Nelikulmioiden hierarkiaa etsimässä – Eulerin diagrammeja luokanopettajaksi opiskelevien piirtäminä

TOMI KÄRKI

topeka@utu.fi
Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan, millaisia nelikulmioiden hierarkkista rakennetta esittäviä Eulerin diagrammeja luokanopettajaksi opiskelevat piirsivät monialaisten opintojen matematiikan didaktiikan opintojaksolla. Opiskelijoiden (n=73) geometrian harjoitustyössä piirtämiä diagrammeja analysoitiin aineistolähtöisesti tyypittelemällä ne geometristen käsiteluokkien välisten suhteiden perusteella. Diagrammin piirtäminen osoittautui luokanopettajaksi opiskeleville haastavaksi tehtäväksi. Keskimäärin 30 % luokkien välisistä suhteista oli standarditulkinnasta poikkeavia. Diagrammeista noin puolet kuului kolmeen yleisimpään diagrammityyppiin, joissa neliöitä ei ollut esitetty suorakulmioiden ja neljäkkäiden leikkauksena. Tulokset tukevat aiempien tutkimusten havaintoa geometristen hierarkioiden puutteellisesta hallinnasta. Eulerin diagrammi matemaattisen tiedon esitysmuotona oli opiskelijoille melko vieras. Jatkossa kannattaisikin tarkemmin selvittää niiden laajempaa käyttöä matemaattisen monilukutaidon ja geometrisen käsitetietouden kehittämiseksi.

Avainsanat

Luokanopettajakoulutus, geometria, käsitehierarkia, Eulerin diagrammi

Johdanto

Tutkimustiedon tulee ohjata ja suunnata opettajan ja oppijayhteisön toimintaa kohti laadukkaampaa opetusta ja oppimista niin koulujen luokkahuoneissa kuin yliopistojen seminaari- ja luentosaleissa. Vastavuoroisesti luokkahuonekontekstissa syntyy uutta aineistoa, joka kehittää ja syventää tutkimusta edelleen eteenpäin. Tässä tutkimuksessa opetuksen ja tutkimuksen vuoropuhelua käydään geometrisen käsitetiedon alueella. Aiemman tutkimustiedon ohjaamana (mm. De Villiers 2010; Keranto 2005) luokanopettajaksi opiskelevien matematiikan didaktiikan kurssilla kiinnitettiin huomiota nelikulmioiden hierarkiaan ja sen opettamiseen erilaisin harjoittein. Luokanopettajaksi opiskelevien harjoitustyönä piirtämiä hierarkiaa kuvaavia diagrammeja analysoimalla pyrittiin saamaan käsitys tulevien opettajien kyvyistä esittää geometriaan ja joukko-oppiin liittyvää tietoa matematiikalle tyypillisessä visuaalisessa muodossa. Tutkimuksessa Eulerin diagrammit todetaan melko vieraaksi tiedon esitysmuodoksi, mikä osaltaan selittänee kerätyssä aineistossa havaittuja geometrisen käsitetiedon puutteita ja toisaalta suuntaa tulevaa opetus- ja tutkimustoimintaa pohtimaan matemaattisen monilukutaidon merkitystä geometrisen käsitetiedon kehittämisessä.

Käsitehierarkiat geometrisen käsitetiedon kehittymisen osana

Matemaattinen tieto voidaan jakaa proseduraaliseen eli menetelmätietoon ja konseptuaaliseen eli käsitetietoon (Hiebert & Lefevre 1986). Geometriassa menetelmätietoon kuuluvat geometristen objektien merkintätapojen tunteminen ja algoritmisten toimintasääntöjen kuten pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskutapojen sekä kuvioiden ja kappaleiden piirtämiseen liittyvien sopimuksien hallinta. Oppijan geometrinen käsitetieto koostuu muun muassa siitä, mitä hän käsittää erilaisten kappaleiden ja kuvioiden nimitysten tarkoittavan, millaisia ominaisuuksia hän näihin käsitteisiin liittää ja millaisessa suhteessa käsitteet ovat toisiinsa. (Silfverberg 1999.)

Geometrisen käsitetiedon kehittymistä kuvaa hollantilaisen avioparin Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin 1950-luvulla alkaneisiin tutkimuksiin pohjautuva ns. van Hielen teoria (Fuys, Geddes & Tischler 1984). Siinä oppijan geometrisen käsitetiedon ajatellaan kehittyvän viiden tason kautta, joista empiirisiin tutkimuksiin perustuen lähinnä kolme ensimmäistä tasoa soveltuvat peruskoulun oppilaiden käsitetietouden tarkasteluun (mm. De Villiers 2010; Korkatti 2016, Škrbec & Čadež 2015). Ensimmäisellä tasolla (vH1) geometristen objektien tunnistaminen ja tuottaminen tapahtuu niiden visuaaliseen kokonaishahmon perusteella. Toinen taso (vH2) on ominaisuuksien analysoinnin taso, jossa osataan kiinnittää huomiota kuvioiden ominaisuuksiin mutta ei ominaisuuksien keskinäisiin riippuvuussuhteisiin. Seuraavalla ns. ominaisuuksien järjestämisen tasolla (vH3) oppija osaa tehdä lyhyitä epäformaaleja päättelyjä, muotoilla määritelmiä ja muodostaa käsitehierarkioita, joissa kuvioiden ominaisuudet ovat järjestäytyneet loogisiksi rakenteiksi. (Fuys ym. 1984; Silfverberg 1999; Korkatti 2016; Van de Walle, Karp & Bay-Williams 2009.) Van Hielen teorian ominaispiirteitä ja teorian merkitystä geometrian opetuksessa on tutkittu paljon, ja kehitystasojen yleissisältöä voidaan pitää laajasti hyväksyttynä (Ma 2015).

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2014) sanamuodoista voidaan tulkita vuosiluokkien 1–6 geometrian opetuksen keskittyvän tasojen vH1 ja vH2 mukaiseen toimintaan. Kappaleiden ja kuvioiden tunnistamisen lisäksi ohjataan oppilasta havainnoimaan ja kuvailemaan geometrisia ominaisuuksia. Tasolle vH3 kuuluvien käsitehierarkioiden hallintaa ei opetussuunnitelmassa kuvata eksplisiittisesti vaikkakin opetussuunnitelma edellyttää ominaisuuksiin pohjautuvaa luokittelua. Opettajien matemaattiset taidot on kansainvälisesti nähty kriittisenä tekijänä oppilaiden geometrisen ymmärryksen kehittämisessä (Browning, Edson, Kimari & Aslan-Tutak 2014; De Villiers 2010). Jotta opettajalla olisi riittävät edellytykset ohjata oppilaidensa geometrisen käsitetiedon kehittymistä, tulisi hänen käsitetietonsa olla vähintään oppilaiden tavoitetasosta yhtä tasoa korkeammalla (Afonso, Camacho & Socas 1999). Tämän perusteella luokanopettajilta olisi syytä edellyttää tasolle 3 kuuluvien taitojen kuten yleisimpien geometristen käsitteiden välisten suhteiden hallintaa. Myös Keranto (2005) toteaa konstruktiivisen, geometrisen päättelyn tasoa systemaattisesti kohottavan opetuksen vaativan opettajalta käsitehierarkioiden ja korrektien määrittelyjen hallintaa.

Geometristen käsitehierarkioiden kuten tässä tutkimuksessa tarkastellun nelikulmioiden hierarkian ymmärtämisessä on todettu puutteita niin oppilaiden kuin opettajaksi opiskelevienkin keskuudessa. Tässä tutkimuksessa käytetty nelikulmioiden hierarkian standarditulkinta on esitetty puumallina Kuviossa 2 ja Eulerin diagrammina Kuviossa 4. Taustatietoa nelikulmioiden luokittelusta matematiikassa ja matematiikan opetuksessa löytyy esimerkiksi Joen (2002) väitöskirjasta. Korkatin (2016) väitöstutkimuksen mukaan vain lähes puolet 5.–6.-luokkalaisista tunnisti standarditulkinnan mukaisesti neliön suorakulmioksi. Neliön ja suorakulmion suunnikkaiden joukosta ymmärsi suunnikkaiksi noin kolmannes, ja suunnikkaiden tunnistus laajemmasta kuviojoukosta tuotti vielä enemmän vaikeuksia. Silfverberg (1999) tutki käsitetiedon tasoja lähinnä yläkoululaisten keskuudessa ja havaitsi, että vain 14 oppilasta (5,8 %) 240 yläkoululaisesta tulkitsi käsitteiden neliö, suorakulmio, suunnikas, nelikulmio ja monikulmio suhteet standardilla tavalla. Kerannon (2005) mukaan peruskoulun opettajien puutteet hierarkkisessa luokittelussa ja määritelmien osaamisessa heikentävät opetuksen laatua. Hänen tutkimuksessaan käsitteiden neliö, suorakulmio, suunnikas ja nelikulmio keskinäiset suhteet osasivat aineenopettajaksi opiskelevista täysin 52 % ja melkein oikein 48 %. Luokanopettajaksi opiskelevista vain 17 % luokitteli kuviot täysin oikein ja 47 % melkein oikein. Tutkimustulostensa pohjalta Keranto (2005) toteaa opettajankoulutuksen matematiikan didaktiikan opintojen haasteellisuuden, sillä ulkoa opetteluun ja unohtamiseen johtavien opetuskäytänteiden sijaan yliopisto-opintojen tulisi pyrkiä tarjoamaan tuleville opettajille konstruktiivisia ja ongelmalähtöisiä keinoja geometrian opetuksen kehittämiseksi.

Matemaattinen monilukutaito ja Eulerin diagrammit

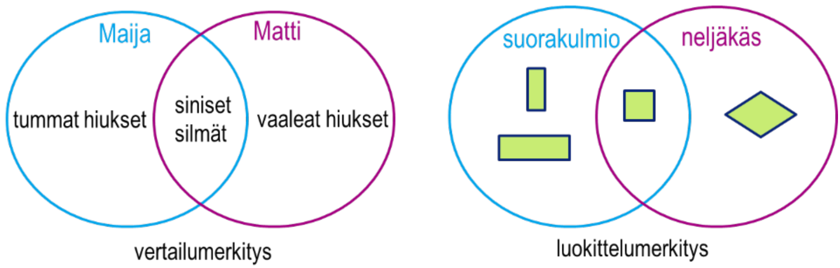
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus 2014) mukaan monilukutaidolla tarkoitetaan erilaisten tekstien tulkitsemisen, tuottamisen ja arvioimisen taitoja. Se on opetussuunnitelmassa yksi seitsemästä laaja-alaisen osaamisen osaamiskokonaisuudesta. Luukan (2013) mukaan monilukutaitoon kuuluvat 1) monimodaalisuus, 2) monimediaisuus, 3) monitilanteisuus ja 4) monikulttuurisuus. Monimodaalisuus viittaa laajaan tekstikäsitykseen, jonka mukaan tekstillä voidaan tarkoittaa puhutun tai kirjoitetun kielen lisäksi niin symboleja, numeroita, graafisia esityksiä, kuvia, liikkuvaa kuvaa kuin ääntäkin. Monimediaisuus viittaa erilaisiin välineisiin, joiden avulla tekstit on tuotettu ja joiden ominaisuuksia ne hyödyntävät. Monilukutaitoinen osaa myös hyödyntää tekstejä eri tilanteissa tarkoituksenmukaisella tavalla. Monikulttuurisuudella ei tarkoiteta ainoastaan kansallisia ja kielellisiä kulttuureja vaan myös eri tiedonaloja tai koulukontekstissa eri oppiaineita. (Luukka 2013.)

Esimerkiksi matematiikalla on oma kielensä ja tapansa ilmaista merkityksiä. Matemaattisessa ilmaisussa korostuu usein eksaktin symbolikielen käyttö, mutta sen on toisaalta todettu myös rajoittavan matemaattisen ajattelun esittämistä. Matematiikan opetuksessa ja oppimisessa kannattaisikin systemaattisesti hyödyntää matemaattisen symbolikielen, luonnollisen kielen ja kuvallisen kielen yhdistämistä. (Joutsenlahti & Kulju 2016; Lemke 2002.) Multimodaalisuuden on todettu hyödyttävän oppimista, sillä tiedon erilaiset esitystavat tarjoavat lisää mahdollisuuksia merkitysten luomiselle. Eri esitysmuotoja ei voikaan suoraan tai täydellisesti muuntaa toisikseen. Joku voi ymmärtää kuvallisesta esityksestä sen, mitä sanat eivät kyenneet hänelle avaamaan, ja ehkä sitten kuvan avulla myös sanallinen ilmaisu alkaa saada merkityksensä. (Cope & Kalantzis 2009.) Kun oppijan on käytettävä erilaisia matemaattisen tiedon ilmaisutapoja, hänen ymmärryksenä asiasta kasvaa ja syvenee (Joutsenlahti ym. 2016).

Tämän tutkimuksen tarkastelun kohteena oleva matemaattisen tiedon kuvallinen esitysmuoto on Eulerin diagrammi, joka voidaan yleisesti määritellä äärellisenä nimettyjen ja suljettujen käyrien joukkona. Diagrammissa käyrien tarkoituksena on ilmaista joukko-opillisia relaatioita: joukkojen sisältymistä toisiinsa, joukkojen leikkauksia ja joukkojen erillisyyttä (ks. Kuvio 3). (Fish & Stapleton 2006; Rodgers 2014.) Jokainen suljettu käyrä jakaa tason kahteen alueeseen. Käyrän sisäosa kuvaa joukkoon kuuluvia alkioita ja ulkopuoli niitä alkiota, jotka eivät kuulu kyseiseen joukkoon. Käyrät, jotka eivät leikkaa toisiaan, kuvaavat erillisiä joukkoja. Alue, joka jää kahden leikkaavan käyrän sisään, kuvaa joukkojen yhteisiä alkioita. Jos käyrä sisältyy kokonaan toisen käyrän sisäosaan, esittää se toisen joukon osajoukkoa.

Vaikka matemaatikot olivat aiemminkin käyttäneet vastaavantapaisia esitysmuotoja, diagrammit on nimetty Leonhard Eulerin mukaan, sillä hän popularisoi suljettujen käyrien hyödyntämisen loogisen päättelyn apuvälineenä *Kirjeissään saksalaiselle prinsessalle fysiikasta ja filosofiasta* (Euler 1770; Rodgers 2014). Eulerin diagrammeja pidetään tehokkaana tiedon visualisoinnin keinona. Matematiikan lisäksi Eulerin diagrammeja käytetäänkin laajasti muun muassa biotieteissä, lääketieteellisen tai tilastollisen datan visualisoinnissa, loogisessa päättelyssä, erilaisten luokittelujen esittämisessä tai esimerkiksi ohjelmistosuunnittelussa (Fish ym. 2006; Rodgers 2014). Englantilaisen loogikon John Vennin kehittämä Venn-diagrammi (Venn 1880) on Eulerin diagrammin erikoistapaus, jossa kaikki mahdolliset käyrien leikkaukset tulee olla esitettyinä ja tyhjät leikkaukset merkitään usein varjostettuina alueina. Joskus Eulerin diagammeja kutsutaan virheellisesti Venn-diagrammeiksi (Rodgers 2014).

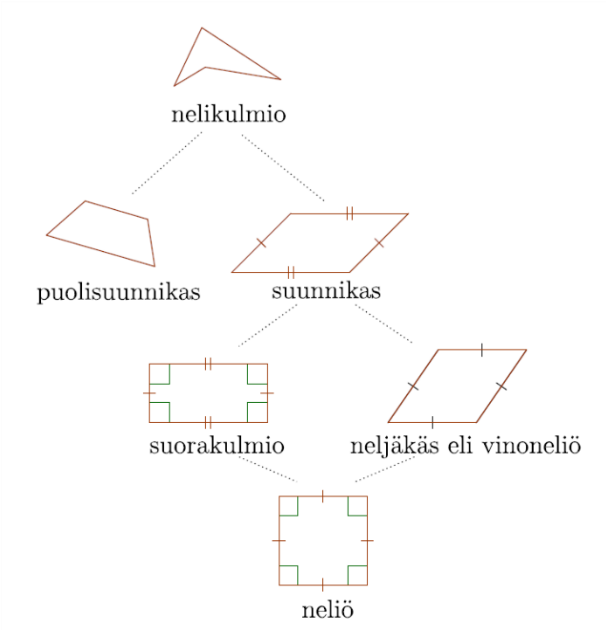
Merkittävä Eulerin diagrammien ja Venn-diagrammien käyttökohde on opetus ja oppiminen. Diagrammeja on käytetty niin koulumatematiikan loogisissa päättelyissä, joukko-opillisissa luokitteluissa ja ongelmanratkaisussa kuin muissakin oppiaineissa (Kimmins & Winters 2015). Diagrammien käytössä on myös havaittu ongelmia (Calvillo, DeLeeuw & Revlin 2006; Kimmins & Winters 2015; Mineshima, Sato, Takemura & Okada 2014). Kimmins ja Winters (2015) havaitsivat, että Venn-diagrammeja käytettiin joukko-opillisen luokittelumerkityksen lisäksi myös vertailumerkityksessä mm. kielen ja kirjallisuuden opetuksessa, ks. Kuvio 1. Vertailumerkityksessä käyrä kuvaa tarkastelun kohdetta, jonka ominaisuuksia kirjataan käyrän sisään. Käyrien leikkauksessa olevat ominaisuudet ovat yhteisiä molemmille tarkastelun kohteille ja yhteisen alueen ulkopuolelle kirjataan niitä ominaisuuksia, jotka erottavat vertailtavat kohteet toisistaan. Joukko-opillisessa luokittelumerkityksessä käyrät sen sijaan symboloivat joukon ominaisuuksia ja käyrien sisään sijoitetaan tarkasteltavia asioita niiden ominaisuuksien mukaisesti. Käyrien leikkauksessa ovat ne asiat, joilla on molempien joukkojen ominaisuudet. Kimmins ja Winters totesivat tämän aiheuttavan sekaannusta niin opettajien kuin oppilaidenkin keskuudessa. Diagrammien käytön onnistumisen varmistamiseksi he suosittelevatkin erilaisten joukko-opillisten tilanteiden (leikkaus, osajoukko, erilliset joukot) kuvaamista diagrammien avulla sekä molempien tulkintatapojen monipuolista käyttöä eri oppiaineissa. Opettajan tulisi aina riittävin taustatiedoin ja esimerkein selventää diagrammien käyttötarkoitus kussakin tilanteessa. (Kimmins & Winters 2015.)



Kuvio 1. Venn-diagrammin kaksi käyttötapaa.

Tutkimusmenetelmä

Aiemman tutkimustiedon ohjaamana luokanopettajaksi opiskelevien matematiikan didaktiikan kurssilla kiinnitettiin huomiota nelikulmioiden hierarkiaan ja sen opettamiseen erilaisin harjoittein. Opintojaksolla luokiteltiin paperista leikattuja tasokuvioita, ratkaistiin huonepakopelityyppinen hierarkioihin perustuva ongelmanratkaisutehtävä, käytiin keskustelua luokitteluperusteista, kiinnitettiin huomiota sekä visuaaliseen että määritelmiin perustuvaan luokitteluun ja luotiin näistä yhteyksiä van Hielen teoriaan. Matematiikan didaktiikan opintojaksoon kuului lisäksi harjoitustyö, jonka yhtenä osana tuli nelikulmioiden välisiä suhteita kuvata Eulerin diagrammin muodossa. Opiskelijoiden tuli piirtää Eulerin diagrammi käsitteistä *nelikulmio, suunnikas, puolisuunnikas, neljäkäs, suorakulmio* ja *neliö*. Tehtävänannossa oli esimerkkinä esitetty ja selitetty Eulerin diagrammi terävä-, suora- ja tylppäkulmaisista sekä tasakylkisistä ja -sivuisista kolmioista. Diagrammien piirtämisen apuna oli mahdollista käyttää luentomonisteen geometristen kuvioiden määritelmiä sekä puumallina kuvattua nelikulmioiden hierarkiaa, joka on esitetty Kuviossa 2.



Kuvio 2. Luentomonisteen nelikulmioiden hierarkian puumalli.

Nämä opiskelijoiden opintojakson osasuorituksena piirtämät diagrammit muodostavat tämän tutkimuksen tutkimusaineiston. Tässä tutkimuksessa halutaan selvittää:

1. Millaisia ovat luokanopettajaksi opiskelevien piirtämät Eulerin diagrammit?

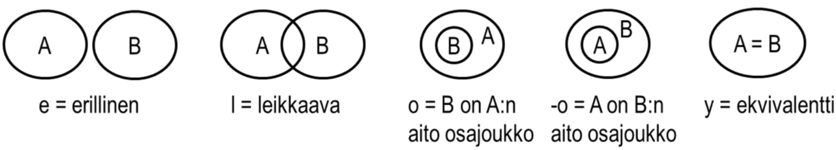
2. Millaisia ovat tyypillisimmät diagrammit ja kuinka yleisiä ne ovat?

3. Millaisia yhteisiä piirteitä löytyy tyypillisimmistä tapauksista eroavista diagrammeista?

Aineistonkeruu tapahtui siten, että harjoitustyön palautuksen yhteydessä opettaja (tutkija) esitti diagrammista standarditulkinnan mukaisen oikean ratkaisun ja pyysi tämän jälkeen opiskelijoita tutkimukseen osallistumiseksi lähettämään kuvan omasta diagrammistaan tutkijalle sähköpostitse. Lisäksi opiskelijoita pyydettiin sähköpostissa vastaamaan muutamaan taustakysymykseen.

Tutkimukseen osallistui 73 opiskelijaa opintojakson 82 opiskelijasta. Heidän sähköpostivastauksensa diagrammikuvineen nimettiin tunnuksilla D01–D73. Tutkimuksessa analysoitiin 70 diagrammia, sillä kaksi opiskelijaa (D23, D51) oli unohtanut liittää sähköpostiinsa kuvan diagrammista ja yksi (D10) oli lähettänyt kuvan taululla olleesta oikeasta vastauksesta. Vastaajista 82 % ilmoitti, että ei ollut aiemmin tehnyt tämän tyyppisiä diagrammeja. Opiskelijoille Eulerin diagrammi oli siis melko vieras esitysmuoto. Kaikki opiskelijat ilmoittivat ymmärtävänsä standarditulkinnan mukaisen diagrammin. Heistä 31 % kuitenkin epäili, että ei osaisi muodostaa itse diagrammia. Muut ilmoittivat osaavansa tehdä jatkossa vastaavanlaisen diagrammin.

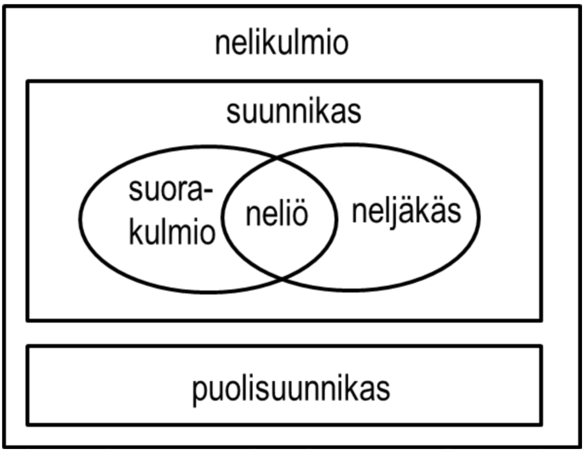
Diagrammit analysoitiin siten, että kunkin diagrammin käsiteluokkien väliset suhteet (15 kpl/diagrammi) kirjattiin taulukkoon, mikäli niiden tyyppi poikkesi standarditulkinnasta. Käsiteluokkien välisiä suhteita on viittä eri tyyppiä, jotka on esitetty Kuviossa 3. Joukot A ja B voivat olla erilliset (e), leikkaavat (l), B joukon A osajoukko (o), A joukon B osajoukko (-o) tai A ja B voivat olla ekvivalentit eli yhtä suuret (y). Lisäksi analyysin aikana huomattiin, että diagrammien erottamiseksi toisistaan tuli tarkastella myös nelikulmioiden suhdetta suunnikkaiden ja puolisuunnikkaiden joukkojen yhdisteeseen, suunnikkaiden suhdetta neljäkkäiden ja suorakulmioiden joukkojen yhdisteeseen sekä neliöiden suhdetta neljäkkäiden ja suorakulmioiden joukkojen yhdisteeseen. Kaiken kaikkiaan diagrammin informaatio pyrittiin siis pelkistämään 18 suhteeseen. Mikäli käsiteluokkien välinen suhde poikkesi standarditulkinnasta, se tulkittiin virhepisteeksi. Opiskelijan saamat virhepisteet osuivat siis välillä 0-18. Esimerkiksi suhteesta suorakulmio–neljäkäs sai yhden virhepisteen, mikäli oli piirtänyt käsiteluokat erilleen (e), sillä standarditulkinnan mukaan suorakulmioiden ja neljäkkäiden joukot leikkaavat toisensa (l). Leikkaus muodostaa neliöiden joukon, sillä neliöt ovat sekä tasasivuisia suorakulmioita että tasakulmaisia neljäkkäitä.



Kuvio 3.
Joukkojen välisiä suhteita esitettynä Eulerin diagrammeina.

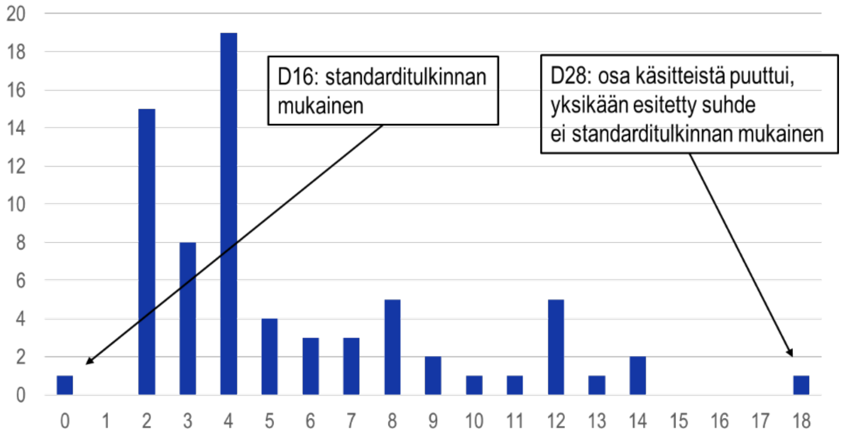
Tutkimustulokset

Standarditulkinnasta poikkeavia käsitesuhteita löytyi kaiken kaikkiaan 375. Aineistosta analysoitiin yhteensä 70 x 18 = 1260 käsiteluokkien välistä suhdetta, joten oikeiden tulkintojen osuus oli likimain 70 prosenttia. Opiskelijoiden virhepisteiden keskiarvo asteikolla 0–18 oli 5,4 eli keskimäärin diagrammit erosivat standarditulkinnasta noin viiden käsiteluokkien välisen suhteen kohdalla. Kuitenkin vain yksi diagrammeista (D16) oli täysin standarditulkinnan (Kuvio 4) mukainen. On huomattava, että standarditulkinnassa puolisuunnikkaat ja suunnikkaat on piirretty erillisinä, sillä tämä on yhdenmukainen tehtävänannossa mainitun hierarkian puumallin kanssa (Kuvio 2) ja vastaava tulkinta on yleisesti käytössä suomalaisissa alakoulun matematiikan oppikirjoissa. Kukaan opiskelijoista ei diagrammissaan merkinnyt suunnikkaita puolisuunnikkaiden osajoukoksi, mikä olisi ollut toinen matemaattisesti oikea tulkinta.



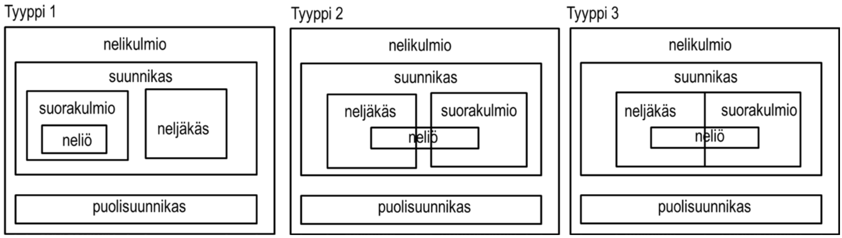
Kuvio 4. Nelikulmioiden hierarkian standarditulkinta.

Vastaavasti vain yksi diagrammi (D28) sai korkeimman mahdollisen virhepistemäärän (18). Siinä osa geometrisista käsitteistä puuttui vallan eikä yksikään esitetty suhde ollut standarditulkinnan mukainen. Yhden täysin oikein tehdyn diagrammin lisäksi kahden opiskelijan ratkaisut (D11, D54) olisi ollut mahdollista tulkita myös oikeiksi, kun tulkitsi diagrammiin piirretyt laatikot sopivalla tavalla ja piti ylimääräisiä laatikkoja Eulerin diagrammiin kuulumattomina nimien ”kehyksinä”. Diagrammien virhepisteiden jakauma on esitetty Kuviossa 5.



Kuvio 5. Virhepisteiden jakautuminen aineistossa.

Yleisimmät diagrammityypit on esitetty Kuviossa 6. Tyypin 1 diagrammin piirsi 15 opiskelijaa (21 %), tyypin 2 diagrammin niin ikään 15 opiskelijaa (21 %) ja tyypin 3 diagrammin kuusi opiskelijaa (9 %). Tyypin 1 diagrammissa suorakulmiot, neljäkkäät ja neliöt ovat kyllä suunnikkaita, mutta neljäkkäät ovat erillään sekä suorakulmioista että neliöistä, jotka on piirretty kokonaan suorakulmioiden sisään. Tyypin 2 diagrammissa neljäkkäät ja suorakulmiot ovat erillään, mutta diagrammin perusteella neliöt voivat olla joko suorakulmiota, neljäkkäitä tai muita suunnikkaita. Tyyppiä 2 vastaavat standarditulkinnasta poikkeavat suorakulmion, neljäkkään ja neliön suhteet löytyivät myös kahdeksasta (11 %) muusta diagrammityypistä 2 muilta osin poikkeavasta diagrammista. Tyypin 3 diagrammissa neljäkkäät ja suorakulmiot ovat kiinni toisissaan mutta eivät näytä varsinaisesti leikkaavan toisiaan. Lisäksi neliöt on jaettu viivalla joko suorakulmioihin tai neljäkkäisiin. Tyyppiä 3 vastaavat suorakulmion, neljäkkään ja neliön suhteet löytyivät myös viidestä (7 %) muusta diagrammista, jotka muiden suhteiden osalta eivät vastanneet tyypin 3 diagrammia.



Kuvio 6. Yleisimmät diagrammityypit.

Muut kuin edellä mainitut diagrammityypit olivat lähinnä yksittäistapauksia, mutta joitain samankaltaisuuksia voitiin havaita. Jatkossa sulkeisiin merkitty prosenttiluku kertoo, kuinka suuressa osassa analysoiduista diagrammeista havaittiin kyseinen ominaisuus. Nelikulmiota ei kuvattu kaikkien muiden käsitteiden yläkäsitteenä oikealla tavalla (37 %), nelikulmiot leikkasivat puolisuunnikkaiden ja suunnikkaiden joukkojen yhdisteen tai olivat sen osajoukko (21 %) tai diagrammin mukaan ei ollut olemassa muita nelikulmiota kuin puolisuunnikkaita tai suunnikkaita (9 %). Puolisuunnikkaiden suhde suunnikkaisiin ja sen alakäsitteisiin oli osattu hyvin. Diagrammeista 91 % kuvasi suhteen oikein. Sen sijaan suunnikkaiden suhde sen standarditulkinnan mukaisiin alakäsitteisiin oli osattu vain 76 prosentissa diagrammeista. Noin 11 prosentilla suunnikas oli merkitty samalle hierarkkiselle tasolle (rinnakkain) kuin ainakin osa sen alakäsitteistä. Aineiston diagrammeissa eniten poikkeamia standarditulkinnasta oli suhteissa suorakulmio–vinoneliö (97 % diagrammeista virheellisiä) ja vinoneliö–neliö (97 % diagrammeista virheellisiä) sekä suorakulmio–neliö (70 % diagrammeista virheellisiä).

Johtopäätökset

Tutkimuksen mukaan nelikulmioiden hierarkian Eulerin diagrammin piirtäminen on luokanopettajaopiskelijoille haastava tehtävä, joka vaatii hierarkian osaamisen lisäksi ymmärrystä diagrammista tiedon esitysmuotona. Erityisesti voidaan todeta, että neliöiden luokan esittäminen suorakulmioiden ja neljäkkäiden leikkauksena oli hankalaa. Siinä Eulerin diagrammeihin tottumattomalla piirtäjällä on saattanut olla vaikeuksia tuottaa oikeanlainen diagrammi, vaikka hän olisi ymmärtänytkin kaikkien neliöiden olevan sekä suorakulmiota että neljäkkäitä. Jos tarkastelusta jätettäisiin pois neljäkkäät, 19 opiskelijaa (27 %) olisi tehnyt standarditulkinnan mukaisen diagrammin. Lisäksi voidaan spekuloida, olisivatko myös tyypin 2 tai 3 diagrammit olleet oikein, mikäli neljäkästä ei olisi tarvinnut sovittaa kuvioon. Näin ajatellen standarditulkintaan olisi päätynyt jopa 57 prosenttia opiskelijoista.

Opettajien heikon geometristen käsitteiden hierarkkisen järjestämistaidon perusteella Keranto (2005) epäili luokanopettajien opetusratkaisujen konstruktiivisuutta ja kykyä kohottaa oppilaiden geometrisen osaamisen tasoa. Tämän tutkimuksen perusteella opettajankoulutuksessa on jatkossakin syytä kiinnittää huomiota hierarkioiden monipuoliseen käsittelyyn, mutta sen lisäksi asiaa kannattaa tarkastella myös matemaattisen monilukutaidon kannalta. Koska Eulerin diagrammi oli luokanopettajaksi opiskeleville melko tuntematon esitysmuoto, ainakin osa diagrammien virheistä on saattanut johtua ennemminkin kokemattomuudesta diagrammien esittämisessä kuin puutteista geometrisessa käsitetietoudessa. Tätä käsitystä vahvistaa myös se, että tehtävässä saattoi hyödyntää luentomonisteessa annettua hierarkiaa kuvaavaa puumallia tai mitä tahansa muuta tietolähdettä, joten hierarkiaa ei ainakaan tarvinnut osata ”ulkoa”. Geometrisen käsitetietouden mittaamisen luotettavuutta heikentää siis monille opiskelijoille ennestään tuntemattoman esitysmuodon käyttö tämän tutkimuksen mittarina. Toisaalta diagrammien analysoinnissa luotettavuutta lisää tyypittelyn selkeys, sillä se perustui 18 käsitesuhteen taulukoimiselle viiden suhdetyypin mukaisesti. Aineiston analysoinnissa tulkinnanvaraisuutta oli suhteellisen vähän.

Huomio kiinnittyykin opettajaksi opiskelevien kykyyn tulkita ja tuottaa matemaattista tietoa eri muodoissa. Opiskelijoille luentomonisteessa esitetystä hierarkian puumallista huolimatta heidän piirtämissään diagrammeissa oli paljon poikkeamia standarditulkinnasta. Toisaalta on huomattava, että puumalli eroaa esitysmuotona logiikaltaan Eulerin diagrammista ja on siten saattanut toimia yhtenä mahdollisena opiskelijan virhekäsitysten lähteenä. Tutkimuksessa ei kuitenkaan selvitetty, olivatko opiskelijat hyödyntäneet annettua hierarkian puumallia vai pyrkineet tuottamaan diagrammin omaan käsitetietoonsa pohjautuen. Diagrammeja tarkasteltaessa nouseekin mieleen, että osa opiskelijoista ehkä tulkitsi diagrammien idean eri tavoin kuin matematiikassa on ollut tapana (vrt. Kimmins & Winters 2015). Toisaalta diagrammien kaikkien poikkeamien ei kai voida ajatella johtuvan pelkästä monilukutaidon puutteesta, joten parannettavaa tulevien opettajien geometrisessa käsitetietoudessa varmasti yhä löytyy. Eulerin diagrammeja ja Venn-diagrammeja hyödynnetään matematiikassa ja matematiikan oppikirjoissa monenlaisten asioiden visuaaliseen havainnollistamiseen, joten opettajilla tulee olla kyky tulkita ja esittää tietoa kyseissä muodossa sekä yhdistää näin esitettyä tietoa muihin esitysmuotoihin. Jatkossa Eulerin diagrammit ja eteenkin matemaattisista esitysmuodoista toiseen siirtyminen kannattaisi ottaa monipuolisemmin esiin didaktiikan kurssien sisällöissä. Tutkimuksen ja opetuksen vuoropuhelun näkökulmasta mielenkiintoinen jatkotutkimus olisi selvittää, miten alakoulun oppilaat tulkitsisivat näitä Eulerin diagrammeja. Löytäisivätkö he matemaattisesti mielekkäitä tulkintoja sekä luokanopettajaopiskelijoiden standarditulkinnan mukaisille että siitä poikkeaville diagrammeille?

Lähteet

Afonso, M. C., Camacho, M., & Socas, M. M. (1999). Teacher profile in the geometry curriculum based on the Van Hiele theory. Teoksessa O. Zaslavsky (Toim.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2., 1–8). Haifa, Israel: PME.

Browning, C., Edson, A. J., Kimari, P. M., & Aslan-Tutak, F. (2014). Mathematical content knowledge for teaching mathematics: A focus on geometry and measurent. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 333–384.

Calvillo, D. P., DeLeeuw, K., & Revlin, R. (2006). Deduction with Euler circles: Diagrams that hurt. Teoksessa D. Barker-Plummer, R. Cox & N. Swoboda (Toim.), *Diagrammatic Representation and Inference. 4th International Conference, Diagrams 2006, Stanford, CA, USA, June 28–30, 2006, Proceedings* (199–203). Lecture Notes in Artificial Intelligence 4045. Berlin: Springer.

Cope, W., & Kalantzis, M. (2009). "Multiliteracies": New Literacies, New Learning. *Pedagogies: An International Journal, 4*(3), 164–195. DOI: 10.1080/15544800903076044

De Villiers, M. (2010). *Some reflections on the van Hiele theory*. Invited plenary presented at the 4th Congress of Teachers of Mathematics. Zagreb: Croatian Mathematical Society.

Euler, L. (1770). *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Tome second. Mietau et Leipsic. DOI 10.3931/e-rara-8642

Fish, A., & Stapleton, G. (2006). Defining Euler diagrams: Simple or what? Teoksessa D. Barker-Plummer, R. Cox & N. Swoboda (Toim.), *Diagrammatic Representation and Inference. 4th International Conference, Diagrams 2006, Stanford, CA, USA, June 28–30, 2006, Proceedings* (ss. 109–111). Lecture Notes in Artificial Intelligence 4045. Berlin: Springer.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* New York: Brooklyn College.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conseptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (Toim.), *Conseptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Joki, J. (2002). *Ulkoluvusta hahmottavaan geometriaan: aineksia geometrian opetukseen erityisesti peruskoulussa* (Väitöskirja). Didaktisen matematiikan sarja 1. Joensuu: Joensuun yliopisto.

Joutsenlahti, J., & Kulju, P. (2017). Multimodal languaging as a pedagogical model—A case study of the concept of division in school mathematics. *Education Sciences, 7*(1). DOI 10.3390/educsci7010009

Keranto, T. (2005). Tulevien opettajien tasogeometrisen tiedon ja päätelmien tasosta: tapauksena nelikulmiohierarkia ja eräät muut tasogeometriset objektit. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (Toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto—haaste vai mahdollisuus?* (95–110). Oulu: Oulun yliopisto.

Kimmins, D. L., & Winters, J. J. (2015). Caution: Venn diagrams ahead! *Teaching Children Mathematics, 21*(8), 483–493.

Korkatti, S. (2016). *Geometriaa laatoittamalla? van Hielen teorian mukainen geometrinen ajattelu ja tesselaatioon nojautuva Laatoitusprojekti peruskoulussa* (Väitöskirja). Acta Universitatis Lapponiensis 323. Rovaniemi: Lapin yliopisto.

Lemke, J. (2002). Mathematics in the Middle: Measure, Picture, Gesture, Sign, and Word. Teoksessa M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger & V. V. Cifarelli (Toim.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (215–234). Ottawa, ON, Canada: Legas Publishing.

Luukka, M.-R. (2013). Opetussuunnitelmat uudistuvat: tekstien lukijasta ja kirjoittajasta monilukutaituriksi. *Kieli, koulutus ja yhteiskunta*, *4*(5). https://www.kieliverkosto.fi/fi/article/opetussuunnitelmat-uudistuvat-tekstien-lukijasta-ja-kirjoittajasta-monilukutaituriksi/ [Luettu 10.5.2018]

Ma, H.-L. (2015). A study of van Hiele of geometric thinking among 1st through 6th graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(5), 1181–1196.

Mineshima, K., Sato Y., Takemura R., & Okada, M. (2014). Towards explaining the cognitive efficacy of Euler diagrams in syllogistic reasoning: A relational perspective. *Journal of Visual Languages and Computing, 25*, 156–169.

Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* Määräykset ja ohjeet 2014:96. Helsinki: Opetushallitus.

Rodgers, P. (2014). A survey of Euler diagrams. *Journal of Visual Languages and Computing, 25*, 134–155.

Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun oppilaan geometrinen käsitetieto* (Väitöskirja). Acta Electronica Universitatis Tamperensis 6. Tampere: Tampereen yliopisto.

Škrbec, M., & Čadež, T. H. (2015). Identifying and fosterning higher levels of geometric thinking. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(3), 601–617

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2009). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Harlow: Pearson.

Venn, J. (1880). I. On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings. *Philosophical Magazine and Journal of Science, 10*(59), 1–18.

Abstract

In quest of the hierarchy of quadrilaterals – Euler diagrams drawn by pre-service class teachers

The aim of this article is study what kind of Euler diagrams concerning the hierarchy of quadrilaterals were drawn by pre-service class teachers during their mathematics education course. Students' (n=73) diagrams were analysed by classifying them according to the relations between the different types of quadrilaterals. Based on the data, drawing the diagram seemed to be a challenging task for the pre-service teachers. On average, 30 percent of the relations represented in the diagrams differed from the standard interpretation. About one half of the diagrams belonged to one of the three most common diagram types, where squares were not represented as the intersection of rectangles and rhombi. These results support the earlier findings concerning students' and teachers' constricted understanding of geometrical hierarchies. The pre-service teachers seemed not to be familiar with presenting mathematical ideas using Euler diagrams. In the future, more extensive use of these diagrams for developing geometric thinking and improving mathematical multiliteracy should be further studied.

Keywords

Class teacher education, geometry, concept hierarchy, Euler diagram