

计算力学学报
Chinese Journal of Computational Mechanics
ISSN 1007-4708, CN 21-1373/O3

《计算力学学报》网络首发论文

题目： 变体分比功能梯度点阵结构两尺度拓扑优化设计
作者： 梁有鹏，徐亮，刘电子，钱征华
网络首发日期： 2022-07-29
引用格式： 梁有鹏，徐亮，刘电子，钱征华. 变体分比功能梯度点阵结构两尺度拓扑优化设计[J/OL]. 计算力学学报.
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.O3.20220728.1405.036.html>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

变体分比功能梯度点阵结构两尺度拓扑优化设计

梁有鹏¹, 徐亮¹, 刘电子², 钱征华^{*1}

(1.南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室/航空学院, 南京 210016;

2.School of Engineering, University of East Anglia, Norwich, UK, NR4 7TJ)

摘要: 功能梯度点阵结构以其轻质、高比强度/比刚度及高抗断裂韧性等诸多优越的性能受到广泛关注, 由于其跨尺度及空间渐变的几何结构特点, 目前功能梯度点阵结构的设计仍然是一项具有挑战性的任务。本文采用两步优化策略进行多分区功能梯度点阵结构刚度优化设计。第一步结合离散材料优化方法进行多分区离散材料优化, 获得宏观均匀结构拓扑及合理的微结构分区; 第二步进行空间梯度变化点阵结构参数优化, 进一步扩大设计空间, 获得变体分比的结构设计。相较于单一点阵微结构设计, 两步优化策略可以更为有效地实现材料利用, 显著提高结构刚度, 且该方法适用于不同微结构构型, 数值算例验证了该方法的有效性。

关键词: 拓扑优化; 梯度点阵结构; DMO; 变体分比

中图分类号: O34 文献标识码: A 文章编号: 1007-4708(2017)00-0000-00

TWO-SCALE TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FUNCTIONALLY GRADED LATTICE STRUCTURES WITH VARYING VOLUME FRACTION

LIANG You-peng¹, XU Liang¹, LIU Dian-zi², QIAN Zheng-hua^{*1}

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures/College of Aerospace Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, China;

2. School of Engineering, University of East Anglia, Norwich, UK, NR4 7TJ)

Abstract: Functionally graded lattice structures enjoy widespread attention due to their lightweight, high specific stiffness/strength, high fracture resistance and other good performances, yet design optimization of these structures is still a challenging task due its cross-scale and spatially graded geometrical characteristics. In this work, a two-step optimization strategy is proposed to design functionally graded lattice structures. In the first step, the Discrete Material Optimization (DMO) is conducted to obtain optimal macro structural configuration and micro structural distribution. In the second step, parametric optimization is conducted to obtain graded lattice structures with varying volume fraction. The advantage of this work includes the adoption of the varying volume fraction operation, which enables the management of complex microstructures, and the pattern of spatially graded microstructure, which further broadens design space and improves structural stiffness, facilitating efficient use of materials. Finally, several numerical examples are presented to verify the effectiveness of the proposed method which significantly expands design space and effectively improve the structural stiffness.

Key words: Topology optimization; Graded lattice structure; DMO; Varying volume fraction

基金项目: 国家自然科学基金(12061131013), 中央高校基本科研业务费(NS2020004, NE2020002, NS2019207)和(省部级)机械结构力学及控制国家重点实验室开放课题(MCMS-E-0520K02)资助项目.

作者简介: 钱征华* (1980-), 男, 博士, 教授

(E-mail: qianzh@nuaa.edu.cn);

1 引言

点阵结构具有轻质^[1]、高比强度/刚度^[2-3]、热传导-承载多功能^[4]、能量吸收^[5]等优越的性能,在航空航天等领域有着广泛的应用。结构拓扑优化作为一种先进的设计方法,已经被广泛应用于周期点阵结构等多尺度结构^[6-11]的优化设计,并取得了巨大的成功。点阵结构具有跨尺度的结构特征(宏观尺度的结构拓扑设计和微观尺度的微结构材料设计),对其进行优化设计是一项具有挑战性的任务。另一方面,增材制造技术为制备精细的单尺度结构提供了有效手段,同时多尺度结构的实际制造也逐渐变为可能,使得多尺度结构逐渐成为拓扑优化领域新的研究热点之一。

现有的多尺度结构优化方法大多基于尺度分离假设,将点阵结构视为具有某种等效性质的宏观均匀材料,在微观尺度上对微结构的等效性质进行预测,在宏观尺度上基于微结构等效性质分析宏观结构在外部荷载下的响应。渐近均匀化方法将宏观结构中重复排列的微结构单胞视为某种等效材料,极大地降低了有限元分析所需的单元数目,但该方法要求微结构的特征尺寸远小于整体结构的尺度,当微结构的特征尺寸与整体结构的长度尺度相当时,该方法将变得不准确。Bendsøe 等人^[12]针对最小柔顺性问题提出均匀化方法,选取一种内部具有方形孔洞的微结构,通过优化整个设计域内微结构的孔洞尺寸和微结构转角,获得了接近理论最优解的两尺度优化结果,但是该优化方法并不能保证微结构之间的相互连接。Rodrigues 等人^[13]提出了一种层级优化策略,该方法可以同时优化复合材料宏观布局和微观材料拓扑,获得了微观结构处处不同的两尺度结构设计。Coelho 等人^[14]进一步扩展,将该层级优化策略拓展到三维问题中,该优化策略虽然可以获得接近理论最优解的优化结果,但同样无法保证微结构之间的连接性且计算量极大。Liu 等人^[15]提出了各向异性多孔材料惩罚模型(PAMP),假设整个宏观结构中只存在一种微结构单胞,保证了微结构之间的相互连接,该方法被进一步成功应用到多尺度结构的基频最大化问题^[16]、多尺度结构热力耦合优化问题^[17]中。但是单一微结构假设也极大地缩减了设计空间,对此一种常见的改进策略是,参照某种准则对宏观结构进行分区,假设每个区域

内分布着一种微结构单胞,以达到实现平衡设计空间和计算量的目的^[18]。Zhang 等人^[19]以最小结构柔顺性为目标,结合两个新颖的体积约束函数实现了按宏观结构位置分区的两尺度并发拓扑优化。Xu 等人^[20]结合离散材料优化方法(Discrete Material Optimization, DMO)研究了按主应力方向分区的最小柔顺性优化问题。Jia 等人^[21]结合元胞自动机和聚类方法根据应变能大小自主分区,同时对宏观结构和微结构单胞进行优化,获得了可实际制造的两尺度设计。Kumar 等人^[22]在变厚度优化的基础上,结合密度和主应变比值进行静态聚类划分区域,然后进行微结构优化,最后结合映射方法重构获得了梯度点阵结构设计。Qiu 等人^[23]提出了一种结合动态聚类方法的两尺度并发拓扑优化策略,根据优化过程中宏观单元内的主应力方向和主应力比值实现自主分区,获得性能优异的两尺度优化设计。Alexandersen 等人^[24]则使用多尺度有限元方法来设计可实际制造的高分辨率结构,该方法虽然极大地降低了优化所需的单元数目,但是由于未使用尺度分离假设导致其计算量仍然很大。

另一方面,确保微结构单胞之间具有良好的连接性是优化结果是否可以实际制造的重要指标之一。自由设计的微结构单胞虽然可以获得更大的设计自由度,但往往无法保证微结构单胞之间的连接性。针对均匀化方法优化结果无法实际制造的问题, Groen 等人^[25]提出了一种后处理映射方法,该方法可以将基于尺度分离假设获得的均匀化结果映射成便于实际制造的单一尺度点阵结构。在 Qiu 等人^[23]提出的结合动态聚类方法的两尺度并发拓扑优化策略中,通过为微结构单胞添加不可设计域来实现微结构的相互连接。Wang 等人^[26]在优化过程中通过构建一组拓扑相似的微结构来保证微结构单胞之间的连接性。在 Liu 等人^[27]所提出的两尺度并发拓扑优化方法中,各种微结构之间通过共享单胞边界处的设计变量来实现相互连接。

针对最小柔顺性问题,本文提出两步优化策略进行梯度点阵结构优化设计。第一步在多种备选材料基础上进行离散材料优化,同时优化宏观结构拓扑及备选材料分布方式。第二步在不改变备选材料分布方式的基础上进一步调整宏观结构内部微结构体积分布,获得微结构体积分数在空间中梯度变化的梯度点阵结构,实现点阵结构的变体分比设

计, 以达到促使材料实现更合理的分布, 提高结构整体刚度的目的。

2 优化方法

2.1 离散材料优化设计

2.1.1 设计变量及材料插值模型

如图 1 所示, 宏观设计域 Ω 被划分成 N 个宏观单元, 每个宏观单元采用某种非均匀微结构填充, 其微结构形式为已知的 M 种备选材料中的一种, 为实现宏观结构拓扑改变引入空材料相, 故备选材料总数目为 $M+1$ 种, 离散材料优化通过优化备选材料的宏观分布方式, 获得最优结构性能。

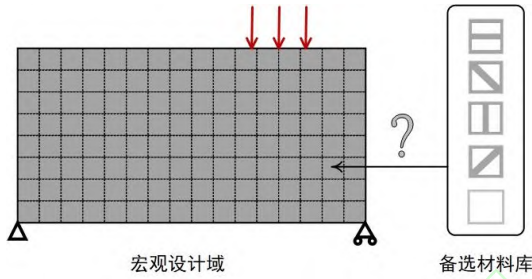


图 1 离散材料优化示意图

Fig.1 Schematic illustration of discrete material optimization

为了描述宏观结构中备选材料的分布情况, 选取设计变量为:

$$\mathbf{d} = \{P_1, \dots, P_{M+1}\}^T, \quad P_j = \{P_{1j}, \dots, P_{Nj}\} \quad (1)$$

设计变量总数为 $N \times (M+1)$, 其中 P_{ij} 是第 i 个宏观单元中对应于第 j 种备选材料的设计变量, 当 $P_{ij} = 1$ 时表明第 i 个宏观单元中分布着第 j 种备选材料。

宏观单元材料性质使用离散材料优化插值模型(DMO)^[28]:

$$\mathbf{D}_i^{\text{MA}} = \sum_{j=1}^{M+1} P_{ij}^n \underbrace{\prod_{r=1, r \neq j}^{M+1} (1 - P_{ir}^n)}_{w_{ij}} \mathbf{D}_j^{\text{H}} \quad (2)$$

即第 i 个宏观单元的弹性张量 \mathbf{D}_i^{MA} 由各种备选材料等效性质 $\mathbf{D}_j^{\text{H}} (j=1, \dots, M+1)$ 结合相应的权重系数 w_{ij} 加权计算获得, \mathbf{D}_j^{H} 是第 j 种备选材料的等效性质。为了使得设计变量取中间值时受到惩罚, 便于获得清晰的材料选择方案, 惩罚系数取 $n=3$ 。

本文采用渐近均匀化数值求解算法(Novel

numerical implementation of asymptotic homogenization method, NIAH)^[29]求解备选材料等效性质:

$$(\mathbf{D}_i^{\text{H}})_{rs} = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} (\boldsymbol{\chi}_r - \tilde{\boldsymbol{\chi}}_r)^T \mathbf{k}_i (\boldsymbol{\chi}_s - \tilde{\boldsymbol{\chi}}_s) \quad (3)$$

式中 $|\mathbf{Y}|$ 为微结构单胞的面积, \mathbf{k}_i 为第 i 种备选材料的总刚度矩阵, $\boldsymbol{\chi}_r$ 是与单位应变场相对应的节点位移场, $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_r$ 为单胞方程的位移解, 通过下式求解。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{k}_i \mathbf{T} (\tilde{\boldsymbol{\chi}}_r)^m &= \mathbf{T}^T (\mathbf{k}_i \boldsymbol{\chi}_r) \\ \tilde{\boldsymbol{\chi}}_r &= \mathbf{T} (\tilde{\boldsymbol{\chi}}_r)^m \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $(\tilde{\boldsymbol{\chi}}_r)^m$ 是节点主自由度的位移解, \mathbf{T} 为图 2 所示节点整体自由度和主自由度之间的转换矩阵。

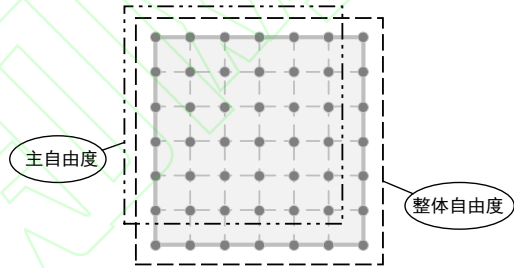


图 2 整体自由度和主自由度示意图

Fig.2 Schematic illustration of full/master nodal degrees of freedom

为了避免空材料单元导致总刚度矩阵出现奇异性, 设空材料相等效性质为:

$$\mathbf{D}_{M+1}^{\text{H}} = 10^{-6} \mathbf{D}_0 \quad (5)$$

其中 \mathbf{D}_0 为实体材料的弹性张量矩阵。

2.1.2 优化列式

为了实现最小柔顺性设计, 选取结构柔顺度 C 为目标函数:

$$C(\mathbf{d}, \mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}(\mathbf{d}) \mathbf{U} \quad (6)$$

其中 \mathbf{U} 为宏观结构的节点位移向量, $\mathbf{K}(\mathbf{d})$ 为宏观结构的总刚度矩阵。

为了控制宏观结构中点阵材料所覆盖的区域面积, 定义宏观覆盖率约束 G_{scc} 为:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tilde{w}_{ij} V_i - f_{\text{scc}} \sum_{r=1}^N V_r \leq 0 \quad (7)$$

式中 V_i 是第 i 个宏观单元的体积, f_{scc} 为点阵材料的宏观覆盖率。为了使得体积类约束具有实际物理

意义, 宏观单元中所有备选材料的权函数之和需保持为 1, 故选取归一化权重系数 \tilde{w}_{ij} 来计算点阵材料宏观覆盖率:

$$\tilde{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{r=1}^{M+1} w_{ir}} \quad (8)$$

为了获得清晰的材料选择方案, 采用材料离散性约束^[30] G_{0-1} 来惩罚中间设计变量:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M+1} P_{ij}(1 - P_{ij}) - \varepsilon_{0-1} \leq 0 \quad (9)$$

式中 ε_{0-1} 为一小量。为保证优化稳定进行采用连续化策略, 初始时设阈值 ε_{0-1} 为一较大值, 随着迭代的进行逐渐降低该数值直至达到零。

故第一步离散材料优化的优化列式为:

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{d} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{M+1}\}^T \\ & \text{min } C(\mathbf{d}, \mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}(\mathbf{d}, \mathbf{U}) \mathbf{U} \\ & \text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{d}, \mathbf{U}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tilde{w}_{ij} V_i - f_{\text{sec}} \sum_{r=1}^N V_r \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M+1} P_{ij}(1 - P_{ij}) - \varepsilon_{0-1} \leq 0 \\ & 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad i \in (1, \dots, N), j \in (1, \dots, M+1) \end{aligned} \quad (10)$$

采用线性密度过滤^[30]和非线性密度过滤方法^[31]来避免棋盘格现象和中间灰度单元, 线性密度过滤半径设为 1.5 倍宏观单元尺寸。

2.2 空间变体分比参数优化设计

通过离散材料优化获得宏观结构拓扑及各种备选材料的分布方式, 记宏观单元与备选材料种类之间的映射关系 $g(i)$, 其表示第 i 个宏观单元中分布着第 $g(i)$ 种备选材料。为了进一步扩大设计空间, 尝试在不改变备选材料分布的情况下调整宏观结构中微结构体积分布来改善宏观结构性能, 进而获得微结构体积分数空间梯度变化的准周期点阵结构。最终将优化结果后处理为单一尺度梯度点阵结构, 并通过有限元验证该优化策略的有效性。

2.2.1 设计变量及材料插值模型

逐步改变备选材料的尺寸参数, 获得一系列拓扑相似的变体分比微结构, 计算不同体积分数下微结构的等效性质, 进而获得微结构等效性质关于体

积分数的插值曲线 $\mathbf{D}_i^{\mathbf{H}}(\rho)$, 其中 i 表示第 i 种备选材料, 微结构等效性质关于体积分数的灵敏度 $\partial \mathbf{D}_i^{\mathbf{H}}(\rho) / \partial \rho$ 可以通过差分法进行计算。

选取离散材料优化结果中点阵材料覆盖区域 ($P_{i,M+1} \neq 1$) 作为第二步优化的宏观设计域, 记点阵材料覆盖区域的宏观单元数目为 \hat{N} , 选取微结构体积分数作为设计变量 ρ :

$$\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_{\hat{N}}\} \quad (11)$$

其中 ρ_i 表示第 i 个宏观单元中微结构的体积分数, 该宏观单元弹性张量可以插值表示为 $\mathbf{D}_{g(i)}^{\mathbf{H}}(\rho_i)$ 。

2.2.2 优化列式

为了控制宏观结构中实际材料使用量, 定义平均体积率约束 G_{ave} :

$$\sum_{i=1}^{\hat{N}} \rho_i V_i - f_{\text{ave}} \sum_{r=1}^N V_r \leq 0 \quad (12)$$

式中 f_{ave} 为平均体积率, 与第一步离散材料优化时备选材料的体积分数取值相同。

综上变体分比参数优化的优化列式为:

$$\begin{aligned} & \text{find } \rho \\ & \text{minimize } C(\rho) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}(\rho) \mathbf{U} \\ & \text{subject to } \mathbf{K}(\rho) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \sum_{i=1}^{\hat{N}} \rho_i V_i - f_{\text{ave}} \sum_{r=1}^N V_r \leq 0 \\ & \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \quad i \in (1, \dots, \hat{N}) \end{aligned} \quad (13)$$

为了使得变体分比参数优化不改变宏观结构拓扑, 设计变量下限 ρ_{\min} 取值为 0.3。

采用 Helmholtz PDE 密度过滤^[32]获得空间光滑变化的体积分数分布, 过滤半径设为 0.75 倍的宏观单元尺寸。通过 MATLAB 自编程序实现上述优化问题, 采用直接法进行灵敏度分析, 结合移动渐近线法^[33]更新设计变量。

2.2.3 优化结果后处理

渐近均匀化方法理论上基于尺度分离假设, 认为微结构尺寸无限细小, 当微结构尺寸相对于整体结构尺寸逐渐变小, 微结构材料真实性质会逐渐逼近均匀化结果。本文采用较小尺寸的微单胞(即每个宏观单元对应一个微单胞)构造单一尺度精细点阵结构, 并通过 ANSYS 有限元软件计算精细结构柔

顺性，验证均匀化理论计算结果。

2.3 优化流程

如图 3 所示，本文所提优化策略的优化流程可以被划分为备选材料选择、离散材料优化和变体分比参数优化等三大部分。

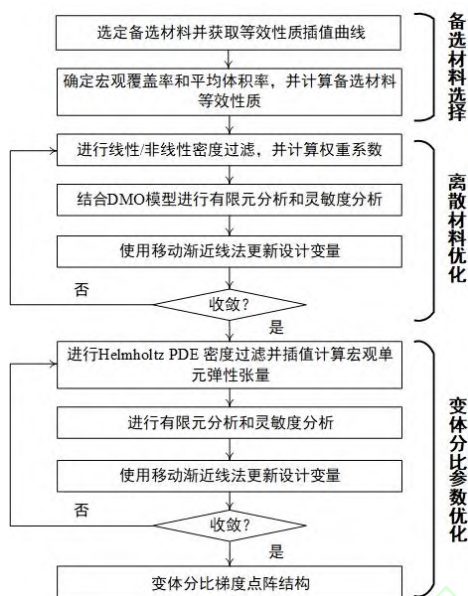


图 3 优化流程图
Fig.3 Flowchart of the optimization procedures

备选材料选择部分：选择便于参数化描述的微结构类型作为备选材料，并获取微结构等效性质关于体积分数的插值曲线。确定梯度点阵结构的宏观覆盖率和平均体积率，并根据平均体积率计算备选材料等效性质。

离散材料优化部分：对设计变量进行线性密度过滤和非线性密度过滤，计算权重系数并结合 DMO 模型计算宏观单元弹性张量，进行有限元分析和灵敏度分析并使用移动渐近线法更新设计变量。当优化没有收敛时，重复该部分直至优化收敛。

变体分比参数优化部分：对设计变量进行 Helmholtz PDE 密度过滤，根据等效性质插值曲线插值计算宏观单元弹性张量。进行有限元分析和灵敏度分析并使用移动渐近线法更新设计变量。当优化没有收敛时，重复该部分直至收敛。最终将相应的微结构构型填充至宏观单元中可获得精细的变体分比梯度点阵结构。

3 数值算例

本节通过 MBB 梁、悬臂梁和 L 梁算例来验证两步优化策略的有效性。

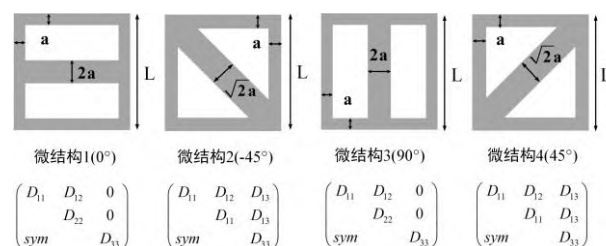


图 4 不同微结构构型及等效弹性张量
Fig.4 Different microstructures and equivalent elastic tensors

选择图 4 所示的四种微结构作为备选材料，微结构体积分数由尺寸参数 a 控制。为了保证微结构之间相互连接，备选材料的四周边界处均由实体材料覆盖，同时备选材料内部分布着不同取向的实体杆以应对宏观结构内部复杂多样的应力状态。微结构尺寸 $L = 4\text{mm}$ ，微观单胞由 $0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm}$ 的四节点矩形单元进行离散，实体材料选取各向同性的碳钢，杨氏模量为 210000MPa ，泊松比为 0.3 。

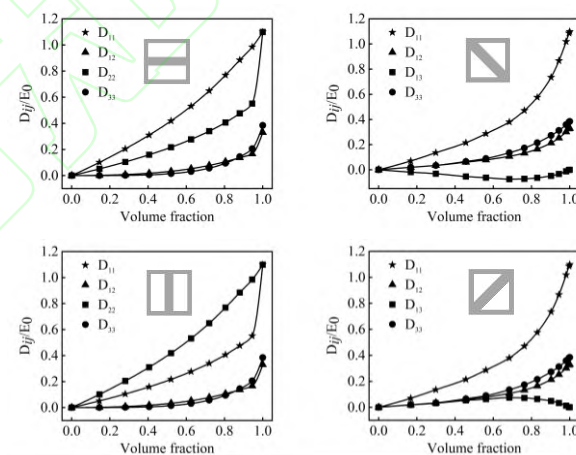


图 5 等效性质插值曲线
Fig.5 Interpolation curves of equivalent properties

计算不同尺寸参数下的微结构等效性质，使用分段三次 Hermite 插值获得各种微结构等效性质关于体积分数的插值曲线，如图 5 所示。

3.1 MBB 梁问题

考虑图 6 所示的 MBB 梁问题，梁上侧中部受到向下的均布压力，考虑对称性，取右半侧结构作为宏观设计域。宏观设计域采用 $4\text{mm} \times 4\text{mm}$ 的四节点矩形单元进行离散，宏观覆盖率为 84% ，平均体积率为 50% 。

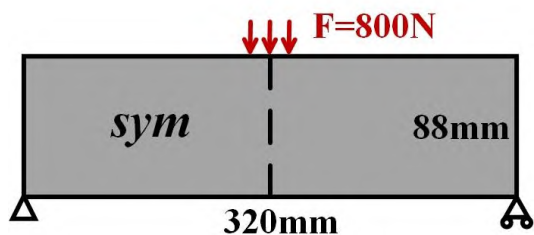
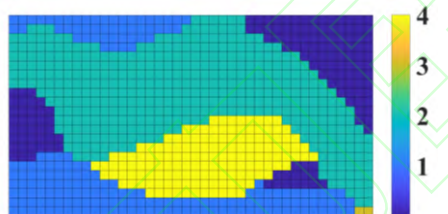
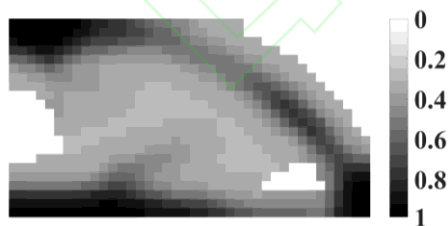


图6 MBB 梁问题
Fig.6 Design domain for MBB beam

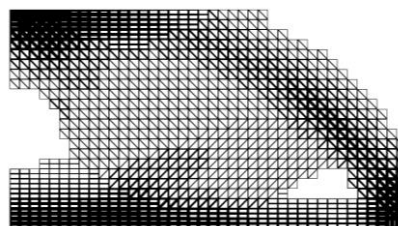
优化结果如图7所示,图7(a)为离散材料优化所获得的备选材料分布示意图,结合微结构等效性质插值曲线,进一步进行变体分比参数优化,微结构体积分布如图7(b)所示,基于均匀化理论计算的结构柔顺性为 284.66 N mm。通过后处理将相应的微结构构型填充到宏观单元中即可获得如图7(c)所示的精细梯度点阵结构。通过 ANSYS 软件对该精细结构进行有限元分析验证其结构柔顺性为 292.19 N mm,与均匀化结果之间相对误差仅为 2.65%,图7(d)为精细结构的位移云图。可以发现在宏观结构主要传力路径中出现大量类似于‘加强筋’的高体分比微结构,该梯度点阵结构相较于传统的周期点阵结构设计可以实现更合理的材料分配,显著提高结构刚度。



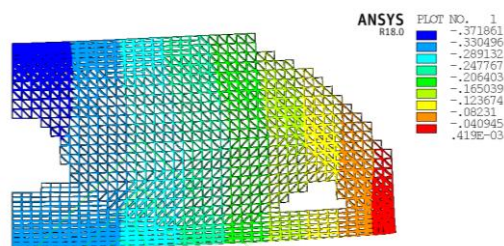
(a) 备选材料分布
(a) Distribution of alternative materials



(b) 微结构体积分数分布
(b) Distribution of microstructural volume fractions



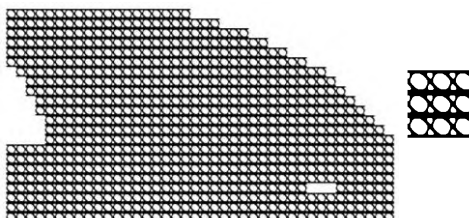
(c) 精细梯度点阵结构
(c) Fine graded lattice structure



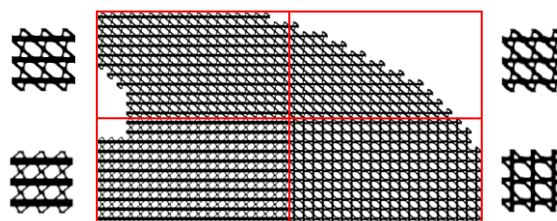
(d) 精细结构的 U_y 位移云图
(d) Displacement distribution of fine structure

图7 MBB 梁问题两步优化结果
Fig.7 Schematic illustration of two-step optimization of MBB-beam

为了进一步验证所提优化策略的有效性,以相同的宏观覆盖率和平均体积率进行周期点阵结构两尺度并发拓扑优化设计和多分区两尺度并发拓扑优化设计(按照宏观结构位置划分区域),实体材料参数以及宏观结构与微观单胞的离散方式和上述算例完全相同,两种优化策略所获得的精细结构如图8所示。



(a) 具有单一微结构类型的点阵结构
(a) Lattice structure with single microstructure



(b) 具有多种微结构类型的点阵结构
(b) Lattice structure with multi-microstructures

图8 不同策略的优化结果
Fig.8 Optimization results obtained by different strategies

通过对比表1所示不同优化策略的柔顺性结果发现,相较于单一微结构设计,按空间位置进行分区的多种微结构设计享有更大的设计自由度,导致其结构柔顺性会低于单一微结构设计。相较于单一

微结构设计和多种微结构设计，两步优化策略实现了点阵结构内部微结构体积分数的空间梯度变化，促使材料实现更合理的分布，使得结构柔顺性降低了近 70% 和 50%。

表 1 不同优化策略优化结果对比(MMB 梁)

Tab.1 Comparison of compliances obtained by different optimization strategies (MMB beam)

	均匀化方法	有限元验证	相对误差
单一微结构设计	475.54 N mm	494.71 N mm	4.03%
多种微结构设计	429.70 N mm	437.98 N mm	1.93%
梯度微结构设计	284.66 N mm	292.19 N mm	2.65%

3.2 悬臂梁问题

考虑如图 9 所示的左侧边界固支，右侧边界中点处受到向下的均布压力的悬臂梁问题，宏观设计域采用 $4\text{mm} \times 4\text{mm}$ 的四节点矩形单元进行离散，宏观覆盖率为 80%，平均体积率为 60%。

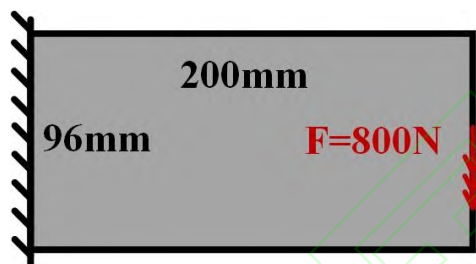
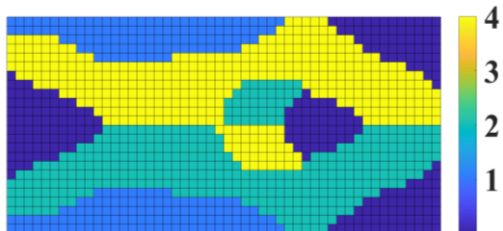
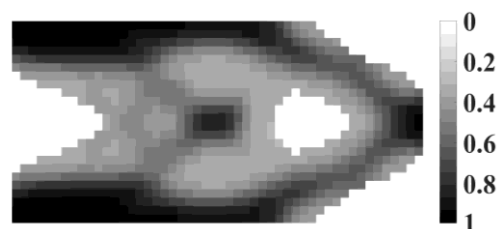


图 9 悬臂梁问题
Fig.9 Design domain for cantilever beam

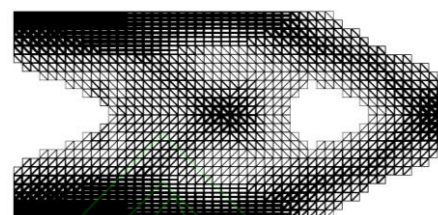
图 10(a)为备选材料分布示意图，图 10(b)为通过变体分比参数优化获得的微结构体积分数分布，基于均匀化理论计算的结构柔顺性为 275.78 N mm 。图 10(c)所示为精细结构示意图，类似于‘加强筋’的高体分比微结构在宏观传力路径中同样存在。图 10(d)为通过 ANSYS 软件获得的精细结构位移云图，通过有限元验证其结构柔顺性为 280.02 N mm ，与均匀化结果之间相对误差仅为 1.54%。



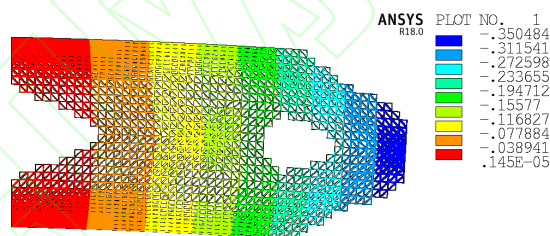
(a) 备选材料分布
(a) Distribution of alternative materials



(b) 微结构体积分数分布
(b) Distribution of microstructural volume fractions



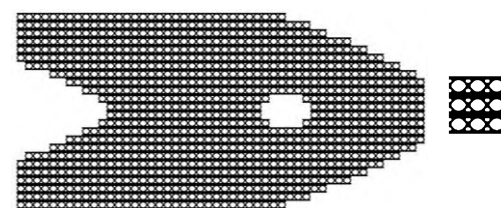
(c) 精细梯度点阵结构
(c) Fine graded lattice structure



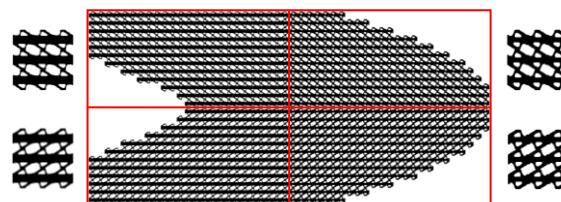
(d) 精细结构的 U_y 位移云图
(d) Displacement distribution of fine structure

图 10 悬臂梁问题两步优化结果
Fig.10 Schematic illustration of two-step optimization of cantilever

以相同的宏观覆盖率和平均体积率进行周期点阵结构两尺度并发拓扑优化和多分区两尺度并发拓扑优化设计(按照宏观结构位置划分区域)，实



(a) 具有单一微结构类型的点阵结构
(a) Lattice structure with single microstructure



(b) 具有多种微结构类型的点阵结构
(b) Lattice structure with multi-microstructures

图 11 不同策略的优化结果
Fig.11 Optimization results obtained by different strategies

体材料参数以及宏观结构与微观单胞的离散方式和上述算例完全相同，两种优化策略所获得的精细结构如图 11 所示。

通过对比表 2 所示不同优化策略的柔顺性结果发现，相较于单一微结构设计 and 多种微结构设计，两步优化策略使该悬臂梁结构柔顺性降低了近 40% 和 20%。

表 2 不同优化策略优化结果对比(悬臂梁)

Tab.2 Comparison of compliances obtained by different optimization strategies (Cantilever beam)

	均匀化方法	有限元验证	相对误差
单一微结构设计	385.78 N mm	396.73 N mm	2.84%
多种微结构设计	335.52 N mm	340.43 N mm	1.46%
梯度微结构设计	275.78 N mm	280.02 N mm	1.54%

3.3 L 梁问题

考虑如图 12 所示的 L 梁优化问题，L 梁右上角处受到向下的均布压力，宏观设计域采用 $4\text{mm} \times 4\text{mm}$ 的四节点矩形单元进行离散，宏观覆盖率为 70%，平均体积率为 60%。

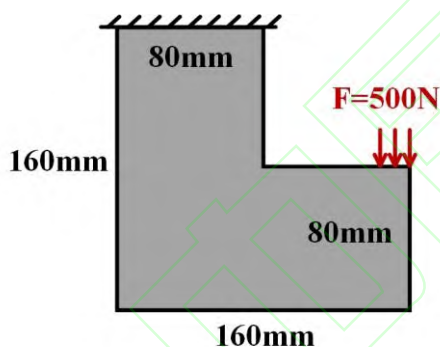


图 12 L 梁问题
Fig.12 Design domain for L-bracket

优化结果如图 13 所示，图 13(a)为离散材料优化获得的备选材料分布示意图，图 13(b)为变体分比参数优化所获得的微结构体积分数分布，基于均匀化理论计算的结构柔顺性为 120.12 N mm 。图 13(c)为精细结构示意图，通过有限元验证其结构柔顺性为 126.26 N mm ，略高于均匀化结果，图 13(d)为相应的精细结构位移云图。

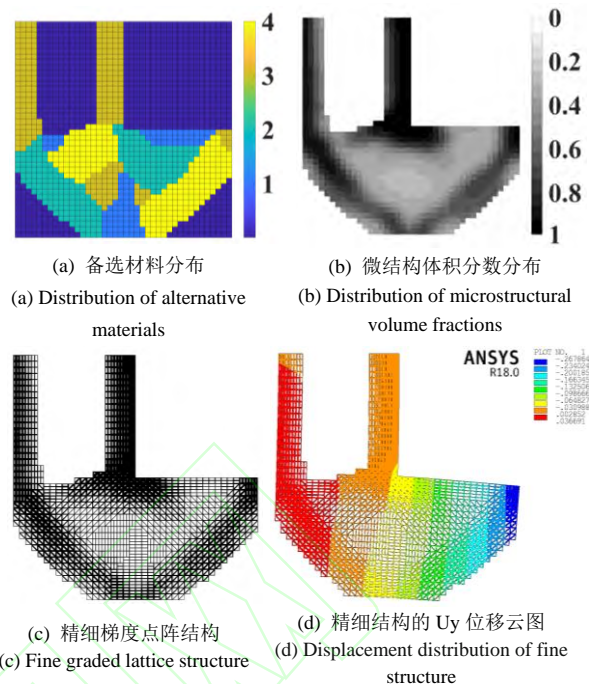


图 13 L 梁问题两步优化结果
Fig.13 Schematic illustration of two-step optimization of L-bracket

以相同的宏观覆盖率和平均体积率进行周期点阵结构两尺度并发拓扑优化设计和多分区两尺度并发拓扑优化设计(按照宏观结构位置划分区域)，实体材料参数以及宏观结构与微观单胞的离散方式和上述算例完全相同，两种优化策略所获得的精细结构如图 14 所示。

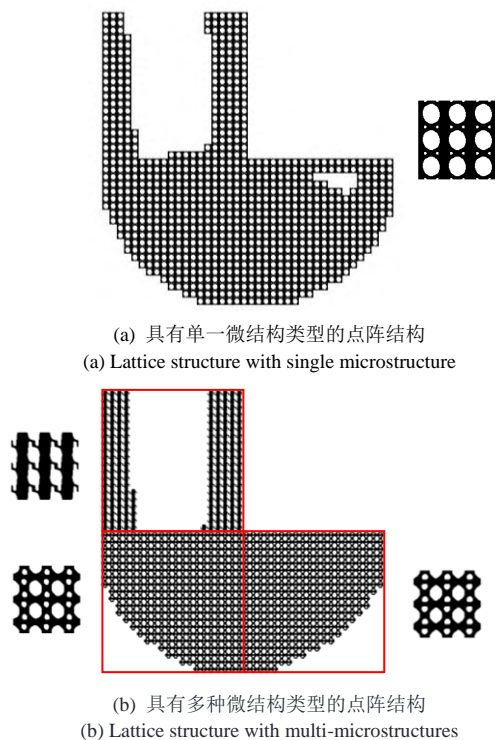


图 14 不同策略的优化结果
Fig.14 Optimization results obtained by different strategies

通过对比表 3 所示不同优化策略的柔顺性结果发现, 相较于单一微结构设计和多种微结构设计, 两步优化策略使该 L 梁结构柔顺性降低了近 60% 和 40%。

表 3 不同优化策略优化结果对比(L 梁)
Tab.3 Comparison of compliances obtained by different optimization strategies (L-bracket)

	均匀化方法	有限元验证	相对误差
单一微结构设计	194.16 N mm	197.56 N mm	1.75%
多种微结构设计	172.23 N mm	180.60 N mm	4.86%
梯度微结构设计	120.12 N mm	126.26 N mm	5.11%

4 结论

本文采用两步优化策略进行梯度点阵结构的最小柔顺性设计。第一步在多种备选材料基础上进行离散材料优化, 同时优化宏观结构拓扑及备选材料分布方式。第二步在不改变备选材料分布方式的基础上进一步调整宏观结构内部微结构体积分布, 扩大结构设计空间, 获得微结构体积分数在空间中梯度变化的梯度点阵结构, 促使材料实现更合理的分布, 提高结构整体刚度。最终通过 MBB 梁、悬臂梁和 L 梁算例验证了该策略的有效性, 所获得的梯度点阵结构均可以借助增材制造技术实现快速精密的制备。

参考文献(References):

[1] Maconachie T, Leary M, Lozanovski B, et al. SLM Lattice Structures: Properties, performance, applications and challenges. *Materials & Design*, 2019, **183**(DEC): 108–137.

[2] Li DW, Liao WH, Dai N, et al. Anisotropic design and optimization of conformal gradient lattice structures. *Computer-Aided Design*, 2020, **119**(3), 102787.

[3] Zhu YC, Li SS, Guo X, et al. A novel asymptotic-analysis-based homogenisation approach towards fast design of infill graded microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, **124**, 612-633.

[4] 王博, 王斌, 程耿东. Kagome 蜂窝夹层平板的多功能优化设计. *复合材料学报*, 2007, 24(3): 109-115 (WANG Bo, WANG Bin, CHENG Geng-dong. Multifunctional design of sandwich panels with Kagome-like cores. *Acta*

Materiae Compositae Sinica. 2007, **24**(3): 109-115 (in Chinese)).

[5] Zhang HK, LuoYJ, Kang Z. Bi-material microstructural design of chiral auxetic metamaterials using topology optimization[J], *Composite Structures*, 2018, **195**:232-248

[6] Zhang HK, Wu WJ, Kang Z, et al. Topology optimization method for the design of bioinspired self-similar hierarchical microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**(DEC), 113399.

[7] Zhang W, Yin S, Yu T X, et al. Crushing resistance and energy absorption of pomelo peel inspired hierarchical honeycomb. *International Journal of Impact Engineering*, 2019, **125**(MAR):163-172.

[8] Groen JP, Wu J, Sigmund O. Homogenization-based stiffness optimization and projection of 2D coated structures with orthotropic infill. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **349**(JUN):722-742.

[9] Wang Y Q, Chen F F, Michael, et al. Concurrent design with connectable grad microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **317**(APR): 84-101.

[10] Wu J, Sigmund O, Groen JP. Topology optimization of multi-scale structures: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, **63**(3): 1455–1480.

[11] Da D, Xia L. Design of heterogeneous mesostructures for non-separated scales and analysis of size effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021, **122**(5), 1333-1351.

[12] Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, **71**(2): 197–224.

[13] Rodrigues H, Guedes JM, Bendsøe MP. Hierarchical optimization of material and structure. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, **24**(1): 1-10.

[14] Coelho PG, Fernandes PR, Guedes JM, et al. A hierarchical model for concurrent material and topology optimization of three-dimensional structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, **35**(2): 107-115.

[15] Liu L, Yan J, Cheng GD. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material. *Computers & Structures*, 2008, **86**(13-14): 1417-1425.

- [16] Niu B, Yan J, Cheng GD. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, **39**(2): 115-132.
- [17] Yan J, Guo X, Cheng GD. Multi-scale concurrent material and structural design under mechanical and thermal loads. *Computational Mechanics*, 2016, **57**(3): 437-446.
- [18] 张会凯. 拓扑优化方法的力学超材料设计[硕士论文]. 大连, 大连理工大学, 2019: 31-32 (ZHANG Hui-kai. Mechanical metamaterial design using topology optimization method. Dalian, Dalian University of Technology, 2019: 31-32 (in Chinese)).
- [19] Zhang HK, Wang YG, Kang Z. Topology optimization for concurrent design of layer-wise graded lattice materials and structures. *International Journal of Engineering Science*, 2019, **138**(MAY): 26-49.
- [20] Xu L, Cheng GD. Two-scale concurrent topology optimization with multiple micro materials based on principal stress orientation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, **57**(5): 2093-2107.
- [21] Jia J, Da DC, Loh CL, et al. Multiscale topology optimization for non-uniform microstructures with hybrid cellular automata. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, **62**(2): 757-770.
- [22] Kumar T, Suresh K. A density-and-strain-based K-clustering approach to microstructural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, **61**(4): 1399-1415.
- [23] Qiu Z, Li QH, Liu ST, et al. Clustering-based concurrent topology optimization with macrostructure, components, and materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, **63**(3): 1243-1263.
- [24] Alexandersen J, Lazarov BS. Topology optimization of manufacturable microstructural details without length scale separation using a spectral coarse basis preconditioner. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **290**(JUN): 156-182.
- [25] Groen JP, Sigmund O. Homogenization-based topology optimization for high-resolution manufacturable microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, **113**(8): 1148-1163.
- [26] Wang YQ, Zhang L, Daynes S, et al. Design of graded lattice structure with optimized mesostructures for additive manufacturing. *Materials and Design*, 2018, **142**(MAR): 114-123.
- [27] Liu P, Kang Z, Luo YJ. Two-scale concurrent topology optimization of lattice structures with connectable microstructures. *Additive Manufacturing*, 2020, **36**(6190): 101427.
- [28] Stegmann J, Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **62**(14): 2009-2027.
- [29] Cheng GD, Cai YW, Xu L. Novel implementation of homogenization method to predict effective properties of periodic materials. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, **29**(4): 550-556.
- [30] Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, **33**(4-5): 401-424.
- [31] Guest JK, Prevost JH, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **61**(2): 238-254.
- [32] Lazarov BS, Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **86**(6): 765-781.
- [33] Svanberg K. The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **24**(2): 359-373.