}\}$ eli $I^* \subseteq E^*$ ja silloin myös $\mathrm{cl} I^* \subseteq \mathrm{cl} E^*$.

Olkoot $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$ ja $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_l)$ joukon E alkioita. Yhteenlaskun assosiatiivisuus on osoitettu aiemmin, joten riittää osoittaa binäärisyys. Osoitetaan siis, että $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in E$. Osoitetaan edelleen, että jos joko $\mathbf{p}$ tai $\mathbf{q}$ kuuluu joukkoon I, niin myös $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in I$.

Nähdäksemme, että $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in E$, olkoon U ympäristö, johon $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ sisältyy. Koska ρ_q on jatkuva, poimitaan pisteen $\mathbf{p}$ ympäristö V, jolle $V + \mathbf{q} = \rho_q[V] \subseteq U$. Koska $\mathbf{p} \in \mathrm{cl} E^*$, voidaan poimia $a \in \mathbb{N}$ ja $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, joille pätee

$$(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d)) \in V.$$

Jos $\mathbf{p} \in I$, voidaan olettaa, että $d \neq 0$. Olkoon $\mathbf{x} = (a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d)$. Silloin $\mathbf{x} \in V$ ja $\mathbf{x} + \mathbf{q} \in U$. Koska λ_x on jatkuva, voidaan poimia pisteen q ympäristö W, jolle $\mathbf{x} + W = \lambda_x[W] \subseteq U$. Koska $\mathbf{q} \in \mathrm{cl} E^*$, poimitaan $b \in \mathbb{N}$ ja $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (ja $c \neq 0$, jos $\mathbf{q} \in I$) niin, että

$$(b,\ b+c,\ b+2c,\ \ldots,\ b+(l-1)c) \in W.$$

Olkoon $\mathbf{y} = (b,\ b+c,\ b+2c,\ \ldots,\ b+(l-1)c)$. Silloin $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cap E^*$. Tämä osoittaa, että $U \cup E^* \neq \emptyset$ missään pisteen $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ ympäristössä U. Niinpä $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathrm{cl} E^* = E$ ja E siis on puoliryhmä. Jos joko $d \neq 0$ tai $c \neq 0$, silloin $c + d \neq 0$ ja $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cap I^*$. Kuten edellä, tämä osoittaa, että $U \cup I^* \neq \emptyset$ missään pisteen $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ ympäristössä U. Niinpä $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathrm{cl} I^* = I$ ja I siis on kaksipuolinen ideaali joukossa E. □

Valitaan seuraavaksi alkio minimaalisten vasempien ideaalien joukosta ja luodaan sellainen l-pituinen vektori Määritelmän 6.6 mukaisesta avaruudesta, että päädytään alaluvun 6.1 mukaiseen rajattuun muotoon.

Lause 6.8. *Olkoot $p \in M(\beta\mathbb{N})$ ja $\boldsymbol{p} = (p, p, \ldots, p)$. Silloin $\boldsymbol{p} \in I$.*

Todistus. Osoitetaan aluksi, että $\mathbf{p} \in E$. Olkoon $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_l$ pisteen $\mathbf{p}$ ympäristö avaruudessa Y. Silloin $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_l$ on pisteen p ympäristö avaruudessa $\beta\mathbb{N}$. Koska $\mathbb{N}$ on tiheä avaruudessa $\beta\mathbb{N}$, voidaan poimia $a \in \mathbb{N} \cap (U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_l)$. Silloin $(a, a, \ldots, a) \in E^* \cap (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_l)$. Näin ollen $\mathbf{p} \in \mathrm{cl} E^* = E$.

Koska $p \in M(\beta\mathbb{N})$, on olemassa minimaalinen vasen ideaali L avaruudessa $\beta\mathbb{N}$ ja $p \in L$. Koska edelleen $E + \mathbf{p}$ on vasen ideaali joukossa E, poimitaan Lemman 6.2 mukaisesti joukon E minimaalinen vasen ideaali L^*, jolle $L^* \subset E + \mathbf{p}$. L^* on suljettu ja kompakti, joten voidaan poimia Lemman 6.1 mukaisesti idempotentti $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_l) \in L^*$. Nyt $\mathbf{q} \in L^* \subseteq E + \mathbf{p}$, niin poimitaan $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_l) \in E$, jolle $\mathbf{q} = \mathbf{s} + \mathbf{p}$.

Osoitetaan, että $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{p}$. Olkoon siis $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Nyt $q_i = s_i + p$. Koska $\mathbf{q}$ on idempotentti, saadaan $\mathbf{q} + \mathbf{q} = \mathbf{q}$ eli kaikilla indeksin i arvoilla $q_i + q_i = q_i$. Edelleen $s_i + p + s_i + p = s_i + p$, mistä saadaan $p + s_i + p = p \Leftrightarrow p + q_i = p$. Tämä tarkoittaa, että $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{p}$.

Koska $\mathbf{p} \in E$ ja $\mathbf{q} \in L^*$, joka on vasemmanpuolinen ideaali joukossa E, saadaan $\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \in L^*$, joten $\mathbf{p} \in M(E)$. Täten Lemman 6.4 mukaan $\mathbf{p} \in I$. □

6.4 Van der Waerdenin lauseen algebrallinen todistus

Seuraus 6.9. (van der Waerden) *Olkoot $m \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ ositus. Silloin on olemassa $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $a, d \in \mathbb{N}$, joille $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l+1)d\} \subseteq A_i$.*

Todistus. Lemman 6.4 mukaan $M(\beta\mathbb{N}) \neq \emptyset$, joten poimitaan $\mathbf{p} \in M(\beta\mathbb{N})$ ja olkoon $\mathbf{p} = (p, p, \ldots, p)$. Lemman 5.13 mukaisesti poimitaan sellainen $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, että $\mathrm{cl}\, A_i$ on pisteen p ympäristö ja olkoon $U = \mathrm{cl}\, A_i$. Silloin $U \times U \times \ldots \times U$ on pisteen $\mathbf{p}$ ympäristö, jolloin Lauseen 6.8 mukaan $\mathbf{p} \in I = \mathrm{cl}\, I^*$. Poimitaan $a, d \in \mathbb{N}$, joille $(a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l-1)d) \in U \times U \times \ldots \times U$. Silloin

$$\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l-1)d\} \subseteq U \cap \mathbb{N} = (\mathrm{cl}\, A_i) \cap \mathbb{N} = A_i.$$

□

Näin saatiin tutkielman varsinainen aihe päätökseen ja van der Waerdenin lause algebrallisesti todistetuksi.

Jatketaan vielä lyhyesti toisen lauseen parissa.

7 Lisäesimerkkinä Hales–Jewettin lause

Neil Hindman ja Dona Strauss esittävät kirjassaan *Algebra in the Stone–Čech Compactification* useita muitakin todistuksia, joissa käytetään kompaktisointia ja idempotentteja. Menetelmä osoittautui siis hyvin käyttökelpoiseksi.

Yksi todistetuista lauseista tunnetaan nimellä Hales–Jewettin lause.

Lause 7.1. (Hales–Jewettin lause) *Olkoon A äärellinen epätyhjä aakkosto, olkoon S vapaa puoliryhmä yli aakkoston A, olkoon r luonnollinen luku ja olkoon $S = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$. Silloin on olemassa $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ ja sanamuuttuja $w(v)$, jolla $\{w(a) : a \in A\} \subseteq B_i$.*

Tämä luku perustuu siis Hindman–Straussiin ([5], 4, 47, 88, 90–91, 101–102, 333–335). Esimerkin 7.5 joukot valitsin itse ja laadin todistuksen Lauseen 7.9 a-kohtaan. Lauseen 7.13 todistukseen lisäsin perustelut, miksi jokin osajoukko välttämättä on paloittain syndeettinen.

7.1 Hales–Jewettin lauseen keskeiset termit

Hales–Jewettin lauseessa edellä käytetty 'aakkosto' tarkoittaa joukkoa (vrt. luonnollisen kielen aakkoset), jonka alkioista (vrt. kirjaimet) voidaan muodostaa 'sanoja' laittamalla alkioita jonoksi.

Lisäksi kutsutaan 'sanamuuttujaksi' rakennetta $w(v)$, jossa muuttujan v paikalle voidaan sijoittaa eri aakkosia. Esimerkiksi vapaassa puoliryhmässä S yli aakkoston $A = \{1, 2, 3\}$ voisi olla sanamuuttuja $w(v) = 1v2$, jolloin $B = \{w(a) : a \in A\} = \{112, 122, 132\}$.

Määritelmä 7.2. Olkoon S vapaa puoliryhmä yli aakkoston A ja olkoon v muuttuja, joka ei ole aakkoston A alkio.

(a) Sanamuuttuja $w(v)$ on alkio vapaassa puoliryhmässä yli aakkoston $A \cup \{v\}$, missä v on mukana.

(b) Sanamuuttujien joukko $S(v) = \{w(v) : w(v) \text{ on sanamuuttuja}\}$.

(c) Jos on annettu sanamuuttuja $w(v)$ ja alkio a aakkostosta A, $w(a)$ on sana, jossa jokainen alkion v esiintymä on korvattu alkiolla a.

Muodollisesti ilmaisten alkioiden sijoittaminen sanamuuttujaan tapahtuu näin: Jos on annettu $w(v) \in S(v)$, ja $a \in A$, tarkoitetaan, että $w(a)$ on funktio, jolla on sama määrittelyjoukko kuin sanamuuttujalla $w(v)$ siten, että indeksillä i tässä määrittelyjoukossa,

$$w(a)_i = \begin{cases} w(v)_i, & \text{jos } w(v)_i \neq v, \\ a, & \text{jos } w(v)_i = v. \end{cases}$$

Vielä on määriteltävä käsite 'vapaa puoliryhmä' ja puoliryhmän vaatima laskutoimitus, joka tässä tapauksessa on sanojen liittäminen toisiinsa eli *konkatenaatio*.

Määritelmä 7.3. Olkoon A epätyhjä joukko. Vapaa puoliryhmä aakkostossa A on joukko

$$S = \{f : f \text{ on funktio ja joukon } f \text{ arvojoukko } R_f \subseteq A \text{ ja on olemassa} \\ n \in \mathbb{N} \text{ niin, että funktion} f \text{ määrittelyjoukko } D_f = \{0, 1, \ldots, n-1\}\}.$$

Kun on annettu alkiot f ja g joukosta S, puoliryhmän operaatio *konkatenaatio* määritellään seuraavasti:

Määritelmä 7.4. Olkoon funktion f määrittelyjoukko $D_f = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ja funktion g määrittelyjoukko $D_g = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Silloin funktion $f \frown g$ määrittelyjoukko on $FG = \{0, 1, \ldots, m+n-1\}$ ja, kun indeksi $i \in \{0, 1, \ldots, m+n-1\}$, silloin $f \frown g = \begin{cases} f(i), & \text{jos } i < n, \\ g(i-n), & \text{jos } i \geq n. \end{cases}$

Identiteetillinen vapaa puoliryhmä aakkostossa A on $S \cup \{\emptyset\}$, missä S on vapaa puoliryhmä aakkostossa A. Kun on annettu funktio $f \in S \cup \{\emptyset\}$, määritellään $f \frown \emptyset = \emptyset \frown f = f$.

Vapaa puoliryhmä on siis kaikkien niiden funktioiden joukko, jotka tuottavat jonkin sanan aakkostosta. Sanoilla operoidaan liittämällä niitä toistensa jatkoksi.

Määritellään vielä termit 'syndeettinen' ja 'paloittain syndeettinen', jotka ovat käyttökelpoisia Hales–Jewettin lauseen todistamisessa. Nämä palautuvat puoliryhmän $(\mathbb{N}, +)$ kontekstiin. Puoliryhmässä $(\mathbb{N}, +)$ joukko A on syndeettinen täsmälleen silloin, kun siinä on vain rajoitettuja aukkoja, ja paloittain syndeettinen täsmälleen silloin, kun on olemassa kiinteä raja b ja mielivaltaisen pitkiä jaksoja, joissa aukot on rajoitettu arvolla b.

Esimerkki 7.5. Joukko $A = \{3, 6, 9, \ldots\}$ on syndeettinen, sillä siinä on vain kahden peräkkäisen luvun mittaisia aukkoja. (Näin säännöllinen syndeettisen osajoukon ei tietenkään välttämättä tarvitse olla.)

Joukko $B = \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, \ldots\}$ on paloittain syndeettinen: jaksot ovat aina kahden luvun mittaisia ja aukot nollamittaisia. Jaksojen välit pitenevät kerta kerralta yhdellä. Näin joukko B ei ole syndeettinen, koska välit suurenevat yli minkä tahansa annetun luvun.

Laajennetaan nyt käsitteet syndeettinen ja paloittain syndeettinen koskemaan muitakin avaruuksia kuin luonnollisia lukuja ja muitakin laskutoimituksia kuin yhteenlaskua.

Määritelmä 7.6. Olkoon S puoliryhmä.

a) Joukko A on *syndeettinen* täsmälleen silloin, kun on olemassa joukko $G \in \mathscr{P}_f(S)$, jolla $S = \bigcup_{t\in G} t^{-1}A$.

b) Joukko A on *paloittain syndeettinen* täsmälleen silloin, kun on olemassa joukko $G \in \mathscr{P}_f(S)$, jolla joukossa $\{a^{-1}(\bigcup_{t\in G} t^{-1}A) : \ a \in S\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus.

Merkinnällä $\mathscr{P}_f(S)$ tarkoitetaan joukon S kaikkien äärellisten osajoukkojen joukkoa. (Merkinnästä $t^{-1}A$ ks. Määritelmä 5.7.)

Yhtäpitävästi määritelmän 7.6 b)-kohdan kanssa joukko A on paloittain syndeettinen täsmälleen silloin, kun on olemassa joukko $G \in \mathscr{P}_f(S)$, jolla jokaisella $F \in \mathscr{P}_f(S)$ on olemassa $x \in S$, jolla $Fx \subseteq \bigcup_{t\in G} t^{-1}A$.

Oikeastaan edellä määriteltyjä käsitteitä pitäisi kutsua *oikealta syndeettiseksi* ja *oikealta paloittain syndeettiseksi*. Jos joukolle βS olisi annettu toinen määritelmä, joka olisi tehnyt siitä vasemmalta topologisen puoliryhmän, pitäisi ilmaisu $S = \bigcup_{t\in G} t^{-1}A$ vaihtaa ilmaisuun $S = \bigcup_{t\in G} At^{-1}$ syndeettisen määritelmässä ja ilmaisu $a^{-1}(\bigcup_{t\in G} t^{-1}A)$ ilmaisuun $(\bigcup_{t\in G} At^{-1})a^{-1}$ paloittain syndeettisen määritelmässä.

7.2 Moniulotteinen 'ristinolla'

Hales ja Jewett rinnastavat lauseensa moniulotteiseen ristinollapeliin. (Vrt. [4].) Seuraavassa tarkastellaan tätä yhteyttä, jotta lauseesta ja sen merkityksestä saataisiin jonkinlainen käsitys.

Ristinollapeliä pelataan 3x3-ruudukossa ristein ja nollin. Pelaajia on siis kaksi ja he vuorotellen laittavat ruudukkoon oman merkkinsä, joko ristin tai nollan. Pelin voittaa se, joka saa kolme omaa merkkiään suoralle. Suora voi sijaita rivillä, sarakkeessa tai lävistäjällä.

Tällä on yhteys vapaaseen puoliryhmään. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$. Silloin $S = \{1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, 122, \ldots\}$. Tästä joukosta poimitut kaksimerkkiset sanat muodostavat ristinollan pelikentän, jos ensimmäinen merkki tulkitaan riviksi ja jälkimmäinen sarakkeeksi.

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Hales–Jewettin lauseessa esiintyvä luonnollinen luku r olisi tässä tapauksessa 2, sillä pelin jälkeen ruudukko jakautuu kahteen joukkoon B_i, $i \in \{1, 2\}$ siten, että toisessa joukossa ovat nollalla merkityt ruudut, toisessa ristillä merkityt.

Voittorivit voidaan ilmaista sanamuuttujilla: rivejä vastaavat $1v, 2v$ ja $3v$, sarakkeita $v1, v2$ ja $v3$ sekä toista lävistäjää vv. Lävistäjän $\{31, 22, 13\}$

Hales ja Jewett jättävät huomiotta.

Kaksiulotteiseen ristinollapeliin Hales–Jewettin lausetta ei kuitenkaan voida soveltaa, sillä edellä poimittiin vapaasta puoliryhmästä S vain pieni osa, kaksimerkkiset sanat. Lisäksi lause väittää, että voittorivi löytyy aina, mikä ei pidä paikkaansa kaksiulotteisessa pelissä. Seuraava pelin päätös ei tuota voittoa kummallekaan.

0	X	0
0	X	X
X	0	X

Lauseen havainnollistamiseksi täytyy kuvitella moniulotteinen ristinollapeli. Kolmiulotteiseksi peli saadaan laittamalla kolme ruudukkoa päällekkäin ja tulkitsemalla kolmas merkki kerrokseksi. Voittorivejä olisivat rivit, sarakkeet, 'tornit' eli sama ruutu kaikista kerroksista ja kaikki lävistäjät, jotka lähtevät ruudusta 111.

Ulottuvuuksia on lisättävä sitä mukaa kuin sanoihin tulee lisää kirjaimia. Vapaassa puoliryhmässä ei sanan pituudella ole rajoitusta.

Pelaajien lukumäärä r voi myös saada mielivaltaisen arvon. Edelleen pelin koko, jonka määrittää joukon A alkioiden määrä, on vapaasti valittavissa. Kaikista näistä vapauksista huolimatta lause väittää, että voittorivi on olemassa.

7.3 Vielä ideaaleista

Ennen Hales–Jewettin lauseen todistamista on apuneuvoiksi esiteltävä ja todistettava muutamia muita lauseita.

Seuraavissa lauseissa käytetään symbolia $\bigtimes_{i\in I}$. Tällä tarkoitetaan niiden joukkojen karteesista tuloa, joiden indeksi i kuuluu indeksijoukkoon I. Tarkoituksena on lyhentää tulomerkintää, kun se tässä luvussa toistuu paljon useammin kuin edellisessä luvussa.

Jos $\langle S_i\rangle_{i\in I}$ on oikeiden topologisten puoliryhmien perhe ja $S = \bigtimes_{i\in I} S_i$, niin Lauseen 6.5 mukaan kompaktius ja funktioiden jatkuvuus säilyvät karteesisessa tulossa.

Osoitetaan, että myös pienin ideaali $K(S)$ säilyy karteesisessa tulossa.

Lause 7.7. *Olkoon $\langle S\rangle_{i\in I}$ puoliryhmien perhe ja olkoon $S = \bigtimes_{i\in I} S_i$. Oletetaan, että jokaisella $i \in I$ on joukossa S_i pienin ideaali. Silloin myös joukossa S on pienin ideaali ja $K(S) = \bigtimes_{i\in I} K(S_i)$.*

Todistus. Huomaamme aluksi, että $\bigtimes_{i\in I} K(S_i)$ on ideaali joukossa S. Olkoon $\overline{u} \in \bigtimes_{i\in I} K(S_i)$. Silloin $(\bigtimes_{i\in I} K(S_i)) \cdot \overline{u} \cdot (\bigtimes_{i\in I} K(S_i)) = \bigtimes_{i\in I} (K(S_i) \cdot u_i \cdot K(S_i)) = \bigtimes_{i\in I} K(S_i)$, joten Lemman 4.25 b-kohdan mukaan $K(S) = \bigtimes_{i\in I} K(S_i)$. □

Ja edelleen osoitetaan, että ideaalit säilyvät avaruuden kompaktisoinnissa. Täydellisen säännöllisen avaruuden kompaktisointi määriteltiin Määritelmässä 3.12. Määritellään vielä puoliryhmän kompaktisointi.

Määritelmä 7.8. Olkoon S puoliryhmä, joka on myös topologinen avaruus. *Puoliryhmän S kompaktisointi* on pari (φ, T), missä T on kompakti oikea topologinen puoliryhmä, $\varphi : S \to T$ on jatkuva homomorfismi, $\varphi[S] \subseteq \Lambda(T)$ ja $\varphi[S]$ on tiheä avaruudessa T.

Lause 7.9. *Olkoon S diskreetti puoliryhmä, olkoon (φ, T) puoliryhmän S kompaktisointi ja olkoon $A \subseteq B \subseteq S$. Oletetaan, että B on alipuoliryhmä joukossa S.*

a) $cl(\varphi[B])$ on alipuoliryhmä joukossa T.

b) Jos A on vasen ideaali joukossa B, niin $cl(\varphi[A])$ on vasen ideaali joukossa $cl(\varphi[B])$.

c) Jos A on oikea ideaali joukossa B, niin $cl(\varphi[A])$ on oikea ideaali joukossa $cl(\varphi[B])$.

Todistus. a) Olkoot $x, y, z \in \mathrm{cl}(\varphi[B])$ ja $s, t, u \in B$.

Silloin $xy = \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y}(\varphi(s)\varphi(t))$. Koska $s, t \in B$, niin $\varphi(s)\varphi(t) = \varphi(st) \in \mathrm{cl}(\varphi[B])$ eli $\mathrm{cl}(\varphi[B])$ on binäärinen.

Edelleen

$$x(yz) = \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y} \lim_{\varphi(u)\to z} \varphi(s)(\varphi(t)\varphi(u)) = \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y} \lim_{\varphi(u)\to z} \varphi(s(tu))$$

$$= \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y} \lim_{\varphi(u)\to z} \varphi((st)u)) = \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y} \lim_{\varphi(u)\to z} (\varphi(s)\varphi(t))\varphi(u) = (xy)z$$

eli $cl(\varphi[B])$ on assosiatiivinen. Näin ollen $\mathrm{cl}(\varphi[B])$ on puoliryhmä.

b) Oletetaan, että A on vasen ideaali joukossa B. Olkoon $x \in \mathrm{cl}(\varphi[B])$ ja $y \in \mathrm{cl}(\varphi[A])$. Silloin $xy = \lim_{\varphi(s)\to x} \lim_{\varphi(t)\to y} \varphi(s)\varphi(t)$, missä s on joukon B alkio ja t joukon A alkio. Jos $s \in B$ ja $t \in A$, saamme $\varphi(s)\varphi(t) = \varphi(st) \in \varphi[A]$ ja niin $xy \in \mathrm{cl}(\varphi[A])$.

c) Todistus on samanlainen kuin kohdassa b). □

7.4 Syndeettiset osajoukot

Otetaan nyt käyttöön aiemmin määritelty käsite (paloittain) syndeettinen (Määritelmä 7.6).

Lause 7.10. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $p \in \beta S$. Seuraavat väittämät ovat ekvivalenttisia:*

a) $p \in K(\beta S)$.

b) Kaikilla $A \in p$ $\{s \in S : s^{-1}A \in p\}$ on syndeettinen.

c) Kaikilla $q \in \beta S$ $p \in \beta S \cdot q \cdot p$.

Todistus. 1°: Kohdasta a) seuraa kohta b). Olkoon $A \in p$ ja olkoon $B = \{s \in S : s^{-1}A \in p\}$. Olkoon L minimaalinen vasen ideaali joukossa βS ja $p \in L$. Kaikilla $q \in L$ saadaan $\beta S \cdot q \subseteq \beta S \cdot L \subseteq L$. Toisaalta $\beta S \cdot (\beta S \cdot q) = (\beta S \cdot \beta S) \cdot q \subseteq \beta S \cdot q$ eli $\beta S \cdot q$ on vasen ideaali joukossa βS. Koska L on minimaalinen, täytyy olla $\beta S \cdot q = L$.

Nyt siis $p \in L = \beta S \cdot q = \mathrm{cl}_{\beta S}(S \cdot q)$. Koska $\mathrm{cl}_{\beta S}\, A$ on pisteen p ympäristö joukossa βS, $t \cdot q \in \mathrm{cl}_{\beta S}\, A$ jollakin $t \in S$ ja niin $q \in \mathrm{cl}_{\beta S}\,(t^{-1}A)$. Näin joukot, jotka ovat muotoa $\mathrm{cl}_{\beta S}\,(t^{-1}A)$ peittävät kompaktin joukon L ja täten $L \subseteq \bigcup_{t \in G} \mathrm{cl}_{\beta S}\,(t^{-1}A)$ jollakin äärellisellä joukon S osajoukolla G.

Nähdäksemme, että $S \subseteq \bigcup_{t \in G} t^{-1}B$ olkoon $a \in S$. Silloin $a \cdot p \in L$, koska L on vasen ideaali, joten poimitaan $t \in G$ siten, että $a \cdot p \in cl_{\beta S}\,(t^{-1}A)$. Silloin $t^{-1}A \in a \cdot p$ niin, että $(ta)^{-1}A = a^{-1}(t^{-1}A) \in a^{-1}(a \cdot p) = p$ ja niin $ta \in B$ ja täten $a \in t^{-1}B$ ja todella $S \subseteq \bigcup_{t \in G} t^{-1}B$ ja B on syndeettinen.

2°: Kohdasta b) seuraa kohta c). Olkoon $q \in \beta S$ ja oletetaan päinvastoin, että $p \notin \beta S \cdot q \cdot p$. Poimitaan $A \in p$ siten, että $cl_{\beta S}\, A \cap \beta S \cdot q \cdot p = \emptyset$. Olkoon $B = \{s \in S : s^{-1}A \in p\}$ ja valitaan $G \in \mathscr{P}_f(S)$ siten, että $S = \bigcup_{t \in G} t^{-1}B$. Tämä onnistuu, koska B on syndeettinen. Poimitaan $t \in G$ siten, että $t^{-1}B \in q$. Silloin $B \in tq$. Näin $\{s \in S : s^{-1}A \in p\} = \{s \in S : A \in sp\} \in tq$, joten $A \in tqp$ eli $\mathrm{cl}_{\beta S}\, A \cap \beta S \cdot q \cdot p \neq \emptyset$. Päädyttiin ristiriitaan, joten väite c) on tosi.

3°: Kohdasta c) seuraa kohta a). Poimitaan $q \in K(\beta S)$. Olkoon L minimaalinen vasen ideaali joukossa βS ja $q \in L$. Nyt $p \in \beta S \cdot L \cdot p \in L \cdot p$, joten p kuuluu vasempaan ideaaliin eli $p \in K(\beta S)$. □

Paloittain syndeettisyys on ehtona epätyhjälle leikkaukselle $\mathrm{cl}_{\beta S}\, A \cap K(\beta S)$.

Lause 7.11. *Olkoon S puoliryhmä ja olkoon $A \subseteq S$. Silloin $cl_{\beta S}\, A \cap K(\beta S) \neq \emptyset$ täsmälleen silloin, kun A on paloittain syndeettinen.*

Todistus. 1°: Olkoon $p \in K(\beta S) \cap cl_{\beta S}\, A$ ja olkoon $B = \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$. Silloin Lauseen 7.10 mukaan B on syndeettinen ja niin $S = \bigcup_{t \in G} t^{-1}B$ jollakin $G \in \mathscr{P}_f(S)$. Jokaisella $a \in S$ jollakin $t \in G$ toteutuu, että $a \in t^{-1}B$, ja niin $a^{-1}(t^{-1}A) = (ta)^{-1}A \in p$. Siitä seuraa, että $a^{-1}(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A) \in p$, joka on ultrafiltteri, ja niin joukossa $\{a^{-1}(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A) : a \in S\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus.

2°: Oletetaan, että A on paloittain syndeettinen ja poimitaan $G \in \mathscr{P}_f(S)$ siten, että joukossa $\{a^{-1}(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A) : a \in S\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Poimitaan $q \in \beta S$ niin, että $\{a^{-1}(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A) : a \in S\} \subseteq q$. Silloin $S \cdot q \subseteq \mathrm{cl}_{\beta S}\,(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A)$. Tästä seuraa, että $(\beta S) \cdot q \subseteq \mathrm{cl}_{\beta S}\,(\bigcup_{t \in G} t^{-1}A)$. Voimme valita $y \in K(\beta S) \cap (\beta S \cdot q)$. Silloin saadaan $y \in \mathrm{cl}_{\beta S}\,(t^{-1}A)$ jollakin $t \in G$ ja niin $t \cdot y \in \mathrm{cl}_{\beta S}\, A \cap K(\beta S)$ eli $\mathrm{cl}_{\beta S}\, A \cap K(\beta S) \neq \emptyset$. □

7.5 Hales–Jewettin lauseen todistaminen

Todistetaan ensin seuraava lause:

Lause 7.12. *Olkoon A äärellinen epätyhjä aakkosto, olkoon S aakkostossa A vapaa puoliryhmä ja olkoon B paloittain syndeettinen osajoukko joukossa S. Silloin on olemassa sanamuuttuja $w(v)$, jolla toteutuu $\{w(a): a \in A\} \subseteq B$.*

Todistus. Olkoon joukon A alkioiden lukumäärä l ja merkitään $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Olkoon $Y = \bigtimes_{t=1}^{l} \beta S$. Silloin Lauseen 6.5 mukaan Y on kompakti oikea topologinen puoliryhmä ja jos $\overline{x} \in \bigtimes_{t=1}^{l} S$, niin $\lambda_{\overline{x}}$ on jatkuva. Näin Y on puoliryhmän kompaktisointi joukosta $\bigtimes_{t=1}^{l} S$.

Olkoon $I^{\triangleleft} = \{(w(a_1), w(a_2), \ldots, w(a_l)): w(v) \in S(v)\}$ ja olkoon $E^{\triangleleft} = I^{\triangleleft} \bigcup \{(w, w, \ldots, w): w \in S\}$. Olkoon $E = \mathrm{cl}_Y\, E^{\triangleleft}$ ja olkoon $I = \mathrm{cl}_Y\, I^{\triangleleft}$.

Huomaa, että $E^{\triangleleft}$ on alipuoliryhmä joukossa $\bigtimes_{t=1}^{l} S$ ja että $I^{\triangleleft}$ on ideaali joukossa $E^{\triangleleft}$. Näin Lauseen 7.9 mukaan E on alipuoliryhmä joukossa Y ja I on ideaali joukossa E.

Lauseen 7.7 avulla saamme $K(Y) = \bigtimes_{t=1}^{l} K(\beta S)$. Nyt väitämme, että $E \cap K(Y)$ ei ole tyhjä joukko, joten Lauseen 4.31 mukaan $K(E) = E \cap K(Y)$. Itse asiassa osoitamme, että

$$\text{jos } p \in K(\beta S) \text{ ja } \overline{p} = (p, p, \ldots, p), \text{ niin } \overline{p} \in E. \tag{2}$$

Tässä $\overline{p}$ on samanlainen idempotenttisarja kuin van der Waerdenin lauseen todistamisessa (ks. Luku 6.1).

Tämän vahvistamiseksi olkoon U vektorin p ympäristö ja jokaiselle $t \in \{1, 2, \ldots, l\}$ poimitaan $B_t \in p$ niin, että $\bigtimes_{t=1}^{l} \mathrm{cl}\, B_t \subseteq U$. Silloin $\bigcap_{t=1}^{l} B_t \in p$, joten $\bigcap_{t=1}^{l} B_t \neq \emptyset$ ja voidaan poimia $w \in \bigcap_{t=1}^{l} B_t$. Silloin $(w, w, \ldots, w) \in U \cap E$.

Koska $K(E) = E \cap K(Y) = E \cap \bigtimes_{t=1}^{l} K(\beta S)$ ja I on ideaali joukossa E, saadaan $E \cap \bigtimes_{t=1}^{l} K(\beta S) \subseteq I$. Nyt koska B on paloittain syndeettinen, poimitaan Lauseen 7.11 mukaan $p \in B \cap K(\beta S)$ ja olkoon $\overline{p} = (p, p, \ldots, p)$. Silloin yhtälön (2) mukaan $\overline{p} \in E \cap \bigtimes_{t=1}^{l} K(\beta S) \subseteq I$. Olkoon $U = \bigtimes_{t=1}^{l} \mathrm{cl}\, B$. Näin U on ympäristö vektorille $\overline{p}$, joten $U \cap I^{\triangleleft} \neq \emptyset$ ja voidaan poimia $w(v) \in S(v)$ niin, että $(w(a_1), w(a_2), \ldots, w(a_l)) \in U$. □

Tästä seuraakin sitten Hales-Jewettin lause, joka toistettakoon tässä:

Seuraus 7.13. (Hales-Jewettin lause) *Olkoon A äärellinen epätyhjä aakkosto, olkoon S vapaa puoliryhmä yli aakkoston A, olkoon r luonnollinen luku ja olkoon $S = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$. Silloin on olemassa $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ ja sanamuuttuja $w(v)$, jolla $\{w(a): a \in A\} \subseteq B_i$.*

Todistus. Lause 7.12 toteutuu, jos jokin B_i on paloittain syndeettinen. Osoitetaan, että näin on välttämättä.

Tehdään vastaoletus: yksikään B_i ei ole paloittain syndeettinen. Tällöin kaikilla joukoilla G on olemassa alkiot $a_i, a_j \in S$, joilla $\{a_i^{-1}(\bigcup_{t\in G} t^{-1}A)\} \cap \{a_i^{-1}(\bigcup_{t\in G} t^{-1}A)\} = \emptyset$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\{(\bigcup_{t\in G} a_i^{-1}t^{-1}A)\} \cap \{(\bigcup_{t\in G} a_j^{-1}t^{-1}A)\} &= \\ \{(\bigcup_{t\in G}(ta_i)^{-1}A)\} \cap \{(\bigcup_{t\in G}(ta_j)^{-1}A)\} &= \\ \bigcup_{t\in G}((ta_i)^{-1}A \cap (ta_j)^{-1}A) &= \emptyset.\end{aligned}$$

Koska joukon G saa valita mielivaltaisesti, voi t saada mitä tahansa arvoja joukosta S. Poimitaan $t_i = a_i^{-1}$ ja $t_j = a_j^{-1}$. Näillä arvoin edellä olevaan yhdisteeseen sisältyy joukko $((a_i^{-1}a_i)^{-1}A \cap (a_j^{-1}a_j)^{-1}A) = A \cap A = A$, joka on epätyhjä. Vastaoletus johti siis ristiriitaan, joten jokin B_i on paloittain syndeettinen ja Lauseen 7.12 mukaan Hales–Jewettin lause on tosi. □

Yhteenveto

Tässä tutkielmassa keskitytään ns. van der Waerdenin lauseeseen:

Lause 7.14. (Van der Waerdenin lause) *Olkoot l ja k positiivisia kokonaislukuja. Jokainen positiivisten kokonaislukujen k-väritys sisältää yksivärisen l-jäsenisen aritmeettisen sarjan. Lisäksi on olemassa positiivinen kokonaisluku $N = N(l,k)$ siten, että välillä $[1,N]$ positiivisia kokonaislukuja mikä tahansa k-väritys sisältää yksivärisen l-jäsenisen aritmeettisen sarjan.*

Lause voidaan muotoilla myös siten kuin tutkielman lopussa tehdään:

Lause 7.15. (van der Waerden) *Olkoot $m \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ ositus. Silloin on olemassa $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $a, d \in \mathbb{N}$, joille $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l+1)d\} \subseteq A_i$.*

Useimmat tämän lauseen monista todistuksista, alkuperäinen mukaanlukien, ovat luonteeltaan kombinatorisia. Algebrallisia on vähemmän. Vuonna 1978 artikkelissa Bergelson–Furstenberg–Hindman–Katznelson: *An Algebraic Proof of van der Waerden's Theorem* esitetty algebrallinen todistus on tämän tutkielman pääaihe.

Todistus pohjautuu luonnollisten lukujen joukon kompaktisointiin ja idempotentteihin.

Peruskäsitteiden esittelyn jälkeen – näitä ovat Zornin lemma, Stone–Čech -kompaktisointi $\beta\mathbb{N}$, ei-kommutatiivinen yhteenlasku ja oikea topologinen puoliryhmä $(S, \cdot, \mathcal{T})$ sekä ideaalit, identiteetit ja idempotentit – siirrytään lähemmäksi van der Waerdenin lauseen todistamista. Todetaan, että kompaktissa Hausdorffin oikeassa topologisessa puoliryhmässä on idempotentteja ja minimaalisia vasempia ideaaleja. Minimaalisten vasempien ideaalien yhdiste $M(\beta\mathbb{N})$ ei ole koskaan tyhjä joukko kompaktissa Hausdorffin oikeassa topologisessa puoliryhmässä, ja yhdiste sisältyy kaksipuoliseen ideaaliin.

Viimein määritellään joukot
$E^* = \{(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d) : a \in \mathbb{N} \text{ ja } d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$,
$I^* = \{(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(l-1)d) : a, d \in \mathbb{N}\}$,
$E = \mathrm{cl}_Y E^*$ ja
$I = \mathrm{cl}_Y I^*$.

Nyt E on kompakti Hausdorffin oikea topologinen puoliryhmä ja I kaksipuolinen ideaali. Näiden avulla saadaan osoitetuksi, että jos idempotentti $p \in M(\beta\mathbb{N})$ ja $\mathbf{p} = (p, p, \ldots, p)$, niin $\mathbf{p} \in I$. Suorana seurauksena tästä saadaan van der Waerdenin lauseen todistus.

Tämä todistusmenetelmä, joka perustuu kompaktisointiin ja idempotentteihin, osoittautui Hindmanin ja Straussin käsissä hyvin käyttökelpoiseksi. Sillä voidaan todistaa koko Ramsayn teoria ja lukuisia erillisiä lauseita. Näistä esimerkkinä viimeisessä luvussa esitetään Hales–Jewettin lauseen todistaminen.

Lähdeluettelo

[1] Bergelson, Vitaly – Furstenberg, Hillel - Hindman, Neil - Katznelson, Yitzhak: An Algebraic Proof of van der Waerden's Theorem. L'Enseignement Mathématique 35. S. 208-215. Geneve, 1989.

[2] Blondal, Ari – Jungić, Veselin: Proof of van der Waerden's Theorem in Nine Figures. Arnold Mathematical Journal 4, s. 161-168. New York, 2018.

[3] de Bruijn, N. G.. Commentary. Julkaisematon käsikirjoitus, s. 116–124. 1977. Käsikirjoitus on luettavissa soitteesta http://alexandria.tue.nl/repository/freearticles/598841.pdf.

[4] Hales, A. W. – Jewett. R. I., Regularity and positional games. Trans. Amer. Math. Soc. 106, S. 222-229. 1963.

[5] Hindman, Neil – Strauss, Dona: Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2. p. Berlin, 2012.

[6] Lewin, Jonathan: A Simple Proof of Zorn's Lemma.Department of Mathematics, Kennesaw State College, Marietta, GA 30061. https://digitalcommons.kennesaw.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2161&context=facpubs

[7] Székely, László: van der Waerden's theorem. International Journal of Mathematics Trends and Technology 65. Berlin, 2019. Nettijulkaisu, koko teksti tekijän sivulla people.math.sc.edu/laszlo/vanderW.pdf. 15 s.

[8] Vedenjuoksu, Tero: The Stone–Čech Compactification as a Compact Semigroup. Master's thesis. Department of Mathematical Sciences, University of Oulu. Oulu 2003.

[9] van der Waerden, B. L., Beweis einer Baudet'schen Vermutung. Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 15. S. 212-216. 1927.