TURUN YLIOPISTO

# Algebran peruslause

Maiju Merikanto

Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2022

Tarkastajat:
Prof. Vesa Halava
Dos. Juha Honkala

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

MAIJU MERIKANTO: Algebran peruslause
Pro gradu -tutkielma, 31 s. Matematiikka
Marraskuu 2022

---

Tässä Pro gradu -tutkielmassa perehdytään kompleksilukujen teoriaan sekä todistetaan algebran peruslauseena tunnettu tulos. Tutkielman lukijan oletetaan hallitsevan lukion pitkän matematiikan oppimäärä.

Kompleksilukujen teoriaan liittyen esitellään kolme erilaista tapaa esittää kompleksiluku sekä käydään läpi yleisimpiä kompleksilukujen laskutoimituksia. Kompleksiluvuille saadaan geometrinen tulkinta, kun ne esitetään kompleksitasossa.

Algebran peruslauseen mukaan kompleksilukukertoimisella vähintään astetta 1 olevalla polynomilla on ainakin yksi kompleksinen nollakohta. Lauseen todistus rakentuu kahdesta pääkohdasta. Ensin osoitetaan, että polynomin itseisarvo saavuttaa miniminsä kompleksitasossa. Tämän jälkeen todistetaan, että näin saatu minimikohta on nolla. Tutkielmassa esitellään kaikki todistuksessa käytettävät käsitteet sekä aputulokset.

Tutkielman lopussa esitetään algebran peruslauseen yleisimpiä seurauksia, kuten polynomin esittäminen tekijöiden tulona.

Asiasanat: kompleksiluvut, algebran peruslause, kompleksiset nollakohdat

# Sisällys

**1 Johdanto** **1**

**2 Kompleksiluvut** **3**

2.1 Kompleksilukujen määritelmä . . . 3
2.2 Kompleksilukujen laskutoimituksia . . . 3
2.3 Kompleksikonjugaatti . . . 5
2.4 Kompleksiluvun käänteisluku . . . 7
2.5 Kompleksiluvut järjestettyinä lukupareina . . . 7

**3 Kompleksiluvut tasossa** **9**

3.1 Napakoordinaattiesitys . . . 9
3.2 Laskeminen napakoordinaateilla . . . 12
3.3 Eulerin lause . . . 15
3.4 Kompleksiluvun eksponenttimuoto . . . 16
3.5 Trigonometriset funktiot . . . 18

**4 Algebran peruslauseen todistaminen** **20**

4.1 Ääriarvolause . . . 20
4.2 Minimi kompleksitasossa . . . 22
4.3 Kolmioepäyhtälö . . . 23
4.4 Polynomin arvo minimikohdassa . . . 25
4.5 Algebran peruslauseen seurauksia . . . 28

# 1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään kompleksilukujen teoriaan sekä algebran peruslauseeseen, jonka todistus on tutkielman keskiössä. Tutkielmassa esitellään ensin kompleksilukujen perustiedot sekä niiden yleisimmät laskuoperaatiot. Kompleksilukujen ominaisuuksien ymmärtäminen on oleellista, jotta lukija kykenee hahmottamaan kompleksilukuihin liittyvän algebran peruslauseen. Myös tässä tutkielmassa esitettävä todistus nojaa vahvasti kompleksilukujen ominaisuuksiin.

Kompleksiluvut eivät sisälly lukion pitkän matematiikan oppimäärään, mutta ne saatetaan kuitenkin käydä suppeasti läpi. Tutkielma on kirjoitettu sellaiseen muotoon, että lukion pitkän matematiikan opiskelleella on edellytykset lukea tutkielma.

Tutkielman alussa tutustutaan muotoa

$$z = a + bi$$

oleviin kompleksilukuihin sekä niillä laskemiseen. Näin merkityssä kompleksiluvussa $a$ ja $b$ ovat reaalilukuja ja $i$ on luvun imaginaariluku. Lyhyesti ilmaistuna imaginaariosa voidaan määritellä asettamalla $i = \sqrt{-1}$.

Yritys ratkaista kolmannen asteen yhtälöitä 1500-luvulla johti kompleksilukujen kehittämiseen. Maa- ja vesitekniikan insinööri Rafael Bombelli $(1526-1572)$ havaitsi, että kolmannen asteen yhtälöä ratkaistaessa on mahdotonta välttyä käyttämästä negatiivisen luvun neliöjuurta. Vaikka kolmannen asteen yhtälön ratkaisu olisikin ollut reaalinen, välivaiheissa esiintyi kuitenkin negatiivisia neliöjuuria. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan ensimmäisenä julkaisijana tunnentun Gerolamo Cardanon $(1501-1576)$ kerrotaan sanoneen "jättäneensä mielen kidutuksen huomiotta" laskiessaan negatiivisilla neliöjuurilla [9].

Mielikuvitukselliseen viittaavan nimensä imaginaariosa sai, kun vuonna 1637 ranskalainen matematiikko René Descartes $(1596 - 1650)$ kutsui lukua $\sqrt{-1}$ "mielikuvitukseksi" [13]. Nykyään ymmärretään, että imaginaariluvuilla ei ole mitään tekemistä mielikuvituksen kanssa, vaan kyse on luvusta, joka neliöityy luvuksi $-1$. Nimi on kuitenkin säilynyt, ja vuodesta 1777 saakka imaginaariisiin lukuihin on viitattu symbolilla $i$ Leonhard Eulerin $(1707 - 1783)$ aloitteesta [9].

Kolmannessa luvussa kompleksilukuja tarkastellaan geometrisesti. Kompleksitasoon piirretyn kompleksiluvun $z = a + bi$ avulla siirrytään käsittelemään kompleksiluvun napakoordinaattimuotoa

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Lisäksi luvussa kolme esitellään Eulerin lause, joka yhdistää eksponenttifunktion ja trigonometriset kaavat toisiinsa, sekä Eulerin identiteetti, jota monet kutsuvat matematiikan kauneimmaksi kaavaksi. Eulerin lauseen avulla kompleksiluvut esitetään eksponenttimuodossa

$$z = re^{i\theta}.$$

Kompleksilukujen ja niiden ominaisuuksien esittelyn jälkeen tutkielman tavoitteena on todistaa algebran peruslauseena tunnettu tulos, jonka mukaan kompleksikertoimisella vähintään astetta 1 olevalla polynomilla on vähintään yksi nollakohta kompleksitasossa. Tutkielmassa esitettävä todistus algebran peruslauseelle etenee osoittamalla ensin, että kompleksipolynomin itseisarvolla $|p(z)|$ on minimikohta kompleksitasossa. Tämän jälkeen osoitetaan, että kyseinen minimikohta on nolla. Koska polynomin itseisarvon $|p(z)|$ minimi on nollassa, on polynomilla $p(z)$ kyseisessä kohdassa nollakohta. Tästä seuraa suoraan algebran peruslauseen väittämä.

Tutkielma on kirjoitettu Tuomas Hytösen artikkelin *Algebran peruslause lukiolaisille* [5] pohjalta.

# 2 Kompleksiluvut

Tutkielmassa esitettävän todistuksen ymmärtämiseksi käydään ensin läpi kompleksilukuihin liittyvää teoriaa. Teoria pohjautuu John Vincen teokseen *Quaternions for Computer Graphics* [13].

## 2.1 Kompleksilukujen määritelmä

Tarkastellaan yhtälöä $x^2+4=0$. Kyseisellä yhtälöllä ei ole ollenkaan reaalisia ratkaisuja eli juuria. Sen sijaan sillä on *imaginaarisia* juuria. Imaginaarilukujen perusidea on, että lukua $\sqrt{-1}$ merkitään imaginaaritunnuksella $i$. Näin ollen esimerkkiyhtälölle $x^2+4=0$ saadaan juuriksi

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

Imaginaariluvuilla laskettaessa on huomattava, että $i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$. Imaginaariluvun korottaminen toiseen potenssiin antaa siis tulokseksi reaaliluvun. Siitä syystä imaginaariluvuilla laskettaessa $i^2$ tulee aina korvata reaaliluvulla $-1$.

**Määritelmä 1.** Kompleksiluvut muodostuvat *reaaliosasta* ja *imaginaariosasta*. Kompleksiluvut ovat muotoa

$$z = a + bi,$$

jossa $a, b \in \mathbb{R}$ ja $i$ on imaginaariluku. Reaaliosa on $a$ ja imaginaariosa imaginaariluvun $i$ kerroin $b$. Kompleksilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$, jolloin $z \in \mathbb{C}$.

Esimerkiksi luku $2+3i$ on kompleksiluku, jonka reaaliosa on 2 ja imaginaariosa on 3. Myös pelkkä luku 2 on kompleksiluku. Siinä imaginaariosa on 0, joten sitä ei ole. Vastaavalla tavalla kaikki reaaliluvut ovat kompleksilukuja. Näin ollen reaaliluvut ovat kompleksilukujen aito osajoukko. Merkitään $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Myöhemmin tässä luvussa käydään läpi, kuinka kompleksiluvut voidaan esittää järjestettyinä lukupareina.

## 2.2 Kompleksilukujen laskutoimituksia

Kompleksilukujen yhteenlaskussa summataan reaaliosat keskenään ja imaginaariosat keskenään. Vastaavalla tavalla kompleksilukujen vähennyslaskussa lasketaan erotus reaaliosista ja imaginaariosista erikseen.

**Esimerkki 2.** Lasketaan yhteen kompleksiluvut $z_1 = 3 + i$ ja $z_2 = 2 + 5i$.

$$z_1 + z_2 = 3 + i + 2 + 5i = 5 + 6i.$$

Kun kompleksiluku kerrotaan skalaarilla, kerrotaan sekä reaaliosa että imaginaariosa. Skalaarilla kertominen noudattaa siis kaavaa

$$\lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi,$$

jossa $\lambda \in \mathbb{R}$ on skalaariluku ja $a + bi \in \mathbb{C}$.

Kahden kompleksiluvun tulo on myös kompleksiluku. Se huomataan tarkastelemalla kahden mielivaltaisen kompleksiluvun $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ välistä tuloa, jolloin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Saatu luku on kompleksiluku. Tämä osoittaa, että kompleksilukujen joukko on suljettu kertolaskun suhteen. Johdetulla kaavalla

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

voidaan laskea minkä tahansa kahden kompleksiluvun välinen tulo.

**Esimerkki 3.** Lasketaan esimerkin 2 kompleksilukujen tulo käyttäen edellä saatua kaavaa.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3+i)(2+5i) \\ &= (3 \cdot 2 - 1 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 1) i \\ &= (6-5) + (15+2) i \\ &= 1 + 17i \end{aligned}$$

**Esimerkki 4.** Johdetaan kaava kompleksiluvun $z = a + bi$ neliölle.

$$z^2 = (a+bi)(a+bi) = a^2 + abi + abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

**Määritelmä 5.** Kompleksiluvun $z = a + bi$ *itseisarvosta* eli *normista* käytetään merkintää $|z|$ ja se määritellään seuraavasti:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Esimerkiksi kompleksiluvun $4+3i$ itseisarvo on

$$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Kompleksiluvun itseisarvolle saadaan geometrinen tulkinta luvussa 3.

## 2.3 Kompleksikonjugaatti

Kerrotaan seuraavaksi keskenään kaksi kompleksilukua, jotka eroavat toisistaan vain imaginaariosan etumerkin suhteen.

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi) &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Saatu luku $a^2+b^2$ on reaalinen. Vastaavanlaisten kompleksilukujen tulo antaa vastaukseksi aina reaaliluvun.

Kompleksilukua $a-bi$ kutsutaan kompleksiluvun $z = a+bi$ *kompleksikonjugaatiksi* (tai *liittoluvuksi*). Merkitään kompleksiluvun $z$ kompleksikonjugaattia asteriskilla, jolloin

$$z^* = a - bi.$$

Edellä esitetty kertolasku voidaan nyt esittää muodossa

$$zz^* = a^2 + b^2.$$

**Esimerkki 6.** Lasketaan kompleksiluvun $z = 4+2i$ tulo kompleksikonjugaattinsa kanssa.

$$zz^* = (4+2i)(4-2i) = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20.$$

Käydään läpi lähteiden [2, 6] mukaisesti muutamia kompleksikonjugaattien laskusääntöjä, joita tulla hyödyntämään tutkielmassa myöhemmin esiteltävän kolmioepäyhtälön todistuksessa.

**Lause 7.** Seuraavat laskusäännöt ovat voimassa kompleksikonjugaateille:

1. $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
2. $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$
3. $zz^* = |z|^2$
4. $(z^*)^* = z$

*Todistus.* Olkoon $z_1 = a_1 + b_1i$ ja $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleksilukuja. Todistetaan lauseen väittämät kohta kerrallaan.

1. Lasketaan

$$(z_1+z_2)^* = (a_1+a_2+(b_1+b_2)i)^* = a_1+a_2-(b_1+b_2)i = a_1-b_1i+a_2-b_2i = z_1^*+z_2^*$$

2. Kompleksilukujen $z_1$ ja $z_2$ tulolle saadaan

$$z_1z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

ja kompleksikonjugaattien $z_1^*$ ja $z_2^*$ tulolle saadaan

$$z_1^*z_2^* = (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Näin saadut luvut ovat keskenään kompleksikonjugaatteja, joten $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$ .

3. Tiedetään, että $zz^* = a^2 + b^2$ ja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, joten

$$|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 = zz^*.$$

4. Olkoon $z = a + bi$. Tällöin

$$(z^*)^* = (a - bi)^* = a - (-bi) = a + bi = z.$$

□

**Esimerkki 8.** Kompleksiluvun $z = a + bi$ reaaliosaa voidaan merkitä $\mathrm{Re}(z) = a$ ja imaginaariosaa $\mathrm{Im}(z) = b$. Tällöin $a, b \in \mathbb{R}$ eli $\mathrm{Re}(z)$ ja $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Käyttämällä tätä merkintätapaa, saadaan kompleksiluvun $z = a+bi$ ja sen kompleksikonjugaatin $z^* = a - bi$ summaksi

$$z + z^* = a + bi + a - bi = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$$

ja erotukseksi

$$z - z^* = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi = 2\mathrm{Im}(z).$$

Näistä ensimmäisenä esiteltyä tullaan käyttämään myöhemmin tutkielmassa kolmioepäyhtälön todistuksen yhteydessä. Lisäksi kompleksikonjugaattien laskusääntöjä esitellään tulevissa luvuissa.

## 2.4 Kompleksiluvun käänteisluku

Kompleksiluvun $z$ käänteisluku on luku $z^{-1}$, jolla pätee $zz^{-1} = 1$. Käänteisluvulle $z^{-1}$ saadaan kaava kompleksikonjugaatin avulla. Laventamalla käänteisluvun $z^{-1}$ osoittaja ja nimittäjä kompleksikonjugaatilla $z^*$ saadaan

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*}.$$

Kompleksikonjugaatille pätee lauseen 7 kohdan 3. mukaan $zz^* = |z|^2$. Tämän avulla käänteisluvun lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

**Esimerkki 9.** Lasketaan luvun $z = 3 + 2i$ käänteisluku $z^{-1}$.

$$z^{-1} = \frac{3}{3^2 + 2^2} - \frac{2}{3^2 + 2^2}i = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$$

Näytetään vielä, että saatu kompleksiluku $z^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ on luvun $z = 3 + 2i$ käänteisluku eli $zz^{-1} = 1$.

$$zz^{-1} = (3 + 2i)(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i) = \frac{9}{13} - \frac{6}{13}i + \frac{6}{13}i - \frac{4}{13}i^2 = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1.$$

Kahden kompleksiluvun $z$ ja $w$ välinen jakolasku $z/w$ määritellään lukujen $z$ ja $w^{-1}$ tulona. Jakolaskun voi laskea myös hyödyntämällä kompleksikonjugaattia. Jakolaskussa osoittaja ja nimittäjä lavennetaan nimittäjän kompleksikonjugaatilla.

**Esimerkki 10.** Jaetaan kompleksiluku $3 + 3i$ luvulla $4 + 2i$.

$$\frac{3 + 3i}{4 + 2i} = \frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{12 - 6i + 12i - 6i^2}{4^2 + 2^2} = \frac{18 + 6i}{20} = \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i.$$

## 2.5 Kompleksiluvut järjestettyinä lukupareina

Aiemmin kompleksiluvut on esitetty muodossa $z = a + bi$. Käydään seuraavaksi läpi, kuinka ne voidaan ilmaista järjestettyinä lukupareina. Kompleksiluvun reaaliosan $\mathrm{Re}(z) = a$ ja imaginaariosan $\mathrm{Im}(z) = b$ avulla kompleksiluku $z = a + bi$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = (a, b).$$

Lukupari $(a, b)$ koostuu reaalisista luvuista, joten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Järjestettyjen lukuparien summa ja erotus menee kuten kompleksiluvuillakin eli reaaliosat ja imaginaariosat lasketaan erikseen.

**Esimerkki 11.** Lasketaan yhteen samat kompleksiluvut kuin esimerkissä 3, jossa $z_1 = 3+i$ ja $z_2 = 2+5i$. Järjestettynä lukuparina esitettynä $z_1 = (3,1)$ ja $z_2 = (2,5)$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3,1) + (2,5) \\ &= (3+2, 1+5) \\ &= (5,6). \end{aligned}$$

Aiemmin näytettiin, että kahden kompleksiluvun $z_1 = a_1 + b_1 i$ ja $z_2 = a_2 + b_2 i$ tulo voidaan laskea kaavalla $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. Sama kaava voidaan ottaa käyttöön järjestetyille lukupareille, jolloin se kirjoitetaan muodossa

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Kompleksikonjugaatti järjestetylle lukuparille $z = (a,b)$ voidaan esittää muodossa $z^* = (a, -b)$. Sen avulla järjestettyjä lukupareja voidaan jakaa toisillaan ja käänteisluvulle saadaan kaava. Niiden esittäminen ohitetaan tässä tutkielmassa.

# 3 Kompleksiluvut tasossa

Sveitsiläinen amatöörimatemaatikko Jean-Robert Argand (1768 – 1822) julkaisi vuonna 1813 ideansa kompleksilukujen geometrisesta tulkinnasta omakustanteisessa lehtisessään. Lehtinen ei levinnyt kovinkaan laajalle, eikä siinä edes mainittu tekijänsä nimeä. Jacques Français sai lehtisen käsiinsä ja uudelleenjulkaisi Argandin idean kompleksitasoista pyytäen tätä samalla julkistamaan henkilöllisyytensä. Argand ilmoittautui tekijäksi ja kompleksitasoista käytetääkin nykyään joissain yhteyksissä nimitystä *Argandin diagrammi*.

Myöhemmin kävi kuitenkin ilmi, että norjalainen maanmittaaja Caspar Wessel (1745 – 1818) oli jo vuonna 1799 julkaissut työn, joka käsitteli geometrista esitystä kompleksiluvuille. Wesselin julkaisu pysyi matemaattiselta yhteisöltä salassa, kunnes melkein sata vuotta myöhemmin vuonna 1895 tanskalainen matemaatikko Christian Juel (1855 - 1935) löysi julkaisun. Nykyään tiedeyhteisö on yhtä mieltä siitä, että Wessel oli ensimmäinen, joka kehitti kompleksitasot, mutta siitä huolimatta ne kantavat edelleen Argandin nimeä.

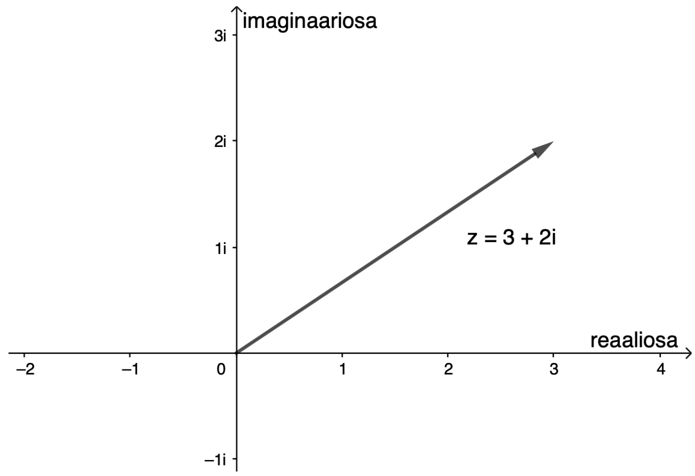
Vuosia tämän jälkeen selvisi, että menestyksekäs englantilainen matemaatikko John Wallis (1616 – 1703) oli jo 1600-luvun lopulla ehdottanut, että toisen asteen yhtälön "mahdottomat" juuret voitaisiin esittää lukusuorasta lähtevinä kohtisuorina janoina. Yleisesti ajatellaan, että Argand ja muut ovat todennäköisesti laajentaneet tätä Wallisin näkemystä luodessaan omaa esitystään kompleksitasosta [13].

Tässä kappaleessa esiteltävät asiat on kirjoitettu perustuen lähteisiin [3] ja [13], jollei toisin mainita. Kuvat on tehty GeoGebralla.

## 3.1 Napakoordinaattiesitys

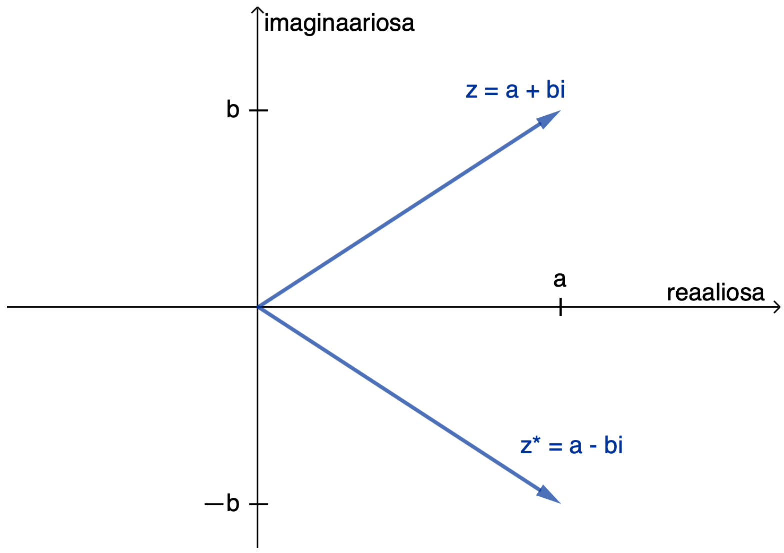
Kompleksiluvuille saadaan geometrinen esitys (kuva 1), kun ne esitetään *kompleksitasossa*, jossa vaaka-akselilla on kompleksiluvun reaaliosa ja pystyakselilla imaginaariosa. Kompleksiluvulle saadaan *napakoordinaattiesitys*, kun origosta piirretään jana tasossa olevaan pisteeseen. Oleellista esityksessä on piirretyn janan pituus sekä suunta.

Kuvasta 1 nähdään, kuinka kompleksiluvulle $z = a + bi$ aiemmin määritellylle itseisarvolle $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ saadaan geometrinen tulkinta Pythagoraan lauseella. Itseisarvo voidaan usein ajatella luvun etäisyytenä nollasta. Kompleksilukujen tapauksessa itseisarvo on luvun etäisyys origosta.




Kuva 1: Tasoon piirretty kompleksiluku $z = 3 + 2i$.

**Huomautus 12.** Kompleksiluku $z$ ja sille tutkielmassa aiemmin määritelty kompleksikonjugaatti $z^*$ ovat toistensa peilikuvia reaali- eli vaaka-akselin suhteen kompleksitasossa (kuva 2).

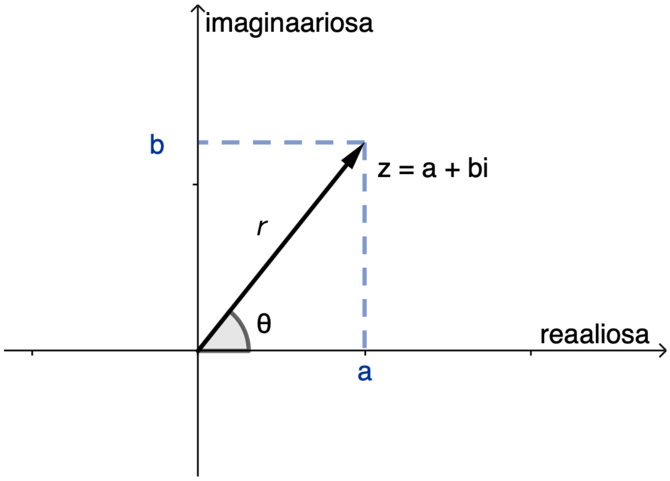



Kuva 2: Kompleksiluku $z$ ja sen kompleksikonjugaatti $z^*$ kompleksitasossa.

Kuvan 2 perusteella ja lähteen [6] mukaan voidaan havaita helposti algebrallisestikin perusteltavissa oleva ehto

$$|z^*| = |z|.$$

Tarkastellaan seuraavaksi (kuva 3) mielivaltaista kompleksilukua $z = a + bi$ tasossa.




Kuva 3: Napakoordinaattiesitys kompleksiluvusta $z = a + bi$.

Kuvassa kompleksiluvun pituutta eli normia $|z|$ on merkitty kirjaintunnuksella $r$. Reaaliakselin ja janan $r$ väliin jäävä kulma $\theta \in [0, 2\pi]$ on *vaihekulma* radiaaneina. Vaihekulmaa $\theta$ kutsutaan kompleksiluvun $z$ *argumentiksi* ja sitä merkitään

$$\arg(z) = \theta.$$

Kuvasta 3 saadaan seuraavanlaiset kaavat trigonometrisille funktioille kosinille ja sinille.

$$\cos\theta = a/r \implies r\cos\theta = a$$

ja

$$\sin\theta = b/r \implies r\sin\theta = b.$$

Tästä huomataan, että kompleksiluvun $z = a + bi$ vaakasuora komponentti on $r\cos\theta$ ja pystysuora komponentti on $r\sin\theta$. Näin ollen kompleksiluku $z = a + bi$ voidaan esittää muodossa

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Näin saatua esitysmuotoa kutsutaan kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseksi. Tällöin $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ ja $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$. Lisäksi kompleksikonjugaatti $z^*$ voidaan myöhemmin esiteltävän lauseen 15 avulla esittää muodossa

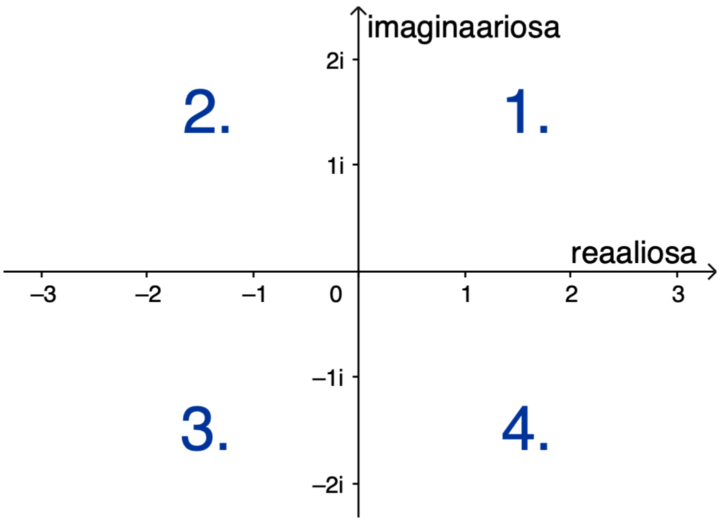
$$z^* = r(\cos\theta - i\sin\theta),$$

koska $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ja $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

## 3.2 Laskeminen napakoordinaateilla

Jos halutaan ilmaista jokin tietty kompleksiluku $z = a + bi$ napakoordinaattiesityksessä, täytyy laskea sen pituus eli itseisarvo $|z|$ sekä vaihekulman $\theta$ suuruus.

Vaihekulman laskemiseksi täytyy tarkastella, missä neljänneksessä kompleksitasoa (kuva 4) kompleksiluku sijaitsee.




Kuva 4: Kompleksitason jako neljään osaan.

Vaihekulman saa laskettua sijainnin perusteella seuraavasti:

| | | |
|---|---|---|
| 1.neljännes : | Kun $a > 0$ ja $b > 0$ : | $\theta = \arctan(b/a)$ |
| 2.neljännes : | Kun $a < 0$ ja $b > 0$ : | $\theta = \arctan(b/a) + \pi$ |
| 3.neljännes : | Kun $a < 0$ ja $b < 0$ : | $\theta = \arctan(b/a) + \pi$ |
| 4.neljännes : | Kun $a > 0$ ja $b < 0$ : | $\theta = \arctan(b/a) + 2\pi$ |

**Esimerkki 13.** Muutetaan kompleksiluku $z = 2 - 2i$ napakoordinaattimuotoon. Annetussa kompleksiluvussa $a = 2 > 0$ ja $b = -2 < 0$. Kompleksiluku sijaitsee siis kompleksitason neljännessä osassa (kuva 4). Lasketaan vaihekulma $\theta$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi.$$

Kompleksiluvun itseisarvoksi saadaan $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Nyt kompleksiluku $z = 2 - 2i$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi).$$

Jos vaihekulman suuruuden ilmaisee radiaanien sijaan asteina, saadaan

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°).$$

**Huomautus 14.** Vaihekulman laskemisessa käytetyn funktion arctan sijaan voisi käyttää suoraan tangentin käänteisfunktion merkintää $\tan^{-1}$.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan kahden kompleksiluvun välistä tuloa napakoordinaateissa. Jotta tulolle voidaan johtaa mahdollisimman yksinkertainen kaava, tarvitaan muutamia yleisesti tunnettuja trigonometrian kaavoja. Kaavat on otettu suoraan taulukkokirjasta [10], eikä niitä todisteta.

**Lause 15.** Olkoon $x$ ja $y$ reaalilukuja. Tällöin seuraavat kaavat ovat voimassa:

1. $\cos(x) = \cos(-x)$
2. $\sin(x) = -\sin(-x)$
3. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
4. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

Lauseen 15 kohdissa 3 ja 4 kaksoismerkistä $\pm$ on voimassa vain joko ylemmät tai alemmat merkit.

Nyt kompleksilukujen tulolle voidaan johtaa kaava. Olkoon $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $z_1, z_1 \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1 i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \end{aligned}$$

Käyttämällä lauseen 15 kohtia 3 ja 4 saadaan

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)], \tag{1}$$

joka on haluttu kaava tulolle.

Seuraavaksi tutkielmassa esitetään kaava, jonka avulla voidaan laskea kompleksiluvun potensseja. Kaava on nimetty ranskalaissyntyisen matemaatikon Abraham De Moivren (1667 – 1754) mukaan, vaikka hän ei koskaan esittänyt tulosta juuri kyseisenlaisessa muodossa.

**Lause 16** (De Moivren kaava)**.** Olkoon $n$ positiivinen kokonaisluku ja olkoon $\theta$ reaaliluku. Tällöin

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

*Todistus.* Todistetaan lause käyttämällä induktiotodistusta. Induktiolla todistettaessa halutaan ensin osoittaa, että lauseen väittämä pätee, kun $n = 1$. Tämän jälkeen oletetaan, että väittämä on voimassa luvulla $n$ ja osoitetaan, että väittämä toimii myös luvulla $n + 1$.

Aloitetaan todistus siis tarkastelemalla väitettä luvun $n$ saadessa arvon 1. Tällöin

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\cdot\theta + i\sin 1\cdot\theta,$$

mikä pitää paikkansa. Osoitetaan sitten, että väite toimii myös luvulla $n + 1$, kun oletuksena on, että väite toimii luvulla $n$.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta)\\ &= \cos[(n+1)\theta] + i\sin[(n+1)\theta],\end{aligned}$$

missä toinen yhtäsuuruus seuraa induktio-oletuksesta ja kolmas kaavasta (1). Väite siis toimii myös luvulla $n + 1$, joten induktiotodistuksen mukaan se pätee millä tahansa luvulla $n$. □

**Seuraus 1.** De Moivren kaavasta seuraa, että

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Tätä kaavaa käyttäen voidaan laskea kompleksilukujen potensseja.

**Esimerkki 17.** Lasketaan kompleksiluvun $z = (2-2i)^6$ arvo. Esimerkin 13 mukaan

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi).$$

Nyt seurauksen 1 mukaan

$$(2-2i)^6 = (2\sqrt{2})^6[\cos\left(6\cdot\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{7}{4}\pi\right)] = (2\sqrt{2})^6(\cos\frac{21}{2}\pi + i\sin\frac{21}{2}\pi).$$

Laskulauseketta voidaan yksinkertaistaa vähentämällä $2\pi$:n monikertoja:

$$\cos\left(\frac{21}{2}\pi - 2\pi\cdot 5\right) + i\sin\left(\frac{21}{2}\pi - 2\pi\cdot 5\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Laskulauseke saadaan muotoon

$$(2-2i)^6 = (2\sqrt{2})^6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 512(0 + i\cdot 1) = 512i.$$

### 3.3 Eulerin lause

Sveitsiläinen matematiikko Leonhard Euler (1707 − 1783) todisti seuraavan lauseen:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tätä lausetta kutsutaan *Eulerin lauseeksi* tai *Eulerin kaavaksi*. Tässä tutkielmassa tulosta kutsutaan Eulerin lauseeksi.

Jos $\theta = \pi$, yhtälö saa muodon

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

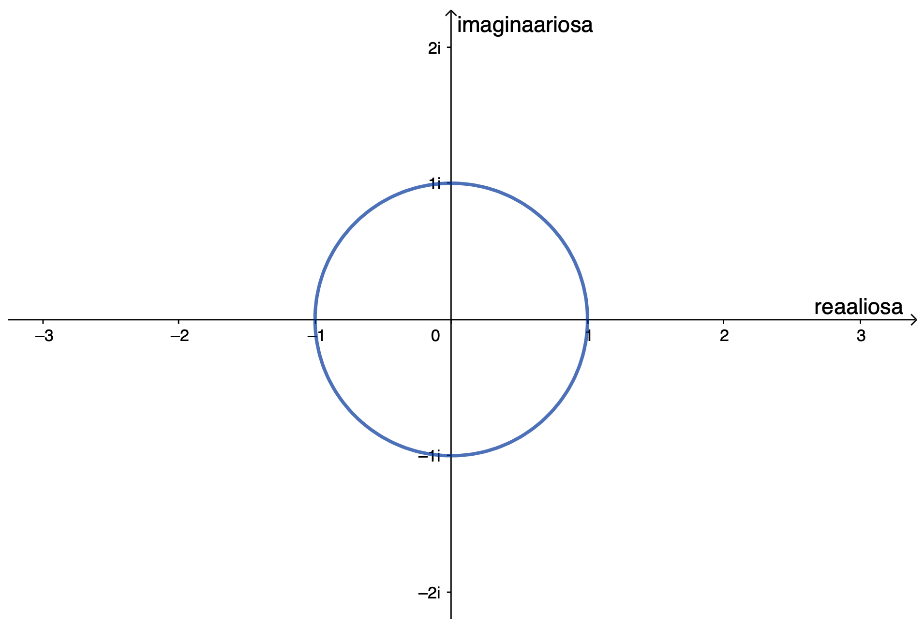
Tästä saadaan niin kutsuttu *Eulerin identiteetti*, kun edellä oleva yhtälö kirjoitetaan muodossa

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Toinen merkittävä tulos kaavalla saadaan, jos vaihekulma $\theta = \pi/2$.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Edellä saadut tulokset $e^{i\pi} = -1$ ja $e^{i\dfrac{\pi}{2}} = i$ voidaan määritellä myös geometrisesti käyttäen apuna kompleksitason yksikköympyrää (kuva 5).




Kuva 5: Yksikköympyrä kompleksitasossa.

Kuvasta nähdään, että positiiviselta reaalikselilta kierrettäessä vastapäivään ympyrä saa arvon -1, kun $\theta = \pi$. Vastaavasti yksikköympyrä saa arvon $i$, kun $\theta = \pi/2$.

Eulerin lauseella $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ on seuraavaksi esiteltävä seuraus, jonka avulla voidaan laskea luvun $e^z, z \in \mathbb{C}$ arvo.

**Seuraus 2.** Kompleksiluvulla $z = a + bi$ pätee

$$e^z = e^a(\cos b + i\sin b) = e^a\cos b + ie^a\sin b.$$

Näin saadussa lausekkeessa $\mathrm{Re}(e^z) = e^a\cos b$ ja $\mathrm{Im}(e^z) = e^a\sin b$.

**Esimerkki 18.** Lasketaan $e^z$, kun $z = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

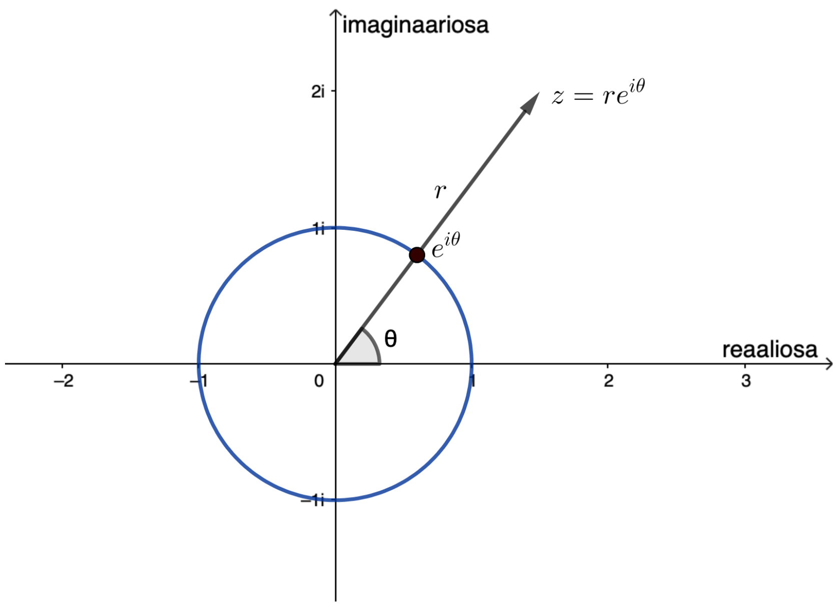
$$e^z = e^{2-\frac{\pi}{2}} = e^2\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + ie^2\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = e^2\cdot 0 + ie^2\cdot(-1) = -e^2 i.$$

## 3.4 Kompleksiluvun eksponenttimuoto

Aiemmin näytettiin, että kompleksiluvun $z$ napakoordinaattiesitys on muotoa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Kun siihen yhdistetään Eulerin lause, saadaan

$$z = re^{i\theta},$$

jossa $r$ on $|z|$. Napakoordinaattiesityksen avulla voidaan siis mikä tahansa kompleksiluku $z$ esittää eksponenttimuodossa $z = re^{i\theta}$. Jos $r = 1$, saadaan kompleksitason piste $z = e^{i\theta}$, joka sijaitsee yksikköympyrän kehällä (kuva 6).




Kuva 6: Graafinen esitys napakoordinaattien eksponenttimuodosta.

**Esimerkki 19.** Esimerkissä 13 saatu kompleksiluku $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$ voidaan esittää muodossa

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

Tutkielmassa esitellään seuraavaksi muutama eksponenttifunktiota koskeva laskusääntö. Laskusääntöjä tarvitaan kompleksiluvun eksponenttimuotoon liittyvissä todistuksissa. Sääntöjen todistaminen ohitetaan tässä tutkielmassa.

**Lause 20.** Olkoot $z$ ja $w$ kompleksilukuja. Eksponenttifunktiolla $e$ on voimassa seuraavat laskusäännöt:

1. $e^{z+w} = e^z e^w$
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$
3. $e^{z-w} = \dfrac{e^z}{e^w}$

Osoitetaan seuraavaksi kompleksikonjugaatin $z^*$ ja käänteisluvun $z^{-1}$ eksponenttimuotoiset esitykset.

**Lause 21.** Olkoon $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, jossa $r = |z| > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ ja $\arg(z) = \theta + 2k\pi$. Tällöin luvun $z$ kompleksikonjugaatti on

$$z^* = re^{-i\theta}$$

ja käänteisluku on

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

*Todistus.* Kompleksikonjugaattia $z^*$ koskeva väite saadaan todistettua käyttämällä napakoordinaattiesityksen kompleksikonjugaattia sekä lauseen 15 kohtia 1 ja 2 Tällöin saadaan

$$z^* = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^* = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}.$$

Luvun ja sen käänteisluvun tulo on aina yksi, joten osoitetaan, että $zz^{-1} = 1$.

$$zz^{-1} = re^{i\theta} \cdot \frac{1}{r}e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1.$$

□

Tarkastellaan seuraavaksi eksponenenttimuodon tuloa ja osamäärää.

**Lause 22.** Olkoon $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$. Tällöin

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ja

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

*Todistus.* Osoitetaan ensin tuloa $z_1 z_2$ koskeva väite:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Todistetaan sitten jälkimmäisenä esitetty väite. Käytetään apuna luvun $z_2$ käänteislukua $z_2^{-1} = \dfrac{1}{r_2} e^{-i\theta_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = r_1 e^{i\theta_1} \frac{1}{r_2} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 + (-i\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

□

## 3.5 Trigonometriset funktiot

Palataan Eulerin lauseeseen $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Jos korvataan lauseen vaihekulma $\theta$ sen vastaluvulla $-\theta$, saadaan lauseen 15 nojalla

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta).$$

Laskemalla näin saatu yhtälö puolittain yhteen Eulerin lauseen kanssa, saadaan

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$

Nyt siis

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Vastaavalla tavalla sinille saadaan kaava, kun Eulerin lauseesta vähennetään negatiivisella vaihekulmalla muodostettu yhtälö:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta.$$

Tällöin

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Näin muodostetut kosinin ja sinin lausekkeet sisältävät eksponenttifunktion $e^{i\theta}$, jonka yhteys kompleksilukuihin on jo aiemmin todettu. Sen avulla saadaan seuraava määritelmä.

**Määritelmä 23.** Kompleksiluvulle $z$ määritellään

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{ja} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Näiden määritelmien avulla kompleksiluvulle $z$ voidaan muun muassa todistaa lauseen 15 kohtia 1 ja 2 vastaavat tulokset.

**Lause 24.** Seuraavat trigonometriset kaavat ovat voimassa kompleksiluvulle $z$:

1. $\cos(-z) = \cos(z)$

2. $\sin(-z) = -\sin(z)$

*Todistus.* Edellisen määritelmän nojalla

1. $\cos(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \dfrac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z)$ ja

2. $\sin(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin(z)$.

$\square$

# 4 Algebran peruslauseen todistaminen

Tässä osiossa esitellään aputuloksia sekä niihin liittyviä määritelmiä. Lähteenä tämän kappaleen tuloksille on Tuomas Hytösen kirjoittama artikkeli *Algebran peruslause lukiolaisille* [5], jollei erikseen ole merkitty muuta lähdettä.

Kaikkien esitettävien aputulosten avulla päädytään lopulta todistamaan seuraavaksi esiteltävä algebran peruslause.

**Lause 25** (Algebran peruslause)**.** Olkoon $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ kompleksikertoiminen polynomi, joka on vähintään astetta 1 eli $n \geq 1$. Tällöin polynomilla on vähintään yksi nollakohta kompleksitasossa eli on olemassa sellainen kompleksitason piste $z_0$, että $p(z_0) = 0$.

Saksalainen Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ esitti vuonna 1799 ensimmäisen hyväksyttävän todistuksen algebran peruslauseelle. Hän myös nimesi tuloksen algebran peruslauseeksi [11]. Vuonna 1806 Jean-Robert Argand esitti Gaussiakin täsmällisemmän todistuksen lauseelle. Argandin todistusta pidetään ensimmäisenä täysin aukottomana todistuksena [5].

## 4.1 Ääriarvolause

Algebran peruslauseen todistamiseksi on ensin perehdyttävä muutamiin oleellisiin määritelmiin sekä käsitteisiin. Osa määritelmistä sivuaa lukion pitkän matematiikan oppimäärää osan ollessa täysin uusia.

**Määritelmä 26.** [12]. *Kiekko* on kompleksitasossa oleva pallo, joka rajaa tasosta ympyrän. Kiekko on *avoin*, kun

$$B(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\},$$

missä $a \in \mathbb{C}$ on kiekon keskipiste ja $R \in \mathbb{C}$ on kiekon säde. Vastaavasti *suljetussa* kiekossa

$$\overline{B}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}.$$

Suljetussa kiekossa sen reuna on siis mukana kiekossa toisin kuin avoimessa kiekossa.

Kiekko on kompleksianalyysin peruskäsitteistöä. Kun reaalilukujen tapauksessa tarkasteltaisiin esimerkiksi avointa väliä, kompleksiluvuilla vastaavassa tilanteessa on kyse avoimesta kiekosta.

Määritellään sitten jatkuvuus. Lähteen [4] mukaisesti funktion jatkuvuus määritellään lukiossa raja-arvon avulla toteamalla, että funktio $f$ on jatkuva pisteessä $a$, mikäli

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Formaalimpi määritelmä jatkuvuudelle saadaan niin kutsutulla epsilon-delta -menetelmällä, joka esitellään seuraavaksi [3].

**Määritelmä 27** (Jatkuvuus)**.** Olkoon funktio $f$ määritelty pisteen $z_0 \in \mathbb{C}$ läheisyydessä. Funktion $f$ sanotaan olevan *jatkuva* pisteessä $z_0$, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

kaikilla $z\colon |z - z_0| < \delta$.

Edellä esitetty määritelmä tarkoittaa käytännössä sitä, että kun muuttujan $z$ arvo muuttuu hieman, funktion $f(z)$ arvossa ei tapahdu äkillisiä muutoksia.

**Määritelmä 28.** [1] Funktion $f$ *maksimi* on suurin arvo, jonka funktio saavuttaa. Kun funktio $f$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $z_1$, maksimille pätee

$$f(z) \leq f(z_1)$$

kaikilla funktion määrittelyjoukkoon kuuluvilla pisteillä $z$. Vastaavasti funktion *minimi* on pienin mahdollinen funktion $f$ arvo. Voidaan siis kirjoittaa

$$f(z_0) \leq f(z),$$

kun funktio $f$ saavuttaa minimiarvonsa pisteessä $z_0$. Funktiolla voi olla korkeintaan yksi maksimi- tai minimiarvo, mutta funktio voi saavuttaa kyseisen arvon useammassa eri kohdassa. Funktion maksimia ja minimiä kutsutaan funktion *ääriarvoiksi*.

Seuraavaksi esitellään funktion ääriarvoihin liittyvä lause, joka tarvitaan algebran peruslauseen todistamiseen. Lukiossa kyseinen lause esitetään niin, että suljetun kiekon sijaan funktion määrittelyjoukkona on reaalilukujen suljettu väli $[a, b]$. Lause tunnetaan nimellä *Weierstrassin lause*, mutta siitä käytetään myös nimityksiä *ääriarvolause* ja *min-max-lause*. Tässä tutkielmassa lauseen todistus sivuutetaan.

**Lause 29.** Olkoon $f$ jatkuva funktio, $\overline{B}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}$ suljettu kiekko kompleksitasossa ja $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$. Tällöin funktiolla $f$ on minimikohta $z_0 \in \overline{B}$ kiekolla eli

$$f(z_0) \leq f(z)$$

kaikilla $z \in \overline{B}$ .

Vaikka lauseessa mainitaan vain kiekon minimikohta, pätee se myös maksimikohdalle. Funktiolla $f$ on siis kiekolla molemmat ääriarvokohdat. Algebran peruslauseen todistamisen kannalta olemme kuitenkin kiinnostuneita vain minimikohdasta.

## 4.2 Minimi kompleksitasossa

Seuraavaksi osoitetaan, että polynomin $p(z)$ itseisarvolla on minimi kompleksitasossa. Tämän osoittamiseksi käydään ensin läpi epäoleellisen raja-arvon määritelmä sekä todistetaan, että jos $|z|$ lähestyy ääretöntä, niin myös $|p(z)|$ kasvaa rajatta.

**Määritelmä 30.** Kompleksilukufunktiolla $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on epäoleellinen raja-arvo $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \to \infty$ eli

$$|f(z)| \to \infty \text{ kun } |z| \to \infty,$$

jos jokaista reaalilukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen reaaliluku $H$, että

$$|f(z)| > M$$

kaikille $z \in \mathbb{C}$, joille $|z| > H$.

Huomaa, että edellisen määritelmän epäoleellisen raja-arvon määritelmä vastaa reaalilukufunktion vastaavaa määritelmää.

**Lemma 31.** Olkoon $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ kompleksikertoiminen polymoni, jossa $n > 1$. Jos $|z| \to \infty$, niin $|p(z)| \to \infty$.

*Todistus.* Muokataan ensin annettua polynomia $p(z)$ muuttamalla sen termien järjestystä. Saadaan

$$|p(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| = |a_0 + \cdots + a_n z^n| = \left|a_n z^n + a_0 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}\right|.$$

Otetaan jokaiseen termiin tekijäksi $z^n$, jolloin

$$\begin{aligned}
\left|a_n z^n + a_0 z^n z^{-n} + \cdots + a_{n-1} z^n z^{-1}\right| &= \left|a_n z^n + a_n z^n \left(\frac{a_0}{a_n} z^{-n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1}\right)\right| \\
&= \left|a_n z^n + a_n z^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right| \\
&= |a_n| \cdot |z|^n \cdot \left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right|.
\end{aligned}$$

Nyt $|z|^n \to \infty$, koska $|z| \to \infty$. Lisäksi $z^{k-n} \to 0$ kaikilla $k \in \{0, ..., n-1\}$. Nämä huomioiden saadaan raja-arvon laskusääntöjen avulla, että

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = |a_n| \cdot \infty \cdot \left|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot 0\right| = |a_n| \cdot \infty \cdot 1 = \infty.$$

□

**Lemma 32.** Kompleksipolynomin itseisarvolla $|p(z)|$ on minimikohta kompleksitasossa.

*Todistus.* Edellisessä lemmassa näytetiin, että kun $|z| \to \infty$, niin $|p(z)| \to \infty$. Raja-arvon määritelmää käyttämällä saadaan, että on olemassa reaaliluku $R$, jolla

$$|p(z)| > |p(0)|, \text{ kun } |z| > R.$$

Olkoon $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ kompleksitason suljettu kiekko. Funktio $z \mapsto |p(z)|$ on jatkuva ja reaaliarvoinen, joten lauseen 29 mukaan funktiolla on minimikohta $z_0$ kiekolla. Voidaan siis kirjoittaa

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \text{ kun } |z| \leq R.$$

Huomataan erityisesti, että pisteen $z_0$ ollessa minimikohta, on voimassa ehto $|p(z_0)| \leq |p(0)|$.

Yhdistetään seuraavaksi funktion minimikohta $|p(z_0)|$ todistuksen alun kanssa, jolloin saadaan

$$|p(z_0)| \leq |p(0)| < |p(z)|, \text{ kun } |z| > R.$$

Yhdistämällä edellä esitetty havainto kiekon minimikohdasta saadun tuloksen kanssa, ehto

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|$$

saadaan pätemään kaikilla kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$. Nyt siis $|p(z)|$ saavuttaa miniminsä kompleksitasossa. □

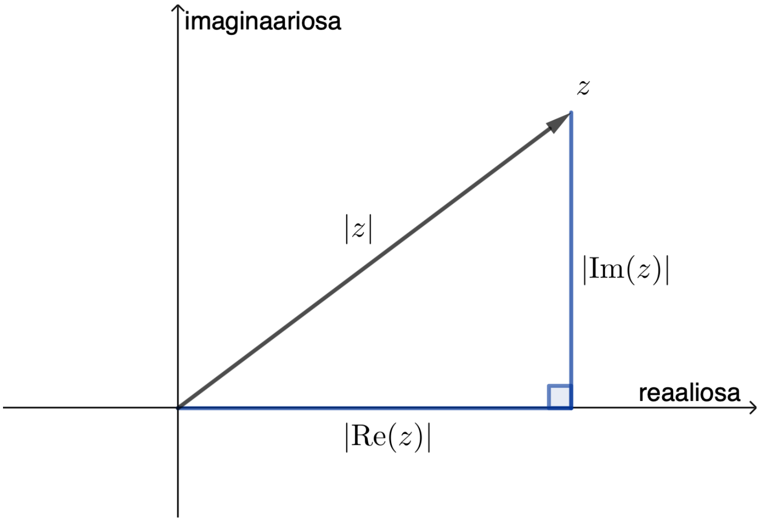
## 4.3 Kolmioepäyhtälö

*Kolmioepäyhtälö* on hyödyllinen apuväline, kun halutaan arvioida lausekkeita alas- tai ylöspäin. Epäyhtälön todistamiseksi tarvitaan seuraavassa lauseessa esiteltävää tulosta, jonka mukaan itseisarvo kompleksiluvun reaaliosasta on aina korkeintaan kompleksiluvun itseisarvo [3].

**Lause 33.** Olkoon $z$ kompleksiluku. Tällöin

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \qquad \text{ja} \qquad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

*Todistus.* Tarkastellaan väitteitä kuvan 7 avulla.




Kuva 7: $|z|$ tasoon piirrettynä.

Graafisessa esityksessä kompleksitasoon muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa hypotenuusa on $|z|$ ja kateetteina $|\mathrm{Re}(z)|$ ja $|\mathrm{Im}(z)|$.

Hypotenuusa on aina suorakulmaisen kolmion pisin sivu, joten siitä seuraa, että $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ ja $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Kolmiossa kahden sivun summa on aina suurempi kuin kolmas jäljelle jäänyt sivu. Näin ollen $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \geq |z|$, joka oli viimeinen todistettava väite. □

Todistetaan seuraavaksi kolmioepäyhtälö lähteen [6] mukaisesti. Kolmioepäyhtälöä tarvitaan myöhemmin tutkielmassa itseisarvolausekkeen ylöspäin arviointiin.

**Lause 34** (Kolmioepäyhtälö)**.** Kaikilla kompleksiluvuilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ pätee

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

*Todistus.* Todistetaan ensin väittämän oikea puoli osoittamalla, että $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Kolmioepäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia kaikilla kompleksiluvuilla $z_1, z_2$, joten toiseen potenssiin korottaminen on mahdollista.

Nyt koska $zz^* = |z|^2$ ja $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$, saadaan

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\ &= (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\ &= z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + z_1 z_2^* + z_1^* z_2 + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Käytetään sitten näin saadun lausekkeen termiin $z_1^* z_2$ kompleksikonjuugaatin laskusääntöä $z = (z^*)^*$. Tällöin

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 z_2^* + [(z_1^* z_2)^*]^* + |z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* + |z_2|^2.$$

Lasketaan seuraavassa vaiheessa yhteen termit $z_1 z_2^*$ ja $(z_1 z_2^*)^*$ ja arvioidaan lauseketta ylöspäin, jolloin

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2.$$

Jatketaan käyttämällä binomin neliön summakaavaa $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ oikealta vasemmalle. Tällöin

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

eli

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

mikä on kolmioepäyhtälön oikea puoli. Vasemman puolen osoittamiseksi voidaan hyödyntää edellä tehtyjä vaiheita ja kirjoittaa

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*) + |z_2|^2 \geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2,$$

jolloin

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

joka on lauseen väittämän vasen puoli. □

## 4.4 Polynomin arvo minimikohdassa

Seuraavaksi esiteltävän lemman todistaminen todistaa koko algebran peruslauseen.

**Lemma 35.** Olkoon funktion $z \mapsto |p(z)|$ minimikohta kompleksitason piste $z_0$. Tällöin $p(z_0) = 0$.

*Todistus.* Otetaan käyttöön apupolynomi $q(z) = p(z + z_0)$. Funktion $z \mapsto |q(z)|$ minimikohta on 0, koska

$$|q(0)| = |p(0 + z_0)| = |p(z_0)|.$$

Nyt lemman väite $p(z_0) = 0$ on ekvivalentti sen kanssa, että $q(0) = 0$. Polynomi $q(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$q(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k,$$

jossa $b_k \in \mathbb{C}$ ja $n \geq 1$. Muutetaan edellä olevaa esitystapaa jättämällä mahdolliset nollakertoimiset termit polynomin alusta pois, jolloin saadaan

$$q(z) = b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k z^k,$$

$r \in \{1, ..., n\}$ ja $b_r \neq 0$.

Funktion $z \mapsto |q(z)|$ minimikohta on 0. Tällöin polynomille $q(z)$ voidaan laskea arvo

$$q(0) = b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k \cdot 0^k = b_0.$$

Tulokseksi saatu $q(0) = b_0$ tarkoittaa, että lemman todistamiseksi riittää osoittaa, että $b_0 = 0$.

Tehdään nyt vastaoletus, jonka mukaan $b_0 \neq 0$ eli $|b_0| > 0$. Tarkoituksena on saada ristiriita aikaiseksi löytämällä sellainen kompleksitason piste $z$, jossa funktio $z \mapsto |q(z)|$ saa pienemmän arvon kuin kohdassa $|q(0)|$. Sellaisen pisteen löytyminen on ristiriidassa sen kanssa, että polynomin $q(z)$ minimikohta on 0.

Katkaistaan seuraavaksi apupolynomi $q(z)$ siten, että $\bar{q}(z) = b_0 + b_r z^r$ ja tutkitaan sen nollakohtia.

$$b_0 + b_r z^r = 0 \iff z^r = -b_0/b_r \in \mathbb{C}.$$

Näin saadulle kompleksiluvulle $-b_0/b_r$ saadaan napakoordinaattiesitys $-b_0/b_r = te^{i\theta}$, jolloin polynomin $\bar{q}(z)$ erääksi nollakohdaksi saadaan

$$z_1 = \sqrt[r]{te^{i\theta}} = \sqrt[r]{t}\sqrt[r]{e^{i\theta}} = \sqrt[r]{t}e^{i\theta/r}.$$

Tarkastellaan sitten polynomin $q(z)$ käyttäytymistä kompleksitason pisteessä $z = sz_1$, missä $s \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$|q(sz_1)| = \left| b_0 + \sum_{k=r}^{n} b_k (sz_1)^k \right| = \left| b_0 + b_r s^r z_1^r + \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^k z_1^k \right|.$$

Lisätään ja vähennetään polynomin itseisarvoon termi $b_0 s^r$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} |q(sz_1)| &= \left| b_0 - b_0 s^r + b_0 s^r + b_r s^r z_1^r + s^r \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^{k-r} z_1^k \right| \\ &= \left| (1 - s^r) b_0 + s^r (b_0 + b_r z_1^r) + s^r \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^{k-r} z_1^k \right|. \end{aligned}$$

Koska $b_0 + b_r z_1^r$ on katkaistun apupolynomin $\bar{q}(z)$ nollakohta, voidaan kirjoittaa

$$|q(sz_1)| = \left| (1 - s^r) b_0 + s^r \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^{k-r} z_1^k \right|$$

Kolmioepäyhtälön avulla voidaan saatua lauseketta arvioida ylöspäin. Nyt siis

$$|q(sz_1)| \leq (1 - s^r)|b_0| + s^r \sum_{k=r+1}^{n} |b_k| s^{k-r} |z_1|^k.$$

Nyt $s^{k-r} \longrightarrow 0$ kaikilla $k \in \{r+1, ..., n\}$, kun $s \longrightarrow 0$. Näin ollen saatu lauseke lähestyy arvoa $|b_0|$.

Tehdään seuraavaksi luvun $s \in (0,1)$ valinta siten, että lausekkeen lopusssa oleva summa saa korkeintaan arvon $\frac{1}{2}|b_0|$. Merkitään näin valittua lukua $s = s_1$. Nyt

$$|q(s_1 z_1)| \leq (1 - s_1^r)|b_0| + s_1^r \cdot \frac{1}{2}|b_0| = (1 - s_1^r + \frac{1}{2}s_1^r)|b_0| = (1 - \frac{1}{2}s_1^r)|b_0| < |b_0|$$

Nyt on päädytty tilanteeseen, jossa

$$|q(s_1 z_1)| < |b_0| = |q(0)|.$$

Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska polynomin $q$ pienin arvo on $|q(0)|$. On päädytty haluttuun ristiriitaan. Vastaoletus $b_0 \neq 0$ ei siis pidä paikkaansa, joten $|q(0)| = b_0 = 0$. Tämä väite oli yhtäpitävä lemman väitteen $p(z_0) = 0$ kanssa, joten väite on todistettu.

□

Nyt saatiin siis todistettua, että kompleksikertoimisen polynomin itseisarvon $|p(z)|$ minimi on nolla. Koska minimi on nolla, polynomilla $p(z)$ on siinä kohtaa nollakohta. Algebran peruslauseen (lause 25) väite, jonka mukaan polynomilla $p(z)$ on ainakin yksi nollakohta, on näin ollen todistettu.

Algebran peruslause toimii vain kompleksiluvuilla, eikä sen väitettä pysty todistamaan rajoituttaessa reaalilukukertoimisiin polynomeihin reaalijuurille. Reealikertoimisella polynomilla ei välttämättä ole ollenkaan reaalista nollakohtaa. Esimerkiksi toisen asteen polynomilla $p(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ ei ole nollakohtaa reaalilukujen joukossa. Polynomille saadaan kuitenkin kaksi nollakohtaa, kun laajennetaan tarkastelu kompleksilukuihin. Polynomin nollakohdat ovat tällöin

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Kaikissa tässä tutkielmassa esitetyissä todistuksissa lukujoukkona on nimenomaan kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$. Reaalilukujen käyttäminen kompleksilukujen sijaan olisi ollut suurelta osin mahdollista. Oleellinen kompleksilukujen ominaisuuksia tarvinnut vaihe oli, kun edellissä todistuksessa selvitettiin katkaistun apupolynomin $\bar{q}(z) = b_0 + b_r z^r$ nollakohtia. Päädyttiin tilanteeseen, jossa

$$z = \sqrt[r]{-b_0/b_r}.$$

Kompleksiluvuilla laskettaessa negatiivisessa juurrettavassa ei ole mitään ongelmaa. Jos kyse olisi kuitenkin reaaliluvuista, juuren ottaminen ei onnistuisi luvun $r$ saadessa parillisia arvoja.

## 4.5 Algebran peruslauseen seurauksia

Esitellään lopuksi muutamia seurauksia, joita algebran peruslauseella on. Kappale pohjautuu lähteisiin [7] ja [8] .

**Seuraus 3.** Polynomi $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ voidaan esittää muodossa

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

missä $z_i \in \mathbb{C}$ ovat polynomin $p(z)$ nollakohtia.

*Todistus.* Algebran peruslauseen nojalla polynomilla $p(z)$ on ainakin yksi nollakohta, merkitään $p(z_1) = 0$. Tällöin

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = q_{n-1}(z) + r,$$

jossa $q_{n-1}(z)$ on astetta $n-1$ oleva polynomi ja $r$ on jakojäännös. Jakojäännöksen $r$ on oltava vakio, koska jakojäännös on aina alempaa astetta kuin jakaja, jonka aste tässä tapauksessa on 1.

Polynomi $p(z)$ voidaan nyt esittää muodossa

$$p(z) = q_{n-1}(z)(z - z_1) + r.$$

Sijoitetaan saatuun lausekkeeseen $z = z_1$, jolloin

$$p(z_0) = q_{n-1}(z_1)(z_1 - z_1) + r = r.$$

Huomataan, että nyt siis $r = 0$, koska $z_1$ on polynomin nollakohta. Polynomin $p(z)$ esitys yksinkertaistuu muotoon

$$p(z) = q_{n-1}(z)(z - z_1).$$

Nyt $z - z_1$ on polynomin $p(z)$ tekijä eli polynomi on jaollinen sillä.

Sama menettely voidaan toistaan uudestaan: Algebran peruslauseen nojalla polynomilla $q_{n-1}(z)$ on vähintään yksi nollakohta $z_2$, jos $n - 1 > 0$. Tällöin yksi polynomin $q_{n-1}(z)$ tekijöistä on $z - z_2$. Saadaan $q_{n-1}(z) = q_{n-2}(z)(z - z_2)$ eli

$$p(z) = q_{n-2}(z)(z - z_1)(z - z_2).$$

Tätä jatkamalla päädytään lopulta tilanteeseen, jossa

$$p(z) = q_0(z)(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Tällöin $q_0(z)$ on vakio, koska sen aste on nolla. Kertolaskun perusteella $q_0(z)$ on termin $z^n$ kerroin, joten $q_0(z) = a_n$.

□

Mikäli polynomilla on jossain kompleksitason pisteessä moninkertainen nollakohta, osa luvuista $z_i$ on keskenään samoja. Lauseesta huomataan, että $n$-astetta olevalla polynomilla on $n$ kappaletta nollakohtia, jos kaikki nollakohdat lasketaan kertalukujensa mukaan yhteen. Esimerkiksi polynomilla $p(z) = (3 - 2i)z^5 - z^2 + 5$ on yhteensä 5 nollakohtaa.

Tarkastellaan seuraavaksi reaalikertoimista polynomia $p(z)$.

**Seuraus 4.** Olkoon $z_0$ polynomin $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, kompleksinen nollakohta. Tällöin myös sen kompleksikonjugaatti $z_0^*$ on polynomin $p(z)$ nollakohta.

*Todistus.* Koska $z_0$ on polynomin $p(z)$ nollakohta, voidaan kirjoittaa $p(z_0) = 0$ eli

$$a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n = 0.$$

Ottamalla molempien puolien kompleksikonjugaatit ja käyttämällä konjugaatin laskusääntöjä (lause 7, kohdat 1 ja 2), saadaan

$$a_0 + a_1 z_0^* + \cdots + a_n (z_0^n)^* = 0$$

eli $p(z_0^*) = 0$. Näin ollen $z_0^*$ on polynomin $p(z)$ nollakohta. □

Seurauksen 4 perusteella voidaan siis todeta, että jos reaalikertoimiselle polynomille tunnetaan jokin kompleksinen nollakohta $a + bi$, sille saadaan suoraan nollakohdaksi myös $a - bi$. Esimerkiksi polynomin $p(x) = x^2 + 1$ nollakohtina on $i$ sekä sen kompleksikonjugaatti $-i$. Reaalikertoimisella polynomilla on siis aina parillinen määrä kompleksisia nollakohtia, jotka esiintyvät kompleksikonjugaattipareina.

Lisäksi jos reaalikertoimisen polynomin asteluku on pariton, polynomin nollakohdista vähintään yksi on reaalinen [8]. Tämä seuraa siitä, että paritonta astetta olevalla polynomilla on pariton määrä nollakohtia. Jos kaikki nollakohdat olisivat kompleksisia, se olisi ristiriidassa sen kanssa, että kompleksiset nollakohdat esiintyvät aina kompleksikonjugaattipareina.

Reaalikertoimisessa polynomissa tekijöinä on siis aina $z - z_0$ ja $z - z_0^*$, kun $z_0$ polynomin nollakohta. Näiden tuloksi saadaan

$$(z-z_0)(z-z_0^*) = z^2 - zz_0^* - z_0 z + z_0 z_0^* = z^2 - (z_0^* + z_0)z + |z_0|^2 = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2.$$

Sekä $\mathrm{Re}(z_0)$ että $|z_0|^2$ ovat reaalisia, joten tulosta saadaan toista astetta oleva reaalikertoinen lauseke. Tästä saadaan seuraavaksi esiteltävä tulos.

**Seuraus 5.** Reaalikertoiminen polynomi on mahdollista jakaa reaalikertoimisiin tekijöihin, jotka ovat korkeintaan toista astetta. Esityksessä ensimmäisen asteen tekijät vastaavat reaalisia nollakohtia ja toisen asteen tekijät kompleksikonjugaattipareja.

**Esimerkki 36.** Polynomin $p(z) = z^4 + 49$ nollakohdat ovat

$$z_1 = (1+i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}, \quad z_2 = (-1-i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}, \quad z_3 = (-1+i)\sqrt{\tfrac{7}{2}} \quad \text{ja} \quad z_4 = (1-i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}$$

Nyt $z_1 = z_4^*$ ja $z_2 = z_3^*$. Seurauksen 3 mukaan polynomi voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$p(z) = \left[z - (1+i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}\right]\left[z - (-1-i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}\right]\left[z - (-1+i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}\right]\left[z - (1-i)\sqrt{\tfrac{7}{2}}\right].$$

Yhdistämällä kompleksikonjugaattiparit, saadaan

$$\begin{aligned} (z-z_1)(z-z_4) &= z^2 - \sqrt{14}z + 7 \\ &\text{ja} \\ (z-z_2)(z-z_3) &= z^2 + \sqrt{14}z + 7. \end{aligned}$$

Nyt esimerkkipolynomille saadaan seurauksen 5 mukainen lauseke, jolloin

$$z^4 + 49 = (z^2 - \sqrt{14}z + 7)(z^2 + \sqrt{14}z + 7).$$

# Viitteet


[1] R.A. Adams, C. Essex: *Calculus: A Complete Course*, Pearson, 2013.

[2] H. Apiola: *Kompleksiluvut ja -funktiot*, TKK/Matematiikan laitos, 2004.

[3] N.H. Asmar, L. Grafakos: *Complex Analysis with Applications*, Springer, 2018.

[4] T. Hautajärvi, J. Ottelin, L. Wallin-Jaakkola: *Abi pitkä matematiikka*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2011.

[5] T. Hytönen: *Algebran peruslause lukiolaisille*, Solmu, 3/2011.

[6] S.K. Kivelä: *Algebra ja geometria*, Otatieto, 1989.

[7] S.K. Kivelä: *Kompleksiluvut*, Opetusmateriaali, 2012.

[8] S.K. Kivelä: *M niin kuin matematiikka*, Hakapaino Oy, 2000.

[9] M. Livio: *Yhtälö jota ei voinut ratkaista*, Terra Cognita, 2005.

[10] R. Seppänen: *MAOL-taulukot*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2005.

[11] H. Tarnanen: *Matematiikan historia*, Opetusmateriaali, julkaisuvuosi epäselvä.

[12] J. Thompson: *Matematiikan käsikirja*, Kustannusosakeyhtiö Tammi, 1994.

[13] J. Vince: *Quaternions for Computer Graphics*, Springer eBooks, 2011.