计算机科学与探索
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2022/16(07)-1673-08
doi: 10.3778/j.issn.1673-9418.2012083

开放科学(OSID)

交换BCK-代数的新型软(素)理想

黄 昱[1+],廖祖华[2]
1. 无锡太湖学院 基础课教学部,江苏 无锡 214064
2. 江南大学 理学院,江苏 无锡 214122
+ 通信作者 E-mail: huangy@wxu.edu.cn

摘 要:软集是处理不确定性问题的一个重要的数学工具。将软集的参数集赋予交换BCK-代数(即为交换亚BCI-代数),提出了交换BCK-代数的新型软素理想、软集的零化子、新型对合软理想等新概念。定义了两个新的合成运算,并利用合成运算对交换BCK-代数的新型软理想进行刻画。研究了交换BCK-代数的新型软理想在偏序关系下的若干性质以及软集的零化子和新型对合软理想的性质。举例说明了交换BCK-代数的新型软素理想的存在性,以及它与通常的软素理想的不同。举例说明了一个软集是交换BCK-代数的新型软素理想与它的水平集是素理想不是充要条件,这与通常的模糊代数的结果不同。给出了交换BCK-代数的新型软素理想的一些等价刻画,并讨论了它的同态像与原像的性质。

关键词:BCK-代数;软集;素理想;零化子;合成运算
文献标志码:A **中图分类号:**O159

New Type of Soft (Prime) Ideals in Commutative BCK-Algebras

HUANG Yu[1+], LIAO Zuhua[2]
1. Department of Basic Course Teaching, Wuxi Taihu University, Wuxi, Jiangsu 214064, China
2. School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

Abstract: The soft set theory is an important mathematical tool for dealing with uncertainty. By endowing a parameter set as a commutative BCK-algebra (that is commutative weak-BCI-algebra), the notions of a new type of soft prime ideals, annihilators of soft sets and new type of involutory soft ideals in commutative BCK-algebras are introduced. Two new compositional operations are defined and used to characterize the new type of soft ideals in commutative BCK-algebras. By using partial ordering on commutative BCK-algebras, some properties of the new type of soft ideals are studied. Properties of annihilators of soft sets and new type of involutory soft ideals are obtained. The existence of a new type of soft prime ideals in commutative BCK-algebras and its difference from the standard soft prime ideals are illustrated with examples. It is shown that a soft set is a new type of soft prime ideals in commutative BCK-algebras and its level set is a prime ideal is not a necessary and sufficient condition, which is different from the results of the usual fuzzy algebra. Some equivalent characterizations of the new type of soft prime ideals in commutative BCK-algebras are given. Furthermore, the properties of its homomorphism image and inverse image are discussed.

Key words: BCK-algebras; soft sets; prime ideals; annihilators; compositional operation

基金项目:国家自然科学基金(61673193,61170121);江苏省自然科学基金(BK20151117);江苏省高等学校自然科学研究项目(19KJD100006)。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61673193, 61170121), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20151117) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Higher Education Institutions (19KJD100006).
收稿日期:2020-12-21 **修回日期:**2021-03-22

非经典逻辑及相关代数结构是人工智能的数学基础之一，其中的BCK/BCI-代数自Imai等[1-2]提出以来，不断得到学者们的广泛研究。Xi[3]把模糊集应用于BCK-代数，并给出BCK-代数的模糊理想、模糊关联理想等概念。彭家寅[4]把扰动模糊集应用于BCI-代数中，研究了BCI-代数的扰动模糊 q -理想。软集的理论是处理不确定性问题的重要数学工具之一。Jun等[5-6]把软集应用于BCK/BCI-代数，提出软BCK/BCI-代数及其软子代数和软理想等概念。Khademan等[7]在超BCK-代数中研究了模糊软正关联超BCK-理想。

交换BCK-代数是BCK-代数的重要子类，它可以构成一个下半格。Iseki[8]给出了交换BCK-代数的素理想的概念。素理想在交换BCK-代数结构的研究中起重要作用[9]。Jun等[10]研究了交换BCK-代数的模糊素理想和可逆模糊理想。本文利用文献[11]将参数集赋予代数结构的思想方法，提出了交换BCK-代数的新型软素理想的新概念，这与通常的交换BCK-代数的软素理想[12]不一样，通常的软集代数中，参数集可以没有代数结构，但初始集合必须有代数结构，且参数的像必须是初始集合的子代数（理想等）。而本文定义的新型的软集代数，是参数集必须有代数结构，但初始集合可以没有代数结构，而且这种新型软集代数比通常的软集代数结果更深刻。

在已有的亚BCI-代数的新型软理想的研究基础上[13]，进一步研究了交换BCK-代数的新型软理想的若干性质。

1 预备知识

本章给出交换BCK-代数、软集等下面要用的相关定义和定理。

定理1[14] 一个(2,0)型代数 $(X,*,0)$ 是交换BCK-代数当且仅当下列等式成立：

（1）$x*x=0$

（2）$x*0=x$

（3）$(x*y)*z=(x*z)*y$

（4）$x*(x*y)=y*(y*x)$

定理2[14] 设 X 是交换BCK-代数，在 X 中定义关系：$x*y=0 \Leftrightarrow x \le y$ ，则 $(X;\le)$ 是一个偏序集。

定理3[14] X 是交换BCK-代数当且仅当 $(X;\le)$ 是一个下半格且对 $\forall x,y \in X$ ，有 $x \wedge y = y*(y*x)$ 。

定义1（亚BCI-代数[15-16]） 一个(2,0)型代数 $(X,*,0)$ 如果满足条件 $\forall x,y,z \in X$ ，有：

（1）$x*0=x$

（2）$x*x=0$

（3）$(x*y)*z=(x*z)*y$

则称 X 为一个亚BCI-代数。

定义2（软集[17]） 设 U 是一个初始集合，E 是参数集，$A \subseteq E$ ，$P(U)$ 是 U 的幂集，设 $F:A \to P(U)$ 为一个映射，则称 (F,A) 是 U 上的软集，也称 F 为 A 的软集。

定义3（新型软理想[13]） 设 X 是一个亚BCI-代数，$H:X \to P(U)$ 是一个软集，若 $\forall x,y \in X$ ，满足：

（1）$H(0) \supseteq H(x)$

（2）$H(x) \supseteq H(x*y) \cap H(y)$

则称 H 是 X 的一个新型软理想，记为 (H,X) 。

定义4（有界BCK-代数[14]） 若BCK-代数 X 中的一个元素 u 满足 $\forall x \in X$, 有 $x \le u$ ，则称 X 是有界BCK-代数。在有界BCK-代数 X 中，把 $u*x$ 记作 N_x 。

定义5（两个软集的合成[18]） 设 X 是亚BCI-代数，(F,X) 和 (G,X) 分别为 X 的两个软集。定义 $(F \circ G,X)$ ：

$$(F \circ G)(z) = \bigcup_{z=x*y} (F(x) \cap G(y)), \forall z \in X$$

则 $(F \circ G,X)$ 是 X 的软集，并称 $F \circ G$ 为两个软集的合成。

定义6（软集的限制并[19]） 设 (H_1,X_1) 和 (H_2,X_2) 为 U 上的软集，若软集 $(H,X_1 \cap X_2)$ 满足：

（1）$X_1 \cap X_2 \ne \varnothing$ ；

（2）$\forall x \in X_1 \cap X_2$ ，有 $H(x)=H_1(x) \cup H_2(x)$ 。

则称 $(H,X_1 \cap X_2)$ 是软集 (H_1,X_1) 和 (H_2,X_2) 的限制并，记作 $(H,X_1 \cap X_2)=(H_1,X_1) \bigcup_R (H_2,X_2)$ 。

定义7（广义特征函数[18]） 设 X_1 是集合 X 的子集，$H_{X_1(\alpha,\beta)}:X \to P(U)$ 是一个软集，$\alpha,\beta \in P(U)$ ，$\alpha \subseteq \beta$ ，规定：

$$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\begin{cases}\beta, & x \in X_1 \\ \alpha, & x \in X - X_1\end{cases}$$

则称 $H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X_1 关于 (α,β) 的广义特征函数。

定义8（关联BCK-代数[14]） 设 X 是BCK-代数，如果对 $\forall x,y \in X$ ，有 $x*(y*x)=x$ ，则称 X 是关联BCK-代数。

定义9（素理想[14]） 设 X 是交换BCK-代数，A 是 X 的理想且满足 $\forall x,y \in X$, 若 $x \wedge y \in A$ 有 $x \in A$ 或 $y \in A$, 则称 A 为 X 的素理想。

定义10（投影[13]） 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，$X=X_1 \times X_2$, 且 $(H,X)=(F,X_1) \wedge (G,X_2)$, 规定 $H_{X_1}:X_1 \to P(U)$, $H_{X_1}(x)=\bigcup_{y \in X_2} H(x,y)$ ，$\forall x \in X_1$ ，则称 H_{X_1} 为 (H,X) 在 X_1 上

的投影。同理可定义 (H,X) 在 X_2 上的投影 H_{X_2}。

定理4[13] 若 (F,X_1) 和 (G,X_2) 分别为 X_1 和 X_2 的软集，且 $(H,X)=(F,X_1)\wedge(G,X_2)$ 是亚BCI-代数 $X=X_1\times X_2$ 的新型软理想，则 (H_{X_1},X_1) 和 (H_{X_2},X_2) 分别是 X_1 和 X_2 上的新型软理想。

定义11（对偶软集[11]） 设 $H:X\to P(U)$，$x\mapsto H(x)$ 为一个软集，则称 $A_H:U\to P(X), u\mapsto A_H(u)=\{x|u\in H(x)\}$ 为 H 的对偶软集。设 $A:U\to P(X)$，$u\mapsto A(u)$ 为一个软集，则称 $H_A:X\to P(U)$，$x\mapsto H_A(x)=\{u|x\in A(u)\}$ 为 A 的对偶软集。

定理5[13] 设 X 为亚BCI-代数，则下列结论成立：

（1）$H:X\to P(U)$ 为 X 的新型软理想的充要条件是 $\forall u\in U$，$A_H(u)\neq\varnothing$ 为 X 的理想。

（2）$A:U\to P(X)$ 是一个软集，则 $\forall u\in U, A(u)\neq\varnothing$ 为 X 的理想的充要条件是 H_A 为 X 的新型软理想。

定理6[13] 设 X 为亚BCI-代数，$H:X\to P(U)$ 为一个软集，则 H 是 X 的新型软理想的充要条件是 H 的 α-水平集 $H_\alpha=\{x|H(x)\supseteq\alpha,\alpha\in P(U)\}\neq\varnothing$ 为 X 的理想。

定义12（生成理想[14]） 设 S 是交换BCK-代数 X 的子集，把包含 S 的 X 的最小理想称为由 S 生成的理想，记作 $\langle S\rangle$。

定理7[14] 设 P 是交换BCK-代数 X 的理想，则下列条件等价：

（1）P 是素理想；

（2）对于 X 的任意理想 A 和 B，若 $A\cap B\subseteq P$，则 $A\subseteq P$ 或 $B\subseteq P$；

（3）$\forall x,y\in X$，若 $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle\subseteq P$，则 $x\in P$ 或 $y\in P$。

定义13（像与原像[20]） 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，U 是初始集合，$P(U)$ 是 U 的幂集，$f:X_1\to X_2$ 是一个映射，$H_1:X_1\to P(U), H_2:X_2\to P(U)$ 均为软集，$\forall x_1\in X_1$，$x_2\in X_2$，定义：

$$f(H_1)(x_2)=\begin{cases}\bigcup\limits_{f(x_1)=x_2}H_1(x_1), f^{-1}(x_2)\neq\varnothing\\ \varnothing, f^{-1}(x_2)=\varnothing\end{cases}$$

$$f^{-1}(H_2)(x_1)=H_2(f(x_1))$$

则 $f(H_1)$、$f^{-1}(H_2)$ 分别是 X_2 和 X_1 上的软集，称 $f(H_1)$ 为 H_1 的像，$f^{-1}(H_2)$ 为 H_2 的原像。

定义14（同态与满同态[13]） 设 X、Y 是两个亚BCI-代数，映射 $f:X\to Y$，若 $\forall x,y\in X$，有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$，则称 f 为 X 到 Y 的同态。当 f 是满射时，则称 f 为 X 到 Y 的满同态。

$$f(0)=f(0*0)=f(0)*f(0)=0$$

定理8[13] 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，U 是初始集合。$f:X_1\to X_2$ 为一个同态映射，$H_1:X_1\to P(U)$，$H_2:X_2\to P(U)$ 为两个软集，若 H_2 为 X_2 的新型软理想，有 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软理想。

定理9[13] 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，$f:X_1\to X_2$ 为一个满同态映射，$H_2:X_2\to P(U)$ 为软集，则 H_2 为 X_2 的新型软理想的充要条件是 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软理想。

定义15（f-不变性[13]） 设 X_1、X_2 为两个集合，$f:X_1\to X_2$ 是 X_1 到 X_2 的映射，H_1 是 X_1 上的软集，$\forall x,y\in X_1$，当 $f(x)=f(y)$ 时，有 $H_1(x)=H_1(y)$，则称 H_1 是关于 f-不变的。

定理10[13] 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，U 是初始集合。$f:X_1\to X_2$ 为一个同态映射，$H_1:X_1\to P(U)$ 为软集且 H_1 是关于 f-不变的，若 $f(H_1)$ 为 X_2 的新型软理想，则 H_1 为 X_1 的新型软理想。

定理11[13] 设 X_1、X_2 为两个亚BCI-代数，U 是初始集合。$f:X_1\to X_2$ 为一个满同态映射，$H_1:X_1\to P(U)$ 为软集且 H_1 是关于 f-不变的，则 H_1 为 X_1 的新型软理想的充要条件是 $f(H_1)$ 为 X_2 的新型软理想。

2 交换BCK-代数的新型软理想

本章给出交换BCK-代数的新型软理想与偏序之间的关系以及它在软集运算下的性质。

定义16 设 X 是亚BCI-代数，$\forall x,y\in X$，如果满足 $x*(x*y)=y*(y*x)$，则称 X 是一个交换亚BCI-代数。

注：由定理1知，定义的交换亚BCI-代数就是交换BCK-代数。因此，下面主要讨论交换BCK-代数的新型软理想的性质。

定理12 X 是交换BCK-代数，H 是 X 的新型软理想，若 $x\leq y$，则 $H(x)\supseteq H(y)$。

证明 若 $x\leq y$，则 $x*y=0$，由 H 是 X 新型软理想，得 $H(x)\supseteq H(x*y)\cap H(y)=H(0)\cap H(y)=H(y)$。

定理13 设 H 是交换BCK-代数 X 的新型软理想，且 $x*y\leq z$，则 $H(x)\supseteq H(y)\cap H(z)$。特别地，如果 $z=0$，则 $H(x)\supseteq H(y)$。

证明 因为 $x*y\leq z$，由定理12知，$H(x*y)\supseteq H(z)$。又 H 是 X 的新型软理想，得 $H(x)\supseteq H(x*y)\cap H(y)\supseteq H(y)\cap H(z)$。特别地，若 $z=0$，则 $H(x)\supseteq H(y)\cap H(z)=H(y)\cap H(0)=H(y)$。

定理14 设 X 是有界BCK-代数，且 H 是 X 的新

型软理想，则 $H(u)=H(x)\cap H(N_x)$，$\forall x\in X$。

证明 设 X 是有界BCK-代数，且 H 是 X 的新型软理想，则 $x\le u$，有 $H(x)\supseteq H(u)$；$u*x\le u$，有 $H(u*x)\supseteq H(u)$。因此 $H(u)\subseteq H(x)\cap H(N_x)$。又由 H 是 X 的新型软理想，得 $H(u)\supseteq H(u*x)\cap H(x)$。

因此，$H(u)=H(x)\cap H(N_x)$。

定义17 设 X 是交换BCK-代数，H 是 X 的一个软集，如果 $\forall x,y\in X$，有 $H(x*y)\supseteq H(x)\cap H(y)$，则称 H 为 X 的新型软代数。

定理15 H 是交换BCK-代数 X 的新型软理想，则 H 是 X 的新型软代数。

证明 $\forall x,y\in X$，由 H 是BCK-代数 X 的新型软理想，有 $H(0)\supseteq H(x)$，且 $H(x*y)\supseteq H((x*y)*x)\cap H(x)=H((x*x)*y)\cap H(x)=H(0*y)\cap H(x)=H(0)\cap H(x)=H(x)\supseteq H(x)\cap H(y)$。

定理16 设 X 是交换BCK-代数，若 H 是 X 的新型软理想，则 $(H^2,X)=(H,X)$。

证明 由定义5，知 $(H\circ H)(z)=\bigcup\limits_{z=x*y}(H(x)\cap H(y))\supseteq H(z)\cap H(0)=H(z)$，因 H 是 X 的新型软理想，由定理15，得 $\forall z=x*y$，都有 $H(z)=H(x*y)\supseteq H(x)\cap H(y)$，因此，$H(z)\supseteq\bigcup\limits_{z=x*y}(H(x)\cap H(y))=(H\circ H)(z)$。

综上所述，$(H^2,X)=(H,X)$。

定理17 设 H 是 X 的软集，记 $hatH=\bigcup\limits_{x\in X}H(x)$，

（1）设 H_i 是 X 的软集（$i=1,2$），则 $hat(H_1\bigcup_R H_2)=(hatH_1)\cup(hatH_2)$。

（2）设 H_i 是 X_i 的软集（$i=1,2$），则 $hat(H_1\bigcup_R H_2)\subseteq(hatH_1)\cup(hatH_2)$。

证明 （1）$hat(H_1\bigcup_R H_2)=\bigcup\limits_{x\in X}(H_1\bigcup_R H_2)(x)=\bigcup\limits_{x\in X}(H_1(x)\cup H_2(x))\subseteq(\bigcup\limits_{x\in X}H_1(x))\cup(\bigcup\limits_{x\in X}H_2(x))=(hatH_1)\cup(hatH_2)$。又 $\bigcup\limits_{x\in X}(H_1(x)\cup H_2(x))\supseteq\bigcup\limits_{x\in X}H_i(x),\ i=1,2$，故 $\bigcup\limits_{x\in X}(H_1(x)\cup H_2(x))\supseteq(\bigcup\limits_{x\in X}H_1(x))\cup(\bigcup\limits_{x\in X}H_2(x))=(hatH_1)\cup(hatH_2)$，即 $hat(H_1\bigcup_R H_2)\supseteq(hatH_1)\cup(hatH_2)$，从而 $hat(H_1\bigcup_R H_2)=(hatH_1)\cup(hatH_2)$。

（2）$hat(H_1\bigcup_R H_2)=\bigcup\limits_{x\in X_1\cap X_2}(H_1\bigcup_R H_2)(x)=\bigcup\limits_{x\in X_1\cap X_2}(H_1(x)\cup H_2(x))\subseteq(\bigcup\limits_{x\in X_1}H_1(x))\cup(\bigcup\limits_{x\in X_2}H_2(x))=(hatH_1)\cup(hatH_2)$。

定义18 设 X 是交换BCK-代数，(H,X) 和 (G,X) 分别为 X 的两个软集。定义 $(H\Delta G,X)$：

$$(H\Delta G)(x)=\bigcup_{y\in X}(H(x*y)\cap G(y))$$

则 $(H\Delta G,X)$ 是 X 的软集，并称 $H\Delta G$ 为两个软集的合成。

定理18 H 是 X 的新型软理想的充要条件是 $H\Delta H=H$ 且 $H(0)=hatH$。

证明 充分性：由 H 是 X 的新型软理想，知 $H(0)\supseteq H(x)$，故 $H(0)\supseteq hatH$。又 $hatH\supseteq H(0)$，因此 $H(0)=hatH$。$\forall x,y\in X$，因为 $H(x)\supseteq H(x*y)\cap H(y)$，所以 $H(x)\supseteq\bigcup\limits_{y\in X}(H(x*y)\cap H(y))=(H\Delta H)(x)$。又 $(H\Delta H)(x)=\bigcup\limits_{y\in X}(H(x*y)\cap H(y))\supseteq H(x*x)\cap H(x)=H(0)\cap H(x)=H(x)$，因此 $H\Delta H=H$。

必要性：$\forall x\in X$，$H(0)=hatH\supseteq H(x)$。

$\forall x,y\in X$，$H(x)=(H\Delta H)(x)=\bigcup\limits_{y\in X}(H(x*y)\cap H(y))$，故 $H(x)\supseteq H(x*y)\cap H(y)$，因此 H 是 X 的新型软理想。

定义19 设 X 为交换BCK-代数，(H_1,X) 和 (H_2,X) 分别为 X 的两个软集。定义 $(H_1\bar{\circ}H_2,X)$：

$$(H_1\bar{\circ}H_2)(z)=\bigcup_{z=x\wedge y}(H_1(x)\cap H_2(y)),\forall z\in X$$

则 $(H_1\bar{\circ}H_2,X)$ 是 X 的软集，并称 $H_1\bar{\circ}H_2$ 为两个软集的合成。

因 $\forall z\in X$，有 $z=z\wedge z$，于是 X 中的元素均有分解式 $z=x\wedge y$ 成立，所以上述定义是合理的。

定理19 设 H_1 和 H_2 是交换BCK-代数 X 的两个子代数，(H_1,X) 和 (H_2,X) 分别为 X 的两个软集。则：

（1）$H_1\cap H_2\subseteq H_1\bar{\circ}H_2$；

（2）若 $H_1(H_2)$ 是 X 的新型软理想，则 $H_1\bar{\circ}H_2\subseteq H_1$ $(H_1\bar{\circ}H_2\subseteq H_2)$；

（3）若 H_1 和 H_2 是 X 的新型软理想，则 $H_1\bar{\circ}H_2=H_1\cap H_2$。

证明 （1）$(H_1\bar{\circ}H_2)(z)=\bigcup\limits_{z=x\wedge y}(H_1(x)\cap H_2(y))\supseteq H_1(z)\cap H_2(z)=(H_1\cap H_2)(z)$。

（2）因 $z*x=(x\wedge y)*x=(x*(x*y))*x=(x*x)*(x*y)=0*(x*y)=0$，所以 $z\le x$，又 H_1 是 X 的新型软理想，由定理12知，$H(z)\supseteq H(x)$。从而，$(H_1\bar{\circ}H_2)(z)=\bigcup\limits_{z=x\wedge y}(H_1(x)\cap H_2(y))\subseteq\bigcup\limits_{z=x\wedge y}(H_1(z)\cap H_2(y))=H_1(z)\cap(\bigcup\limits_{z=x\wedge y}H_2(y))\subseteq H_1(z)$。类似可证，若 H_2 是 X 的新型软理想，则 $H_1\bar{\circ}H_2\subseteq H_2$。

（3）由（2）得，$(H_1\bar{\circ}H_2)(z)\subseteq H_1(z)\cap H_2(z)=(H_1\cap H_2)(z)$，再由（1），得结论成立。

定理20 设 X_1 是交换BCK-代数 X 的理想，则 $H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X 的新型软理想。

证明 因为 X_1 是 X 的理想，所以 $0\in X_1$。$\forall x\in X$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(0)=\beta\supseteq H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)$。

$\forall x,y\in X$，（1）$x\in X_1$，$y\in X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\beta$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x*y)\cap H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)\subseteq\beta=H(x)$。

（2）$x\in X_1$，$y\in X-X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\beta$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x*y)\cap H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)\subseteq\alpha\subseteq\beta=H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)$。

（3）$x\in X-X_1$，$y\in X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\alpha$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta$。若 $x*y\in X_1$，因为 X_1 是 X 的理想，可知 $x\in X_1$ 与 $x\in X-X_1$ 矛盾，所以 $x*y\in X-X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x*y)=\alpha$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x*y)\cap H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha\cap\beta=\alpha=H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)$。

（4）$x\in X-X_1$，$y\in X-X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\alpha$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x*y)\cap H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)\subseteq\alpha=H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)$。

综上，$H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X 的新型软理想。

3　交换BCK-代数中软集的零化子

本章给出了交换BCK-代数中软集的零化子的新概念及相关性质。

定义20 设 X 是交换BCK-代数，H 是 X 的一个软集，$\forall x\in X$，$H^*(x)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}H(y)$，其中 $x^\wedge$ 表示 $\{x\}^\wedge=\{y|y\wedge x=0\}$，则称 $H^*(x)$ 为软集 H 的零化子。

当参数集固定时，两个软集的限制交（并）与扩展交（并）重合，因此定理21就没有区分。

定理21 设 H 和 G 是交换BCK-代数 X 的两个软集，则有：

（1）$H^*(0)\supseteq H^*(x)$，$\forall x\in X$；

（2）如果 $x\le y$，则 $H^*(y)\subseteq H^*(x)$；

（3）如果 $H\subseteq G$，则 $G^*\subseteq H^*$；

（4）$H^{**}\subseteq H$，其中 H^{**} 表示 $(H^*)^*$；

（5）$H^*=H^{***}$；

（6）$(H\cup G)^*\subseteq H^*\cap G^*$；

（7）$(H\cap G)^*=H^*\cup G^*$；

（8）$H\cap H^*\subseteq H\mathbin{\bar{\circ}}H^*$；

（9）如果 H 是 X 的新型软理想，则 $H\mathbin{\bar{\circ}}H^*\subseteq H$。

证明　（1）$H^*(0)=U-\bigcap_{y\in 0^\wedge}H(y)=U-\bigcap_{y\in X}H(y)\supseteq U-\bigcap_{y\in x^\wedge}H(y)=H^*(x)$。

（2）由 $x\le y$，得 $z\wedge x\le z\wedge y$，因此，$z\in y^\wedge$ 有 $z\in x^\wedge$，从而 $H^*(y)=U-\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)\subseteq U-\bigcap_{z\in x^\wedge}H(z)=H^*(x)$。

（3）$G^*(x)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}G(y)\subseteq U-\bigcap_{y\in x^\wedge}H(y)=H^*(x)$。

（4）$H^{**}(x)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}H^*(y)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}[U-\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)]\overset{x\in y^\wedge}{\subseteq}U-\bigcap_{y\in x^\wedge}[U-H(x)]=U-[U-H(x)]=H(x)$。

（5）在（4）中用 H^* 替换 H 得 $H^{***}\subseteq H^*$，又 $H^{**}\subseteq H$，由（3）得，$H^*\subseteq H^{***}$，因此 $H^*=H^{***}$。

（6）因 $H,G\subseteq H\cup G$，由（3）得，$(H\cup G)^*\subseteq H^*$ 且 $(H\cup G)^*\subseteq G^*$，所以 $(H\cup G)^*\subseteq H^*\cap G^*$。

（7）因 $H\cap G\subseteq H,G$，由（3）得，$H^*,G^*\subseteq(H\cap G)^*$，所以 $H^*\cup G^*\subseteq(H\cap G)^*$。又 $H^*,G^*\subseteq H^*\cup G^*$，由（3）得，$(H^*\cup G^*)^*\subseteq H^{**}$，$(H^*\cup G^*)^*\subseteq G^{**}$，所以，$(H^*\cup G^*)^*\subseteq H^{**}\cap G^{**}\subseteq H\cap G$。由（3）和（4），得 $(H\cap G)^*\subseteq(H^*\cup G^*)^{**}\subseteq H^*\cup G^*$。综上，$(H\cap G)^*=H^*\cup G^*$。

（8）和（9）由定理19可得。

定义21 设 H 是交换BCK-代数 X 的一个新型软理想，如果 $H^{**}=H$，则称 H 是 X 的新型对合软理想。

定理22 有界交换和关联的BCK-代数的每个新型软理想都是新型对合软理想。

证明 设 H 是有界交换和关联的BCK-代数 X 的一个新型软理想，$\forall x\in X$，由定理21的（4）知，$H^{**}\subseteq H$。另一方面，$H^{**}(x)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}H^*(y)=U-\bigcap_{y\in x^\wedge}[U-\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)]=\bigcup_{y\in x^\wedge}[\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)]\overset{x\wedge N_x=0}{\supseteq}\bigcap_{z\in(N_x)^\wedge}H(z)$ 又由 $z\in(N_x)^\wedge$，得 $0=z\wedge N_x=N_x*(N_x*z)=N_x*((u*x)*z)=N_x*((u*z)*x)=N_x*(N_z*x)=(u*x)*(N_z*x)=(u*N_z)*x=(u*(u*z))*x=(z*(z*u))*x=(z*0)*x=z*x$。因此 $z\le x$，进而 $H(z)\supseteq H(x)$，$H^{**}(x)\supseteq\bigcap_{z\in(N_x)^\wedge}H(z)\supseteq H(x)$。综上，$H^{**}=H$，故结论成立。

4　交换BCK-代数的新型软素理想

本章给出了交换BCK-代数新型软素理想的新概念和例子，研究了它在软集运算下的性质及等价刻画。

定义22 设交换BCK-代数 X，H 是 X 的一个软集，如果 H 满足下列条件：

（1）H 是 X 的新型软理想；

（2）$\forall x,y\in X$，有 $H(x)\cup H(y)\supseteq H(x\wedge y)$，则称 H 为 X 的新型软素理想。

定理23 H 是交换BCK-代数 X 的新型软素理想，则下列条件等价：

（1）$\forall x,y\in X$，有 $H(x)\cup H(y)\supseteq H(x\wedge y)$；

（2）$\forall x,y\in X$，有 $H(x)\cup H(y)=H(x\wedge y)$。

证明（1）⇒（2）由定理3，知 $x\wedge y\le x,y$。由定理12知，$H(x\wedge y)\supseteq H(x)$ 且 $H(x\wedge y)\supseteq H(y)$，因此 $H(x\wedge y)\supseteq H(x)\cup H(y)$，再由定义22知，$H(x\wedge y)=H(x)\cup H(y)$。

（2）$\Rightarrow$（1）显然成立。

由定理23知，下列定理成立。

定理24 H 是交换BCK-代数 X 的新型软素理想的充要条件是：

（1）H 是 X 的新型软理想；

（2）$\forall x,y \in X$，有 $H(x) \cup H(y) = H(x \wedge y)$。

例1 设有初始集合 $U=\{a,b,c,d,e\}$，参数集 $X=\{0,1,2,3\}$，在 X 上 $*$ 运算定义如表1。

表1 运算“ * ”

Table 1 Operator“ * ”

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	2
2	2	0	0	2
3	3	0	3	0

可验证 $(X,*,0)$ 是一个交换BCK-代数。令 $H:X \rightarrow P(U)$，$H(0)=\{a,b,c,d\}$，$H(1)=\{c,d\}$，$H(2)=\{a,c,d\}$，$H(3)=\{b,c,d\}$，由定义22知，H 是 X 的新型软素理想，但它显然不是通常的软素理想。

例2 设 $U=X=\{0,1,2,3\}$，在 X 上 $*$ 运算定义如例1，令 $H:X \rightarrow P(U)$，$H(0)=\{0,1,2,3\}$，$H(1)=\{3\}$，$H(2)=\{0,3\}$，$H(3)=\{1,2,3\}$，由定义知，H 是 X 的新型软素理想。因 $H(1)=\{3\}$ 和 $H(3)=\{1,2,3\}$ 不是 X 的素理想，故它不是通常的交换BCK-代数的软素理想，因此 H 是一个新的软代数结构。

定理25 设 X_1 是交换BCK-代数 X 的素理想，则 $H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X 的新型软素理想。

证明 由定义9知，X_1 是 X 的理想。由定理20知，$H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X 的新型软理想。$\forall x,y \in X$：

（1）$x \in X_1$，$y \in X_1$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\beta$，$H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x) \cup H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta \supseteq H(x \wedge y)$。

（2）$x \in X_1, y \in X-X_1, H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\beta, H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x) \cup H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta \supseteq H_{X_1(\alpha,\beta)}(x \wedge y)$。

（3）$x \in X-X_1, y \in X_1, H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\alpha, H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x) \cup H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\beta \supseteq H_{X_1(\alpha,\beta)}(x \wedge y)$。

（4）$x \in X-X_1, y \in X-X_1, H_{X_1(\alpha,\beta)}(x)=\alpha, H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha$，故 $H_{X_1(\alpha,\beta)}(x) \cup H_{X_1(\alpha,\beta)}(y)=\alpha$，若 $x \wedge y \in X_1$，由 X_1 是 X 的素理想知 $x \in X_1$ 或 $y \in X_1$ 与 $x \in X-X_1$，$y \in X-X_1$ 矛盾，因此 $x \wedge y \in X-X_1$，从而 $H(x \wedge y)=\alpha$，$H(x) \cup H(y)=H(x \wedge y)$。

综上，$\forall x,y \in X$，有 $H(x) \cup H(y) \supseteq H(x \wedge y)$，因此，$H_{X_1(\alpha,\beta)}$ 是 X 的新型软素理想。

定理26 若 (F,X_1) 和 (G,X_2) 分别为交换BCK-代数 X_1 和 X_2 的软集，$X=X_1 \times X_2$ 且 $(H,X)=(F,X_1) \wedge (G,X_2)$ 是 X 的新型软素理想，则 (H_{X_1},X_1) 和 (H_{X_2},X_2) 分别是 X_1 和 X_2 上的新型软素理想。

证明 $H_{X_1}(x) \cup H_{X_1}(y) = (\bigcup_{w \in X_2} H(x,w)) \cup (\bigcup_{w_1 \in X_2} H(y,w_1)) \overset{\forall w \in X_2}{\supseteq} H(x,w) \cup H(y,0) \supseteq H((x,w) \wedge (y,0)) = H\{(x,w)*[(x,w)*(y,0)]\} = H[(x,w)*(x*y,w*0)] = H[x*(x*y),w*(w*0)] = H[x*(x*y),0] = H(x \wedge y,0)$，因为 $(x \wedge y,0) \times (x \wedge y,w) = [(x \wedge y) \times (x \wedge y), 0 \times w] = (0,0)$，所以 $(x \wedge y,0) \leq (x \wedge y,w), \forall w \in X_2$。由定理12，得 $H(x \wedge y,0) \supseteq H(x \wedge y,w)$，$\forall w \in X_2$，故 $H_{X_1}(x) \cup H_{X_1}(y) \supseteq \bigcup_{w \in X_2} H(x \wedge y,w) = H_{X_1}(x \wedge y)$，又由定理4得，$(H_{X_1},X_1)$ 是 X_1 上的新型软理想，因此，(H_{X_1},X_1) 是 X_1 上的新型软素理想。

同理可证 (H_{X_2},X_2) 是 X_2 上的新型软素理想。

定理27 设 X 是交换BCK-代数，则下列结论成立：

（1）$H:X \rightarrow P(U)$ 为 X 的新型软素理想的充要条件是 $\forall u \in U$，$A_H(u) \neq \varnothing$ 为 X 的素理想。

（2）设 $A: U \rightarrow P(X)$ 为一个软集，则 $\forall u \in U$，$A_H \neq \varnothing$ 为 X 的素理想的充要条件是 H_A 为 X 的新型软素理想。

证明 （1）必要性：由定义11和定理5得，$A_H(u) \neq \varnothing$ 为 X 的理想。$\forall x,y \in X$，若 $x \wedge y \in A_H(u)$，则 $u \in H(x \wedge y)$。由 H 是 X 的新型软素理想，得 $H(x \wedge y) \subseteq H(x) \cup H(y)$，因此 $u \in H(x)$ 或 $u \in H(y)$，有 $x \in A_H(u)$ 或 $y \in A_H(u)$。因此，$A_H(u)$ 为 X 的素理想。

充分性：由定义9和定理5得，H 是 X 的新型软理想。$\forall x,y \in X$，若 $H(x \wedge y)=\varnothing$，则显然有 $H(x \wedge y) \subseteq H(x) \cup H(y)$；若 $H(x \wedge y) \neq \varnothing$，则 $\forall u \in H(x \wedge y)$，有 $x \wedge y \in A_H(u)$，由 $A_H(u)$ 为 X 的素理想，得 $x \in A_H(u)$ 或 $y \in A_H(u)$，有 $u \in H(x)$ 或 $u \in H(y)$，因此 $u \in H(x) \cup H(y)$，故 $H(x \wedge y) \subseteq H(x) \cup H(y)$。因此，$H$ 是 X 的新型软素理想。

（2）类似可证得。

定理28 设 X 是一个交换BCK-代数，$H:X \rightarrow P(U)$ 为一个软集，如果对 $\forall \alpha \in P(U)$，H 的 α-水平集 $H_\alpha = \{x | H(x) \supseteq \alpha\} \neq \varnothing$ 是 X 的素理想，则 H 是 X 的新型软素理想。

证明 由定义9和定理6知，H 是 X 的新型软理

想。$\forall x,y\in X$，若 $H(x\wedge y)=\varnothing$，则显然有 $H(x\wedge y)\subseteq H(x)\cup H(y)$；若 $H(x\wedge y)\neq\varnothing$，令 $H(x\wedge y)=\alpha$，则 $x\wedge y\in H_\alpha$，由 $H_\alpha\neq\varnothing$ 是 X 的素理想，得 $x\in H_\alpha$ 或 $y\in H_\alpha$，因此 $H(x)\supseteq\alpha$ 或 $H(y)\supseteq\alpha$，有 $H(x)\cup H(y)\supseteq\alpha=H(x\wedge y)$。因此，$H$ 是 X 的新型软素理想。

定理28的逆命题不成立，见例3。

例3 可换BCK-代数 $(X,*,0)$ 和它的一个新型软素理想同例2，取 $\alpha=\{0,1\}$，则有 $H_\alpha=\{0\}$，而 $\{0\}$ 不是 X 的素理想，因为 $2\times(2\times3)=0$，但 $2,3\notin\{0\}$。

说明通常的模糊代数与软集代数是有本质区别的。

定理29 设 X 是交换BCK-代数，H 是 X 的一个软集，下列条件等价：

（1）H 是 X 的新型软素理想；

（2）$\forall u\in U$，$A_H(u)\neq\varnothing$ 是 X 的理想，且对 X 的任意理想 A 和 B，由 $A\cap B\subseteq A_H(u)$ 得 $A\subseteq A_H(u)$ 或 $B\subseteq A_H(u)$；

（3）$\forall u\in U$，$A_H(u)\neq\varnothing$ 是 X 的理想，且 $\forall x,y\in X$，由 $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle\subseteq A_H(u)$ 得 $x\in A_H(u)$ 或 $y\in A_H(u)$。

证明 （1）⇒（2） 由定理5知当 $A_H(u)\neq\varnothing$ 时，$A_H(u)$ 是 X 的素理想，由定理7知，$A\subseteq A_H(u)$ 或 $B\subseteq A_H(u)$。（2）⇒（3） 由定理7知显然成立。（3）⇒（1） 由定理7知 $A_H(u)\neq\varnothing$ 是 X 的素理想，再由定理5知 H 是 X 的新型软素理想。

定义23 交换BCK-代数 X 的一个新型软理想 H 称为可逆的，如果它的软零化子 H^* 也是 X 的新型软理想。

定理30 交换BCK-代数 X 的每个新型软素理想 H 是可逆的。

证明 因软零化子 H^* 的水平集 $H^*_\alpha\neq\varnothing$，故 $\exists x\in H^*_\alpha$，即 $H^*(x)\supseteq\alpha$，又由定理21知，$H^*(0)\supseteq H^*(x)$，故 $H^*(0)\supseteq\alpha$，因而 $0\in H^*_\alpha$。若 $x*y,y\in H^*_\alpha$，则有 $H^*(x*y)\supseteq\alpha,H^*(y)\supseteq\alpha$，即 $U-\bigcap_{z_1\in(x*y)^\wedge}H(z_1)\supseteq\alpha,U-\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)\supseteq\alpha$，因此 $U-\alpha\supseteq(\bigcap_{z_1\in(x*y)^\wedge}H(z_1))\cup(\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z))=\bigcap_{z_1\in(x*y)^\wedge}(H(z_1)\cup(\bigcap_{z\in y^\wedge}H(z)))=\bigcap_{z_1\in(x*y)^\wedge}\bigcap_{z\in y^\wedge}(H(z_1)\cup H(z))$。因 H 是 X 的新型软素理想，有 $H(z_1\wedge z)\subseteq H(z_1)\cup H(z)$，又 $z_1\wedge z\le z$，由定理12知 $H(z)\subseteq H(z_1\wedge z)$，进而 $\bigcap_{z\in X^\wedge}H(z)\subseteq H(z_1\wedge z)$。故，$\bigcap_{z\in x^\wedge}H(z)\subseteq\bigcap_{z_1\in(x*y)^\wedge}\bigcap_{z\in y^\wedge}(H(z_1)\cup H(z))\subseteq U-\alpha$，$H^*(x)=U-\bigcap_{z\in X^\wedge}H(z)\supseteq\alpha$，因此 $x\in H^*_\alpha$，H^*_α 是 X 的一个理想，从而 H^* 是 X 的新型软理想，即每个新型软素理想 H 是可逆的。

5 交换BCK-代数的新型软素理想的像与原像

本章给出了交换BCK-代数的新型软素理想的像与原像的性质。

定理31 设 X_1、X_2 是两个交换BCK-代数，U 是初始集合，$H_1:X_1\to P(U)$，$H_2:X_2\to P(U)$ 是两个软集，$f:X_1\to X_2$ 是 X_1 到 X_2 的映射。

（1）当 f 为一个同态映射时，H_2 为 X_2 的新型软素理想的必要条件是 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软素理想。

（2）当 f 为一个满同态映射时，H_2 为 X_2 的新型软素理想的充要条件是 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软素理想。

证明 （1）由定义22及定理8知，$f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软理想。$\forall x_1,x_2\in X_1$，令 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\in X_2$，有 $f^{-1}(H_2)(x_1\wedge x_2)=H_2(f(x_1\wedge x_2))=H_2(f(x_1)\wedge f(x_2))=H_2(y_1\wedge y_2)\subseteq H(y_1)\cup H(y_2)=H_2(f(x_1))\cup H_2(f(x_2))=f^{-1}(H_2)(x_1)\cup f^{-1}(H_2)(x_2)$。因此，$f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的新型软素理想。

（2）必要性：由定理31（1）可知结论成立。充分性：由定义22及定理9知，H_2 为 X_2 的新型软理想。$\forall y_1,y_2\in X_2$，由 f 是满同态映射，故 $\exists x_1,x_2\in X_1$，使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，有 $H_2(y_1\wedge y_2)=H_2(f(x_1)\wedge f(x_2))=H_2(f(x_1\wedge x_2))=f^{-1}(H_2)(x_1\wedge x_2)\subseteq H_2(x_1)\cup H_2(x_2)=f^{-1}(H_2)(x_1)\cup f^{-1}(H_2)(x_2)$。因此，$H_2$ 为 X_2 的新型软素理想。

定理32 设 X_1、X_2 是两个交换BCK-代数，U 是初始集合，$f:X_1\to X_2$ 是 X_1 到 X_2 的映射，$H_1:X_1\to P(U)$ 为软集且 H_1 是关于 f -不变的。

（1）当 f 为一个同态映射时，$f(H_1)$ 为 X_2 的新型软素理想的必要条件是 H_1 为 X_1 的新型软素理想。

（2）当 f 为一个满同态映射时，$f(H_1)$ 为 X_2 的新型软素理想的充要条件是 H_1 为 X_1 的新型软素理想。

证明 （1）由定义22及定理10知，H_1 为 X_1 的新型软理想。$\forall x_1,x_2\in X_1$，令 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，由 H_1 是关于 f -不变的及 $f(H_1)$ 为 X_2 新型软素理想，有 $H_1(x_1\wedge x_2)=\bigcup_{f(x)=y_1\wedge y_2}H_1(x)=f(H_1)(y_1\wedge y_2)\supseteq f(H_1)(y_1)\cup f(H_1)(y_2)=\bigcup_{f(x)=y_1}H_1(x)\cup\bigcup_{f(x)=y_2}H_1(x)=H_1(x_1)\cup H_1(x_2)$。因此，$H_1$ 为 X_1 的新型软素理想。

（2）必要性：由定理32（1）可知结论成立。充分性：由定义22及定理11知，$f(H_1)$ 为 X_2 的新型软理想。$\forall y_1,y_2\in X_2$，由 f 是满同态映射，故 $\exists x_1,x_2\in X_1$，

使得 $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(H_1)(y_1\wedge y_2)=\bigcup_{f(x)=y_1\wedge y_2} H_1(x)= H_1(x_1\wedge x_2)\supseteq H_1(x_1)\cup H_1(x_2)=\bigcup_{f(x)=y_1} H_1(x)\cup\bigcup_{f(x)=y_2} H_1(x)=f(H_1)(y_1)\cup f(H_1)(y_2)$,因此，$f(H_1)$ 为 X_2 的新型软素理想。

6 结束语

本文提出并研究了交换BCK-代数的新型软(素)理想,获得了一系列的结果。其中,引进软集的新的运算及偏序关系对交换BCK-代数的新型软(素)理想进行刻画,是本文的特色。今后将进一步利用本文的思想和方法研究亚BCI-代数的其他理想。

参考文献：

[1] IMAI Y, ISEKI K. On axiom systems of propositional calculi XIV[J]. Proceedings of the Japan Academy, 1996, 42: 19-22.

[2] ISEKI K. An algebra related with a propositional calculus[J]. Proceedings of the Japan Academy, 1996, 42: 26-29.

[3] XI O G. Fuzzy BCK-algebras[J]. Mathematica Japonica, 1991, 36: 935-942.

[4] 彭家寅. BCI-代数的扰动模糊q-理想[J]. 计算机科学与探索, 2019, 13(5): 892-900.
PENG J Y. Disturbing fuzzy q-ideals of BCI-algebras[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2019, 13(5): 892-900.

[5] JUN Y B. Soft BCK/BCI algebras[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(5): 1408-1413.

[6] JUN Y B, PARK C H. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras[J]. Information Sciences, 2008, 178: 2466-2475.

[7] KHADEMAN S, ZAHEDI M M, JUN Y B, et al. Fuzzy soft positive implicative hyper BCK-ideals in hyper BCK-algebras [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2019, 36(3): 2605-2613.

[8] ISEKI K. On some ideals in BCK-algebras[J]. Mathematics Seminar Notes, 1975, 3: 65-70.

[9] BORZOOEI R A, ZAHIRI O. Prime ideals in BCI and BCK-algebras[J]. Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, 2012, 39(2): 266-276.

[10] JUN Y B, XIN X L. Fuzzy prime ideals and invertible fuzzy ideals in BCK-algebrs[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 471-476.

[11] 温永川. 关于软集的研究[D]. 大连: 辽宁师范大学, 2008.
WEN Y C. The study on soft set[D]. Dalian: Liaoning Normal University, 2008.

[12] AMERI R, HEDAYATI H, GHASEMIAN E. Prime idealistic soft BCK-BCI-algebras[R]. Babolsar: University of Mazandaran, 2010: 1-15.

[13] 黄昱, 廖祖华. 亚BCI-代数的新型软理想[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(5): 55-62.
HUAGN Y, LIAO Z H. A new type of soft ideals of weak-BCI-algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2018, 32 (5): 55-62.

[14] 黄益生. BCI-代数[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
HUANG Y S. BCI-algebra[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[15] NEGGERS J, AHN S S, KIM H S. On Q-algebras[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2001, 27(12): 749-757.

[16] 陈露, 蒲义书. 亚BCI-代数及其理想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2005, 21(3): 250-254.
CHEN L, PU Y S. Sub-BCI-algebra and its ideal[J]. Pure and Applied Mathematics, 2005, 21(3): 250-254.

[17] MOLODTSOW D. Soft set theory—first results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5): 19-31.

[18] 黄昱, 廖祖华, 李论. 新型软亚BCI-代数的进一步研究[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(23): 31-35.
HUAGN Y, LIAO Z H, LI L. Further study on new type of soft weak-BCI-algebras[J]. Computer Engineering and Applications, 2018, 54(23): 31-35.

[19] ALI M I, FENG F, LIU X Y, et al. On some new operations in soft set theory[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1547-1553.

[20] ZHENG G P, LIAO Z H, WANG N N, et al. Soft lattice implication subalgebras[J]. Applied Mathematics and Information Sciences, 2013, 7(3): 1181-1186.

黄昱(1981—),女,江苏盐城人,硕士,副教授,CCF会员,主要研究方向为模糊集、人工智能等。

HUANG Yu, born in 1981, M.S., associate professor, member of CCF. Her research interests include fuzzy sets, artificial intelligence, etc.

廖祖华(1957—),男,江西南昌人,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为模糊集、人工智能等。

LIAO Zuhua, born in 1957, Ph.D., professor, M.S. supervisor. His research interests include fuzzy sets, artificial intelligence, etc.