REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 25, N° 1-2, 1996, pp. 217-224

L'ÉCART D'EFFICIENCE DANS L'OPTIMISATION VECTORIELLE

NICOLAE POPOVICI
(Cluj-Napoca)

1. INTRODUCTION

L'objet de la scalarisation d'un problème d'optimisation vectorielle consiste à dèfinir une application scalaire et monotone sur l'image des objectifs. Exemples de telles applications peuvent être trouvées entre autres, dans [2]. Nous proposons ici l'application d'écart d'efficience (e_A), qui s'appuie sur le concept d'ordre d'efficience introduit par nous en 1990 dans [4].

Commençons par rappeler quelques notions utilisées dans ce qui suit.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel, et soit d la distance engendrée par sa norme. Pour tout sous-ensemble Y de E, et $x \in E$, $d(x, Y) = \inf\,\{d(x, y) : y \in Y\}$ désigne la distance de x à Y (avec la convention que si $Y = \phi$ alors $d(x, Y) = \infty$). Pour $X, Y \subset E$, l'excès de X sur Y est défini par $e(X, Y) = \sup\,\{d(x, Y) : x \in X\}$ (avec la convention que si $X = \phi$ alors $e(X, Y) = 0$) et la distance (Hausdorff) entre X et Y est donnée par $d_H(X, Y) = \max\,\{e(X, Y); e(Y, X)\}$.

Soit C un cône convexe en E (i.e. $\mathbf{R}_+ \cdot C \subset C$ et $C + C \subset C$). Notons par $l(C) = C \cap -C$ la partie linéaire de C et considerons les relations binaires suivantes sur E: $x \underset{-c}{\geq} y \Leftrightarrow x - y \in C$; $x =_c y \Leftrightarrow x - y \in l(C)$; et $x \geq_c y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - y \in C \setminus l(C)$. Si $l(C) = \{0\}$, on va abréger par $(E, \|\cdot\|, C)$ e.n.o. l'espace normé ordonné par la relation d'ordre $\underset{-c}{\geq}$ induite par le cône convexe et pointu C.

Pour tout sous-ensemble non vide A de E, $[C]A = \bigcap\,\{x + C : x \in A\} = \{u \in E: u \underset{-c}{\geq} x,\ \forall x \in A\}$ désigne l'ensemble polaire de A, c.à.d. l'ensemble des majorants de A par rapport à $\underset{-c}{\geq}$ et $I\mathrm{Max}(A|C) = A \cap [C]A$ représent l'ensemble des points idéal-maximaux en A par rapport à $\underset{-c}{\geq}$.

Pour chaque point $x \in E$ la section de A par x est l'ensemble $A_x = A \cap (x + C) = \left\{y \in A : y \underset{-c}{\geq} x\right\}$. Une section A_x est dite propre si x est un point de

A. Un point x de A est dit efficient en A s'il n'existe pas dans A des points y tels que $y \geq_c x$. L'ensemble des points efficients en A sera noté par $\mathrm{Max}(A|C)$. On a donc

$$\mathrm{Max}(A|C) = \{x \in A \colon A_x \subset x + l(C)\}.$$

Si C est un cône convexe ayant l'intérieur non vide, on peut aussi définir la relation d'ordre stricte:

$$x >_c y \Leftrightarrow x - y \in (\mathrm{int}\, C) \setminus l(C).$$

Notons que $x >_c y$ est équivalent à $x - y \in \mathrm{int}\, C$ dès que $C \neq E$. Etant donné un sous-ensemble non vide A de E, l'ensemble des points faiblement-efficients en A est défini par

$$W\mathrm{Max}(A|C) = \{x \in A \colon \nexists\, y \in A \text{ t.q. } y >_c x\}.$$

Un sous-ensemble Y de E est dit:

(i) borné, si $\mathrm{diam}\, Y = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in Y\} < \infty$;
(ii) C-supérieurement borné, si $[C]Y \neq \phi$, i.e. $\exists\, u \in E$ t.q. $Y \subset u - C$;
(iii) C-inférieurement borné, si $[-C]Y \neq \phi$, i.e. $\exists\, v \in E$ t.q. $Y \subset v + C$ et
(iv) C-borné, si Y est C-supérieurement borné et C-inférieurement borné en même temps.

La norme $\|\cdot\|$ est dite:

(i) C-croissante, si $\|x^1\| \geq \|x^2\|$, $\forall\, x^1, x^2 \in C$ t.q. $x^1 \geq_C x^2$;
et (ii) strictement C-croissante, si $\|x^1\| > \|x^2\|$, $\forall\, x^1, x^2 \in C$ t.q. $x^1 \geq_C x^2$.

On peut vérifier facilement que:

1) Si $\mathrm{int}\, C \neq \phi$, alors Y est C-borné dès que Y est borné;
et 2) Si la norme $\|\cdot\|$ est C-croissante, alors Y est borné dès que Y est C-borné.

2. L'ÉCART D'EFFICIENCE

La définition suivante joue un rôle fondamental dans ce travail:

2.1. *Définition. Soit* $(E, \|\cdot\|, C)$ *un e.n.o. réel et soit A une partie non vide de E. Pour tout* $x \in A$, *on appelle écart d'efficience de x par rapport à A, la valeur* $e_A(x) \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *donnée par*

(2.1) $$e_A(x) = d_H(\{x\}, A_x) = e(A_x, \{x\}).$$

2.2. *Remarque.* Si $x \in A$, on a

(2.2) $$x \in \mathrm{Max}(A|C) \Leftrightarrow e_A(x) = 0.$$

En effet, comme C est supposé pointu, on a $x \in \mathrm{Max}\,(A|C) \Leftrightarrow A_x = \{x\}$. D'autre part, si X et Y sont des sous-ensembles non vides de E, on a $e(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \subset \mathrm{cl}\, Y$, d'où on obtient que $A_x = \{x\} \Leftrightarrow e(A_x, \{x\}) = 0$ c'est-à-dire $e_A(x) = 0$.

2.3. PROPOSITION. *Soit* $(E, \|\cdot\|, C)$ *un e.n.o. réel et soit A une partie non vide de E ayant toutes les sections propres bornées. Alors l'application* $e_A \colon A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *définie par* (2.1) *est à valeurs réelles; si, de plus, la norme* $\|\cdot\|$ *est C-croissante, alors* e_A *est C-décroissante sur A*, i.e.

$$e_A(x^1) \leq e_A(x^2), \quad \forall\, x^1, x^2 \in A \text{ t.q. } x^1 \underset{-C}{\geq} x^2.$$

Démonstration. Pour tout $x \in A$, on a $x \in A_x$ et donc $e_A(x) = \sup\{\|y - x\| \colon y \in A_x\} \leq \leq \mathrm{diam}\, A_x < +\infty$.

Supposons maintenant que $\|\cdot\|$ est C-croissante. Si $x^1, x^2 \in A$ et $x^1 \geq_{-C} x^2$ alors la convexité de C entraîne $A_{x^1} \subset A_{x^2}$ et donc $a - x^2 \underset{-C}{\geq} a - x^1 \underset{-C}{\geq} 0$ pour tout $a \in A_{x^1}$, d'où on obtient $e_A(x^1) = \sup\{\|a - x^1\| \colon a \in A_{x^1}\} \leq \sup\{\|a - x^2\| \colon a \in A_{x^1}\} \leq \sup\{\|a - x^2\| \colon a \in A_{x^2}\} = e_A(x^2)$. ■

2.4. THÉORÈME. *Soit* $(E, \|\cdot\|, C)$ *un e.n.o. réel et tel qu'il existe une fonctionnelle linéaire et continue* $l \in E^*$ *et un nombre réel* $\delta > 0$ *t.q.* $C \subset C(l, \delta) = \{x \in E \colon l(x) \geq \delta\, \|x\|\}$. *Alors, pour tout sous-ensemble non vide A de E qui possède au moins une section propre C-supérieurement bornée, on a:*

(2.3) $$\inf\{e_A(x) \colon x \in A\} = 0$$

et l'ensemble des points efficients en A admet la représentation:

(2.4) $$\mathrm{Max}(A|C) = \mathrm{Arg\,min}\,\{e_A(x) \colon x \in A\}.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\inf\{e_A(x) \colon x \in A\} > \varepsilon > 0$. Alors, $e_A(x) > \varepsilon$, $\forall\, x \in A$ et, par conséquent, pour tout $x \in A$ il existe $x' \in A_x$ t.q. $\|x' - x\| > \varepsilon$.

Soit $x^0 \in A$ tel que A_{x^0} soit C-supérieurement bornée et soit $x^1 \in A_{x^0}$ t.q. $\|x^1 - x^0\| > \varepsilon$. Construisons la suite $(x^n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans A_{x^0} par récurrence: $x^{n-1} \in A_{x^0}$ étant défini, sous l'hypothèse que nous avons fait, il existe un point $x^n \in A_{x^{n-1}} \subset A_{x^0}$ t.q. $\|x^n - x^{n-1}\| > \varepsilon$.

On a donc $x^n - x^{n-1} \in C \subset C(l, \delta)$ et $\|x^n - x^{n-1}\| > \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, ce qui entraîne que $l(x^n - x^{n-1}) > \delta \cdot \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. De plus, l étant linéaire, on a $l(x^n) - l(x^0) = = \sum_{k=1}^{n} \left[l(x^k) - l(x^{k-1}) \right] = \sum_{k=1}^{n} l(x^k - x^{k-1}) > n\delta\varepsilon$, d'où $l(x^n) > l(x^0) + n\delta\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ ce qui montre que

(2.5) $$\sup\{l(x) \colon x \in A_{x^0}\} = +\infty.$$

D'autre part, $[C]A_{x^0}$ étant non vide, quel que soit $y^0 \in [C]A_{x^0}$ on a $y^0 - x \in C \subset C(l, \delta)$, $\forall\, x \in A_{x^0}$ et donc $l(y^0 - x) \geq 0$, $\forall\, x \in A_{x^0}$, d'où on tire que $l(x) \leq l(y^0)$, $\forall\, x \in A_{x^0}$, ce qui contredit (2.5).

La première partie du théorème est donc démontrée et (2.4) découle immédiatement du (2.2). ■

2.5. *Remarques.* 1) Sous l'hypothèse qu'il existe $l \in E^*$ et $\delta > 0$ t.q. $C \subset C(l, \delta)$, le cône C est nécessairement aigu (i.e. cl C est un cône pointu), mais C peut avoir l'intérieur vide et la norme n'est pas forcément C-croissante.

2) Si la norme $\|\cdot\|$ est C-croissante, alors l'existence d'une section C-supérieurement bornée entraîne l'existence d'une section bornée; si le cône C a l'interieur non vide, alors dans le Théorème 2.4., on peut changer l'hypothèse sur l'existence d'une section C-supérieurement bornée par celle d'existence d'une section bornée.

3) Le Théorème 2.4 montre que pour trouver l'ensemble des points efficients en A il suffit de résoudre le programme scalaire:

$$\begin{cases} e_A(x) \to \min \\ x \in A \end{cases}$$

ce qui montre l'importance de la notion d'écart d'efficience du point de vue de la scalarisation.

Examinons maintenant quelques propriétés qualitatives de l'application e_A.

2.6. PROPOSITION. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel t.q. le cône C soit fermé et aigu. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble non vide et compact, alors l'application e_A est semi-continue supérieurement sur A.*

Démonstration. Puisque A est compacte et C est fermé, on a:

$$e_A(x) = \max\ \{\|y-x\| : y \in A_x\}\ ,\quad \forall\ x \in A\ . \tag{2.6}$$

En supposant que e_A n'est pas s.c.s. dans un point $x^0 \in A$, on peut trouver un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ en A, convergente vers x^0 et t.q. $e_A(x^n) \geq e_A(x^0) + \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'après (2.6), il existe donc une suite $(y^n)_{n\in\mathbf{N}}$ en A t.q. $y^n \in A_{x^n}$ et $\|y^n - x^n\| \geq e_A(x^0) + \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'ensemble A étant compact, on peut supposer sans restreindre la généralité que $(y^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente vers un point $y^0 \in A$.

Le cône C étant fermé, on a $y^0 - x^0 = \lim_{n\to\infty} (y^n - x^n) \in \mathrm{cl}\, C = C$ et donc $y^0 \in A_{x^0}$. Mais $\|y^n - x^n\| \geq e_A(x^0) + \varepsilon_0$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$ entraîne $\|y^0 - x^0\| > e_A(x^0)$ ce qui contredit la définition de $e_A(x^0)$. ■

2.7. *Exemple.* Soit $E = \mathbf{R}^2$ le plan euclidien ordonné par $C = \mathbf{R}^2_+$ et soit $A = \{0,1\} \times \left[0,1\right[\cup \{x^0\}$, où $x^0 = (0, 1)$. En prenant $x^n = \left(0, \dfrac{n-1}{n}\right)$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$ on a $x^n \to x^0$, $n \to \infty$ et $e_A(x^n) > 1$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, ce qui montre que dans ces circonstances e_A n'est pas s.c.s. dans x^0. L'explication réside dans le fait que A est seulement borné sans être compact.

En ce qui concerne la semi-continuité-inférieure de l'application e_A, nous allons montrer que la convexité de A joue un rôle essentiel.

2.8. PROPOSITION. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel et tel que l'interieur du C soit non vide. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble non vide et convexe, ayant toutes les sections propres bornées, alors l'application e_A est semi-continue inférieurement sur $A \setminus W\mathrm{Max}(A|C)$ (sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x^0 \in A \setminus W\mathrm{Max}(A|C)$ tel que l'application e_A ne soit pas s.c.i. dans x^0. Alors il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans A, convergente vers x^0, vérifiant la relation suivante:

$$e_A(x^n) \leq e_A(x^0) - \varepsilon_0\ ,\quad \forall\ n \in \mathbf{N}\ . \tag{2.7}$$

D'après la définition de $e_A(x^0)$, il existe un $y^0 \in A \cap (x^0 + C)$ t.q. :

$$\|x^0 - y^0\| \geq e_A(x^0) - \varepsilon_0/3\ . \tag{2.8}$$

En tenant compte que $x^0 \notin W\mathrm{Max}(A|C)$ on déduit qu'il existe un point $x \in A \cap (x^0 + \mathrm{int}C)$ et comme A et $x^0 + C$ sont convexes, on a: $(1-t)x + ty^0 \in A \cap (x^0 + \mathrm{int}C)$ quel que soit $t \in [0, 1[$. Choisissons un nombre $\tilde{t} \in [0, 1[$ tel que $(1-\tilde{t})\,\|y^0 - x\| \leq \varepsilon_0/3$. Alors, pour $\tilde{y} = (1-\tilde{t})x + \tilde{t}y^0$, on a: $\tilde{y} \in A \cap (x^0 + \mathrm{int}\, C)$ et $\|\tilde{y} - y^0\| \leq \varepsilon_0/3$.

Ensuite, puisque $x^0 \in \tilde{y} - \mathrm{int}\, C$ et $x^n \to x^0$, $n \to \infty$ il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x^n \in \tilde{y} - \mathrm{int}\, C$, $\forall\ n \geq n_0$ et donc $\tilde{y} \in A \cap (x^n + \mathrm{int}\, C) \subset A_{x^n}$, ce qui montre que $e_A(x^n) \geq \|x^n - \tilde{y}\|$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $\|x^n - \tilde{y}\| \leq e_A(x^n) \leq e_A(x^0) - \varepsilon_0$, $\forall\ n \geq n_0$, en vertu de (2.7) et, par conséquent $\|x^0 - \tilde{y}\| \leq e_A(x^0) - \varepsilon_0$.

Enfin, en tenant compte de (2.8) on tire

$$\|x^0 - \tilde{y}\| \leq \|x^0 - y^0\| + \varepsilon_0/3 - \varepsilon_0 \leq \|x^0 - \tilde{y}\| + \|\tilde{y} - y^0\| - 2\varepsilon_0/3$$

d'où, vu la construction de $\tilde{y}$, on déduit $\|x^0 - \tilde{y}\| \leq \|x^0 - \tilde{y}\| - \varepsilon_0/3$ c'est-à-dire on aboutit à la contradiction $0 < \varepsilon_0 \leq 0$. ■

2.9. *Exemples.* 1) Dans le plan euclidien $E = \mathbf{R}^2$, ordonné par $C = \mathbf{R}^2_+$ considérons l'ensemble compact $A = [0,1] \times [0,1] \cup \{(0,2)\}$ et soit $x^0 = (0, 0)$. Il est évident que $x^0 \in A \setminus W\mathrm{Max}(A|C)$ et que $e_A(x^0) = 2$; mais l'application e_A n'est pas s.c.i. dans x^0. En effet, pour la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x^n = (1/n, 1/n) \in A$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$ on a:

$$x^n \to x^0,\quad n \to \infty \quad \text{mais} \quad e_A(x^n) < \sqrt{2},\ \forall\ n \in \mathbf{N}$$

2) Dans l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$ ordonné par $C = \mathbf{R}^3_+$ considérons l'ensemble convexe et compact $A = \mathrm{conv}(\{y^0\} \cup B)$, où $y^0 = (0, 1, 1)$ et $B = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbf{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq 1\}$. Alors $x^0 = (0, 1, 0) \in W\mathrm{Max}(A|C)$ et l'application e_A n'est pas s.c.i. dans x^0 bien qu'elle est s.c.s. sur A, en vertu de la Proposition 2.6.

En effet, $e_A(x^0) = 1 = \| x^0 - y^0 \|$, et la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x^n = \left(\sin\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{\pi}{2n}, 0\right)$ converge vers x^0, mais $e_A(x^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, car $x^n \in \mathrm{Max}\,(A|C)$.

Comme une conséquence immédiate des propositions 2.6 et 2.8 on obtient:

2.10. COROLLAIRE. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel et tel que le cône C soit fermé et aigu et que* int$C$ *soit non vide. Si A est une partie non vide, convexe et compacte de E, alors l'application e_A est continue sur* $A\backslash W\mathrm{Max}(A|C)$ *(sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

Remarquons que dans l'exemple 2.9.2) toutes les hypothèses du Corollaire 2.10 sont vérifiées mais e_A n'est pas continue en x^0.

Dans ce cas, $x^0 \in W\mathrm{Max}(A|C)\backslash\mathrm{Max}(A|C)$.

3. POINTS SUPER-EFFICIENTS

Dans ce qui suit on va tourner notre attention vers la continuité de e_A sur l'ensemble des points efficients.

3.1. THÉORÈME. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel et tel que le cône C soit fermé et aigu et que int C soit non vide. Si A est une partie non vide de E ayant toutes les sections relativement compactes* (i.e. $\forall\, x \in E$, cl A_x *est compacte), alors l'application e_A est continue sur* $\mathrm{Max}(A|C)\cap\mathrm{Max}(\mathrm{cl}\;A|C)$ *(sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)\cap\mathrm{Max}(\mathrm{cl}\;A|C)$ dans lequel e_A n'est pas continue. Alors il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans A, convergente vers x^0 t.q. $|e_A(x^n) - e_A(x^0)| \geq \varepsilon_0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire $e_A(x^n) \geq \varepsilon_0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

D'après la définition de l'écart d'efficience il resulte que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe un point $y^n \in A_{x^n}$ tel que $\| y^n - x^n \| \geq \varepsilon_0/2$. Mais, la suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant convergente elle est aussi bornée et comme l'intérieur du C est non vide, il existe un point $\bar{x}\in E$ tel que $x^n \in \bar{x} + C$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire $x^n \in A_{\bar{x}}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, d'où on obtient que $y^n \in A_{\bar{x}}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

D'autre part, cl $A_{\bar{x}}$ étant compacte, on peut supposer sans limiter la généralité que la suite $(y^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point $\bar{y} \in \mathrm{cl}(A_{\bar{x}}) \subset \mathrm{cl}\;A$. Alors $\bar{y} - x^0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(y^n - x^n\right) \in \mathrm{cl}\;C = C$, car C est supposé fermé est donc $\bar{y} \in x^0 + C$, c'est-à-dire $\bar{y} \in (\mathrm{cl}\;A)_{x^0}$. Mais $\| y^n - x^n \| \geq \varepsilon_0/2$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ entraîne $\| \bar{y} - x^0 \| \geq \varepsilon_0/2$ et donc $e_{\mathrm{cl}\,A}(x^0) \geq \varepsilon_0/2 > 0$ d'où en déduit que $x^0 \notin \mathrm{Max}(\mathrm{cl}\;A|C)$ ce qui contredit l'hypothèse. ■

3.2. *Remarque.* Dans l'exemple 2.7, $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)\backslash\mathrm{Max}(\mathrm{cl}\;A|C)$ toutes les autres hypothèses du Théorème 3.1 étant vérifiées.

Mais, dans ce cas, e_A n'est pas continue dans x^0. Pour montrer que l'hypothèse sur la compacité relative des toutes les sections de A est essentielle, considérons l'exemple suivant:

Soit $A = \{0\} \times [0, \pi/2] \cup \{(x, \mathrm{arctg}\; x) : x > 0\}$ dans $E = \mathbf{R}^2$ ordonné par $C = \mathbf{R}^2_+$. Dans ce cas, l'application e_A n'est pas continue dans $x^0 = (0, \pi/2) \in \mathrm{Max}(A|C) = \mathrm{Max}(\mathrm{cl}\;A|C)$.

Le résultat suivant est basé sur une notion d'efficience introduite par J.M. Borwein et D.Z. Zhuang en 1993 [1].

3.3. *Définition. Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel et tel que le cône C soit fermé et aigu, et soit A une partie non vide de E.*

Un point $x^0 \in A$ est dit super-efficient s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que la propriété suivante soit vérifiée:

(3.1) $\quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in E$ t.q. $x - x^0 \geq_C y$ on a: $\| x - x^0 \| \leq M \| y \|$

L'ensemble des points super-efficients en A sera noté par $S\mathrm{Max}(A|C)$. Il est évident que $S\mathrm{Max}(A|C) \subset \mathrm{Max}(A|C)$ et que dans le cas de l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^n$ ordonné par $C = \mathbf{R}^n_+$, la notion de super-efficience est équivalente à celle d'efficience propre introduite par A.M. Geoffrion en 1968 [3]. En ce qui concerne la continuité de l'application e_A nous avons le théorème suivant.

3.4. THÉORÈME. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o. réel et tel que le cône C soit fermé et aigu. Si A est une partie non vide de E ayant toutes les sections propres bornées, alors l'application e_A est continue sur* $S\mathrm{Max}(A|C)$ *(sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x^0 \in S\mathrm{Max}(A|C)$ dans lequele e_A n'est pas continue. Puisque $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)$ il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ en A, convergente vers x^0 t.q. $e_A(x^n) \geq \varepsilon_0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $y^n \in A_{x^n}$ tel que $\| y^n - x^n \| > \varepsilon_0/2$.

Si M est un nombre strictement positif arbitraire, on peut trouver $n_0 \in \mathbf{N}$ t.q $\left\|x^{n_0} - x^0\right\| \leq \dfrac{\varepsilon_0}{2(M+1)}$. Alors, pour $x = y^{n_0}$ et $y = x^{n_0} - x^0$ nous avons $x - x^0 \geq_C y$ et $\left\|x - x^0\right\| \geq \left\|y^{n_0} - x^{n_0}\right\| - \left\|x^{n_0} - x^0\right\| > \varepsilon_0/2 - \left\|x^{n_0} - x^0\right\| \geq M\left\|x^{n_0} - x^0\right\| = M\|y\|$, ce qui contredit (3.1). ■

3.5. *Remarque.* Dans [1] J.M. Borwein et D.Z. Zhuang ont montré qui si E est un espace de Banach ordonné par un cône convexe C qui possède une base bornée et fermée alors quelle que soit A une partie non vide et compacte de E, l'ensemble $S\mathrm{Max}(A|C)$ est dense en $\mathrm{Max}(A|C) \neq \phi$, ce qui montre que dans ces circonstances, l'application e_A est continue sur une partie dense de $\mathrm{Max}(A|C)$.

BIBLIOGRRAPHIE

1. Borwein, J.M., Zhuang, D., *Super Efficiency in Vector Optimisation.* Transactions of A.M.S., 338 (1993), 105-122.
2. Luc, D. T., *Theory of Vector Optimization.* Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, vol. 319, Springer Verlag, Berlin, (1989).
3. Geoffrion, A. M., *Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization.* J. Math. Anal. Appl. 22 (1968), 618-630.
4. Popovici, N., *The Degree of Efficiency in the Multiobjective Optimization Problems.* "Babeş-Bolyai" Univ., Preprint 7 (1990), 143-154.

Received 25.10.1994

Université de Cluj
Faculté de Mathématiques
1, rue M. Kogălniceanu
3400 Cluj-Napoca, Roumanie