Artikkeli DIMENSIO 1/2017 s. 12-16

Murtolukujen peruslaskutoimitusten kehittyminen ja sujuminen 7. luokan aikana → 7.-luokkalaisten oppimisprofiilit

Anu Tuominen, FL, Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Tutkimuksessa tarkastellaan 7.-luokkalaisten (N=74) murtolukujen peruslaskutoimitusten sujumista yhden lukuvuoden aikana. Oppilaita testattiin kolme kertaa kirjallisella testillä. Oppilaiden tuotokset arvioitiin sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Oppilaiden kolmen mittauskerran vastausten perusteella heidät jaettiin kuuteen oppimisprofiiliin, joiden avulla pyrittiin tunnistamaan murtolukujen oppimisen kannalta keskeisiä tietoja ja taitoja. Tutkimus on jatkoa 6/2014 Dimensiossa ilmestyneeseen artikkeliin.

Oppilaiden suorituksessa tapahtui keskimäärin 3 % kehitystä yhden lukuvuoden aikana, mikä on vähän. Alussa hyvin pärjänneet oppilaat tunnistivat murtoluvun desimaalilukuesityksen, he hallitsivat laskujärjestyssäännön, ja murtolukujen suuruusjärjestyksen ja osasivat ratkaista samannimisten murtolukujen erotuksen. Heikosti menestyneet oppilaat eivät hallinneet edes luonnollisten lukujen laskujärjestyssääntöä (5 + 2 · 3), ja murtolukujen peruslaskutoimituksissa näkyi vahva tukeutuminen virheellisiin laskusääntöihin.

Murtolukujen suuruuden ymmärtäminen näyttäisi olevan avainasemassa murtolukujen peruslaskutoimitusten ymmärtämisessä ja oppimisessa. Ne oppilaat, jotka hallitsivat hyvin murtolukujen peruslaskutoimituksia, osasivat yleensä myös järjestää annetut murtoluvut suuruusjärjestykseen.

JOHDANTO

Murtolukuja pidetään haastavana aiheena opettaa, eikä suotta. Oppilaille on muodostunut melko vakiintunut käsitystä luvuista ja niiden ominaisuuksista luonnollisten lukujen perusteella, joista matematiikan opetus yleensä alkaa. Oppilaat ovat oppineet että kertolaskussa vastaus on suurempi ja jakolaskussa vastaus on pienempi luku. Rationaaliluvut rikkovat tämän ”säännön”. Luonnollisilla luvuilla seuraava luku saadaan helposti luettelemalla, lisätään vain edelliseen lukuun luku 1. Rationaaliluvuilla ei ole vastaavaa luetteluominaisuutta, emme pysty sanomaan mikä murtoluku on juuri edellisen jälkeen, koska rationaalilukuja on tiheästi, eikä diskreetein välein, kuten luonnollisia lukuja. Luonnollisilla luvuilla on yksikäsitteinen tapa merkitä luku, esimerkiksi luku 17, kun taas rationaaliluvuilla voidaan esimerkiksi luku 2 merkitä vaikka kuinka monella tavalla ($\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \ldots$). Opettajan on hyvä tiedostaa nämä erot luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen välillä ja tuoda ne esille oppilaille. Oppilaat tukeutuvat helposti luonnollisten lukujen ominaisuuksiin kohdatessaan murtolukutehtäviä. Esimerkiksi oppilas saattaa tulkita luvun $\frac{1}{2}$ pienemmäksi kuin luku $\frac{2}{5}$, koska ensimmäisessä murtoluvussa sekä osoittaja että nimittäjä ovat pienempiä lukuja kuin jälkimmäisessä murtoluvussa. Murtolukujen yhteenlaskussa oppilaiden tyypillinen virhe on laskea sekä osoittajat keskenään yhteen että nimittäjät keskenään yhteen: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3}{8}$.

Oppilaiden taitoa ratkoa murtolukujen peruslaskutoimituksia on tutkittu erinäisissä tutkimuksissa vuosikymmenien ajan raportoiden samoista ongelmista yhä uudelleen ja uudelleen. Vähemmän on kuitenkin tutkittu ja kiinnitetty huomiota siihen, miten murtolukujen laskutaito kehittyy, ja mitä osatietoja ja –taitoja oppilaan tulisi hallita.

TUTKIMUSKYSYMYKSET

1) Minkälaisia oppimisprofiileita aineistosta on löydettävissä?
2) Mitä yhteisiä tietoja ja taitoja kuhunkin oppimisprofiiliin liittyy?

MENETELMÄ

Tutkimuksessa tarkastellaan varsinaissuomalaisten 7.-luokkalaisten, neljän opetusryhmän oppilaiden (N=74, joista 62 osallistui kaikkiin mittauksiin) murtolukujen laskutaidon kehittymistä 7. luokan syksystä 8. luokan syksyyn kolmen kirjallisen testin avulla, kolmannella mittauskerralla yksi tehtävä (7.) oli vaihdettu ja mukaan oli otettu murtolukujen kertolaskutehtävä (Taulukko 1). Jokaista ryhmää opetti sama matematiikan opettaja.

Taulukko 1. Kirjallisten testien tehtävät

Selite	*Tehtävä*
t1: laskujärjestyssääntö	5 + 2 · 3
t2: suurin desimaaliluku	1,03 0,256 2,3 0,17
t3: murtoluvut suuruusjärjestykseen	1/7, 1/12, 1, 5/6, 4/3
t4: samannimisten erotus	3/7 – 1/7
t5: erinimisten summa	½ + 1/3
t6: murtoluvun kertominen luonnollisella luvulla	3 · 1/5
t7: murtoluvun desimaali-lukuesitys	1/3 → 3. mittaus 1/3 · 6/8
t8: murtoluvun jakaminen luonnollisella luvulla	4/6 : 2
t9: murtoluvun tiheys, samannimiset	3/7 ja 5/7
t10: murtoluvun tiheys, erinimiset	2/4 ja 2/3

Oppilaiden suoritukset arvioitiin kvantitatiivisesti, vastauksesta sai nolla pistettä tai yhden pisteen, samoin perustelusta sai yhden tai nolla pistettä. Oppilaiden tuli perustella vastauksensa joko sanallisesti, laskemalla tai piirroksella. Oppilaiden perustelut arvioitiin kvalitatiivisesti luokittelemalla eri ryhmiin. Luokkaan 4 tai 5 kuuluvasta perustelusta sai yhden pisteen, muista nolla pistettä (taulukko 2).

Taulukko 2. Oppilaiden perustelujen luokittelu ja esimerkki kustakin tyypistä.

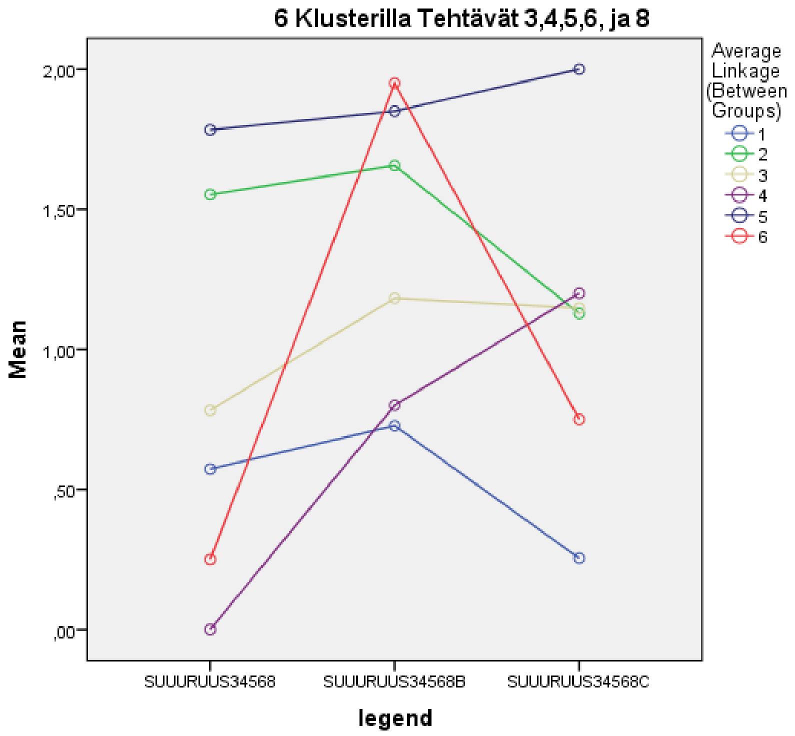
Perustelu	*Luokka*	*Esimerkki*
on tyhjä	1	
ei lisäinformaatiota	2	”Arvasin”, tai antaa vastauksen uudestaan: $\frac{3}{5}$
on väärä	3	Väärä proseduuri: $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{3}{15}$
on oikea	4	Oikea proseduuri, selitys tai kuva
osoittaa ymmärrystä	5	Käyttää oikeita käsitteitä oikeassa kohdassa: ”*2,3 on suurin koska siinä on eniten kokonaisia*.”

Oppilaiden testipisteiden perusteella saatiin karkea kuva siitä, miten oppiminen etenee kunkin oppilaan kohdalla. Oppilaiden osaamisprosentti 1. mittauskerralla oli 46,3 %, 2. mittauksella 56,6 % ja kolmannella mittauskerralla 49,1 %. Perusteluiden avulla päästiin pelkkää numeerista vastausta paremmin kiinni siihen, mitä oppilas ratkaisustaan ajattelee. Onko esimerkiksi oikea vastaus ollut vain onnekas sattuma vai tietoon pohjaava?

Ennakoin, että aineistosta löytyisi ainakin viisi erilaista profiilia: *Hyvät*, jotka ovat jo lähtökohtaisesti taitavia, *Heikot*, jotka eivät saa opetuksesta irti ja siksi pysyvät heikkoina. Murrosiän kourissa olevat *Taantujat*, jotka ehkä 7. luokan syksyllä vielä osoittavat osaamisensa mutta joiden osaaminen hiipuu, koska ”koulu ei nappaa”. *Ulkoa oppivat*, jotka osaavat asian kun sitä tuoreeltaan kysytään mutta unohtavat

”oppimansa” viivästettyyn mittaukseen mennessä ja *Oppijat ja kehittyvät*, jotka oppivat ja parantavat suoritustaan kerta kerralta.

Osassa tehtävistä ei juurikaan tapahtunut kehittymistä, esimerkiksi tehtävässä 2 (suurin desimaaliluku) joko tehtävä hallittiin tai sitten ei hallittu, mutta muutosta mittauskertojen välillä ei juuri ollut. Oppimisprofiilien kartoittamiseen valittiin tehtävät, jotka mittaisivat nimenomaan murtolukujen suuruuden ja murtolukujen laskusääntöjen hallintaa: t3, t4, t5, t6, ja t8, ja näistä muodostettiin summamuuttuja. Tilastollisia menetelmiä ja SPSS:n Klusterianalyysiä hyödyntäen osallistujat jaettiin kuuteen eri oppimisprofiiliin (kuvio 1), ryhmien koot vaihtelevat yhdestä oppilaasta aina 25:een oppilaaseen (taulukko 3).



Kuvio 1. Summamuuttujan saamien arvojen mukaan Oppimisprofiilit kuudessa ryhmässä

Taulukko 3. Klusteriluokat, frekvenssit ja nimitykset

Klusteriluokka	*Frekvenssi*	*Nimi*
1	11	Heikot
2	25	Taantujat
3	17	Hieman oppivat
4	1	Oppii ja kehittyy
5	6	Hyvät
6	2	Ulkoa oppivat (ja unohtavat)

OPPIMISPROFIILIRYHMIEN TARKEMPI TARKASTELU

Aineiston pieni koko mahdollisti oppilaiden vastausten uudelleen läpikäymisen käsin. Oppilaat jaettiin oppimisprofiilinsa mukaan ryhmiin ja sitten ryhmä kerrallaan käytiin oppilaiden vastaukset läpi paperi paperilta etsien vastauksista yhteisiä piirteitä.

Klusteri 1: Heikot, n = 11

Oppilaat pärjäsivät alkutestissä heikosti, paransivat toisessa mittauksessa hieman mutta taantuivat jopa lähtötasonsa alapuolelle kolmannessa mittauksessa. Tähän luokkaan kuuluvia oppilaita yhdisti se, että he eivät muista ryhmistä poiketen hallinneet laskujärjestyssääntöä. He kuitenkin tunnistivat annetuista desimaaliluvuista suurimman. Murtolukujen järjestäminen suuruusjärjestykseen ei onnistunut ryhmältä oikein missään mittauksessa. Murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvissä tehtävissä oppilaiden ratkaisuissa näkyi vahva nojaaminen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Toisessa mittauksessa lähes puolet osasi jo ratkaista erinimisten murtolukujen summan mutta kolmannessa mittauksessa moni palasi aikaisempaan strategiaansa. Virheelliset ratkaisut ilman perusteluja lisääntyivät paljon kolmannessa mittauksessa.

Klusteri 2: Taantujat, n = 25

Tämä on ryhmistä suurin. Oppilaat hallitsivat asiat alussa hyvin. Samannimisten murtolukujen erotus hallittiin todella hyvin ja erinimisten summa kohtuullisesti. Noin 70 % ryhmän oppilaista hallitsi murtolukujen suuruusjärjestyksen. Tässä ryhmässä tunnistettiin murtoluvun desimaalilukuesitys alkumittauksessa mutta tieto tuntui osalta katoavan toisessa mittauksessa. Kolmannessa mittauksessa yllättäen luonnollisten lukujen laskujärjestyssääntö näytti oppilailta unohtuneen. Virheelliset proseduurit lisääntyivät toisessa ja kolmannessa mittauksessa etenkin kerrottaessa ja jaettaessa murtolukua luonnollisella luvulla.

Klusteri 3: Hieman oppivat, n = 17

Tämä ryhmä hallitsi alkumittauksessa laskujärjestyssäännön, desimaalilukujen suuruusvertailun ja samannimisten murtolukujen erotuksen. Hieman alta puolet ryhmästä osasi alussa järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen mutta oikeiden vastausten lukumäärä väheni mittaus mittaukselta. Toisessa mittauksessa erinimisten murtolukujen summan hallitsi jo yli 80 %, kun alkumittauksessa tehtävän osasi vain 24 % ryhmän oppilaista. Kerto- ja jakolaskussa näkyi aluksi virheellinen proseduuri, jossa sekä osoittaja että nimittäjä kerrottiin tai jaettiin luonnollisella luvulla. Virheellisen proseduurin käyttö väheni toisessa ja kolmannessa mittauksessa kertolaskun osalta, mutta lisääntyi murtoluvun jakolaskussa kolmannella mittauskerralla.

Klusteri 4: Oppiva ja kehittyvä, n = 1

Alussa ryhmänsä ainoa edustaja ei hallinnut mitään testin tehtävistä. Ratkaisuissa näkyi vahva nojaaminen luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Toisessa mittauksessa hän sai jo laskujärjestyssäännön oikein, tunnisti suurimman desimaaliluvun, hallitsi niin samannimisten murtolukujen erotuksen kuin erinimisten murtolukujen summankin. Kolmannessa mittauksessa hän osasi ratkaista tulon oikein sekä järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen. Murtoluvun jakamisen luonnollisella luvulla hän silti ratkaisi joka kerta jakamalla sekä osoittajan että nimittäjän annetulla luvulla. Merkittävää on, että hänen suorituksensa paranee mittaus mittaukselta.

Klusteri 5: Hyvät, n = 5

Tässä ryhmässä saavutetaan kattoefekti, ryhmä osasi alkumittauksessa hyvin testin tehtävät. Murtoluvun desimaalilukuesitystä eivät silti kaikki tunnistaneet vielä toisessakaan mittauksessa. Tämä on ainut ryhmä, jossa uusi asia, murtolukujen välinen kertolasku, hallitaan hyvin. Tiheystehtävien kohdalla (t9 ja t10) kaikki nojaavat aluksi luonnollisten lukujen ominaisuuksiin mutta toisessa ja kolmannessa mittauksessa näin tekee enää yksi oppilas.

Klusteri 6: Ulkoaoppineet, n = 2

Ryhmän muodosti vain kaksi oppilasta. Alussa he tunnistivat vain suurimman desimaaliluvun. He eivät hallinneet murtolukujen suuruusvertailua vaan nojasivat luonnollisten lukujen ominaisuuksiin järjestäen murtoluvut suuruusjärjestykseen joko osoittajien tai nimittäjien mukaan. Toisessa mittauksessa he kuitenkin saavuttivat loistavan tuloksen, murtolukujen peruslaskutoimitukset sujuivat vaikka toinen heistä ei vieläkään saanut murtolukujen suuruusvertailua oikein. Kolmannessa mittauksessa molemmat olivat palanneet käsityksissään lähes samaan ensimmäisen mittauksen kanssa: samannimisten murtolukujen erotus hallittiin mutta erinimisten murtolukujen summan sai oikein vain toinen oppilaista. Kerto- ja jakolaskussa oppilaat tukeutuivat jälleen väärään laskuproseduuriin eli kertoivat sekä osoittajan että nimittäjän annetulla kertojalla ja jakoivat sekä osoittajan että nimittäjän annetulla jakajalla.

POHDINTA

Tutkimuksessa etsittiin erilaisia oppimisprofiileja ja näille yhteisiä tietoja ja taitoja. Profiilien avulla pyrittiin tunnistamaan murtolukujen oppimisen ja hallinnan kannalta keskeisiä taitoja. Muutos oppilaiden testisuorituksissa oli vähäistä ensimmäisen ja kolmannen mittauksen välillä, keskimäärin vain noin 3 %-yksikköä. Tämä havainto on samansuuntainen Hihnalan (2005) tutkimuksen kanssa, jonka mukaan keskimääräinen kehitys murtolukujen ratkaisuprosentissa seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle luokalle olisi noin 8 %-yksikköä. Murtoluvun muuntaminen desimaaliluvuksi osattiin todella heikosti, mikä oli taas yhdenmukainen Niemen (2004) ja Hihnalan (2005) havaintojen kanssa.

Tarkasteltaessa oppilaiden antamia perusteluja vastauksilleen, proseduurit korostuivat. Ehkäpä seitsemännen luokan opetus oli enemmänkin keskittynyt nimenomaan laskuproseduurien oppimiseen ja kertaamiseen kuin murtoluvun suuruuden ymmärtämiseen. Hyvin vähän perusteltiin vastausta sanallisesti ja vielä vähemmän piirroksin. Näyttää siltä, että traditio siitä, miten matematiikkaa kirjoitetaan ja minkälainen perustelumuoto on hyväksyttävää, suosii ylivoimaisesti symbolista esitystapaa. Tämä on toki matemaatikoille se oikea ja hyväksi havaittu työtapa mutta sopiiko se tavalliselle yläkoulun oppilaalle?

Koska aineisto on melko pieni, myös oppimisprofiiliryhmien koot jäivät pieniksi, ja yksi oppilas saattoi muodostaa oman ryhmänsä. Tilastollisia yleistyksiä aineiston pohjalta ei voida tehdä mutta opettajan työn kannalta on mielenkiintoista etsiä, mikä on se riittävä tieto- ja taitotaso, jolle oppilas pystyy vielä rakentamaan omaa matemaattista rakennelmaansa ja näin muokkaamaan käsityksiään murtoluvuista. Murtolukujen suuruuden ymmärtäminen näyttäisi olevan avainasemassa murtolukujen laskuproseduurien ymmärtämiselle. Ne ryhmät, joissa murtolukujen suuruusvertailu sujui, myös laskuproseduurit tuntuivat sujuvan. Ne oppilaat, jotka eivät hallinneet laskujärjestyssääntöä 7. luokalle tullessaan, eivät myöskään juurikaan kehittyneet lukuvuoden aikana. Tällaiset oppilaat ovat vaarassa pudota opetuksesta! Huiput tunnistivat rationaalilukujen eri esitysmuotoja. Ne oppilaat, jotka tunnistivat 7. luokalle tullessaan murtoluvun desimaalilukuesityksen, olivat jo lähtökohtaisesti vahvoilla, pystyivät hyödyntämään annettua opetusta, ja oppimaan uutta.

Missä sitten on vika? Opetetaanko murtolukuja liian varhain alakoulussa, jolloin oppilaat eivät vielä ymmärrä mistä on kyse? Mielestäni murtolukuja aletaan joko pohjustamaan aivan liian aikaisin tai sitten siirrytään liian aikaisin pois konkreettisten mallien ääreltä symboliesitysmuotoon. Liikaa kiirehditään opettamaan oppilaille laskuproseduureja symbolien avulla. Symboliesityksessä oppilaat helposti turvautuvat tuttuihin piirteisiin, ja hyödyntävät luonnollisten lukujen ominaisuuksia ymmärtämättä murtoluvun merkitystä. Ilman murtoluvun suuruuden ymmärtämistä, laskuproseduureja opitaan ulkoa hetkeksi ja sitten unohdetaan. Mielestäni murtolukujen opettaminen kannattaisi siirtää vasta esimerkiksi neljännelle luokalle ja opettaa murtolukuja yhdellä kertaa hieman pidempi ajanjakso ja päästä samalla myös hieman pidemmälle. Tällöin oppilaat ehtisivät ihmetellä murtolukujen suuruutta, tehdä suuruusvertailuja, sijoittaa murtolukuja lukusuoralle, opetella samannimisten murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskua, tutustua sekaluvun käsitteeseen ja sekalukujen yhteen- ja vähennyslaskuun, ja opetella jopa murtoluvun kertomista ja jakamista luonnollisella luvulla. Näin murtoluvuista ja niiden välisistä laskutoimituksista olisi mahdollista muodostaa yhtenäisempi kuva. Opetussuunnitelmassa (2014) murtolukujen opetus on edelleen pirstottu viiden kouluvuoden ajalle, jolloin yksittäinen murtolukujakso oli kovin lyhyt sekä ajallisesti että asiasisällöllisesti ja seuraavan kerran asiaan palataan taas vasta vuoden kuluttua.

Uudistuneessa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014), matematiikan tavoitteissa vuosiluokille 7 – 9, nostetaan esille konkretia ja toiminnallisuus keskeisenä osana matematiikan opetusta ja opiskelua. Opettajien tulisi rohkaista oppilaita käyttämään ajattelua tukevia piirroksia ja välineitä, mikä osaltaan tukee tavoitetta kehittää viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. Ehkäpä uusi opetussuunnitelma luo viimein tilaa myös muillekin perustelutavoille kuin symboliselle esitysmuodolle. Oleellista on oppilaan ajattelun näkyväksi tekeminen, tavalla tai toisella. Opetussuunnitelmassa velvoitetaan aineenopettajaa tukemaan oppilasta, jos hän havaitsee puutteita alempien vuosiluokkien keskeisissä sisällöissä, vaikka ne kuuluisivatkin alakoulun opetussuunnitelmaan. Aineenopettajien ja luokanopettajien olisi aika uudistaa opetustaan opetussuunnitelman hengessä ja antaa oppilaille konkretiaa oppimisen tueksi ja mahdollisuus ilmaista matemaattista ajatteluaan eri tavoin.

Matematiikan aineenopettajalla saattaa olla liian positiivinen kuva uusien oppilaidensa todellisesta osaamistasosta katsoessaan alakoulun matematiikan opetussuunnitelman sisältöä. Opettajan olisikin hyvä testata yläkoulutulokkaansa ja varmistaa hallitsevatko oppilaat *luonnollisten lukujen laskujärjestyssäännön*, *murtolukujen suuruusvertailun* ja tunnistavatko he *murtoluvun desimaalilukuesityksen*. Edellä mainitut kolme taitoa erottelivat oppilaita tässä tutkimuksessa. Oppilaat, jotka hallitsivat hyvin murtolukujen peruslaskutoimitukset, osasivat yleensä myös järjestää murtoluvut suuruusjärjestykseen.

Tutkimuksen oppilaiden suorituksissa tapahtui kehittymistä keskimäärin vain muutaman prosenttiyksikön verran yhden lukuvuoden aikana. Jotain on tehtävä toisin, jotta saadaan oppi menemään paremmin perille!

Jos olet kiinnostunut testaamaan omat oppilaasi murtolukutesteillä, niin käyttämäni murtolukutestit (7., 8. ja 9. luokka) löytyvät ilmaiseksi pdf-muodossa osoitteesta www.aleamath.fi välilehdeltä ”Testit”.

LÄHTEET

Hihnala, K. (2005). Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopiston julkaisusarja 278 (ss. 86, 89). Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias Teaching. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Niemi, E.K. (2004). Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. Turun yliopiston julkaisuja 216, Ser C. (ss. 131–132). Turku: Turun yliopisto.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. (2014). Helsinki: Opetushallitus.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R. (2015.) Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5–13.