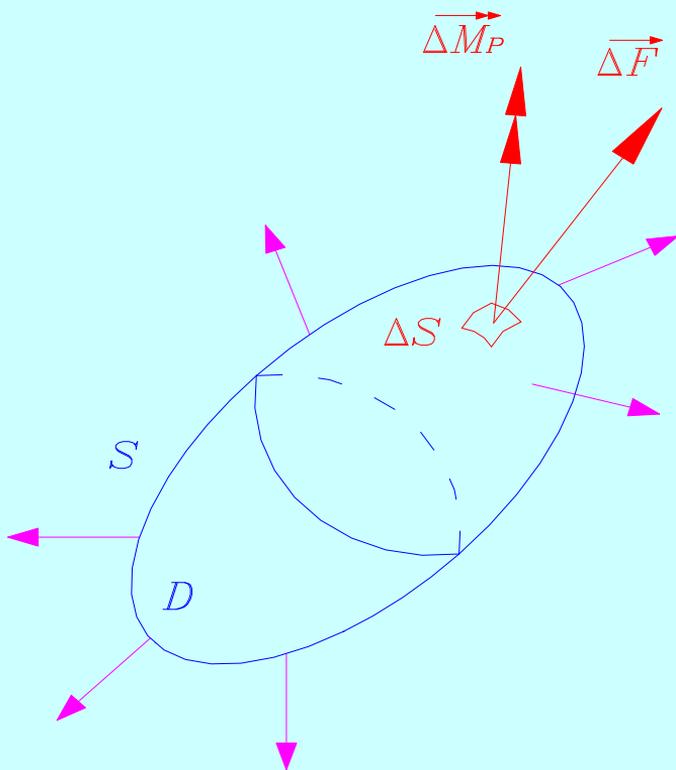


# FISICA DEL MEDIO CONTINUO



Francisco Javier Suárez Medina

2009

# **FÍSICA DEL MEDIO CONTINUO**

**Francisco Javier Suárez Medina**

***Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos***  
**Profesor Titular de Universidad**

**Septiembre 2009**

## **FÍSICA DEL MEDIO CONTINUO**

Francisco Javier Suárez Medina

*Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos*

Profesor Titular de Universidad

ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada

Colaborador:

Roberto Palma Guerrero

*Licenciado en Física*

ISBN 84-689-1845-8

Nº REGISTRO: 05/27256

Depósito Legal: GR-1592-2005

Septiembre 2005

## ÍNDICE

<b>1. El medio material</b> .....	<b>5</b>
1.1. <i>Hipótesis previa: la continuidad de la materia</i> .....	5
1.2. <i>Marco de referencia</i> .....	7
1.3. <i>Magnitudes extensivas e intensivas</i> .....	8
1.4. <i>Conceptos de homogeneidad e isotropía</i> .....	10
1.5. <i>Modelo matemático: el medio continuo</i> .....	12
<b>2. Propiedades del medio material continuo</b> .....	<b>14</b>
2.1. <i>Propiedades mecánicas</i> .....	14
Densidad y peso específico .....	14
Clasificación de las fuerzas .....	15
Fuerza másica.....	16
Principio de tensión de Cauchy. El vector tensión.....	17
Deformaciones .....	21
Desplazamiento .....	24
Ejercicio .....	26
Relación entre esfuerzos y deformaciones .....	29
2.2. <i>Propiedades térmicas</i> .....	30
Dilatación térmica .....	30
Conductividad térmica .....	31
Capacidad térmica y calor específico.....	32
2.3. <i>Propiedades eléctricas y magnéticas</i> .....	32
<b>3. Modelos de comportamiento</b> .....	<b>33</b>
3.1. <i>Respuesta elástica</i> .....	34
Módulo de Young (E) .....	34
Módulo elástico volumétrico (K) .....	35
Módulo de rigidez (G).....	35
Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).....	35
3.2. <i>Respuesta viscosa</i> .....	38
3.3. <i>Respuesta plástica</i> .....	42
3.4. <i>Comportamiento viscoelástico</i> .....	43
Proceso de deformación del hormigón .....	44
Descripción de las funciones matemáticas .....	45
Hipótesis de la viscoelasticidad lineal.....	48
Ensayos básicos: fluencia y relajación .....	49
Modelo de Maxwell .....	51
Modelo de Kelvin-Voigt.....	55
Modelo de Boltzmann .....	58
Modelo de Burgers.....	62

Operadores. Resumen .....	65
Modelos Generalizados.....	68
3.5. <i>Comportamiento elastoplástico.</i> .....	72

## FÍSICA DEL MEDIO CONTINUO

### 1. El medio material

#### 1.1. Hipótesis previa: la continuidad de la materia.

Es conocido el carácter discontinuo de la materia. La observación al microscopio de los materiales estructurales más frecuentemente empleados en la ingeniería, permite observar que los mismos están formados por partículas granulares separadas entre sí, así como la estructura cristalográfica de cada partícula. Los cristales, a veces sumergidos en una matriz amorfa que llena el espacio intergranular, están constituidos por moléculas (unión de varios átomos), y los átomos están formados, a su vez, por un núcleo cargado con carga eléctrica positiva en el que se concentra la casi totalidad de su masa y otros corpúsculos de masa despreciable y carga negativa llamados electrones que giran a su alrededor. Se admite también que los núcleos están constituidos por otras partículas llamadas nucleones que se manifiestan de dos formas distintas: como corpúsculos positivos, llamados protones, o como corpúsculos sin carga, denominados neutrones. La unión entre los nucleones se explica admitiendo la existencia de otras partículas, mesones, de masa intermedia entre los electrones y los protones y que constituyen algo así como la argamasa del edificio nuclear.

Las moléculas, en los estados condensados (sólido y líquido), se unen entre sí mediante fuerzas intermoleculares o de Van der Waals, que son más débiles que las intramoleculares, que mantienen unidos los átomos para formar la molécula, y las interatómicas, de origen electrostático (electrones de valencia), que mantienen unidos a los núcleos de los átomos que se combinan. Las fuerzas de Van der Waals tienen su origen en la atracción electrostática de los núcleos

de los átomos de la molécula sobre las nubes electrónicas de las demás. Según la intensidad de estas fuerzas de Van der Waals, la materia se presenta en los tres estados de agregación. Así, por ejemplo, en el estado gaseoso estas fuerzas son despreciables y las moléculas gozan de gran libertad y están dotadas de velocidades considerables, pudiendo reducirse enormemente las distancias que las separan (compresibilidad). En los estados condensados estas fuerzas son mayores, con la particularidad de que en el estado líquido gozan de libertad suficiente para resbalar unas sobre otras de tal manera que hacen que los líquidos no tengan forma definida.

El entrar en detalles en estas cuestiones no es el objeto de la disciplina, pero las mismas sirven de contrapunto a la hipótesis de partida de la Mecánica de los Medios Continuos. Dicha hipótesis constituye el postulado previo fundamental y establece que la materia se encuentra distribuida de forma continua en todo el volumen del medio deformable, llenando por completo el espacio que ocupa.

La continuidad de los medios considerados debe entenderse a escala macroscópica, ignorándose por tanto la estructura granular (escala microscópica) y la íntima (escala atómica), discontinuas ambas, idealizándose la materia como una distribución volumétrica continua en el espacio geométrico cuyos puntos se identifican con las partículas materiales del medio.

Se establece, por tanto, una dualidad punto geométrico-partícula material, de tal forma que a cada punto geométrico (PG) le corresponde una partícula material (PM), y cada partícula material queda identificada por un punto en el espacio. Puntos próximos permanecen próximos para cualquier deformación que se produzca en el medio. No pueden aparecer por tanto, grietas, poros, deslizamientos, choques, etc., que destruyan las hipótesis de

continuidad macroscópica del material.

## **1.2. Marco de referencia**

En cualquier teoría física, previamente a establecer las leyes fundamentales de dicha teoría, es necesario determinar donde (referencia espacial) se definen y cuando (referencia temporal) se aplican. En consecuencia, se debe conocer el espacio soporte en el que se definen las leyes y se formulan las ecuaciones, y la referencia temporal que permite seguir la evolución en el tiempo de las distintas variables que intervienen en el fenómeno que se estudia.

En Mecánica del Medio Continuo, la referencia espacial es el Espacio Geométrico Ordinario (EGO), espacio puntual euclídeo de dimensión 3, asociado al espacio vectorial de los Vectores Geométricos (VG). Una referencia está formada por el conjunto de un punto del espacio puntual, origen  $O$ , y una base vectorial,  $\hat{e}_i$ , del espacio asociado, VG, estableciéndose una correspondencia biunívoca entre partículas materiales y puntos geométricos, o los vectores de posición,  $\mathbf{r}$ , asociados a estos. El marco de referencia se completa introduciendo la variable tiempo.

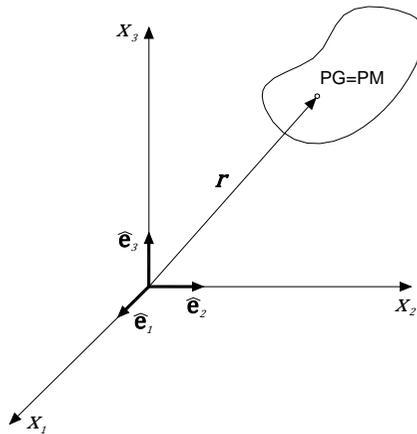


Figura 1

### 1.3. Magnitudes extensivas e intensivas.

Se puede subdividir imaginariamente el medio para su estudio en elementos de volumen paralelepípedicos, de aristas tan pequeñas como se quiera.

Cada uno de estos elementos tendrá una serie de propiedades, *observables físicos*, que dependerán de la naturaleza del cuerpo, y para un material y una propiedad determinados, podrán variar de un elemento a otro, incluso aunque todos ellos sean iguales.

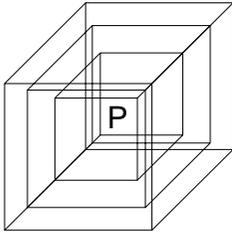
Los observables físicos comparables entre sí pertenecen a una misma magnitud física y poseerán un aspecto cuantitativo que se traduce en una medida, número real, cuando uno de ellos se toma arbitrariamente como unidad. Estos números reales son los valores que toman las variables que aparecen en las ecuaciones físicas.

Cuando estos valores, estas medidas, dependen de la cantidad de sustancia del elemento considerado, la magnitud que representa dicha variable se denomina **extensiva**; son magnitudes extensivas, por ejemplo, la masa, el peso, el volumen, etc.

Para cada elemento, puede obtenerse también, por ejemplo,

una masa media o un peso medio, sin más que dividir por el volumen del elemento las medidas correspondientes,  $\frac{\Delta m}{\Delta V}$  y  $\frac{\Delta p}{\Delta V}$ .

Si se considera en el medio material un punto P fijo, y una sucesión de elementos de volumen de tamaño decreciente conteniendo siempre a dicho punto, como se representa en la figura 2, se pueden considerar entonces las sucesiones de los valores de masa media y de peso medio indicadas, afectas a cada punto P concreto, y en cada instante  $t$ , si el material evoluciona en el tiempo.



$$\frac{\Delta m_1}{\Delta V_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta V_2} = \frac{\Delta m_3}{\Delta V_3} = \dots = \frac{\Delta m_n}{\Delta V_n}$$

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta V_1} = \frac{\Delta p_2}{\Delta V_2} = \frac{\Delta p_3}{\Delta V_3} = \dots = \frac{\Delta p_n}{\Delta V_n}$$

**Figura 2**

Si el medio es homogéneo, los valores de la masa media y el peso medio serán constantes en la sucesión, e iguales a su valor límite cuando tiendan a cero sus volúmenes.

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta V_1} = \frac{\Delta m_2}{\Delta V_2} = \frac{\Delta m_3}{\Delta V_3} = \dots = \frac{\Delta m_n}{\Delta V_n} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta V_1} = \frac{\Delta p_2}{\Delta V_2} = \frac{\Delta p_3}{\Delta V_3} = \dots = \frac{\Delta p_n}{\Delta V_n} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{dp}{dV}$$

Pero si el material no es homogéneo, como la atmósfera, cuya masa media se reduce con la altura, masa media y peso medio variarán de un elemento a otro.

Los límites macroscópicos de estas sucesiones, en el caso de que existan, definen medidas de cantidades de otras magnitudes,

densidad y peso específico en este caso, que no dependen de la cantidad de sustancia considerada, al ser funciones de punto y del tiempo. Dichas magnitudes se denominan **intensivas**.

Son magnitudes intensivas todas las propiedades que se conocen como específicas, así como la presión, la temperatura, la velocidad del sonido en el medio...

Las magnitudes intensivas se definen sin descender a las escalas microscópica o atómica.

Por ejemplo, al considerar una suspensión en agua de partículas esféricas muy pequeñas de un material sólido de densidad  $1,7 \text{ gr/cm}^3$ , a escala macroscópica se puede definir en cada punto P y en el instante inicial  $t = 0$ , una densidad media constante,

$$\rho = \frac{m_s + m_a}{V_s + V_a}$$

Descendiendo a la escala microscópica, el valor de la densidad será  $1,7 \text{ gr/cm}^3$  si el punto es interior a una partícula,  $1 \text{ gr/cm}^3$  si el punto está rodeado de agua y  $1,35$  si el punto está sobre la superficie de una esferita; a escala atómica, el valor de la densidad será diferente distinguiendo si el punto es interior a un núcleo atómico o está situado en los espacios interatómicos. Además, conocida la granulometría y admitiendo una velocidad constante de caída para cada tamaño proporcionada por la ley de Stokes, se podría también conocer la densidad en función de la profundidad en un instante cualquiera  $t$ .

#### **1.4. Conceptos de homogeneidad e isotropía.**

Se dice que un medio material es *homogéneo* respecto de una propiedad cuando esta presenta el mismo valor en todos sus puntos para cada instante de tiempo. En caso contrario el medio material se

denomina *heterogéneo*.

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho(t)$$

Si además el valor de la propiedad no depende del tiempo, se dice que la homogeneidad es permanente, estacionaria o acrónica.

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) = cte$$

Cuando el medio es homogéneo para todas las propiedades establecidas en una teoría física se le llamará absoluta o completamente homogéneo.

Un estrato de arcilla, por ejemplo, es un medio heterogéneo respecto de la densidad pues, normalmente, esta aumenta con la profundidad. Sin embargo, una presa de materiales sueltos no debe considerarse como un material heterogéneo sino, más propiamente, como yuxtaposición de medios materiales homogéneos (núcleo, capas de filtro, espaldones, etc.).

Un medio material es *isótropo* respecto de una propiedad cuando ésta toma el mismo valor en todas la direcciones que parten de un punto, en cada instante de tiempo. En caso contrario se denomina *anisótropo*.

Cuando además la propiedad no depende del tiempo, se denomina isotropía permanente, estacionaria o acrónica.

Por ejemplo, un cuerpo cristalino no conduce al calor por igual en todas las direcciones, dependiendo el fenómeno de la morfología de su estructura cristalográfica. En consecuencia, para esta propiedad y considerando un punto, el material es anisótropo; considerando el conjunto de todas las direcciones, el material es homogéneo pues los valores son los mismos en cada punto para la misma dirección.

Es de destacar que los conceptos de homogeneidad y

heterogeneidad se establecen con referencia a los puntos del medio material, mientras que los de isotropía y anisotropía hacen referencia a las direcciones del espacio que parten de un punto.

### 1.5. Modelo matemático: el medio continuo.

La Mecánica del Continuo, idealiza el material mediante un modelo matemático basado en la hipótesis fundamental que establece la continuidad de la materia a escala macroscópica, ignorando explícitamente su estructura microscópica, y que además, postula la continuidad y diferenciabilidad hasta el orden necesario de las funciones que expresan la variación espacial y temporal de las propiedades del material.

Se trata de un modelo matemático basado en conceptos diferenciales.

Como se ha comentado anteriormente, al considerar una sucesión de elementos de volumen decreciente en torno al punto P, las sucesiones de valores de masa media y peso medio, si el medio es homogéneo, tendrán valores constantes, e iguales a su valor límite cuando el volumen tiende a cero. Pero si el material no es homogéneo, los valores de las sucesiones variarán de un elemento a otro. La idealización propuesta implica que dichas propiedades medias *varíen con continuidad* al reducirse el tamaño de los cubos, admitiendo la existencia en cada punto de una *masa específica*,  $\rho$ , y de un *peso específico*,  $\gamma$ , locales, definidos como

$$\rho(P, t) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} = \frac{dm}{dV}$$

$$\gamma(P, t) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta p_i}{\Delta V_i} = \frac{dp}{dV}$$

En consecuencia, los límites anteriores existen por hipótesis, al igual que las derivadas respecto a cualquier variable, espacial o temporal, del orden necesario para el desarrollo de la teoría.

Lo expuesto es aplicable a otras magnitudes extensivas, por ejemplo la cantidad de calor contenida, que se considerarán funciones continuas y derivables de los puntos del espacio.

Igualmente se considera la variación con el tiempo de tales propiedades. Se supone, por ejemplo, que se está calentando una pieza metálica, y se controla la temperatura  $T$  en un punto fijo. A un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , corresponderá una variación de temperatura  $\Delta T$ . A partir de un instante determinado, por ejemplo, exactamente una hora después de haber empezado a calentarse, se consideran intervalos de tiempo cada vez más pequeños, determinando el valor medio  $\Delta T/\Delta t$ . Para que la pieza metálica pueda idealizarse como un medio continuo, es necesario que la razón  $\Delta T/\Delta t$  varíe con continuidad al reducirse el intervalo temporal, de modo que exista y sea finito el límite,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

En general se supone que todas las propiedades intensivas de un medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo, en cada punto del medio.

Desde el punto de vista de la descripción matemática del comportamiento del material esta hipótesis trae como consecuencia que variables de campo tales como densidad, tensión, deformación, etc. se expresan como funciones continuas y derivables de las variables referenciales (espacio-tiempo), permitiendo aprovechar todos los recursos del cálculo diferencial y del análisis tensorial.

Se puede utilizar por ejemplo el teorema del valor medio para

calcular el valor que cierta función  $f$  adquiere en un punto B, conociendo el valor de ella y de sus derivadas en otro punto A, y la posición relativa de B con respecto a A. Si A y B están muy próximos entre sí, se utilizará la fórmula de Taylor, despreciando las potencias de  $\Delta x_i$

$$f(B) = f(A) + \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_A \Delta x_i$$

## 2. Propiedades del medio material continuo

### 2.1. Propiedades mecánicas

#### Densidad y peso específico

Según se ha comentado en los apartados anteriores, la densidad y el peso específico, son magnitudes intensivas definidas en cada punto P del medio y en cada instante de tiempo según las siguientes expresiones,

$$\rho(P, t) = \frac{dm}{dV} \quad \gamma(P, t) = \frac{dp}{dV}$$

La 2ª ley de Newton permite relacionar ambas magnitudes mediante la expresión indicada, siendo  $g$  la aceleración de la gravedad, cuyo valor al nivel del mar es  $9,806 \text{ m/s}^2$ ,

$$\gamma = \rho g$$

El análisis dimensional es el siguiente,

$$|\rho| = ML^{-3} \quad |\gamma| = ML^{-2}T^{-2}$$

Se incluyen a continuación valores de peso específico a la temperatura indicada, y a presión atmosférica estándar (76 mm de Hg).

	T	$\gamma$ (Tn/m <sup>3</sup> )	
Aluminio	4 °	2,58	
Arcilla		2,00	2,20
Cobre	20 °	8,94	
Estaño	18 °	7,28	
Granito		2,50	3,00
Hierro	18 °	7,87	
Ladrillo		2,00	2,20
Maderas		0,60	1,20
Plomo	20 °	11,35	
Vidrio ordinario	20 °	2,40	2,80
Aceite crudo	20 °	0,85	0,93
Agua pura	4 °	1,00	
Agua marina (3,5% sal)	4 °	1,028	
Gasolina		0,66	0,69
Mercurio	10 °	13,57	
Aire	15 °	1,22	
Dióxido de carbono	15 °	1,89	

### Clasificación de las fuerzas

Las fuerzas presentes en el medio continuo admiten la siguiente triple clasificación.

**Fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto.** Las fuerzas de acción a distancia se ejercen entre dominios alejados unos de otros, mientras que las fuerzas de contacto necesitan el contacto entre dominios para ponerse de manifiesto. Por ejemplo, son fuerzas de acción a distancia las fuerzas gravitatorias y las fuerzas inerciales; las fuerzas de contacto entre sólidos constituyen un ejemplo de fuerzas de contacto.

**Fuerzas exteriores y fuerzas interiores.** Las fuerzas exteriores se ejercen desde el exterior del dominio sobre el propio dominio, mientras que las fuerzas interiores se ejercen entre subdominios en el interior del dominio.

### **Fuerzas de cuerpo o volumétricas y fuerzas de superficie.**

Las fuerzas de cuerpo se encuentran distribuidas de forma continua en todo el dominio, actuando sobre todas y cada una de sus partes. Las fuerzas de superficie se aplican distribuidas sobre superficies. Las fuerzas concentradas se conciben como un proceso de paso al límite.

Las fuerzas de acción a distancia son siempre fuerzas de cuerpo o volumétricas, mientras que las fuerzas de contacto son fuerzas de superficie.

### **Fuerza másica**

La Mecánica del Continuo admite las siguientes hipótesis sobre las fuerzas de acción a distancia:

- 1.- No existen las fuerzas de acción a distancia e interiores, ya que se supone que, en el caso de las fuerzas interiores, la componente de interacción de la fuerzas de contacto es muy superior a las fuerzas de acción a distancia.
- 2.- Existe una función vectorial  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_i, t)$ , tal que las fuerzas de acción a distancia exteriores ejercidas sobre un elemento  $dV$  en el entorno de un punto P, se pueden expresar mediante  $\mathbf{b}\rho dV$ .

La magnitud vectorial  $\mathbf{b}$  es una magnitud intensiva conocida como *fuerza másica*, es decir, fuerza por unidad de masa, y de acuerdo con la 2ª ley de Newton tiene dimensiones de aceleración.

La admisión de dichas hipótesis simplifica el estudio de numerosos problemas, pero no son admisibles en todos los casos, por ejemplo en el estudio de los medios imanados.

En ocasiones la función vectorial  $\mathbf{b}$  es la *fuerza volúmica*, es decir fuerza por unidad de volumen, expresándose entonces las

fuerzas de acción a distancia mediante la expresión  $\mathbf{b}dV$ .

La fuerza de cuerpo más importante es el peso del material, y su correspondiente propiedad intensiva o fuerza másica es  $\mathbf{b} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad y  $\hat{\mathbf{e}}_3$  el versor en la dirección vertical, dirigido hacia arriba. No debe confundirse esta fuerza másica con el peso específico que es la fuerza volúmica ( $\mathbf{b} = -\rho g\hat{\mathbf{e}}_3$ ).

Otra fuerza de cuerpo importante es la fuerza centrífuga que aparece cuando el medio se somete a rotación.

### Principio de tensión de Cauchy. El vector tensión.

El principio de tensión de Cauchy establece hipótesis sobre las fuerzas de contacto.

Se considera un dominio  $D$  limitado por una superficie cerrada  $S$ , siendo  $D'$  el dominio exterior a  $D$ , como se representa en la figura 3.

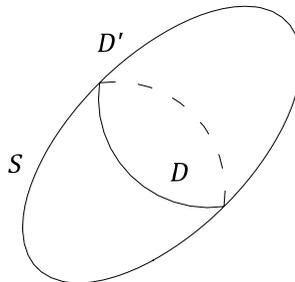


Figura 3

$D$  y  $D'$  interactúan mediante las fuerzas de acción a distancia y las fuerzas de contacto a través de la superficie  $S$ .

Se considera un punto  $P$  de la superficie  $S$ , y un elemento de superficie  $\Delta S$  en torno al punto  $P$ . Las fuerzas de superficie actuantes en  $\Delta S$  se reducen, tomando  $P$  como centro de reducción, a una fuerza resultante  $\Delta \mathbf{F}$  y a un momento resultante  $\Delta \mathbf{M}_P$ .

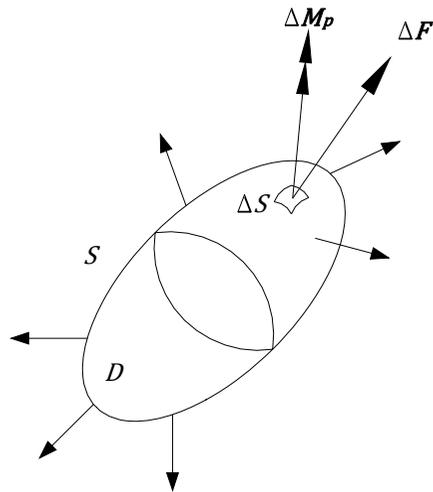


Figura 4

El Principio de tensión de Cauchy establece las siguientes hipótesis:

- 1.- Cualquiera que sea el modo en el que  $\Delta S \rightarrow 0$ , conteniendo siempre al punto P, existen los límites indicados:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_P}{\Delta S}$$

- 2.- El valor de los límites es el siguiente:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \mathbf{t} \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_P}{\Delta S} = \mathbf{0}$$

Adoptar el valor  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \mathbf{t}$ , supone establecer en el punto P una correspondencia biunívoca entre el versor  $\hat{\mathbf{n}}$  de la dirección normal a la superficie S, y el vector  $\mathbf{t}$ , conocido como *vector tensión en el punto asociado a la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$* .

A cada una de las infinitas direcciones que parten del punto, se le asocia un vector tensión. El vector tensión asociado a una dirección, depende solamente de la dirección  $\hat{\mathbf{n}}$ , y no de la forma de la superficie S.

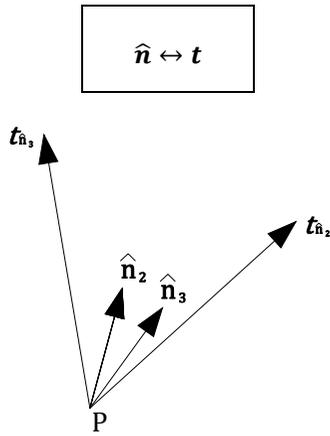


Figura 5

Con frecuencia se habla de vector tensión asociado a un plano, para referirse al vector tensión asociado a la dirección perpendicular al plano.

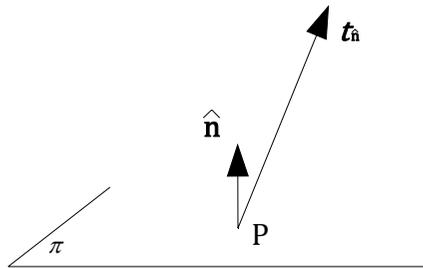


Figura 6

El carácter de resultante de las fuerzas de superficie de  $\Delta F$ , permite concluir que los vectores tensión asociados a las caras frontal y dorsal de la superficie  $\pi$  en  $P$  son vectores opuestos, como se representa en la figura 7.

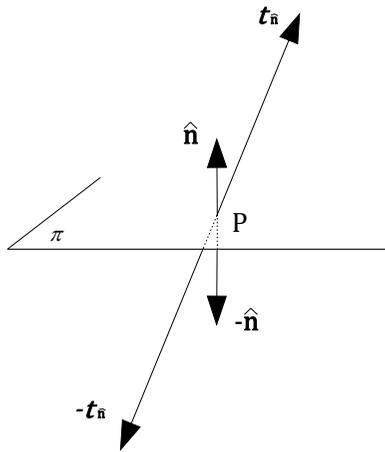


Figura 7

El carácter vectorial de  $t$ , permite su descomposición vectorial según la dirección  $\hat{n}$  y según el plano perpendicular a  $\hat{n}$ , dando lugar a las componentes intrínsecas de  $t$ , componente normal  $\sigma$ , y componente tangencial  $\tau$ , según se representa en la figura 8.

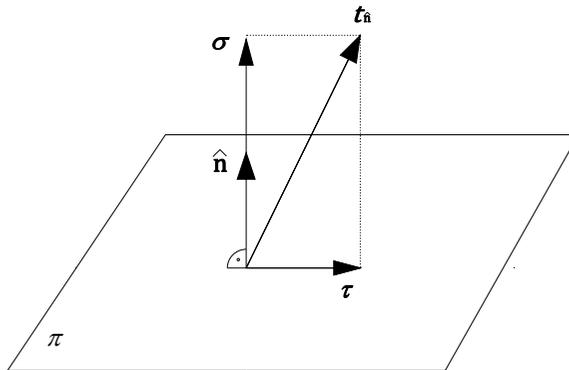


Figura 8

El conjunto de los vectores tensión asociados a las infinitas direcciones que pasan por el punto P, se denomina *estado tensional* en P.

Adoptar el valor  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M_P}{\Delta S} = \mathbf{0}$  es una hipótesis razonable, pues en el elemento  $\Delta S$  las fuerzas de superficie se compensarán respecto al punto P. Otros modelos de tensión, como el modelo de Coserat, trabajan con el *vector par-tensión*  $\mathbf{m} = \frac{dM_P}{dS}$ .

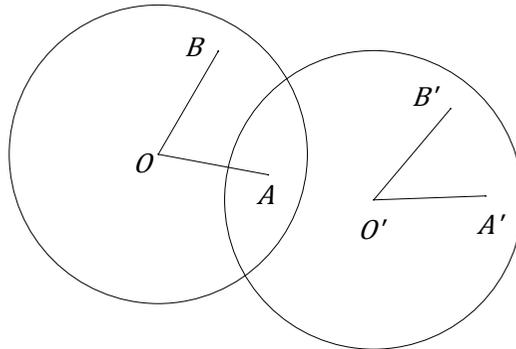
## Deformaciones

En Mecánica del sólido rígido cuando sobre un cuerpo actúan solicitaciones, se analiza la posibilidad de que se produzca movimiento, determinando las características del mismo; la Mecánica del Medio Continuo por el contrario, se ocupa fundamentalmente de las deformaciones que sufre el cuerpo, tanto desde el punto de vista de la variación de las formas exteriores, como de la propia deformación interior, consistente en el desplazamiento relativo de las partículas materiales.

Las deformaciones pueden ser momentáneas o permanentes, según que desaparezcan o no cuando cesa la causa que las ocasiona. También pueden ser deformaciones que alcanzan, en un tiempo más o menos breve, una configuración definitiva, como ocurre en los sólidos elásticos, o bien que nunca llegan a un estado final debido a que la deformación continúa permanentemente, como en las fluencias de los sólidos viscoelásticos o de los fluidos.

Para analizar de forma rigurosa la deformación que se origina en el interior del medio material, se considera su descomposición en *deformación longitudinal* y *deformación angular*. Sean tres puntos O, A, B en el interior del medio material y muy próximos entre sí, de tal forma que pueda admitirse que los segmentos rectilíneos OA y OB, permanecen rectilíneos después de la deformación. El sistema de tres puntos se habrá deformado si al menos, una de las distancias

OA, OB, o el ángulo AOB ha variado. Se dice por tanto que ha habido deformación en el entorno de un punto O de un medio material continuo, cuando al menos un segmento infinitesimal que parte del punto O ha experimentado variaciones de longitud o ha variado su ángulo respecto de una dirección.



**Figura 9**

Se denomina *partícula* a un pequeño elemento de volumen considerado en un medio material. Se llama *configuración*, a la identificación de las partículas del medio con los puntos del espacio geométrico en un instante  $t$ .

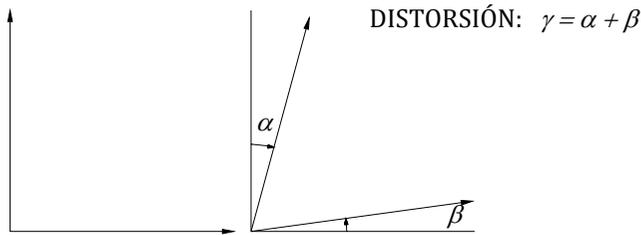
Se dice que ha habido un *proceso de deformación* cuando el medio ha experimentado un cambio de configuración entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , pasando de la configuración inicial o configuración no deformada en el instante  $t_1$ , a la configuración final o configuración deformada en el instante  $t_2$ .

En un proceso de deformación, se define la *elongación* de un elemento lineal  $OA$ ,  $E_{OA}$ , como el aumento unitario de longitud experimentado por el mismo. La elongación será siempre superior a -1.

$$E_{OA} = \frac{O'A' - OA}{OA} \geq -1$$

Se denomina  $E_{x_1}$ ,  $E_{x_2}$  y  $E_{x_3}$  a los valores de la elongación de elementos lineales inicialmente paralelos a los ejes coordenados.

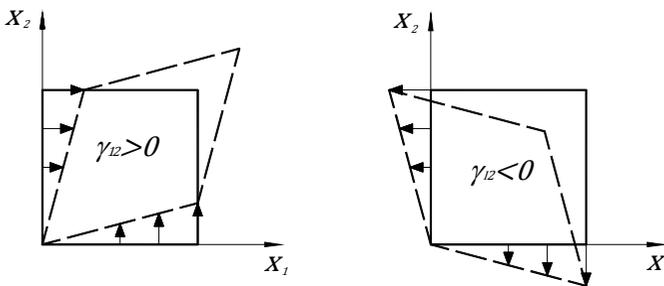
En un proceso de deformación se define como *distorsión angular* en un plano, a la variación experimentada por el ángulo inicialmente recto contenido en el plano.



**Figura 10**

La distorsión en planos paralelos a los planos coordenados se denomina  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  y  $\gamma_{23}$ .

La distorsión se considera positiva si el ángulo inicialmente recto disminuye, y negativa si aumenta, como se indica en la figura 11.



**Figura 11**

El valor de la distorsión variará entre los siguientes límites,

$$-\frac{3\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

## Desplazamiento

En un proceso de deformación, se define el vector desplazamiento en un punto P,  $\mathbf{u}_P$ , como el vector que une las posiciones inicial y final de dicho punto.

El conjunto de los vectores desplazamiento constituye el campo vectorial de desplazamientos,  $\mathbf{u}$ .

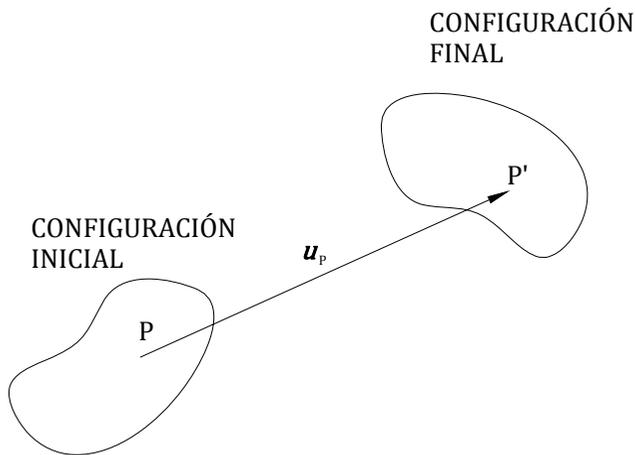


Figura 12

Se consideran las referencias vectoriales  $\{O, \hat{I}_K\}$  y  $\{O', \hat{e}_i\}$  para el estudio de las configuraciones inicial y final, siendo  $\mathbf{b} = \overline{OO'}$ , y denominando  $\mathbf{X} = X_K \hat{I}_K$  y  $\mathbf{x} = x_i \hat{e}_i$  a los vectores de posición en ambas configuraciones, como se representa en la figura 13.

Se denominan  $\alpha_{iK}$  a las componentes vectoriales de  $\hat{e}_i$  en  $\{O, \hat{I}_K\}$ , y  $\alpha_{Ki}$  a las componentes vectoriales de  $\hat{I}_K$  en  $\{O', \hat{e}_i\}$ .

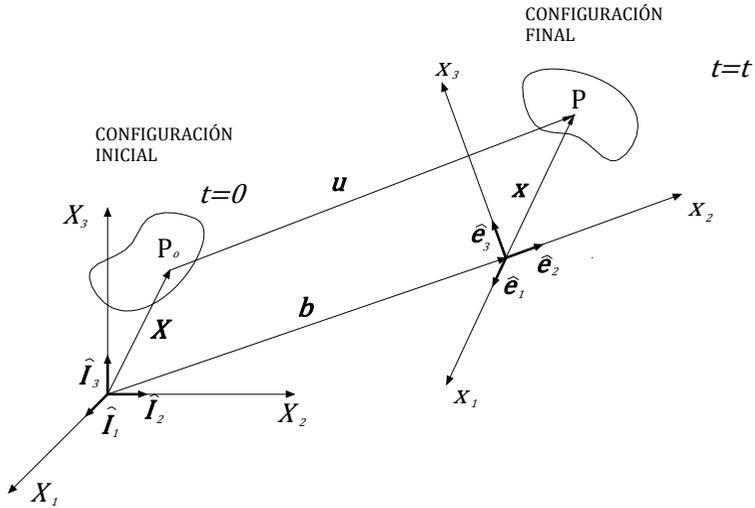


Figura 13

Las condiciones de ortonormalidad de ambas referencias vectoriales se expresan,

$$\begin{aligned}\hat{I}_K \cdot \hat{I}_M &= \alpha_{Ki} \alpha_{Mi} = \delta_{KM} \\ \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j &= \alpha_{iK} \alpha_{jK} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

El esquema vectorial de la figura 13 permite expresar,

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

Suponiendo la coincidencia del origen de ambos sistemas de referencia,  $O = O'$ , es decir  $\mathbf{b} = 0$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}: \begin{cases} u_k = x_i \alpha_{iK} - X_K \\ u_i = x_i - X_K \alpha_{Ki} \end{cases}$$

En el caso de ser los sistemas  $\{O, \hat{I}_K\}$  y  $\{O', \hat{e}_i\}$  superpuestos,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow u_i = x_i - X_i$$

### Ejercicio

En la figura 14 se indican las configuraciones inicial y final del proceso de deformación experimentado por el cubo de vértices  $ABCDEFGH$ .

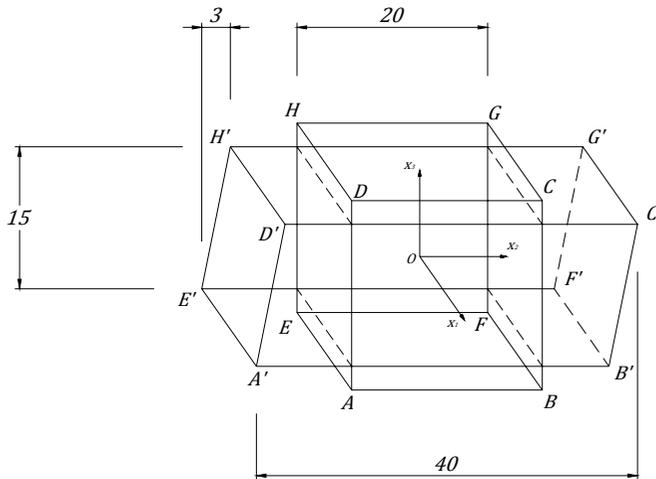


Figura 14

Determinar:

1.- Elongación experimentada por las aristas  $AB$ ,  $AD$ ,  $AE$  ( $E_{AB}$ ,  $E_{AD}$ ,  $E_{AE}$ ).

$$E_{AB} = \frac{37 - 20}{20} = 0,85 \quad E_{AD} = \frac{15,30 - 20}{20} = -0,235 \quad E_{AE} = 0$$

2.- Elongación experimentada por las diagonales  $AG$ ,  $FD$  ( $E_{AG}$ ,  $E_{FD}$ ).

$$E_{AG} = \frac{47,17 - 34,64}{34,64} = 0,36 \quad E_{FD} = \frac{42,20 - 34,64}{34,64} = 0,22$$

3.- Distorsión en los planos  $ABCD$ ,  $ADHE$ ,  $ABFE$  ( $\gamma_{ABCD}$ ,  $\gamma_{ADHE}$  y  $\gamma_{ABFE}$ ).

$$\gamma_{ABCD} = \arctag\left(\frac{3}{15}\right) = 0,197 \text{ rad} \quad \gamma_{ADHE} = 0 \quad \gamma_{ABFE} = 0$$

4.- Elongación en el punto  $O$ , según las direcciones coordenadas ( $E_{x_1}$ ,  $E_{x_2}$  y  $E_{x_3}$ ).

$$E_{x_1} = 0 \quad E_{x_2} = 0,85 \quad E_{x_3} = -0,235$$

5.- Distorsión en el punto  $O$  según los planos coordenados ( $\gamma_{x_1x_2}$ ,  $\gamma_{x_1x_3}$  y  $\gamma_{x_2x_3}$ ).

$$\gamma_{x_1x_2} = 0 \quad \gamma_{x_1x_3} = 0 \quad \gamma_{x_2x_3} = 0,197 \text{ rad}$$

6.- Deformación volumétrica ( $e$ ).

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = 0,387$$

7.- Descomponer el proceso de deformación, en suma de *deformación isotrópica* (cambio de volumen sin cambiar la forma) más *deformación desviadora* (cambia la forma sin cambiar el volumen), dibujando las configuraciones de la descomposición.

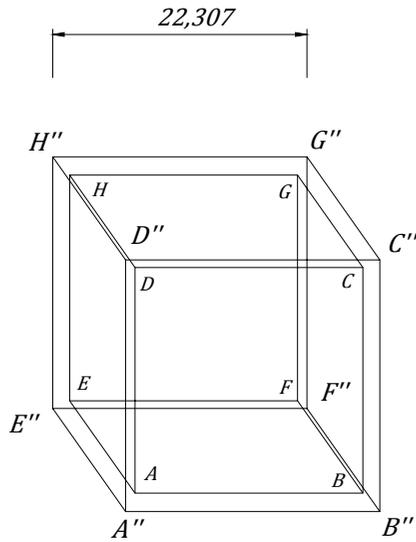


Figura 15. Deformación isotrópica: cambia el volumen sin cambiar la forma.

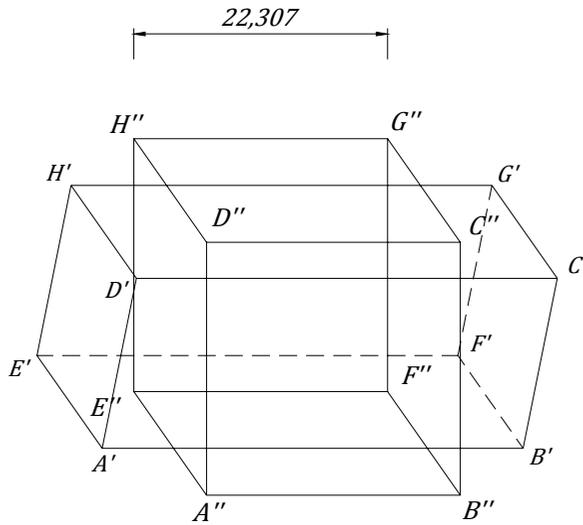


Figura 16. Deformación desviadora: cambia la forma sin cambiar el volumen.

8.- Determinar la expresión matemática del campo vectorial de desplazamientos

$$\mathbf{u}: \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0,85x_2 + 0,15x_3 \\ u_3 = -0,25x_3 \end{cases}$$

### **Relación entre esfuerzos y deformaciones**

Se llega aquí al problema fundamental de la mecánica de los medios deformables: predecir las deformaciones que aparecerán en el cuerpo como resultado de un estado de esfuerzos, o bien los esfuerzos a que estará sometido el mismo como consecuencia de un cierto estado de deformaciones.

En general, los datos del problema serán el medio y las sollicitaciones exteriores, y su resolución consistirá en obtener los esfuerzos internos y las deformaciones que se producen. Sin embargo, el comportamiento de los materiales es tan variado, no sólo comparando un material con otro, sino para el mismo material con distintos niveles de esfuerzos, que no es posible encontrar una solución única al problema.

Por tanto, será necesario hacer intervenir las características específicas de cada medio a través de las llamadas *ecuaciones constitutivas*. Dichas ecuaciones son aquéllas que expresan macroscópicamente sus propiedades físicas, y su nombre se debe al hecho de que describen un comportamiento resultante de la constitución interna del material.

Por otro lado, el comportamiento de los materiales es tan complejo que sintetizarlo en ecuaciones siempre conlleva simplificaciones y, en consecuencia, ocasiona la sustitución del

material real por un modelo más o menos idealizado. El éxito de una ecuación constitutiva depende del grado de aproximación con el que representa el comportamiento real. De gran ayuda para la visualización de los materiales idealizados son algunas analogías, que reproducen su comportamiento mediante esquemas mecánicos simples.

## 2.2. Propiedades térmicas

### Dilatación térmica

Experimentalmente se comprueba que, salvo contadas excepciones, los materiales se dilatan cuando se calientan y se contraen cuando se enfrían. Se trata de una deformación isotrópica  $\varepsilon$ , que para pequeñas variaciones de la temperatura  $T$ , puede admitirse proporcional a dicha variación. En forma diferencial dicha ley se expresa como se indica en la siguiente expresión, siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación lineal.

$$d\varepsilon = \alpha \cdot dT$$

Cuando se superponen varios efectos, se considera con generalidad válido el principio de superposición. Así, cuando en un medio elástico (módulo de elasticidad  $E$ ) aparece una dilatación térmica acompañada de una tensión mecánica isotropa  $\sigma$ , la deformación elemental total resultante vendrá dada por,

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \alpha \cdot dT$$

Para el caso de fluidos, y puesto que la presión no es más que una tensión isotrópica negativa, la ecuación anterior nos permite calcular la *deformación volumétrica* o aumento unitario de volumen, siendo  $K$  el módulo volumétrico y tomando  $p > 0$ .

$$e = \frac{dV}{V} = 3d\varepsilon = 3 \frac{d\sigma}{E} + 3\alpha dT = -\frac{dp}{K} + 3\alpha dT$$

### Conductividad térmica

Si en un dominio material la temperatura no es uniforme, se produce un flujo de calor de la región de mayor temperatura a la región de menor temperatura, hasta que las temperaturas se igualan.

El flujo de calor puede producirse por conducción, por convección o por radiación.

En el flujo por conducción, la energía calorífica es transportada individualmente por las moléculas, pasando de las moléculas de mayor energía cinética (mayor temperatura) a las de menor energía cinética (menor temperatura), sin que se produzca transferencia de masa.

El fenómeno de la conducción de calor, responde con bastante exactitud a la *ley de Fourier*, según la cual, la cantidad de calor por unidad de tiempo que atraviesa un elemento de superficie es proporcional a su área y al gradiente de temperatura según la normal. La ecuación fundamental de la conducción es, en consecuencia,

$$d\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) = -k \cdot dS \cdot \frac{\partial T}{\partial \hat{n}}$$

siendo  $k$  el coeficiente de conductividad térmica del medio material. El signo negativo se debe a que el calor fluye en el sentido de las temperaturas decrecientes.

Se puede expresar en forma intensiva, para materiales homogéneos e isótropos, mediante la magnitud vectorial  $\mathbf{q}$ , *flujo vectorial de calor*:

$$\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T$$

Se denomina *flujo de calor*, a la magnitud escalar que indica la cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo y por unidad de

superficie perpendicular a la dirección de propagación.

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -k \cdot \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} = -k \frac{\partial T}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \frac{d}{dS} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

### Capacidad térmica y calor específico

La capacidad térmica o calorífica de un sistema es la cantidad de calor  $\partial Q$  que hay que suministrar al sistema para que aumente su temperatura  $\partial T$ , manteniendo constante el valor de los parámetros macroscópicos (volumen y presión).

Su valor depende en consecuencia de las condiciones en las que se realiza la medida, utilizándose habitualmente la capacidad térmica a volumen constante  $C_v$ , y la capacidad térmica a presión constante  $C_p$ .

$$C_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v \quad C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$$

Se trata de una magnitud extensiva pues depende de la cantidad de materia considerada.

La propiedad intensiva correspondiente es el *calor específico*, o cantidad de calor absorbida o cedida al sistema, por unidad de masa y unidad de variación de temperatura.

### 2.3. Propiedades eléctricas y magnéticas

Aunque en la presente publicación no se consideran acciones electromagnéticas, conviene no olvidar que existen medios materiales conductores de la electricidad y caracterizados por poseer electrones libres. Estos electrones, al ponerse en movimiento bien por la acción de un campo eléctrico, o bien por el propio flujo del material que los contiene, en el caso de fluidos conductores, generan corrientes eléctricas.

Cuando una partícula de carga  $q$  se mueve con velocidad  $v$ , en una región donde coexisten un campo eléctrico  $E$  y un campo magnético  $B$ , se halla sometida a una fuerza total, conocida como Fuerza de Lorentz,

$$F = q(E + v \wedge B)$$

En consecuencia, cuando el medio continuo conductor se mueve en presencia de un campo electromagnético, su movimiento quedará afectado por éste y se tendrán que considerar simultáneamente sus características mecánicas, térmicas y electromagnéticas (resistividad y permeabilidad magnética).

Estas acciones electromagnéticas son particularmente importantes en el estudio de corrientes de plasmas (gases totalmente ionizados) como son los vapores sobrecalentados, el aire ionizado por ondas de choque o los gases a elevadísimas temperaturas confinados magnéticamente de los reactores experimentales de fusión.

### **3. Modelos de comportamiento**

La Mecánica del Continuo desarrolla tres idealizaciones básicas del comportamiento tenso-deformacional del medio material, conocidas como respuesta elástica, viscosa y plástica. El comportamiento de los materiales empleados en la ingeniería se simula mediante la combinación de dichos modelos básicos. De esta forma se pueden distinguir los materiales elastoplásticos, incluyendo un grupo importante de metales estructurales; y los materiales viscoelásticos, como plásticos, caucho, vidrio, hormigón y otros cuerpos amorfos. Se consideran como materiales elásticos ciertos cristales iónicos y covalentes.

### 3.1. Respuesta elástica

Se conoce como *elasticidad* la propiedad que presentan la mayoría de los materiales estructurales mediante la cual, recuperan su forma inicial al cesar las causas, mecánicas o térmicas, que originaron su deformación.

Experimentalmente se comprueba que las deformaciones en un punto cualquiera de un cuerpo elástico, por efecto de una sollicitación exterior que crece lenta y gradualmente, aumentan hasta cierto límite de forma proporcional al valor de la sollicitación. Los materiales que cumplen esta propiedad se dice que presentan un comportamiento elástico lineal, y se les llama materiales hookeanos, por quedar recogido el hecho en el famoso postulado de Hooke (1678), ***Ut tensio sic vis***, que significa *Tal como la extensión así es la fuerza*, es decir, la deformación crece con la fuerza deformadora.

No existe ningún material que reaccione elásticamente ante cualquier sollicitación y prácticamente todos los materiales, sólidos o fluidos, se comportan elásticamente siempre que las sollicitaciones sean suficientemente pequeñas.

El factor de proporcionalidad que relaciona esfuerzos y deformaciones depende de la naturaleza del material, de la temperatura y de la presión, y de la clase de esfuerzo que lo sollicita, lo que conlleva la definición de varios módulos elásticos, que para los materiales sólidos suelen considerarse constantes.

#### **Módulo de Young ( $E$ )**

Establece la proporcionalidad entre la tensión normal y la deformación longitudinal, en ensayos de tracción o compresión simple:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon$$

### **Módulo elástico volumétrico ( $K$ )**

Cuando la sollicitación consiste en una presión hidrostática, la relación entre ésta y la deformación volumétrica define el módulo elástico volumétrico:

$$K = \frac{p}{e} > 0$$

y, en términos de tensión:

$$d\sigma = K \frac{dV}{V} = 3Kd\varepsilon$$

### **Módulo de rigidez ( $G$ )**

Establece la proporcionalidad entre tensiones tangenciales y deformaciones angulares:

$$d\tau = G \cdot d\gamma$$

### **Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )**

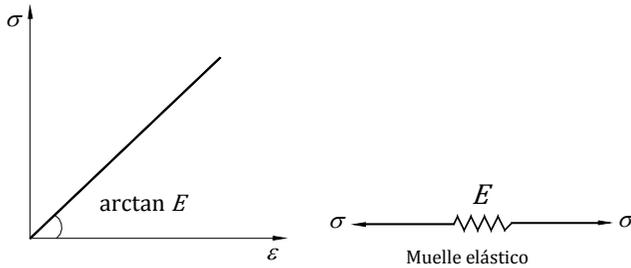
Establece la proporcionalidad inversa entre la deformación longitudinal y las deformaciones transversales en el ensayo de tracción simple:

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_l$$

Las cuatro constantes elásticas introducidas están relacionadas, siendo solamente dos independientes:

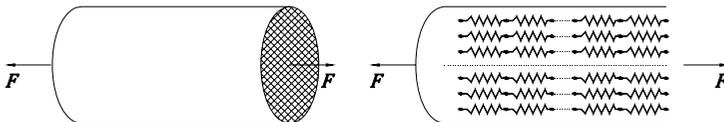
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}$$

La curva tensión-deformación del cuerpo elástico es una recta de pendiente igual a  $E$ , como se indica en la figura 17, siendo el modelo analógico que lo representa el muelle elástico, cuyo alargamiento es proporcional al esfuerzo que se le aplica, y que recupera la longitud inicial cuando cesa su aplicación.



**Figura 17**

A continuación se muestra un ejemplo en el que se pasa del enfoque microscópico al macroscópico. Para ello, se considera una barra de material elástico sometida a tracción. La figura 18 (izquierda) muestra el enfoque macroscópico, donde la barra es considerada como un continuo, mientras que la figura 18 (derecha) representa el enfoque microscópico, donde se supone que la barra está formada por partículas que forman cadenas longitudinales e interaccionan entre sí mediante fuerzas proporcionales a la distancia que las separa. Estas fuerzas son modeladas mediante resortes de rigidez  $K$ .



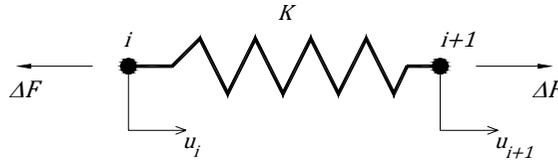
**Figura 18**

Se resuelve el problema mediante los dos enfoques:

*Enfoque microscópico*

Sobre cada una de las cadenas longitudinales de partículas actuará una fracción muy pequeña de la fuerza aplicada. Además, como dicha fuerza actúa sobre cada eslabón de la cadena, se puede simplificar el problema centrándose en dos partículas vecinas, como

se observa en la figura 19.



**Figura 19**

Así, se obtiene la relación:

$$\Delta F = K(u_{i+1} - u_i)$$

donde  $u$  representa a los desplazamientos de las dos partículas consideradas.

### *Enfoque macroscópico*

A nivel macroscópico, dado que no se pueden distinguir las partículas ni se puede determinar la distancia que las separa, se considera que cada partícula se corresponde con el punto del espacio que ocupa. Así, se realiza un paso al límite mediante el cual la distancia entre partículas se identifica con una distancia infinitesimal  $\Delta x$ . Por tanto, la ecuación anterior se convierte en:

$$\Delta F = K[u(x + \Delta x) - u(x)]$$

Es decir, se ha obviado la naturaleza discontinua de la materia y a partir de ahora se considera como un continuo, donde son aplicables todos los recursos matemáticos del análisis de funciones continuas. Así, multiplicando y dividiendo por  $\Delta x$  el término de la derecha de la igualdad anterior, se tiene:

$$\Delta F = K\Delta x \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \Rightarrow dF = Kdx \frac{du}{dx}$$

Debido a que es difícil estimar la fuerza infinitesimal que actúa sobre cada cadena de partículas, es mejor referirse a la fuerza

aplicada sobre un elemento infinitesimal de superficie  $dS$ . Esto es:

$$\frac{dF}{dS} = K \frac{dx}{dS} \frac{du}{dx}$$

El término de la izquierda de la igualdad tiene dimensiones de fuerza por unidad de área, esto es: una tensión  $\sigma$ . El término  $\frac{du}{dx}$  se puede interpretar como un incremento de longitud por unidad de longitud, esto es: una deformación longitudinal unitaria  $\varepsilon$ . Finalmente, el término  $K \frac{dx}{dS}$  es el módulo de Young  $E$ .

Incluyendo todo estos cambios en la ecuación anterior, se obtiene la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

**Cuestión.** El módulo volumétrico del agua a 20° C y a la presión atmosférica es  $K = 2,25 \times 10^4 \text{kp/cm}^2$ . ¿Cuánto disminuye el volumen de 1 litro de agua si la presión aumenta de 1 a 10 atmósferas? (1 atm.=1,033 kp/cm<sup>2</sup>).

$$K = \frac{\Delta p}{e} \Rightarrow e = \frac{\Delta p}{K} = \frac{(10,33 - 1,033)\text{kp/cm}^2}{2,25 \times 10^4 \text{kp/cm}^2} = 0,000413$$

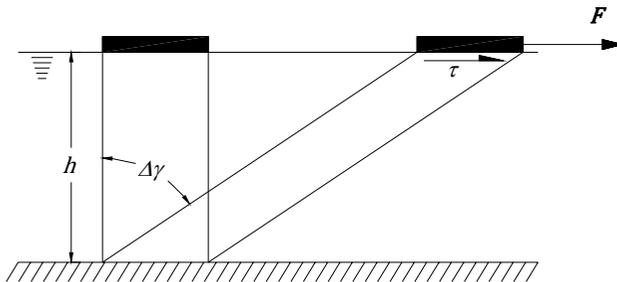
$$\Delta V = eV = 0,413 \text{cm}^3$$

### 3.2. Respuesta viscosa

Cuando a un fluido se le aplica un esfuerzo tangencial, la deformación no se estabiliza, como ocurre generalmente en los sólidos, sino que progresa indefinidamente. La deformación angular alcanzada no depende sólo de la magnitud de la tensión aplicada, sino también del tiempo durante el cual actúa el esfuerzo.

Se considera el flujo laminar de un líquido originado por el movimiento de una tabla, como se indica en la figura 20, sobre la que

actúa una fuerza  $F$ . La capa líquida en contacto con la tabla se mueve con la propia velocidad de la tabla, mientras que la capa en contacto con el fondo, quedará inmóvil. La distorsión  $\gamma$  aumentará constantemente bajo la acción de la tensión tangencial  $\tau = F/S$ , siendo  $S$  el área de la base de la tabla. La velocidad de la tabla y del fluido en contacto con ella no depende solo de la fuerza aplicada  $F$ , elemento pasivo, sino también de la naturaleza del fluido interpuesto, cuyas moléculas transmiten el efecto resistente del fondo hasta arriba. La profundidad  $h$  es, para un mismo fluido y una misma fuerza  $F$ , decisiva puesto que si es pequeña la resistencia de la pared tendrá un efecto muy sensible sobre la tabla, que no aparece cuando  $h$  es grande.

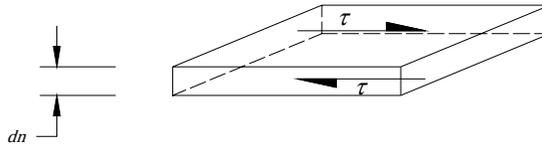


**Figura 20**

El plano líquido en contacto con la tabla, se desliza respecto al fondo arrastrando consigo capas paralelas de líquido cuyas velocidades dependen de la distancia  $h$ .

En la figura 21 se considera una lámina de fluido de espesor  $dn$ ; las partículas superiores, a mayor velocidad, tienden a acelerar la lámina, mientras que las inferiores, que se desplazan a una velocidad menor, tienden a frenarla. Esto da origen a unas fuerzas de fricción sobre las capas tanto más importantes cuanto mayor sea la variación de la velocidad con la normal, es decir, cuanto más grande sea el

gradiente de velocidad perpendicular a los planos.



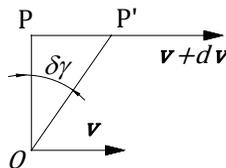
**Figura 21**

Newton expresó la relación entre la fuerza tangencial de fricción y el gradiente de velocidad según las siguientes expresiones equivalentes, siendo  $\eta$  la constante de proporcionalidad, conocida como coeficiente de viscosidad o simplemente viscosidad.

$$dF_t = \eta \cdot dS \cdot \frac{dv}{dn}$$

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dn}$$

La ley de Newton de la viscosidad puede expresarse haciendo intervenir la deformación angular  $\gamma$ . Se consideran dos partículas O, P, infinitamente próximas situadas sobre la normal a las capas fluidas en movimiento, tal como se indica en la figura 22,



**Figura 22**

El desplazamiento relativo de P respecto de O en un intervalo de tiempo  $dt$  será,

$$PP' = dv \cdot dt = dn \cdot \tan(d\gamma) = dn \cdot d\gamma$$

Se deduce,

$$\frac{dv}{dn} = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$$

La ecuación fundamental de la mecánica de los medios

viscosos newtonianos se expresa finalmente mediante la relación,

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

Esta ecuación, de estructura similar a las anteriores, relaciona la tensión cortante  $\tau$  con la velocidad o ritmo de cambio de la deformación angular  $\dot{\gamma}$ , provocada por aquélla. La velocidad de deformación angular es tanto más grande cuanto mayor es el esfuerzo distorsional. Al desaparecer el esfuerzo, el medio no vuelve a su posición original, como haría un cuerpo elástico, sino que permanece en la posición alcanzada.

El análisis dimensional de la viscosidad en la base {FLT} es

$$|\eta| = FL^{-2}T$$

La unidad en el sistema SI es el *pascal-segundo*, pero en mecánica de sólidos es muy utilizado el  $Kp \cdot s/cm^2$ .

En mecánica de fluidos generalmente se utiliza la *viscosidad cinemática*,

$$\eta_c = \frac{\eta}{\rho} \quad |\eta_c| = L^2T^{-1}$$

Por analogía,  $\eta$  suele llamarse *viscosidad dinámica*.

Como modelo analógico del medio viscoso se suele tomar un amortiguador sin inercia, como se indica en la figura 23, que se mueve con velocidad proporcional a la tensión que soporta. Para un determinado esfuerzo distorsional  $\tau_0$ , la evolución de la deformación con el tiempo, es una recta de pendiente igual a  $\tau_0/\eta$ .

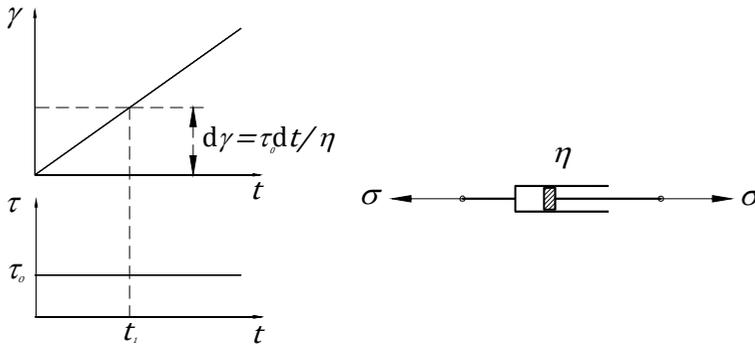


Figura 23

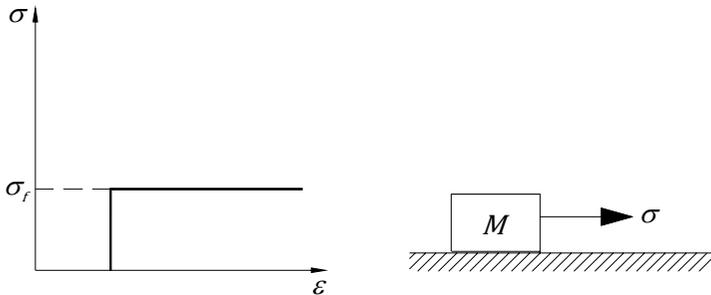
### 3.3. Respuesta plástica

El término *plástico* tiene su origen en el vocablo griego *πλασσειω* que significa *dar forma*, y se utiliza para referirse a materiales tales como metales dúctiles, arcilla..., que pueden moldearse, es decir, cuerpos que pueden cambiar su forma fácilmente mediante la aplicación de esfuerzos de intensidad suficiente, y conservar esta forma al retirar dicho esfuerzos.

Durante el proceso de moldeo, el cuerpo experimenta grandes deformaciones sin apenas variar su volumen, por lo que la deformación plástica es fundamentalmente *deformación distorsional*.

La respuesta plástica ideal se simula mediante el modelo esquematizado en la figura 24, consistente en una masa  $M$  que desliza sobre una superficie rugosa de coeficiente de rozamiento  $\mu$ . No se producirá el desplazamiento de la masa mientras el esfuerzo aplicado no supere el rozamiento de la superficie, momento en el cual la masa comenzará a deslizarse de forma indefinida, sin necesidad de incrementar el valor del esfuerzo. Se dice que cuando la sollicitación alcanza un determinado valor característico del material,

este comienza a fluir de forma indefinida.



**Figura 24**

El valor de  $\sigma$  que produce la fluencia del material se denomina *tensión de fluencia*  $\sigma_f$ .

### 3.4. Comportamiento viscoelástico

La mayor parte de los polímeros sintéticos (cloruro de polivinilo, polietileno...), y los productos bituminosos, presentan ante sollicitaciones exteriores, una deformación instantánea de características elásticas, y un comportamiento diferido en el tiempo, semejante al de un líquido viscoso.

De igual forma, también presentan diferentes características, los procesos de deformación instantánea y diferida del hormigón.

La necesidad de estudiar el comportamiento de estos materiales, originó el desarrollo de la viscoelasticidad, y de los modelos viscoelásticos, formados por combinaciones del resorte elástico y el cilindro amortiguador viscoso, representando respectivamente las componentes elástica y viscosa de la respuesta.

Se expone a continuación el análisis experimental del proceso de deformación del hormigón, así como los modelos viscoelásticos más utilizados.

## Proceso de deformación del hormigón

En la figura 25 se representa la evolución en el tiempo de la deformación del hormigón.

Si el hormigón es sometido a una carga noval instantánea  $\sigma_0$ , desarrolla una deformación instantánea  $OA$ , de la cual se recupera una parte  $O'A$ , deformación instantánea elástica, permaneciendo una deformación remanente  $OO'$ .

Si se aplica un nivel de tensión  $\sigma_1 < \sigma_0$ , mantenido entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , en el momento de aplicación de la carga aparece una deformación instantánea,  $BC$ , y comienza el desarrollo de la deformación diferida en el tiempo,  $CD$ , que alcanza su valor máximo en el instante  $t_2$ . La deformación total será por tanto,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_d$$

siendo para tensiones del orden de la de servicio,

$$\varepsilon_d = \varphi \varepsilon_0 \quad (\varphi: \text{coef. de fluencia})$$

En el momento en el que cesa la carga, se recupera totalmente la deformación instantánea,  $DE=BC$ , y comienza la recuperación progresiva de parte de la deformación diferida, de tal forma que en un instante genérico  $t > t_2$ , quedará una deformación permanente, que se estabiliza en el tiempo.

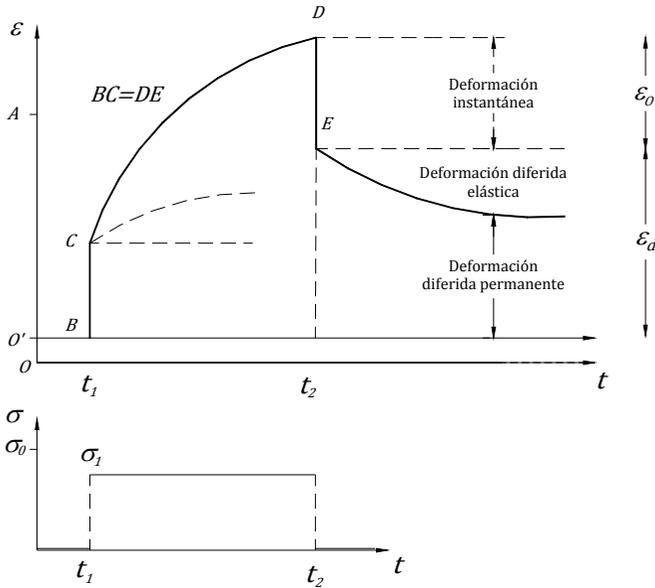


Figura 25

### Descripción de las funciones matemáticas

Antes de formular y desarrollar los modelos de comportamiento viscoelástico, se van a definir las herramientas matemáticas que se van a usar, así como algunas de sus propiedades.

#### *Función escalonada unitaria*

La *función escalonada unitaria*, también llamada función escalón de Heaviside, se define como:

$$U(t, t_1) = \begin{cases} 0 & : t < t_1 \\ 1 & : t \geq t_1 \end{cases}$$

En la figura 26 se representa:

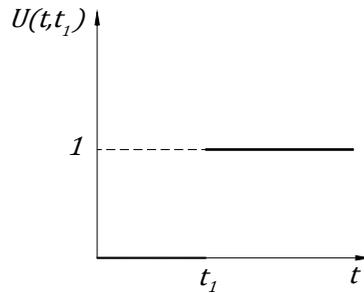


Figura 26

La derivada e integral de  $U(t, t_1)$  son, respectivamente:

$$\frac{\partial U(t, t_1)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & : t \neq t_1 \\ \infty & : t = t_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial U(t, t_1)}{\partial t} = \delta(t, t_1)$$

y

$$\int_{-\infty}^t f(t')U(t', t_1)dt' = U(t, t_1) \int_{t_1}^t f(t')dt'$$

donde  $\delta$  es la *función delta de Dirac*, que se estudiará a continuación.

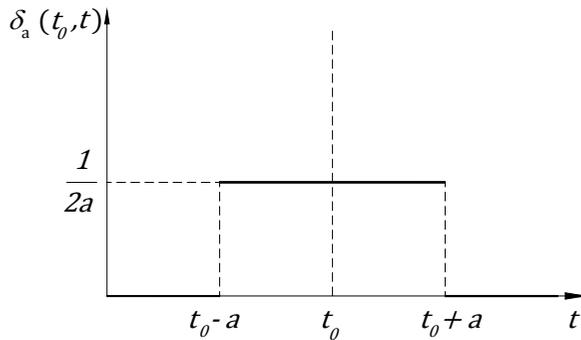
Se observa que en el caso de la derivada, la pendiente de la curva es 0 en todo el dominio, salvo en  $t_1$  donde es infinita.

#### *Funciones impulso unitario y delta de Dirac*

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza externa de gran magnitud, que solamente actúa durante un periodo muy corto de tiempo. Para conjugar el valor y la duración de estas fuerzas, se emplea el siguiente modelo matemático, conocido como *función impulso unitario*:

$$\delta_a(t_0, t) = \begin{cases} 0 & : t \leq t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & : t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0 & : t \geq t_0 + a \end{cases}$$

En la figura 27 se representa:



**Figura 27**

La propiedad que da nombre a la *función impulso unitario* es su integral en todo el dominio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t_0, t) dt = 1$$

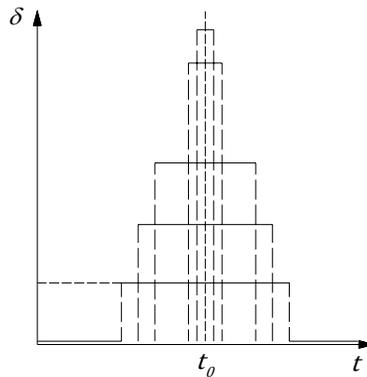
La *función delta de Dirac* se define como el límite de la función impulso unitario cuando  $a$  tiende a cero, esto es:

$$\delta(t_0, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t_0, t)$$

Así, se obtiene:

$$\delta(t_0, t) = \begin{cases} \infty & : t = t_0 \\ 0 & : t \neq t_0 \end{cases}$$

En la figura 28 se representa el proceso de paso al límite de la *función impulso unitario* a la *función delta de Dirac*:



**Figura 28**

Son propiedades de la *función delta de Dirac* las siguientes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0, t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t_0, t) dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^t f(t) \delta(t_0, t) dt = f(t_0) U(t, t_0)$$

### **Hipótesis de la viscoelasticidad lineal**

Como se ha visto, el comportamiento viscoelástico comparte las características de deformación de los materiales elásticos (ley de Hooke) y de los fluidos viscosos (ley de Newton).

Los materiales viscoelásticos para deformaciones muy bajas, casi cercanas al equilibrio, se comportan de forma lineal, mientras que para deformaciones mayores el comportamiento deja de ser lineal.

Las hipótesis fundamentales en las que se basa la *teoría de la viscosidad lineal* son:

- Linealidad entre tensiones y deformaciones instantáneas y

diferidas.

- Principio de superposición de Boltzmann:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1(t) \Rightarrow \varepsilon_1(t) \\ \sigma_2(t) \Rightarrow \varepsilon_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \Rightarrow \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

El comportamiento lineal viscoso se presenta, por ejemplo, en el hormigón (dentro de ciertos límites de tensiones).

### **Ensayos básicos: fluencia y relajación**

En general, en los modelos viscosos suelen estudiarse varias casos típicos de situaciones reales que han generado metodologías de ensayo para la caracterización del comportamiento de los materiales, esto es: para la medición y determinación de sus parámetros. Dos de las situaciones típicas son los comportamientos en *fluencia* y *relajación*.

#### *Función de fluencia*

En el ensayo de fluencia se aplica una tensión instantánea  $\sigma_0$ , manteniéndola constante, y se mide la deformación como una función del tiempo.

Desde un punto de vista matemático y haciendo uso de la función escalonada unitaria, la carga y la respuesta de este ensayo se representan como:

$$\sigma = \sigma_0 U(t, t_1) \Rightarrow \varepsilon(t) = \psi(t, t_1) \sigma_0$$

siendo  $\psi(t, t_1)$  la *función de fluencia*.

La figura 29 muestra la deformación y la tensión en función del tiempo. En el caso de la tensión, se observa como la carga de fluencia puede representarse como  $\sigma_0 U(t, t_1)$ . Por otro lado, en el proceso de deformación se observan dos fases: una deformación

instantánea  $\varepsilon_0$ , debida al comportamiento lineal elástico, y una deformación diferida,  $\varepsilon_d$ , debida al comportamiento viscoso. Las dos deformaciones son aditivas, por lo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_d(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0 f(t) = \sigma_0 \underbrace{\left[ \frac{1}{E} + f(t) \right]}_{\Psi(t, t_1)}$$

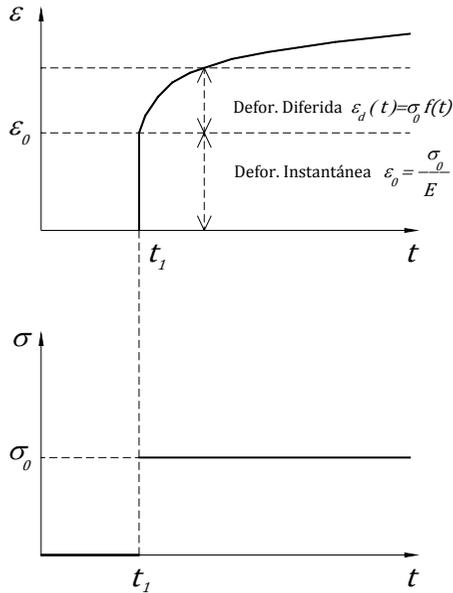


Figura 29

### *Función de relajación*

En el ensayo de relajación se impone una deformación instantánea  $\varepsilon_0$ , manteniéndola constante, y se mide la tensión como una función del tiempo.

La respuesta de un material viscoelástico al ensayo de relajación se expresa matemáticamente mediante:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 U(t, t_1) \Rightarrow \sigma(t) = \Phi(t, t_1) \varepsilon_0$$

siendo  $\Phi(t, t_1)$  la *función de relajación*.

La figura 30 muestra la tensión y deformación en función del tiempo en el ensayo de relajación. Se observa la relajación de la tensión a partir del valor umbral  $\sigma_0$ .

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \varepsilon_0 f(t) = \varepsilon_0 \frac{[E - f(t)]}{\Phi(t, t_1)}$$

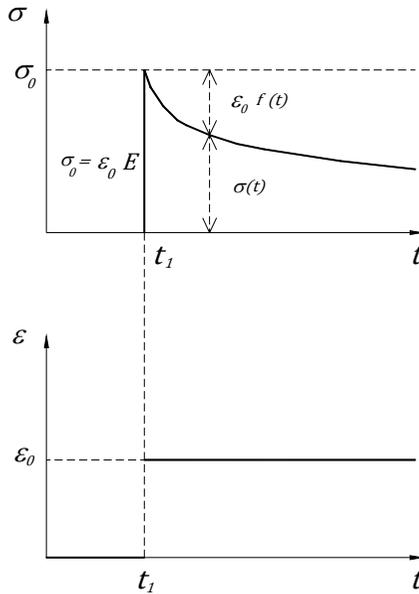


Figura 30

### Modelo de Maxwell

El modelo viscoelástico de Maxwell consiste en la combinación en serie de un resorte elástico y un amortiguador viscoso, como se indica en la figura 31.



Figura 31

Representa el comportamiento de un material cuya respuesta

instantánea es elástica y tiende a comportarse de forma viscosa si el esfuerzo se mantiene.

El comportamiento de los productos bituminosos se ajusta con bastante aproximación al modelo de Maxwell. El asfalto endurecido en el interior de un barril, por ejemplo, reacciona elásticamente a cargas reducidas y no prolongadas, como el impacto de una piedra pequeña; pero una piedra grande apoyada en la superficie, se va sumergiendo lentamente hasta llegar al fondo.

### *Ecuación constitutiva*

Por estar combinados en serie resorte y pistón, las deformaciones son aditivas. Se deduce de esta forma la ecuación constitutiva del modelo,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t) + \varepsilon_p(t) \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \dot{\varepsilon}_p(t) \Rightarrow$$

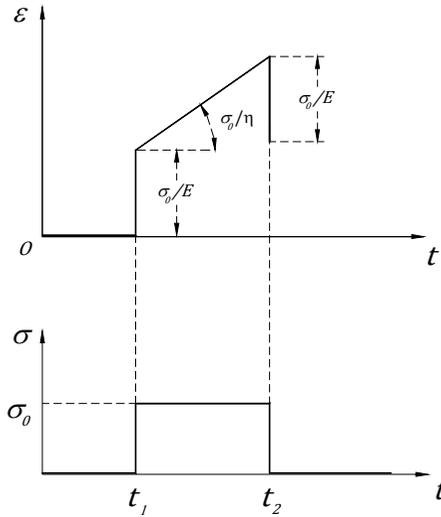
$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma}$$

En el caso de aplicación de un esfuerzo  $\sigma_0$  instantáneo, solo se deforma el resorte, y la energía de deformación acumulada en el resorte se va disipando, a velocidad de deformación constante, en el cilindro amortiguador que comienza a fluir bajo la acción de las fuerzas de restitución del muelle. Si el esfuerzo  $\sigma_0$  permanece constante en el tiempo ( $d\sigma/dt = 0$ ), la ecuación constitutiva se transforma en la ecuación que define el comportamiento del fluido newtoniano.

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

De esta forma, cuando el cuerpo de Maxwell se somete a un esfuerzo constante  $\sigma_0$ , se comporta como un líquido pero con una deformación inicial igual a la componente elástica. En el caso de descarga se recupera la deformación elástica y permanece la

componente viscosa de la deformación, tal como se indica en la figura 32.



**Figura 32**

### *Función de fluencia*

Para deducir la expresión matemática de la función de fluencia, se deriva la tensión impuesta y se introduce en la ecuación constitutiva del modelo:

$$\sigma = \sigma_0 U(t, t_1) \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \delta(t, t_1)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \sigma_0 \delta(t, t_1) + \frac{1}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1)$$

Integrando, con ayuda de las propiedades de la función escalonada unitaria y la función delta de Dirac, se obtiene:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sigma_0}{E} \delta(t, t_1) dt + \int_{-\infty}^t \frac{\sigma_0}{\eta} U(t, t_1) dt = \left[ \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} (t - t_1) \right] \sigma_0 U(t, t_1)$$

Finalmente, la *función de fluencia* para el modelo de Maxwell viene dada por:

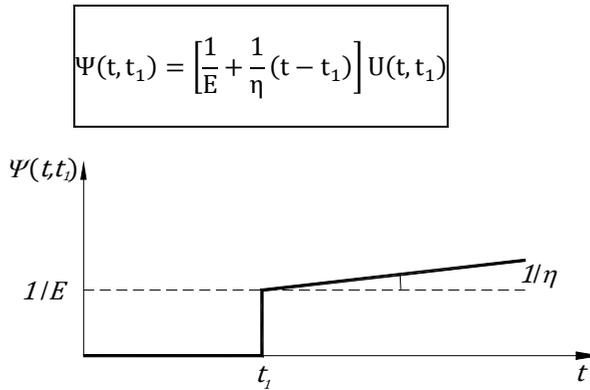


Figura 33

*Función de relajación*

Para obtener la función de relajación se deriva, respecto del tiempo, la deformación impuesta y se sustituye en la ecuación constitutiva:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 U(t, t_1) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 \delta(t, t_1) = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma$$

Multiplicando ambos términos por  $E dt$  y con ayuda de la definición del tiempo de retardo  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , se obtiene:

$$\varepsilon_0 \delta(t, t_1) E dt = d\sigma + \frac{\sigma}{\tau} dt$$

Multiplicando todos los miembros de la igualdad por el factor de integración  $e^{t/\tau}$ :

$$e^{t/\tau} \varepsilon_0 \delta(t, t_1) E dt = \underbrace{e^{t/\tau} d\sigma + e^{t/\tau} \frac{\sigma}{\tau} dt}_{d(\sigma e^{t/\tau})}$$

Integrando:

$$e^{t/\tau} \sigma = \varepsilon_0 E \int_{-\infty}^t e^{t'/\tau} \delta(t', t_1) dt' = \varepsilon_0 E e^{t_1/\tau} U(t, t_1)$$

Finalmente, la *función de relajación* para este modelo vendrá

dada por:

$$\Phi(t, t_1) = E e^{-(t_1-t)/\tau} U(t, t_1)$$

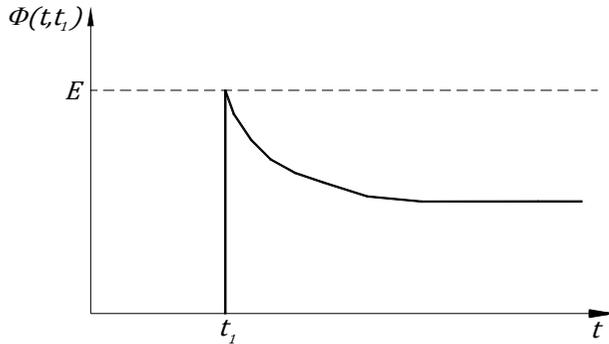


Figura 34

### Modelo de Kelvin-Voigt

El modelo viscoelástico de Kelvin consiste en la combinación en paralelo de un resorte elástico y un amortiguador viscoso, tal como se representa en la figura 35.

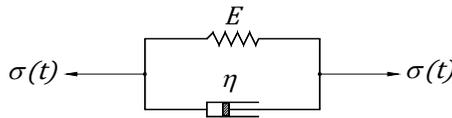


Figura 35

Intenta simular el comportamiento de materiales simultáneamente elásticos y viscosos, como son ciertos tipos de vidrio.

#### *Ecuación constitutiva*

En el modelo analógico se presenta la situación completamente inversa a la anterior. El esfuerzo  $\sigma(t)$  se distribuye entre los dos elementos, y las deformaciones del resorte y del amortiguador serán

en todo momento iguales entre sí. Se deduce por tanto la ecuación constitutiva,

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_P = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

El cuerpo de Kelvin responde inicialmente con características viscosas, predominando finalmente las características elásticas. Al cesar el esfuerzo se produce una recuperación de la deformación debido a la elasticidad del resorte, pero diferida por la intervención del cilindro amortiguador. Se trata pues de un cuerpo que, sin ser elástico, presenta la propiedad de que la deformación desaparece cuando cesa la causa que la ha originado, tal como se representa en la figura 36.

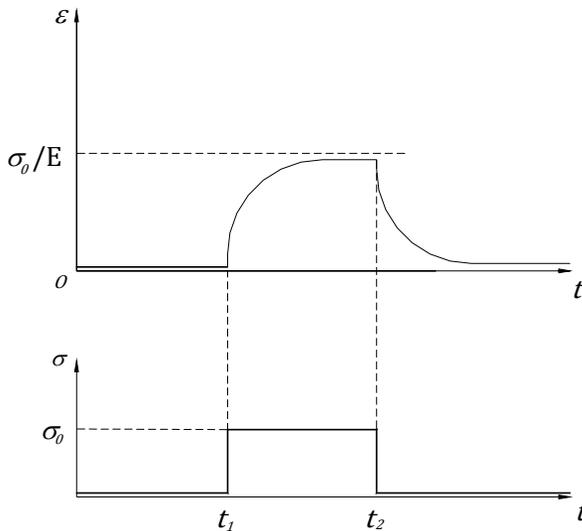


Figura 36

### *Función de fluencia*

La expresión matemática de la función de fluencia se obtiene introduciendo la carga de fluencia en la ecuación constitutiva del

modelo:

$$\sigma(t) = \sigma_0 U(t, t_1) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Multiplicando todos los miembros por  $\frac{dt}{E}$ :

$$\sigma_0 U(t, t_1) \frac{dt}{E} = \varepsilon(t)dt + \frac{\eta}{E} d\varepsilon$$

y dividiendo por  $\tau$ :

$$\frac{1}{\tau} \sigma_0 U(t, t_1) \frac{dt}{E} = \frac{1}{\tau} \varepsilon(t)dt + d\varepsilon$$

Ahora se introduce el factor de integración  $e^{t/\tau}$ :

$$e^{t/\tau} \frac{1}{\tau} \sigma_0 U(t, t_1) \frac{dt}{E} = \underbrace{e^{t/\tau} \frac{1}{\tau} \varepsilon(t)dt + e^{t/\tau} d\varepsilon}_{d(e^{t/\tau} \varepsilon)}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} e^{t/\tau} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{\eta} \int_{-\infty}^t e^{t/\tau} U(t, t_1) dt = \\ &= \frac{\sigma_0}{\eta} U(t, t_1) \tau \int_{t_1}^t e^{t/\tau} \frac{1}{\tau} dt = \frac{\sigma_0}{\eta} U(t, t_1) \tau \left[ e^{t/\tau} - e^{t_1/\tau} \right] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t, t_1) \frac{1}{E} \left[ 1 - e^{\left(\frac{t_1-t}{\tau}\right)} \right]$$

donde es interesante notar que cuando  $t \rightarrow \infty$  la deformación tenderá al valor finito:  $\frac{\sigma_0}{E}$ .

Finalmente, la *función de fluencia* para este modelo es:

$$\boxed{\Psi(t, t_1) = U(t, t_1) \frac{1}{E} \left[ 1 - e^{\left(\frac{t_1-t}{\tau}\right)} \right]}$$

### Modelo de Boltzmann

El modelo viscoelástico de Boltzmann consiste en la combinación del modelo de Kelvin-Voigt con un resorte elástico en serie, como se muestra en la figura 37.

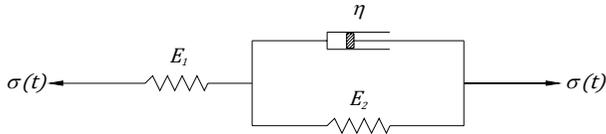


Figura 37

#### Ecuación constitutiva

Para obtener la ecuación constitutiva, hay que tener en cuenta la tensión del resorte que se coloca en serie y la del modelo de Kelvin-Voigt:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_1(t)$$

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon_2(t) + \eta \dot{\varepsilon}_2(t)$$

Por otro lado, al tratarse de un modelo en serie se suman las deformaciones:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

Operando con estas ecuaciones, se obtiene:

$$\sigma(t) = E_2 [\varepsilon(t) - \varepsilon_1(t)] + \eta [\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)] =$$

$$= E_2 \left[ \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_1} \right] + \eta \left[ \dot{\varepsilon}(t) - \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_1} \right] \Rightarrow$$

$$E_1 \sigma(t) = E_1 E_2 \varepsilon(t) - E_2 \sigma(t) + \eta E_1 \dot{\varepsilon}(t) - \eta \dot{\sigma}(t)$$

Finalmente, la ecuación constitutiva es:

$$\eta E_1 \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) = \eta \dot{\sigma}(t) + (E_1 + E_2) \sigma(t)$$

*Función de fluencia*

Se parte de la carga de fluencia, su derivada temporal y la ecuación constitutiva:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 U(t, t_1) \\ \dot{\sigma}(t) &= \sigma_0 \delta(t, t_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta E_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + E_1 E_2 \varepsilon(t) = \eta \sigma_0 \delta(t, t_1) + (E_1 + E_2) \sigma_0 U(t, t_1)$$

Se multiplican todos los términos por  $\frac{dt}{\eta}$  y se reagrupan. Se obtiene:

$$E_1 \left[ d\varepsilon(t) + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon(t) dt \right] = \sigma_0 \delta(t, t_1) dt + \frac{(E_1 + E_2)}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1) dt$$

Introduciendo el factor de integración  $e^{t/\tau_2}$ , donde  $\tau_2 = \frac{\eta}{E_2}$ , queda:

$$E_1 \left[ \underbrace{e^{t/\tau_2} d\varepsilon(t) + e^{t/\tau_2} \frac{1}{\tau_2} \varepsilon(t) dt}_{d[e^{t/\tau_2} \varepsilon(t)]} \right] =$$

$$= e^{t/\tau_2} \sigma_0 \delta(t, t_1) dt + e^{t/\tau_2} \frac{(E_1 + E_2)}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1) dt$$

Integrando:

$$E_1 e^{t/\tau_2} \varepsilon(t) = e^{t_1/\tau_2} \sigma_0 U(t, t_1) + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1) \int_{t_1}^t e^{t/\tau_2} dt \Rightarrow$$

$$E_1 e^{t/\tau_2} \varepsilon(t) = e^{t_1/\tau_2} \sigma_0 U(t, t_1) + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1) \tau_2 \left( e^{t/\tau_2} - e^{t_1/\tau_2} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t, t_1) \frac{e^{t_1/\tau_2}}{E_1 e^{t/\tau_2}} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma_0 U(t, t_1) \tau_2 \frac{\left( e^{t/\tau_2} - e^{t_1/\tau_2} \right)}{E_1 e^{t/\tau_2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t, t_1) \left[ \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} + e^{\frac{(t_1-t)}{\tau_2}} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t, t_1) \frac{1}{E_1} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{E_2} e^{-\frac{(t_1-t)}{\tau_2}} \right]$$

Finalmente, la *función de fluencia* vendrá dada por:

$$\Psi(t, t_1) = U(t, t_1) \frac{1}{E_1} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2}} \right) \right]$$

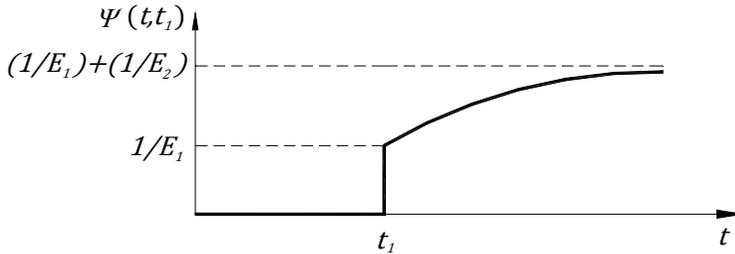


Figura 38

### Ejercicio

Obtener la función de fluencia del modelo de Boltzmann como la suma de las funciones de fluencia del modelo de Kelvin-Voigt y de un resorte.

El modelo de Boltzmann consiste en la combinación en serie del modelo de Kelvin-Voigt con un resorte elástico, por lo que su función de fluencia será aditiva:

$$\Psi(t, t_1) = \Psi_M(t, t_1) + \Psi_K(t, t_1)$$

donde  $\Psi_M(t, t_1)$  denota a la función de fluencia de un resorte elástico, que viene dada por:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E_1 \varepsilon \\ \sigma = \sigma_0 U(t, t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E_1} \sigma_0 U(t, t_1) \Rightarrow \Psi_M(t, t_1) = \frac{1}{E_1} U(t, t_1)$$

Finalmente, sustituyendo las funciones de fluencia del resorte y del modelo de Kelvin-Voigt, anteriormente calculadas, se obtiene:

$$\Psi(t, t_1) = \frac{1}{E_1} U(t, t_1) + U(t, t_1) \frac{1}{E_2} \left[ 1 - e^{\left( t_1 - \frac{t}{\tau} \right)} \right] \Rightarrow$$

$$\Psi(t, t_1) = U(t, t_1) \frac{1}{E_1} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2} \left( 1 - e^{\frac{t_1 - t}{\tau_2}} \right) \right]$$

### *Función de relajación*

Se parte de la deformación aplicada, su derivada temporal y la ecuación constitutiva. Desarrollando estas tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_0 U(t, t_1) \\ \dot{\varepsilon}(t) &= \varepsilon_0 \delta(t, t_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta E_1 \varepsilon_0 \delta(t, t_1) + E_1 E_2 \varepsilon_0 U(t, t_1) = \eta \frac{d\sigma}{dt} + (E_1 + E_2) \sigma(t)$$

Multiplicando todos los términos de la igualdad por  $\frac{dt}{\eta}$ , se obtiene:

$$E_1 \varepsilon_0 \delta(t, t_1) dt + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_0 U(t, t_1) dt = d\sigma + \frac{(E_1 + E_2)}{\eta} \sigma(t) dt$$

Introduciendo el factor de integración  $e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)}$ :

$$e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)} E_1 \varepsilon_0 \delta(t, t_1) dt + e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)} \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_0 U(t, t_1) dt =$$

$$= \underbrace{e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)} d\sigma + e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)} \frac{(E_1 + E_2)}{\eta} \sigma(t) dt}_{d\left( e^{\left( \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right)} \sigma(t) \right)}$$

Integrando:

$$e^{\left(\frac{E_1+E_2}{\eta}t\right)}\sigma(t) = e^{\left(\frac{E_1+E_2}{\eta}t_1\right)}E_1\varepsilon_0U(t, t_1) + \frac{E_1E_2}{\eta}\varepsilon_0U(t, t_1) \int_{t_1}^t e^{\left(\frac{E_1+E_2}{\eta}t\right)}dt$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_{t_1}^t e^{\left(\frac{E_1+E_2}{\eta}t\right)}dt = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \left( e^{\frac{E_1+E_2}{\eta}t} - e^{\frac{E_1+E_2}{\eta}t_1} \right)$$

y simplificando, se obtiene:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0U(t, t_1) \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[ E_2 + E_1 e^{\frac{E_1+E_2}{\eta}(t_1-t)} \right]$$

Finalmente, la *función de relajación* de este modelo, representada en la figura 39, viene dada por:

$$\Phi(t, t_1) = U(t, t_1) \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[ E_2 + E_1 e^{\frac{E_1+E_2}{\eta}(t_1-t)} \right]$$

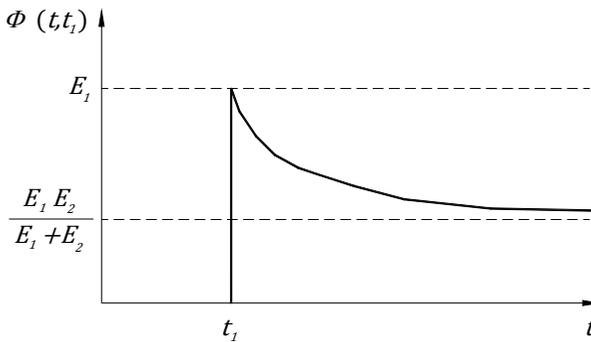


Figura 39

### Modelo de Burgers

El modelo viscoelástico de Burgers dispone en serie los modelos de Maxwell y Kelvin, como se representa en la figura 40.

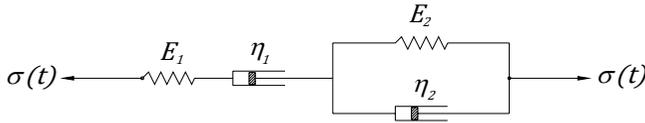


Figura 40

La deformación total del modelo es la suma de la deformación elástica instantánea correspondiente al resorte, la deformación elástica diferida correspondiente al modelo de Kelvin, y el flujo viscoso correspondiente al pistón. Las dos primeras deformaciones se recuperan cuando cesa el esfuerzo, mientras que la tercera perdura permanentemente en el material. La deformación elástica instantánea varía muy poco con la temperatura, mientras que las deformaciones elástica diferida y viscosa dependen en gran medida de ella.

#### Ecuación constitutiva

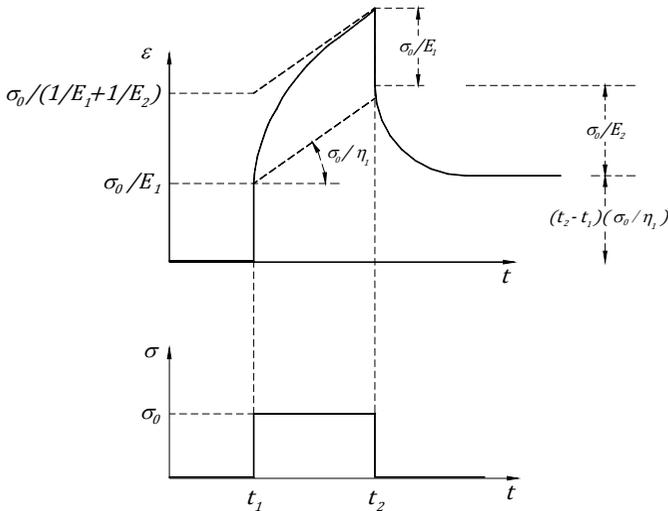
A continuación se deduce la ecuación constitutiva del modelo,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_M + \varepsilon_K \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_M + \dot{\varepsilon}_K \\ \dot{\varepsilon}_M &= \frac{1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta_1} \sigma \\ \sigma &= E_2 \varepsilon_K + \eta_2 \dot{\varepsilon}_K = E_2 (\varepsilon - \varepsilon_M) + \eta_2 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_M) = \\ &= E_2 (\varepsilon - \varepsilon_M) + \eta_2 \left( \dot{\varepsilon} - \frac{1}{E_1} \dot{\sigma} - \frac{1}{\eta_1} \sigma \right) \\ \dot{\sigma} &= E_2 \left( \dot{\varepsilon} - \frac{1}{E_1} \dot{\sigma} - \frac{1}{\eta_1} \sigma \right) + \eta_2 \left( \ddot{\varepsilon} - \frac{1}{E_1} \ddot{\sigma} - \frac{1}{\eta_1} \dot{\sigma} \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\eta_2}{E_1} \ddot{\sigma} + \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} + \frac{E_2}{E_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma = \eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_2 \dot{\varepsilon}}$$

El conocimiento de los modelos anteriores, permite obtener la

evolución de la deformación para el caso de esfuerzo constante  $\sigma_0$  aplicado entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$  representada en la figura 41.



**Figura 41**

Se produce un incremento brusco de la deformación de valor  $\sigma_0/E_1$  para  $t = t_1$ , seguido de un crecimiento paulatino, pero no limitado asintóticamente, como ocurre en el modelo de Kelvin.

Cuando se descarga en el instante  $t = t_2$ , el resorte del modelo de Maxwell responde inmediatamente devolviendo la deformación inicial  $\sigma_0/E_1$ . El cuerpo de Kelvin, por el contrario, va regresando lentamente hasta recuperar por efecto del resorte su longitud inicial, mientras que el amortiguador del modelo de Maxwell no se recupera y quedará con la deformación  $(t_2 - t_1)\sigma_0/\eta_1$ . En consecuencia, quedará una deformación permanente definida por la asíntota de la figura 41.

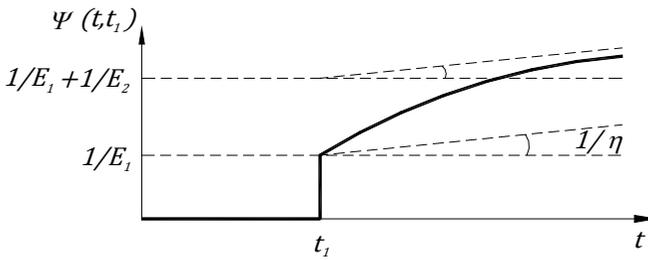
El cuerpo de Burgers posee características especialmente adecuadas para representar el comportamiento de muchos metales e incluso del hormigón, siendo en este caso, los símbolos  $E$  y  $\eta$ , el

módulo de Young y el coeficiente de tracción viscosa.

### *Función de fluencia*

La función de fluencia de este modelo se obtiene sumando las funciones de fluencia de los modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt, por ser las deformaciones aditivas. Se obtiene:

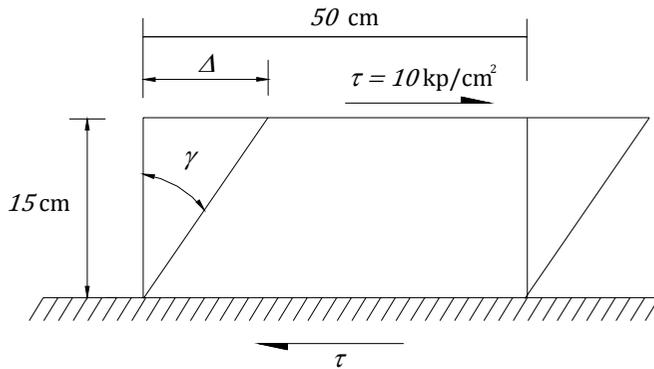
$$\Psi(t, t_1) = \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} (t - t_1) \right] U(t, t_1) + \frac{1}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2}} \right) U(t, t_1)$$



**Figura 42**

### **Ejercicio**

En un laboratorio de materiales se ensaya un bloque de mastic asfáltico a esfuerzo constante mantenido, como se indica en la figura 43.



**Figura 43**

Se mide el desplazamiento,  $\Delta$ , de la capa superior respecto a la inferior, al cabo de 1 día y al cabo de 20 días, obteniéndose los valores indicados:

$$\Delta(t = 1 \text{ día}) = 0,5 \text{ cm}$$

$$\Delta(t = 20 \text{ días}) = 0,6 \text{ cm}$$

Se pide:

1.- Ajustar el modelo viscoelástico de Maxwell para predecir el comportamiento del material.

Sustituyendo los dos valores experimentales en la ecuación constitutiva del modelo de Maxwell:

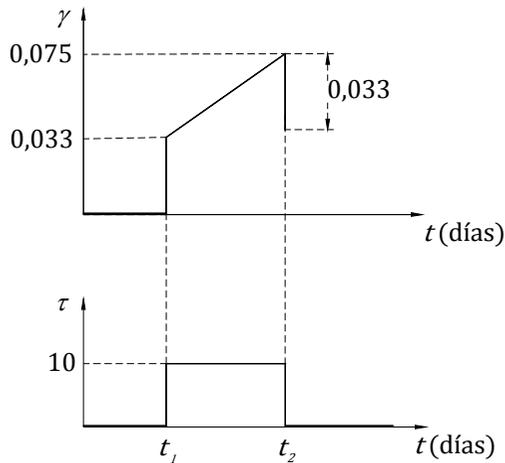
$$\begin{cases} t = 1: \frac{0,5}{15} = 10 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} \right) \\ t = 20: \frac{0,6}{15} = 10 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} 20 \right) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtiene:

$$\begin{cases} \eta = 28500 \frac{\text{kp día}}{\text{cm}^2} \\ E = 303,191 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \end{cases}$$

que son los parámetros necesarios para que se pueda modelar el comportamiento del material mediante el modelo de Maxwell.

2.- Representar gráficamente la evolución en el tiempo de la distorsión, suponiendo que la carga se retira a los cuatro meses.



### Operadores. Resumen

A continuación, a modo de resumen, se muestran las ecuaciones constitutivas y los *operadores* de los modelos viscoelásticos que se han visto.

*Modelo de Maxwell*

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = \dot{\epsilon}$$

$$\left\{ \frac{1}{E} \partial_t + \frac{1}{\eta} \right\} \sigma = \{ \partial_t \} \epsilon$$

*Modelo de Kelvin-Voigt*

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

$$\{1\}\sigma = \{E + \eta \partial_t\}\varepsilon$$

*Modelo de Boltzmann*

$$\eta\dot{\sigma}(t) + (E_1 + E_2)\sigma(t) = \eta E_1 \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t)$$

$$\{\eta \partial_t + E_1 + E_2\}\sigma = \{\eta E_1 \partial_t + E_1 E_2\}\varepsilon$$

*Modelo de Burgers*

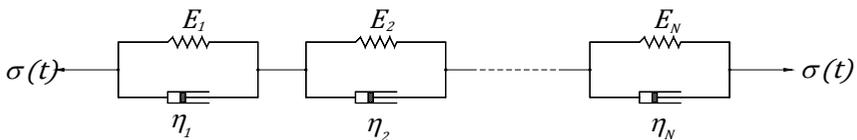
$$\frac{\eta_2}{E_1} \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1} \sigma = \eta_2 \ddot{\varepsilon} + E_2 \dot{\varepsilon}$$

$$\left\{\frac{\eta_2}{E_1} \partial_t^2 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \partial_t + \frac{E_2}{\eta_1}\right\} \sigma = \{\eta_2 \partial_t^2 + E_2 \partial_t\} \varepsilon$$

**Modelos Generalizados**

Los modelos viscoelásticos que se han visto hasta ahora suelen resultar pobres a la hora de representar el comportamiento real de ciertos materiales. Por esto, es necesario combinar varios modelos (en serie o paralelo) para modelar dicho comportamiento. Estas combinaciones de modelos se denominan *modelos generalizados*.

La figura 44 muestra una configuración en serie de modelos de Kelvin-Voigt. En este tipo de combinaciones, las tensiones son iguales mientras que las deformaciones son aditivas. Esto es:

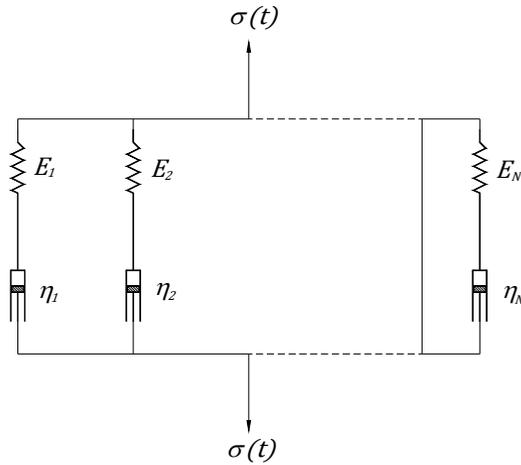


**Figura 44**

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_N = \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\{E_1 + \eta_1 \partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{E_2 + \eta_2 \partial_t\}} + \dots + \frac{\sigma}{\{E_N + \eta_N \partial_t\}}$$

La Figura 45 muestra una configuración en paralelo de modelos de Maxwell, donde las deformaciones son iguales y las tensiones se suman:



**Figura 45**

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_N = \varepsilon$$

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{ \frac{\partial_t}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{ \frac{\partial_t}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right\}} + \dots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{ \frac{\partial_t}{E_N} + \frac{1}{\eta_N} \right\}}$$

Aunque en las figuras anteriores sólo se han visto asociaciones de modelos de Kelvin-Voigt en serie y de Maxwell en paralelo, en la práctica pueden darse todo tipo de asociaciones. Por esto, se escribe la *ecuación constitutiva generalizada* como:

$$\sum_{i=0}^N p_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^N q_i \frac{\partial^i \varepsilon}{\partial t^i} \Leftrightarrow p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + \dots$$

y en modo operatorial:

$$\{P\}\sigma = \{Q\}\varepsilon \rightarrow \begin{cases} \{P\} = \sum_{i=0}^N p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} = p_0 + p_1 \partial_t + p_2 \partial_t^2 + \dots \\ \{Q\} = \sum_{i=0}^N q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} = q_0 + q_1 \partial_t + q_2 \partial_t^2 + \dots \end{cases}$$

Particularizando esta notación para los modelos que se han visto:

Modelo	{P}	{Q}
Maxwell	$\left\{ \frac{1}{E} \partial_t + \frac{1}{\eta} \right\}$	$\{\partial_t\}$
Kelvin – Voigt	$\{1\}$	$\{E + \eta \partial_t\}$
Boltzmann	$\{\eta \partial_t + E_1 + E_2\}$	$\{\eta E_1 \partial_t + E_1 E_2\}$
Burgers	$\left\{ \frac{\eta_2}{E_1} \partial_t^2 + \left( 1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \partial_t + \frac{E_2}{\eta_1} \right\}$	$\{\eta_2 \partial_t^2 + E_2 \partial_t\}$

### Ejercicio

Determinar la ecuación constitutiva para el modelo de la figura 46:

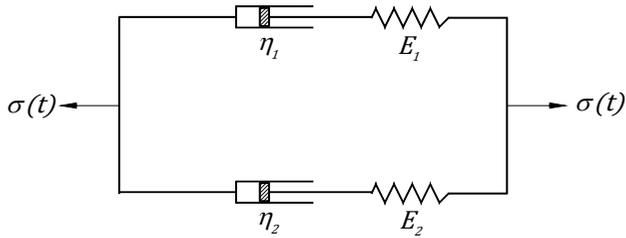


Figura 46

Se trata de una asociación en paralelo de cuerpos de Maxwell, por lo que el primer paso para la resolución del problema será estudiar este modelo de forma aislada:



Figura 47

Con ayuda del tiempo de retardo  $\tau = \frac{\eta}{E}$  y desarrollando la ecuación constitutiva del modelo de Maxwell, se obtiene:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \Rightarrow E \dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma \Rightarrow E \dot{\epsilon} = \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau} \right\} \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{E}{\left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau} \right\}} \dot{\epsilon}$$

Por otro lado, al tratarse de de una asociación en paralelo, las tensiones son aditivas, por lo que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{E_1}{\left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_1} \right\}} \dot{\epsilon} + \frac{E_2}{\left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_2} \right\}} \dot{\epsilon} \Rightarrow \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_1} \right\} \sigma = \\ &= E_1 \dot{\epsilon} + \frac{\left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_1} \right\} E_2}{\left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_2} \right\}} \dot{\epsilon} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_2} \right\} \left( \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} \right) &= \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_2} \right\} E_1 \dot{\varepsilon} + \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_1} \right\} E_2 \dot{\varepsilon} = \\ &= E_1 \left( \ddot{\varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\tau_2} \right) + E_2 \left( \ddot{\varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\tau_1} \right) = (E_1 + E_2) \ddot{\varepsilon} + \left( \frac{E_2}{\tau_1} + \frac{E_1}{\tau_2} \right) \dot{\varepsilon} \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\ddot{\sigma} + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \sigma = (E_1 + E_2) \ddot{\varepsilon} + \left( \frac{E_2}{\tau_1} + \frac{E_1}{\tau_2} \right) \dot{\varepsilon}$$

### 3.5. Comportamiento elastoplástico.

En la figura 48 se representa la respuesta de un metal a un crecimiento gradual y continuo de cargas, a temperatura constante. La curva esfuerzos-deformaciones presenta un primer tramo rectilíneo  $OA$  que revela un comportamiento elástico, seguido de un tramo curvo  $AB$  de comportamiento mecánico irregular (inelástico). Posteriormente, el tramo  $BR$  se caracteriza por ser también curvilíneo pero mucho más tendido, lo que equivale a decir que se producen grandes deformaciones para incrementos muy pequeños del esfuerzo. Esta última fase de la deformación caracteriza el comportamiento plástico del material y termina en el punto  $R$ , en el que debido al exceso de carga, se produce la fractura del mismo, que eventualmente puede consistir solo en la aparición de un sistema de grietas microscópicas, o en la separación física en dos trozos de la probeta, pero que en todo caso, supone el fin de la continuidad del medio.



una deformación permanente del 0,2%.

La diferencia sustancial entre el comportamiento elástico y el plástico, es la aparición en este último de los conocidos como fenómenos de *histéresis*, según los cuales el nivel de tensión necesario para producir una deformación depende de la historia tenso-deformacional previa del material, lo que no ocurre en el comportamiento elástico, en el que la relación entre tensiones y deformaciones es biunívoca.

En la figura 48 se puede observar como para niveles de tensión dentro del rango elástico, por ejemplo el correspondiente al punto *M*, en el proceso de descarga, la relación entre tensiones y deformaciones es la misma que en el proceso de carga, es decir, se sigue el mismo camino *OM* en la carga y en la descarga. Pero si llegados al punto *C*, en rango plástico, se realiza la descarga, la misma se verifica según la línea *CD*, sensiblemente paralela a *OM*, apareciendo una deformación permanente (residual)  $\varepsilon_p$ , siendo la deformación recuperada (elástica)  $\varepsilon_e$ . Si se carga de nuevo el material a partir de *D*, se llega elásticamente al punto *N*, separándose luego de la línea de descarga anterior para alcanzar en *P* la curva tensión-deformación original. De esta forma, un mismo valor de deformación *OG* puede corresponder a tres niveles diferentes de tensión *GH*, *GI* y *GJ*, según la historia previa de procesos carga-descarga sufridos por el material.

Los fenómenos de histéresis se deben a que la plastificación produce cambios permanentes en la estructura del material, con alteración de sus propiedades mecánicas.

En determinados casos, se adoptan modelos idealizados de comportamiento elastoplástico, suponiendo diagramas tensión-deformación constituidos por tramos rectilíneos. En la figura 49 se

incluyen algunos de estos modelos.

En ocasiones se trabaja con el material metálico obteniendo grandes deformaciones en frío, por ejemplo en los procesos de moldeo por extrusión y laminación. En estos casos se suele adoptar un modelo elastoplástico, en el que se desprecia el endurecimiento por deformación; se dice entonces que el comportamiento plástico es perfecto; en este caso el nivel de tensión máximo corresponde al límite de fluencia y no aparecen deformaciones isotrópicas (incompresibilidad).

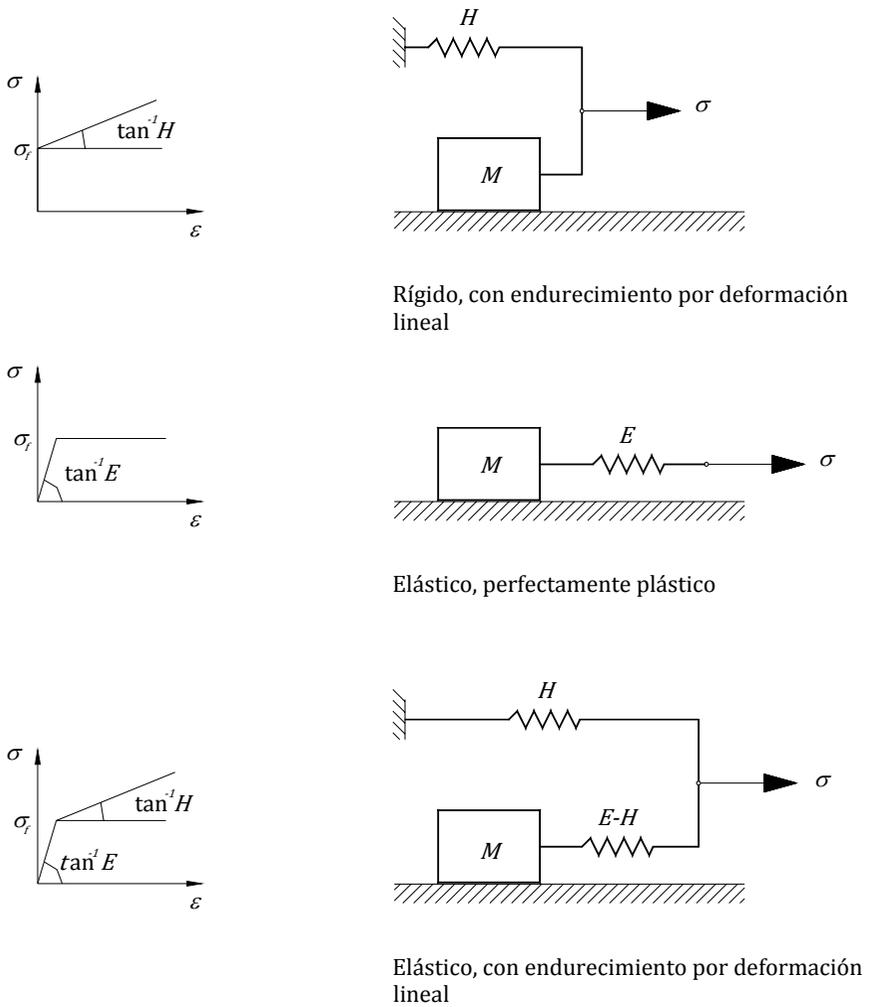


Figura 49

## **Bibliografía**

- Díaz del Valle, J. (1989). *MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS I*. Santander: ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos ISBN: 84-86928-24-9.
- Levi, E. (1971). *elementos de MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO*. México DF: LIMUSA SA ISBN 968-18-0609-3.
- Mase, G. (1970 (Traducción en español: 1977)). *Mecánica del Medio Continuo*. México DF: Libros McGraw-Hill ISBN 0-07-091668-3.