Ovatko murtolukujen peruslaskutoimitukset hallussa 7. luokalle tultaessa? Opetuskokeilu murtolukujen hallinnan vahvistamiseksi 7.-luokkalaisilla

Teksti: Anu Tuominen, FL, Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Turun yksikkö
e-mail: anu.tuominen@utu.fi

Syksyllä 2013 mitattiin oppilaiden osaamistasoa murtolukujen osalta pienimuotoisella testillä. Marraskuun lopulla tehtiin toinen mittaus. Tutkittavina olivat yläkoulun neljä 7. luokan opetusryhmää (N = 74), joista kahta tuettiin murtokakkupalojen, murtolukupohjien ja murtolukuihin liittyvien lautapelien avulla, toiset kaksi ryhmää toimivat verrokkiryhminä, joita opetettiin niin kuin ennenkin, ilman lisätukea. Tutkimuksessa kartoitettiin oppilaiden tyypillisimpiä vastauksia murtolukujen peruslaskutoimitustehtäviin ja verrattiin keskenään oppilaiden alku- ja loppumittausvastauksia.
Konkretisoinnista näyttäisi olevan hyötyä etenkin maahanmuuttajataustaisille oppilaille. Jompikumpi tuettu ryhmä pärjäsi lopputestissä yleensä paremmin kuin yleisopetuksen verrokkiryhmä.

Matematiikan hallitseminen

Matematiikan opettamista keskusteltaessa nousee väistämättä esille se, miten matematiikkaa tulisi opettaa, miten oppilaat oppivat ja minkälainen tieto on arvokasta. Tiedolla ajatellaan olevan kaksi luonnetta: puhutaan 1) käsitteellisestä tiedosta (engl. conceptual knowledge) ja 2) proseduraalisesta tiedosta (engl. procedural knowledge). (Hiebert & Lefevre 1986, 3–4.) Käsitteellinen tieto on tietorakennelma, joka muodostuu toisiinsa linkittyneistä tietoyksiköistä. Tietoyksikkö ei voi olla erillään muista vaan sen tulee olla linkittyneenä johonkin toiseen tietoyksikköön. Käsitteellinen tieto kehittyy joko niin, että olemassa olevien tietoyksiköiden välille syntyy uusi linkki, aikaisemmin erillisiltä näyttävien käsitteiden välillä huomataankin olevan yhteys ja tapahtuu oivaltaminen. Tai jo olemassa olevaan tietorakennelmaan lisätään uusi, juuri opittu tietoyksikkö. Piaget puhuu tiedon sulauttamisesta (engl. assimilating) olemassa olevaan tietorakenteeseen, jolloin uudesta tiedosta tulee osa tietorakennetta. (Hiebert & Lefevre 1986, 3–4.) Aina tietorakennelman ei tarvitse kasvaa, vaan tietorakennelma voi kehittyä myös niin, että siitä poistetaan virheellinen tietoyksikkö tai linkki. Oppilas saattaa hallita hyvin desimaaliluvuilla ja murtoluvuilla laskemisen mutta ei osaa yhdistää näitä kahta taitoa; linkki puuttuu. Laskutehtävä $0{,}3 + \frac{1}{2}$ saattaa olla oppilaalle mahdoton mutta kun oppilas ymmärtää murtolukujen ja desimaalilukujen välisen *yhteyden*, pystyy oppilas laskemaan annetun tehtävän.

Proseduraalinen tieto voidaan ajatella koostuvan kahdesta osasta. Ensimmäinen osa koostuu *matematiikan kielestä*; symboleista ja syntaksista, eli kuinka matemaattista tekstiä on tapana kirjoittaa. Oppilas tunnistaa esimerkiksi että symboli ”$\frac{1}{2}$” tarkoittaa puolta jostakin tai lukujen ”1” ja ”2” suhdetta ja että tehtävä ”Etsi puuttuva luku: 2,3 + ___ = 6,28” on syntaksin mukainen, kun taas tehtävä ”2,38 + = ___ 50”, ei ole syntaksin mukainen. Toisen osan muodostavat erilaiset laskualgoritmit, *proseduurit,* eli kuinka matemaattisilla merkeillä operoidaan. Oleellista proseduurissa on se että kaikella on oma järjestyksensä, jossa eri vaiheita suoritetaan.

Suurin ero käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon välillä on se, että proseduraalisen tiedon kautta saatu ”tieto” saadaan prosessien lopputuotteena. Käsitteellisessä tiedossa ”tieto” kytkeytyy ja nivoutuu moniin muihin tietoyksiköihin, ilman erityistä järjestystä. (Hiebert & Lefevre 1986, 6-8.) Molempia tiedon muotoja tarvitaan. Voidaan siis sanoa että oppilas hallitsee ja ymmärtää matematiikkaa, jos hän hallitsee sekä käsitteet että proseduurit (Hallett, Nunes, Bryant & Thorpe, 2012).

Murtolukujen hallinta ennustaa matematiikan osaamista myöhemmin. Ne oppilaat, jotka kymmenvuotiaina hallitsivat murtolukuja, hallitsivat aritmeettisia taitoja ja yleensäkin matematiikkaa 16-vuotiaina. (Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, Susperryguy & Chen, 2012.) Bailey ym. tutkivat murtolukujen hallinnan ja matematiikassa suoriutumisen välistä yhteyttä. Ne oppilaat, jotka kuudennella luokalla hallitsivat murtolukuja, olivat vuoden verran edelle matemaattisissa taidoissaan seitsemännellä luokalla mutta kuudennella luokalla matematiikassa hyvin suoriutuminen ei ennustanut murtolukujen hallintaa seitsemännellä luokalla (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012). Koska murtolukujen hallinta tuntuu olevan avain matematiikan opiskeluun, on sääli että harva oppilaista ymmärtää murtolukujen laskutoimituksia (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, 2010). Esimerkiksi amerikkalaisessa tutkimuksessa 50 % kahdeksasluokkalaisista ei osannut järjestää annettuja murtolukuja $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{9}$ ja $\frac{1}{12}$ suuruusjärjestykseen (Martin, Strutchens & Elliott, 2007). Oppilaat saattavat ajatella murtolukuja osana jostain kokonaisesta eivätkä niinkään *lukuina* lukusuoralla (Stafylidou & Vosnidou, 2004).

Kouluopetuksessa saadun muodollisen tiedon lisäksi lapsilla on paljon arkielämässä opittua epämuodollista tietoa. Ikävä kyllä symbolimuodossa esitetty tehtävä ei aktivoi epämuodollista käsitystä, vaan symbolisessa muodossa esitetty tehtävä pyritään yleensä ratkaisemaan jotain proseduuria käyttäen. (Mack, 1990.)

Luonnollisista luvuista murtolukuihin

Oppilaat laskevat alakoulussa aluksi luonnollisilla luvuilla (0, 1, 2, 3, …). Vähitellen lukualue laajenee kokonaislukuihin, jolloin mukaan tulevat myös negatiiviset kokonaisluvut.

Kokonaislukujen yksi tärkeimmistä ominaisuuksista on *seuraajan* olemassa olo. Tiedämme, mikä luku tulee seuraavaksi ja mikä luku on edellinen. Oppilaat ovat oppineet että positiivisella kokonaisluvulla kerrottaessa vastaus kasvaa ja jaettaessa vastaus pienenee. Lisäksi jokaiselle kokonaisluvulle on merkkinä yksikäsitteinen symboli. Mikään edellä oleva ei pidä paikkaansa rationaaliluvuille (Bailey, Siegler, Geary, 2014.) Kun siirrytään *murtolukuihin*, ja laajemmin rationaalilukuihin, jolloin mukaan otetaan myös murtolukujen vastaluvut, tämä seuraajaperiaate ei ole enää voimassa. Enää ei pystytä sanomaan mikä murtoluku tulee seuraavaksi. Murtoluvulla kerrottaessa vastaus on usein pienempi kuin kumpikaan tulon tekijöistä ja jaettaessa vastaus saattaa olla suurempi:

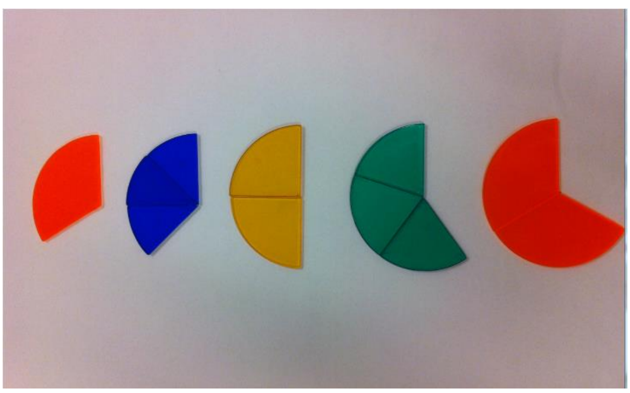
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ $\quad$ $3 : \frac{1}{2} = 6$

Murtoluvuilla voidaan esittää esimerkiksi kokonaisluku ”2” vaikka kuinka monella tavalla:

$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ jne.

Murtoluvut voidaan kyllä järjestää suuruusjärjestykseen mutta sitä emme pysty yksikäsitteisesti sanomaan mikä murtoluku on juuri *ennen* annettua murtolukua. Kokonaislukujen ominaisuudet ohjaavat vahvasti toimintaa. Kun lasten (5–7-vuotiaiden) tehtävänä oli asettaa murtolukuja suuruusjärjestykseen, lapset järjestivät luvut joko osoittajien mukaan tai nimittäjien mukaan mutta harva osasi tulkita murtolukua *lukuna* (Hartnett & Gelman, 1998).

Keskeistä murtolukujen hallinnassa on murtolukujen *tiheyden* ymmärtäminen (Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Kun oppilaalta kysytään ”Mikä murtoluku tulee $\frac{1}{3}$ jälkeen?”, usein saatu vastaus on ”$\frac{2}{3}$”. Kuitenkaan ei voida sanoa, mikä murtoluku tulee yksi kolmasosan jälkeen, sillä murtolukuja on ääretön määrä. Konkreettiset välineet voivat auttaa tämän käsitteellisesti haastavan kohdan yli. Esimerkiksi murtolukujen suuruusvertailu saa tehtävässä ”Luettele ainakin kolme keskenään erikokoista murtolukua, jotka ovat murtolukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä.” oleellisesti enemmän sisältöä, jos pohdintaa tuetaan Murtokakuin (Kuvio 1).



Kuvio 1. Murtolukujen $\frac{1}{3}$ *ja* $\frac{2}{3}$ *väliin sopivat esimerkiksi murtoluvut* $\frac{3}{8}, \frac{2}{4}$ *ja* $\frac{3}{5}$.

Murtoluvut opetussuunnitelmassa

Murtolukujen pohjustaminen aloitetaan jo alakoulun 2. luokalla. Hyvän osaamisen kriteereissä 2. luokan päättyessä oppilas ”…tuntee ja osaa esittää konkreettisilla välineillä yksinkertaisia murtolukuja, kuten yksi kahdesosa, yksi neljäsosa ja yksi kolmasosa” (Peruskoulun opetussuunnitelmien perusteet 2004, 159). Vuosiluokkien 3 – 5 keskeisissä sisällöissä mainitaan ”murtoluvun käsite, murtolukujen muunnokset, murtoluvun ja desimaaliluvun ja prosentin välinen yhteys, murtolukujen ja desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslaskua sekä kertominen ja jakaminen luonnollisella luvulla”. Kertominen ja jakaminen murto- ja desimaaliluvulla jää vuosiluokkien 6 – 9 vastuulle (POPS 2004, 160), jolloin oppikirjasarjasta riippuen asia käsitellään joku jo 6. luokalla tai vasta yläkoulussa aineenopettajan johdolla.

Suurin osa murtolukuihin liittyvistä käsitteistä ja laskusäännöistä opiskellaan siis alakoulussa, joten asian pitäisi olla hallussa yläkouluun tultaessa. Helposti unohtuu kuitenkin se että ”opiskeltu” ei ole sama asia kuin ”opittu” ja matematiikan voi suorittaa arvosanalla 5—10, joten lähtökohdat ovat kovin kirjavat 7. luokalla tultaessa.

Murtolukujen konkretisointi

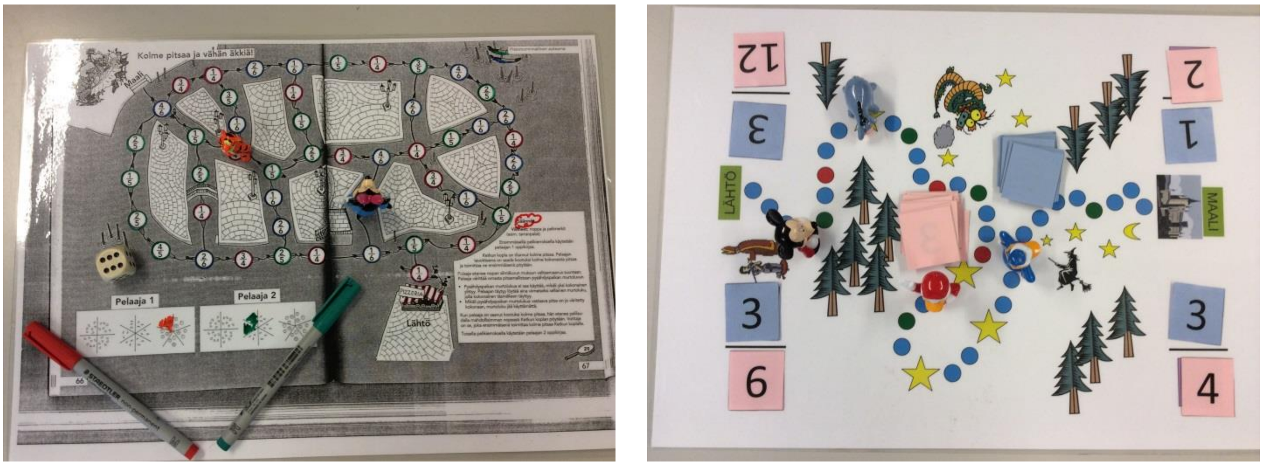
Turun yliopiston opettajankoulutuslaitoksella luokanopettajien valintakokeeseen sisältyy matemaattis-luonnontieteellisen ajattelun testi, jossa testataan hakijoiden peruslaskutaitoa ja luonnontieteellistä ajattelua. Testi osoitti, että vain noin puolet vuoden 2012 hakijoista (N ≈ 210) hallitsi murtolukuihin liittyvän tehtävän $2 : \frac{1}{3}$. Opintojen aikana sisään päässeet opiskelijat tutustuivat murtolukuja ja niiden laskutoimituksia havainnollistavaan tukimateriaaliin kuten Murtokakkuihin, murtolukupohjaan ja opetuspeleihin. Välineiden tuomaa tukea kiiteltiin ja toisaalta hieman harmistuneena todettiin *”Miksei tällaisia välineitä ollut meidän kouluaikanamme?”* (Opetuskeskustelu, 2012). Koska murtolukujen peruslaskutoimitukset opetellaan jo alakoulussa, johtuuko hakijoiden murtolukujen heikko hallinta siitä että ne on unohdettu yläkoulun aikana, vaiko siitä ettei niitä ole alun perinkään ymmärretty?

Steffe ja Olive tutkivat koululaisten murtolukukäsitteen kehittymistä. Apunaan tutkijat käyttivät tietokoneohjelmaa, joka mahdollistaa janojen jakamisen halutun kokoisiin osiin. Oppilaita pyydettiin esimerkiksi jakamaan annettu jana neljään yhtä suureen osaan. Oppilas irrotti tietokoneohjelman avulla silmämääräisesti janasta neljäsosan verran, kopioi pätkää kolmasti, asetteli pätkät peräkkäin ja vertasi alkuperäisen janan pituuteen. Toisena kuviomallina tutkijat käyttivät suorakulmiota, jota jaettiin erisuuruisiin osiin mutta ympyrämallia ei hyödynnetty, ei edes pizzatehtävissä. (Steffe & Olive, 2010)

Opetuskokeilu

Opetuskokeilussa pyrittiin tukemaan seitsemännen luokan oppilaita murtolukujen hallinnassa erilaisin opetusmenetelmin ja -välinein (murtolukumoniste, Murtokakkupalat, Murtolukupohja ja kaksi oppimispeliä). Huomiota kiinnitettiin aikaisemmissa tutkimuksissa (Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Ni & Zhou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Stafylidou & Vosniadou, 2004; DeWolf, 2012; Prediger, 2008; Mack, 1990; Peck & Jencks, 1981) esiin nousseisiin oppilaiden tekemiin tyypillisimpiin virheisiin, joita yritettiin saada vähenemään käyttämällä konkreettisia välineitä.

Konkretisoinnissa käytettiin apuna kehittelemääni ympyröihin perustuvaa Murtolukupohjaa, jonka toimivuutta seitsemäsluokkalaisilla haluttiin kokeilla. Steffe ja Olive havainnollistivat murtolukuja lähes yksinomaan janamallilla (Steffe & Olive 2010), itse koen että ympyrämalli on havainnollisempi, jolloin oppilaan on helpompi hahmottaa ”kokonainen”. Janamallissa saattaa syntyä mielikuva lukusuorasta, jota voidaan aina tarpeen mukaan jatkaa, jolloin se, mikä on ”kokonainen”, saattaa hämärtyä. Lisäksi testattiin kahden murtolukuihin liittyvän pelin *Pizza-peli* ja *Suurin murtoluku -peli* (Kuvio 2) toimivuutta ja mielekkyyttä seitsemäsluokkalaisilla. Sekä pohja että pelit ovat olleet käytössä luokanopettajaopiskelijoilla, jotka ovat kokeneet välineet erittäin hyödyllisiksi.



Kuvio 2. Pizza-peli (Matikkamatka, 4. lk) ja Suurin murtoluku -peli

Opetusryhmät

Tutkittavina oli neljä seitsemännen luokan opetusryhmää (N = 74) eräästä turkulaisesta yläkoulusta. Ennen tutkimuksen tekemistä oppilaiden vanhemmilta pyydettiin lupa oppilaiden vastausten analysointiin. Kaikkia opetusryhmiä opetti sama opettaja ja opetusryhmillä oli sama oppikirja käytössään.

Alkumittaus suoritettiin kaikilla ryhmillä syksyn ensimmäisten matematiikantuntien aikana ja toinen mittaus marras-joulukuussa. Tuettuja ryhmiä olivat 7A ja 7B. Verrokkiryhminä olivat 7C ja

7D, joita opetettiin ilman lisätukea. Opetusryhmät 7A, 7B ja 7C ovat yleisopetusryhmiä ja 7D on kieli-, musiikki- ja kuvaamataitopainotteinen ryhmä.

Testit

Oppilaiden lähtötaso mitattiin alkutestillä ennen opetuskokeilun alkua. Alkutestissä pyydettiin ympyröimään oikea vastausvaihtoehto annettuun laskutehtävään sekä perustelemaan vastaus laskulla, piirroksella tai sanallisesti. Aikaa testin teettämiseen käytettiin ryhmästä riippuen 10 – 15 minuuttia. Oikeasta vastauksesta sai yhden pisteen ja järkevästä perustelusta yhden pisteen. Tehtäviä oli kymmenen ja maksimipistemäärä oli 20. Tehtävät testasivat laskujärjestyssäännön hallintaa, desimaalilukujen ja murtolukujen suuruusjärjestystä, murtolukujen peruslaskutoimituksia ja murtolukujen tiheyden ymmärtämistä. Opetuskokeilun jälkeen pidettiin lopputesti, joka oli samanlainen kuin alkutesti.

Tutkimuskysymykset

Tutkimuksessa tutkittiin oppilaiden tyypillisimpiä vastauksia murtolukujen peruslaskutoimitustehtäviin alku- ja loppumittauksessa ja etsittiin mahdollisia eroja mittaustulosten välillä sekä eroja tuettujen ryhmien ja verrokkiryhmien välillä. Koska murtoluvut on opetettu jo alakoulussa, moni aineenopettaja luottaa siihen että asia on myös oppilaiden hallinnassa. Luokanopettajaksi hakeneiden murtolukujen hallinnassa oli kuitenkin suuria aukkoja. Mitä oppilaat siis osaavat heti alakoulun jälkeen?

1) Minkälaiset murtolukujen peruslaskutaidot tuoreilla seitsemäsluokkalaisilla on?

    Mitkä ovat oppilaiden tyypillisimmät vastaukset murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyviin tehtäviin?

Opetuskokeilussa käytettiin konkretisointivälineitä, joiden mahdollista vaikutusta oppilaiden suorituksiin tutkittiin vertaamalla alku- ja loppumittaustuloksia ja etsimällä eroja tuettujen ja verrokkiryhmien välillä.

2) Saadaanko konkretisoinnilla (murtolukupohjalla, Murtokakuilla ja peleillä) aikaan muutosta oppilaiden murtolukuihin liittyvissä käsityksissä?

    Kokivatko seitsemäsluokkalaiset pelit mielekkäinä?

   Vaikka suunniteltu tuki on aika pienimuotoista, on mielenkiintoista nähdä onko sillä vaikutusta oppilaiden suoritukseen.

3) Onko tuettujen ja verrokkiryhmien vastausten välillä havaittavaa eroa?

Tutkimustulokset

Kaikkien neljän ryhmän oppilaiden pisteiden keskiarvo alkutestissä oli vain 9,35, joka on noin 47 % maksimipistemäärästä. Alkutestissä luokka 7A oli muita luokkia hieman heikompi: Luokan pisteiden keskiarvo oli 6,4 kun muiden luokkien pisteiden keskiarvot olivat 7B (10,5), 7C (9,6) ja 7D (10,4), maksimipisteiden ollessa 20. Tarkemmin analysoidaan testin kymmenestä tehtävästä 1) samannimisten murtolukujen erotus, 2) erinimisten murtolukujen summa, 3) murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla ja 4) murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla.

Alkumittaustulokset

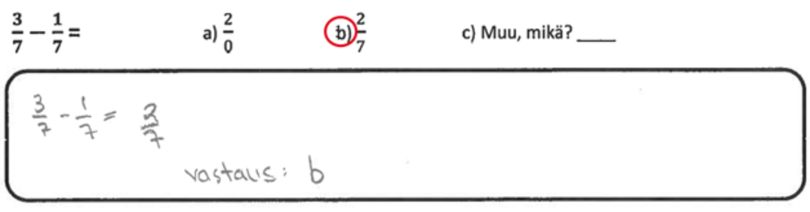
Taulukkoon (Taulukko 1) on koottu oppilaiden valitsemat vastaukset tehtäväkohtaisesti. Tyhjäksi jätettyjä vastauksia oli ilahduttavan vähän.

Taulukko 1. Oppilaiden (N = 74) vastausten jakautuminen alkutestissä tehtäväkohtaisesti. Oikean vastausvaihtoehdon osuus on tummennettu.

	TEHTÄVÄT							
	Erotus		Summa		Tulo		Osamäärä	
Vastaus	f	%	f	%	f	%	f	%
a	3	4	39	53	27	36	37	50
b	**68**	**92**	**28**	**38**	5	7	**8**	**11**
c	2	3	3	4	1	1	**26**	**35**
d	-	-	-	-	**41**	**55**	1	1
TYHJÄ	1	1	4	5	0	0	2	3

Seuraavaksi esitettävät skannatut ratkaisut ovat tyypillisimpiä oppilaiden antamia ratkaisuja kustakin tehtävästä. Oikea vastausvaihtoehto on ympyröity.

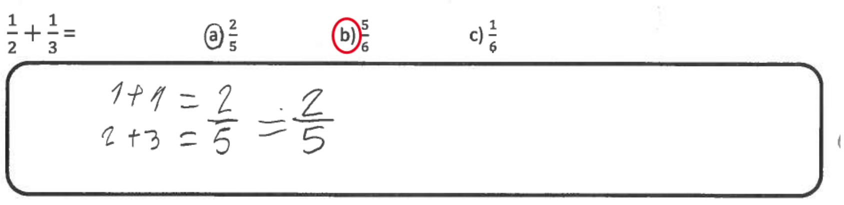
Erotus, samannimiset murtoluvut



Kuvio 3. Oppilaan vastaus ja perustelu samannimisten murtolukujen erotus -tehtävään (Oppilas 6).

Samannimisten murtolukujen laskuproseduuri näyttäisi olevan hallussa, tehtävän laskeminen sujui oppilailta oikein hyvin.

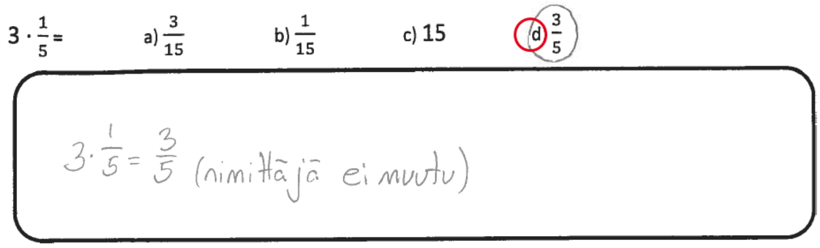
Summa, erinimiset murtoluvut



Kuvio 4. Oppilaan vastaus ja perustelu erinimisten murtolukujen summa -tehtävään (Oppilas 13).

Tehtävä aiheutti enemmän hajontaa vastauksiin kuin Erotus-tehtävä. Suosituin vastaus Erinimisten murtolukujen summa -tehtävään oli vaihtoehto a), joka saadaan kun lasketaan yhteen murtolukujen osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään (Kuvio 4).

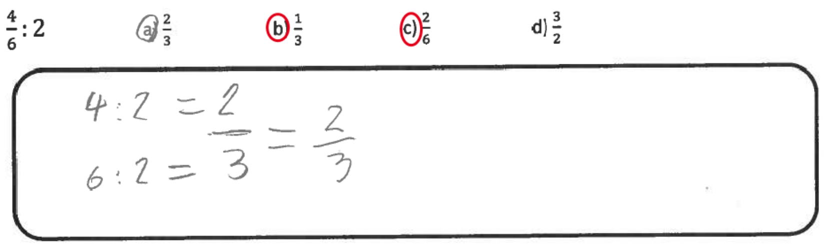
Tulo, murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla



Kuvio 5. Oppilaan vastaus ja perustelu kun murtolukua kerrotaan luonnollisella luvulla (Oppilas 25).

Kaikki löysivät Tulo-tehtävään (Kuvio 5) jonkinlaisen ratkaisun, kukaan ei jättänyt tehtävää tyhjäksi. Tässä tehtävässä onnistumisprosentti (55 %) oli toiseksi paras Erotus-tehtävän (92 %) jälkeen (Taulukko 1).

Osamäärä, murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla



Kuvio 6. Oppilaan vastaus ja perustelu, kun murtoluku jaetaan luonnollisella luvulla (Oppilas 13).

Osamäärä-tehtävässä (Kuvio 6) oli peräti kaksi oikeaksi tulkittavaa vastausvaihtoehtoa: b) ja c), sillä tässä ei vaadittu oikeaksi vastaukseksi supistettua muotoa. Siitäkin huolimatta oppilaat tyypillisesti jakoivat sekä osoittajan että nimittäjän jakajalla ja näin päätyivät vaihtoehtoon a).

Opetusryhmien tukeminen

Opetusryhmistä kahta (7A ja 7B) tuettiin konkreettisin välinein ja muita ryhmiä (7C ja 7D) opetettiin kuten ennenkin. Tuettujen ryhmien saama tuki vaihteli kuitenkin hieman johtuen opettajan yllättävästä muutaman viikon poissaolosta kesken lukukauden. Opetusryhmät poikkesivat myös hieman toisistaan: yksi oli kieli- musiikki- ja kuvaamataitopainotteinen ryhmä ja yhdessä ryhmässä oli selvästi muita enemmän maahanmuuttajataustaisia oppilaita.

Taulukko 2. Opetusryhmien koostumus ja tukeminen.

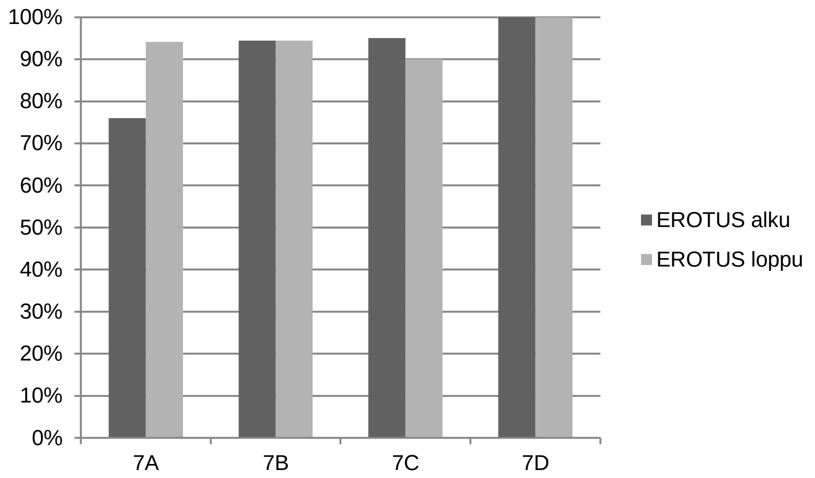
	opetusryhmä	mamu, %	M-moniste	Murtokakut	M-pohja	Pizza-peli, krt	Suurin ml – peli, krt
7A	yleis-	59	"+, - , * , /"	joskus	usein	5	3
7B	yleis-	11	"+ , - "	joskus	usein	5	2
7C	yleis-	10	EI	EI	EI	EI	EI
7D	ki- mu- ku-	16	EI	EI	EI	EI	EI

Verrokkiryhmiä opetettiin kuten aiemminkin noudattaen oppikirjan järjestystä. Murtolukuja havainnollistettiin ensimmäisillä tunneilla taululla yleensä ympyräkuvioilla. Kirjan tehtävien lisäksi oppilaat tekivät myös muutamia kertausmonisteita. Nämä monisteet käsittelivät murtolukulaskuja yhdistettyjen laskutoimituksien yhteydessä. Tuetut ryhmät tekivät samoja monisteita opetuksen aikana.

Loppumittaustulokset

Loppumittaustesti oli identtinen alkumittaustestin kanssa. Seuraavaksi esitellään tehtäväkohtaiset tulokset alku- ja loppumittauksessa luokittain.

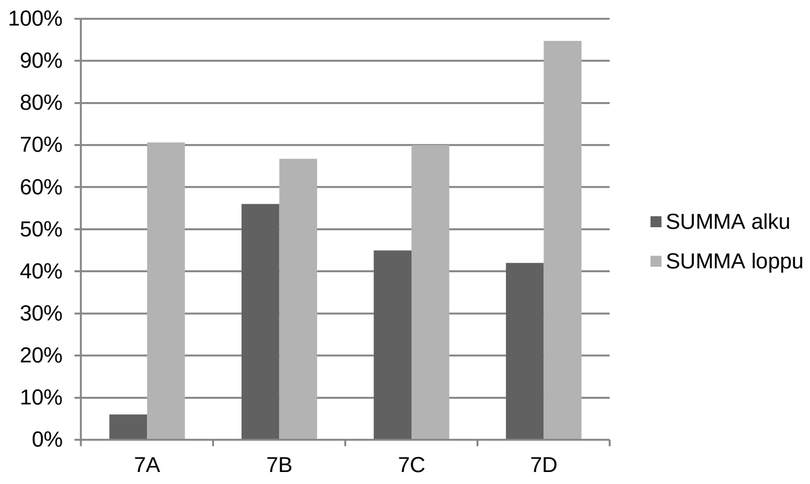
Erotus, samannimiset murtoluvut



Kuvio 7. Erotus-tehtävän oikeiden vastausten osuus luokittain alku- ja loppumittauksessa.

Huomionarvoista on se, että lähtötasoltaan heikoin ryhmä 7A (94,1 %) nousi loppumittauksessa 7C:n (90 %) ohi ja lähes tasoihin 7B:n (94,4 %) kanssa. Kaikki luokalta 7D valitsivat tähän tehtävään oikean vastauksen (Kuvio 7).

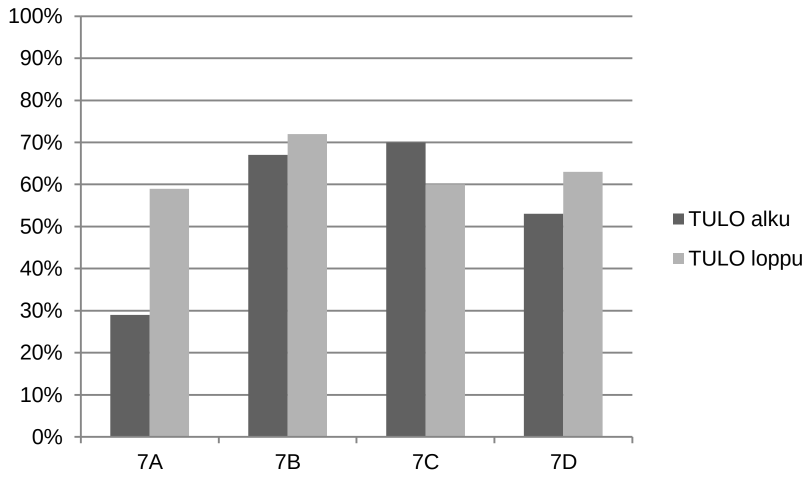
Summa, erinimiset murtoluvut



Kuvio 8. Summa-tehtävän oikeiden vastausten osuus luokittain alku- ja loppumittauksessa.

Huima parannus alkutestiin verrattuna on luokalla 7A (71 % oikein vastanneita), mikä oli hieman paremmin kuin luokissa 7B (67 %) tai 7C (70 %). Luokan 7D oppilaista 95 % valitsi oikean vastauksen tähän tehtävään (Kuvio 8).

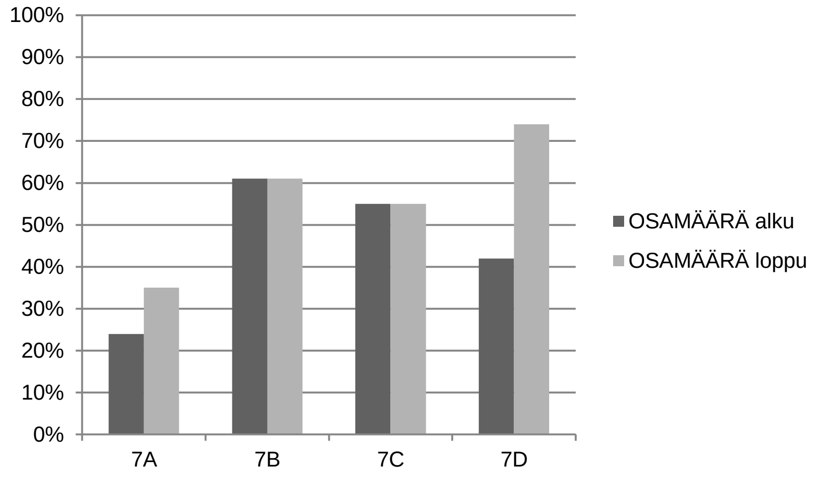
Tulo, murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla



Kuvio 9. Tulo-tehtävän oikeiden vastausten osuus luokittain alku- ja loppumittauksessa.

Tuettu luokka 7B (72 %) pärjäsi tässä muita luokkia paremmin: 7A (59 %), 7C (60 %) ja 7D(63 %). Yllättävää on luokan 7C oikeiden vastausten väheneminen ja pärjääminen huonommin kuin alkutestissä (Kuvio 9).

Osamäärä, murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla



Kuvio 10. Osamäärä-tehtävän oikeiden vastausten osuus luokittain alku- ja loppumittauksessa.

Tässä luokka 7A jäi selkeästi muita heikommaksi vaikka paransikin tulostaan alkumittaukseen verrattuna: luokan 7A oppilaista 35 % valitsi supistamattoman vaihtoehdon c). Muissa opetusryhmissä oikeita vastauksia oli huomattavasti suurempi osa vastauksista: 7B (61 %), 7C (55 %) ja 7D (74 %). Luokka 7D paransi muihin ryhmiin nähden ja alkumittaukseen verrattuna tulostaan huomattavasti (Kuvio 10).

Pohdintaa

Oppilaiden murtolukujen hallintaa testaava alkutesti paljasti heikkouksia peruslaskutoimitusten hallinnassa. Testitehtävät oli laadittu alakoulun matematiikan opetussuunnitelmaa silmällä pitäen niin että murtoluvulla kertominen ja jakaminen oli jätetty testitehtävien ulkopuolelle ja silti oppilaiden saamien pisteiden keskiarvo jäi puolivälin alapuolelle. Paljon on siis jäänyt alakoulussa oppimatta ja ymmärtämättä.

Murtolukujen peruslaskutoimitusten opettamista ja oppimista leimaa laskusääntöjen, eli proseduurien ulkoa opettelu ilman käsitteen ja ymmärryksen muodostamista. Oppilas saattaa luulla osaavansa ulkoa tarvittavan proseduurin, mutta hän ei pysty tarkistamaan vastauksen mielekkyyttä, jos hän ei ymmärrä minkä kokoisten murtolukujen kanssa hän operoi. Esimerkiksi murtolukujen Summa-tehtävän tyypillisin vastaus (Kuvio 4) paljastaa sen, ettei oppilas ole miettinyt minkä kokoisia lukuja hän laskee yhteen vaan oppilas on käyttänyt oikeaksi luulemaansa proseduuria. Oppilaiden käsityksiä pitäisi kyseenalaistaa esimerkiksi symbolimuodossa olevalla tehtävällä $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$

ja antaa heille Murtokakut avuksi ratkaisun pohtimisessa. Näin ehkäpä arjessa omaksuttu epämuodollinen tieto saataisiin paremmin aktivoitua symbolimuodossa esitetyn tehtävän äärellä. Vaikka aineisto on melko pieni, saa siitä kuitenkin viitteitä mahdollisista virhekäsityksistä. Oppilaiden tyypillisimmistä vastauksista on nähtävissä se, ettei oppilas ymmärrä murtolukua lukuna, vaan käsittelee osoittajia ja nimittäjiä toisistaan irrallisina. Esimerkiksi tulotehtävän kohdalla oppilas kertoo sekä osoittajan että nimittäjän annetulla kertoimella.

Opetuskokeilussa toinen tuetuista ryhmistä osoittautui alkutestissä muita ryhmiä heikommaksi. Tämä voi selittyä sillä, että ryhmässä oli suurempi osuus maahanmuuttajataustaisia oppilaita kuin muissa ryhmissä. Johtuen oman opettajan poissaolosta, ryhmä 7A ehti opiskella tuettuna murtolukujen peruslaskutoimitukset mutta ryhmä 7B vain murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun. Vaikka pelit olivat melko yksinkertaisia, oppilaat eivät pitäneet niitä liian lapsellisina vaan halusivat pelata niitä yhä uudelleen. Luokka 7B nautti Pizza-pelistä niin paljon että olisi halunnut pelata peliä vielä syyslukukauden jälkeenkin.

Positiivista on se, että heikoin ryhmä kavensi muiden etumatkaa loppumittauksessa (Kuvio 8, 9 ja 10). Sitä on kuitenkin vaikea sanoa, kuinka paljon tästä on opetuskokeilun aikaan saamaa. Ehkä havainnollistavien välineiden käyttö auttoi maahanmuuttajataustaisia oppilaita ymmärtämään paremmin murtolukuihin liittyviä käsitteitä kuin ilman välineitä pidetty opetus olisi tehnyt. Verrokkiryhmä 7C jää usealla osa-alueella jommankumman tuetun matematiikkaryhmän jälkeen, joten ehkä tukemisella oli positiivista vaikutusta. Parhaiten tuntui lopputestissä pärjäävän ryhmä 7D, joka oli erilaisilla kurssivalinnoilla valikoitunut ryhmä jo alun perin.

Kuinka suuri ero tuettujen ja verrokkiryhmien välillä lopulta oli? Vaikka verrokkiryhmiä ei tuettu ylimääräisin välinein, jo se että opettaja tiedostaa paremmin mahdolliset kriittiset kohdat ja virhetulkintamahdollisuudet, on saattanut vaikuttaa hänen opetustyyliinsä. Opettaja on saattanut tiedostamattaankin painottaa jotain asiaa eri tavalla kuin olisi aikaisemmin tehnyt ja näin kaventanut eroa tuettujen ryhmien ja verrokkiryhmien välillä.

On tärkeää, että aineenopettaja tiedostaa ja kartoittaa mahdolliset puutteet oppilaidensa tiedoissa mahdollisimman pian seitsemännen luokan alkaessa. Jos joku on kiinnostunut kartoittamaan omien seitsemäsluokkalaistensa murtolukujen hallintaa testillä, niin testi on saatavilla minulta pdf-muodossa. Laittakaa sähköpostia tulemaan otsikon alla olevaan osoitteeseen.

Lähteet

Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L. & Geary, D. 2012. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 447–455.

Bailey, D., Siegler, R. & Geary, D. 2014. Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 1–11. DOI: 10.1111/desc.12155

DeWolf M. 2012. *How Adults Understand and Reason about Fractions*. Dietrich College Honors Theses. Psychology Department. Carnegie Mellon University.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P. & Thorpe C. 2012. Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 469–486.

Hartnett, P. & Gelman, R. 1998. Early Understanding of Numbers: Paths or Barriers to the Construction of New Understanding. *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374.

Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics (ss. 3–8). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Mack, N. 1990. Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in mathematics Education*, *21*(1), 16–32.

Martin, W., Strutchens, M., & Elliott, P. 2007. *The learning of mathematics, 69th NCTM yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ni, Y. & Zhou, Y. 2005. Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias Teaching. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52

Peck, D. & Jencks, S. 1981. Conceptual Issues in the Teaching and Learning of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(5), 339–348.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.

Predinger, S. 2008. The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*, 3–17

Siegler, R., Thompson C. & Schneider. 2011. An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*, 273–296.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperryguy, M. & Chen, M. 2012. Early predictors of high scholl mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691–697.

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. 2004. The development of students´ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*. *14*, 503–518.

Steffe, L. & Olive J. 2010. Children´s Fractional Knowledge. New York: Springer. 77, 99, 259, 305.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. 2004. Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14,* 453–467.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. 2010. How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students´ understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28, 181–209