UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERESPACIOS DE ESPACIOS NO MÉTRICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

HUGO ADRIAN MALDONADO GARCIA

COMITÉ TUTORAL:
DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI
DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO 2019

Universidad Autónoma del Estado de México
UAEM

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DRA. PETRA SÁNCHEZ NAVA
COORDINADORA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS

P R E S E N T E

Nos permitimos informarle que hemos revisado la tesis tradicional titulada: **"Hiperespacios de espacios no métricos"**, que presenta el **Mat. Hugo Adrián Maldonado García.** Dicho trabajo cuenta con nuestro Voto Aprobatorio.

ATENTAMENTE:

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO

DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

DR. DAVID MAYA ESCUDERO

DR. LEONARDO JUÁREZ VILLA

DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

M. EN C. JOSÉ ANTONIO MARTÍNEZ CORTEZ

Acta 122 Acuerdo 361/MC
c.c.p.Archivo
PSN/[illegible]

Ciencias

AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo está dedicado a quien pinta arreboles y esculpe raíces; a quienes fueron figuras desde que abrí los ojos; a quienes me han llevado, acompañado, jalado, empujado o traído hasta este punto de mi vida; a quienes compartieron un pedazo de su pericia en estas palabras; a quienes estuvieron en el paso previo, a quienes han estado en este paso, y a quienes me ayuden a dar el siguiente.

Agradezco, finalmente, al Dr. Logan Hoehn, pues su aportación a este proyecto ayudó en gran medida a dar forma al resultado final.

Índice general

Resumen

En la presente Tesis realizamos un estudio sobre los espacios topológicos que no pueden ser metrizables, la carencia de esta propiedad trae como consecuencia nuevas propiedades en estos espacios. Es el objetivo de esta Tesis analizar dichas propiedades y observar las estrechas relaciones de espacios dotados con ellas y sus hiperespacios. Al mismo tiempo buscamos generalizar aquellos espacios que aseguran tener hiperespacios sobrios o hiperespacios con axiomas de separación bajos.

Introducción

Existen propiedades topológicas propias de un espacio topológico no metrizable. Un ejemplo importante es la sobriedad. Partiendo de la construcción de uno de los espacios sobrios más importantes en áreas como la Topología o el Álgebra, el Espectro de un Anillo, realizamos un análisis profundo y generalizado a espacios topológicos dotados de esta propiedad llegando hasta ver como es reflejada en sus hiperespacios; por otro lado buscamos la caracterización de espacios topológicos con hiperespacios sobrios. Este análisis es extendido no sólo a otras propiedades propias de los espacios no metrizables como los son la hiperconexidad o la anti-compacidad, también extendemos este análisis a los mismos axiomas de separación encargados de que un espacio no sea metrizable.

Antecedentes

La teoría de hiperespacios tuvo sus inicios alrededor de 1900 con los trabajos de Hausdorff y Vietoris, durante los años 1920 y 1930 se determinó la estructura fundamental de los hiperespacios. Teoremas que demuestran que los hiperespacios son arco-conexos y retractos absolutos (cuando X es un continuo localmente conexo), por mencionar algunos ejemplos, se demostraron en años posteriores.

En 1942, Kelley realizó el primer estudio de hiperespacios de continuos hereditariamente indescomponibles. Fue hasta 1970 que apareció la teoría de hiperespacios de continuos. El trabajo de Kelley fue el primero en utilizar funciones de Whitney en la investigación de hiperespacios.

En 1950, el artículo básico de Michael sobre selecciones y su artículo "*Topologies on spaces of subsets*" aparecieron y en ellos se da un trato diferente a los hiperespacios mediante el uso de otras topologías.

Por otro lado, el estudio de espacios no metrizables se observa en trabajos de topología general realizados por Dontchev en el año 1998. Trabajo que a su vez es consecuencia de estudios de topología algebraica realizados por Steiner en el año 1965, o de la topología libre de puntos, trabajo de Johnstone en 1983.

Objetivos

La presente Tesis partió de la hipótesis:

No es posible analizar una propiedad topológica exclusiva de los espacios no métricos en un hiperespacio en términos del espacio topológico original dotado con dicha propiedad. Del mismo modo que no es posible analizar una propiedad topológica exclusiva de los espacios no métricos en un espacio en términos de alguno de sus hiperespacios dotado con dicha propiedad.

Para probar lo anterior se tuvieron los siguientes objetivos:

1. Estudiar algunas propiedades topológicas exclusivas de espacios no métricos y observar el comportamiento de los hiperespacios en términos de estas propiedades.

2. Estudiar axiomas de separación bajos, axiomas que impiden a un espacio ser metrizable, y observar el comportamiento de los hiperespacios en términos de dichos axiomas.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo enunciamos conceptos básicos y generales que se utilizaraán a lo largo de este trabajo.

1.1. Topología

Esta sección contiene todos los conocimientos topológicos básicos que utilizaremos en este trabajo, sus demostraciones y otras aplicaciones pueden ser consultadas en [2], [5], [6], [9].

Definición 1.1.1. *Una* **topología** *para un conjunto* X *es una colección* τ *de subconjuntos de* X *que cumple:*

1. $\emptyset, X$ *son elementos de* τ.

2. *La unión de elementos de cualquier subcolección de* τ *se encuentra en* τ.

3. *La intersección de cualquier subcolección finita de* τ *es elemento de* τ.

Al par ordenado (X, τ) *lo conoceremos como espacio topológico. Si no causa confusión, al conjunto* X *con topología* τ, *le llamaremos* **espacio topológico**.

Definición 1.1.2. *Sean* $(X,\, \tau)$ *un espacio topológico y* U *un subconjunto de* X, *decimos que* U *es un subconjunto* **abierto** *de* X *si* U *es elemento de* τ.

Ejemplo 1.1.3. *Sea* X *un conjunto.*

1. *La colección τ_D de todos los subconjuntos de X es una topología para X, llamada* **topología discreta**.

2. *La colección τ_I que consta únicamente de $\emptyset$ y X es una topología para X llamada* **topología indiscreta**.

Definición 1.1.4. *Sean τ y τ' dos topologías para X. Si τ se queda contenida en τ' decimos que τ' es más* **fina** *que τ.*

Definición 1.1.5. *Sea X un conjunto. Una colección de subconjuntos $\mathcal{B}$ de X tal que:*

(1) Para cada elemento de X existe un elemento de $\mathcal{B}$ que lo contiene.

(2) Si x, elemento de X, pertenece a la intersección de B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$, existe un elemento de $\mathcal{B}$, B_3 que contiene a x y además se queda contenido en el conjunto $B_1 \cap B_2$.

le llamamos **base** *para una topología sobre X y a cada elemento de $\mathcal{B}$ le llamamos básico.*

Definición 1.1.6. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X que satisfacen (1) y (2) de la Definición 1.1.5. Definimos τ, la* **topología generada** *por $\mathcal{B}$ sobre X, de la siguiente manera:*
U, subconjunto de X, pertenece a τ si U es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 1.1.7. *El conjunto τ generado por $\mathcal{B}$ es, en efecto, una topología.*

Ejemplo 1.1.8. *Sean $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. La topología generada por $\mathcal{B}$ la conocemos como la* **topología usual de** $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.9. *Una* **subbase** *δ para alguna topología τ sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La* **topología τ generada por la subbase** *δ es la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de δ.*

Proposición 1.1.10. *La colección τ generada en la Definición 1.1.9 por una subbase δ es, en efecto, una topología sobre X.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la colección de intersecciones finitas de δ. Como τ se genera a partir de uniones de $\mathcal{B}$, basta ver que $\mathcal{B}$ es base para τ.
Sea x elemento de X, entonces existe S elemento de δ tal que x pertenece a S, pues la unión de los elementos de δ es igual a X.

Sean B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$, entonces $B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ y $B_2 = S'_1 \cap \cdots \cap S'_m$ con S_i, S'_j elementos de δ para toda $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.
Así, $B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_n) \cap (S'_1 \cap \cdots \cap S'_m)$ la cual sigue siendo una intersección finita de elementos de δ, por lo que $B_1 \cap B_2$ es elemento de $\mathcal{B}$.
Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para la topología τ, es decir, la colección generada por δ es una topología sobre X. $\square$

Definición 1.1.11. *Sean (X, τ) un espacio topológico y F un subconjunto de X. F es* **cerrado** *si su complemento es elemento de τ.*

Definición 1.1.12. *Sean X un espacio con topología τ y Y un subconjunto de X. La* **topología de subespacio o relativa** *sobre Y es la colección $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$, con la cual Y se convierte en un espacio topológico y recibe el nombre de* **subespacio topológico** *de X.*

Definición 1.1.13. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. El* **interior** *de A es la unión de todos los conjuntos abiertos de X contenidos en A. La* **cerradura** *de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y las denotamos por $\mathrm{Int}_X(A)$ y $\mathrm{Cl}_X(A)$, respectivamente.*

Observación 1.1.14. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces:*

$$\mathrm{Int}_X(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}_X(A).$$

Notación: La cerradura de A también se escribe como $\mathrm{Cl}_X(A) = \overline{A}$.

Proposición 1.1.15. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{Cl}_X(A)$ *es un conjunto cerrado.*
2. $\mathrm{Cl}_X(A) = \{x \mid$ *Para todo U subconjunto abierto de X que contiene a x, U intersecta a A*$\}$.
3. *Si A es un conjunto cerrado, entonces $A = \mathrm{Cl}_X(A)$.*

Definición 1.1.16. *Sean X un espacio topológico y U un subconjunto de X. Decimos que U es un* **abierto regular** *si $U = \mathrm{Int}_X(\mathrm{Cl}_X(U))$.*

Definición 1.1.17. *Sean X y Y espacios topológicos con topologías τ_X y τ_Y respectivamente. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es* **continua***, si para todo elemento U de τ_Y, $f^{-1}(U)$ es un elemento de τ_X.*

Definición 1.1.18. *Sean X un espacio topológico y D un subconjunto de X. Decimos que D es* **denso** *en X si y sólo si para todo conjunto abierto U en X, existe un elemento x en D tal que x es elemento de U.*

Ejemplo 1.1.19.

1. *Si $\mathbb{R}$ está dotado con la topología usual, entonces $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

2. *Sea X un espacio indiscreto. Todo D subconjunto de X es denso en X.*

3. *Sean X un conjunto, x_0 elemento de X y $\tau = \{U \subseteq X \mid x_0 \in U\}$. Entonces $\{x_0\}$ es denso en (X, τ).*

Definición 1.1.20. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una propiedad de τ. Decimos que τ es $\mathcal{P}$* **minimal** *o τ es la* **mínima topología** *$\mathcal{P}$, si para cada topología σ de X tal que $\sigma \subset \tau$, $\mathcal{P}$ no es propiedad de σ.*

Definición 1.1.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una propiedad del espacio topológico. Decimos que (X, τ) es* **espacio $\mathcal{P}$ minimal** *si para cada topología σ de X tal que $\sigma \subset \tau$, $\mathcal{P}$ no es propiedad del espacio (X, σ).*

Definición 1.1.22. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un* **filtro** *sobre X si cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $H \in \mathcal{F}$, H es no vacío.*

2. *Para cualesquiera H y K elementos de $\mathcal{F}$, $H \cap K$ es elemento de $\mathcal{F}$.*

3. *Para cada $H \in \mathcal{F}$ y para todo $K \subseteq X$ tal que $H \subseteq K$, se tiene que K es elemento de $\mathcal{F}$.*

Definición 1.1.23. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un* **ultrafiltro** *si no existe un filtro $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$.*

Definición 1.1.24. *Sean X un espacio topológico y $y \in X$. Definimos el filtro $\mathcal{F}_y = \{U \subset X \mid y \in U\}$.*

1.2. Axiomas de separación bajos

Una forma de *clasificar* a los espacios topológicos es mediante los axiomas de separación. En esta sección definimos axiomas de separación bajos.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_2 o de* **Hausdorff** *si y sólo si para cualesquiera dos puntos p, q de X existen dos conjuntos abiertos ajenos U, V de X tales que p sea elemento de U y q elemento de V.*

Definición 1.2.2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_1 si y sólo si para cualesquiera dos puntos p, q de X existen dos conjuntos abiertos U, V de X tales que p es elemento de U y este está contenido en $X \setminus \{q\}$ y q es elemento de V y este está contenido en $X \setminus \{p\}$.*

Teorema 1.2.3. *Sea X un espacio topológico. X es un espacio T_1 si y sólo si para cualquier punto $x \in X$, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Ejemplo 1.2.4. *Sea X un conjunto. El espacio (X, τ_{cof}) es un espacio T_1, donde*

$$\tau_{cof} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$$

a τ_{cof} le llamamos topología cofinita. τ_{cof} es la mínima topología T_1.

Definición 1.2.5. *Un espacio topológico X es un espacio $T_{\frac{3}{4}}$ si para cualquier punto $x \in X$, $\{x\}$ es un subconjunto abierto regular o cerrado de X.*

Ejemplo 1.2.6. *Sea X un conjunto y $x \in X$. El espacio $(X, \mathcal{E}(x))$ es un espacio $T_{\frac{3}{4}}$, donde*

$$\mathcal{E}(x) = \{U \subset X \mid x \notin U\} \cup \{X\}.$$

$\mathcal{E}(x)$ es la topología que excluye al punto x.

Definición 1.2.7. *Un espacio topológico X es un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ si para cualquier punto $x \in X$, $\{x\}$ es un subconjunto abierto o cerrado de X.*

Ejemplo 1.2.8. *Sea X un conjunto y $x \in X$. El espacio $(X, \mathcal{I}(x))$ es un espacio $T_{\frac{1}{2}}$, donde*

$$\mathcal{I}(x) = \{U \subseteq X \mid x \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

$\mathcal{I}(x)$ es la topología que incluye al punto x.

Definición 1.2.9. *Un espacio topológico X es un espacio $T_{\frac{1}{4}}$ si para cualquier conjunto finito $F \subset X$ y $x \in X \setminus F$, existe $A_x \subset X$ tal que $F \subset A_x$ y $x \notin A_x$, donde A_x puede ser un subconjunto abierto o cerrado de X.*

Ejemplo 1.2.10. $(X, \tau_{cof} \cap \mathcal{E}(x))$ *es un espacio* $T_{\frac{1}{4}}$.

Definición 1.2.11. *Un espacio topológico X es un espacio T_0 si para cualesquiera x, y elementos distintos de X, existe un subconjunto abierto de X, U tal que $x \in U$ y $y \notin U$, o existe un subconjunto abierto de X, V tal que $y \in V$ y $x \notin V$.*

Proposición 1.2.12. *Los axiomas de separación se implican de la siguiente manera:*

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_{\frac{3}{4}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_{\frac{1}{4}} \Rightarrow T_0.$$

En el presente trabajo trataremos con espacios que no cumplen con axiomas de separación mayores a T_1, a estos axiomas de separación los conoceremos como *axiomas de separación bajos*, de igual modo a cualquier axioma de separación mayor o igual a T_1 lo conoceremos como *axioma de separación alto*. También nos referiremos a espacios **exactamente** T_i cuando el espacio cumpla el axioma de seperación T_i pero no T_j, donde $i < j$ y $i, j \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

1.3. Espacios Hiperconexos

Definición 1.3.1. *Un espacio topológico X es* **hiperconexo** *si todo subconjunto abierto no vacío de X es denso en X.*

Teorema 1.3.2. *Sea X un espacio topológico. X es hiperconexo si y sólo si para cualesquiera conjuntos abiertos U y V no vacíos de X, su intersección es distinta del conjunto vacío.*

Demostración. Sean U y V subconjuntos abiertos de X. Por ser X hiperconexo, U es un conjunto denso, entonces $U \cap V$ es distinta del vacío.
Ahora, sea U un subconjunto abierto de X. Mostraremos que U es un subconjunto denso. Sea V un subconjunto abierto de X, entonces $U \cap V$ es un conjunto no vacío. Por lo tanto, U es denso. □

A continuación damos algunos ejemplos de espacios hiperconexos.

Ejemplo 1.3.3. *1. Todo espacio indiscreto es un espacio hiperconexo.*

2. El espacio de Sierpinski, es decir, el conjunto $X = \{x, y\}$ con topología $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$, es hiperconexo.

3. *Sea X un conjunto infinito. El espacio topológico (X, τ_{cof}) es hiperconexo.*

4. *Sea X un conjunto no numerable. El espacio topológico (X, τ_{con}) es hiperconexo, donde τ_{con} es la topología conumerable, es decir, $\tau_{con} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$.*

5. *Sea $\tau = \{(-\infty, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ una topología sobre $\mathbb{R}$. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ es hiperconexo.*

6. *$(X, \mathcal{I}(x))$ es hiperconexo.*

Proposición 1.3.4.

1. *Sean τ_1 y τ_2 topologías para X tales que τ_1 es más fina que τ_2. Si (X, τ_1) es hiperconexo, entonces (X, τ_2) es hiperconexo.*

2. *Sean (X, τ_1) un espacio topológico hiperconexo y (X, τ_2) un espacio topológico. Entonces $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ es hiperconexo.*

Demostración. 1.- Sean $U, V \in \tau_2$. Por hipótesis U, V son elementos de τ_1, entonces su intersección es distinta del vacío.
Por lo tanto, (X, τ_2) es hiperconexo.

2.- Sean U, V elementos de $\tau_1 \cap \tau_2$, entonces U, V pertenecen a τ_1. Dado que (X, τ_1) es hiperconexo, $U \cap V \neq \emptyset$, por lo que $X, \tau_1 \cap \tau_2)$ es hiperconexo. $\square$

Proposición 1.3.5. *Sea (X, τ) tal que $|X| \geq 2$. Si X es T_2, entonces X no es hiperconexo.*

Demostración. Sean x, y elementos distintos de X. Como X es T_2, existen U, V conjuntos abiertos de X ajenos tales que x se encuentra en U e y en V. Por lo tanto, X no es hiperconexo. $\square$

Definición 1.3.6. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Decimos que Y es* **hiperconexo** *si Y es un espacio hiperconexo con la topología relativa.*

Observación 1.3.7. *Ser hiperconexo no es una propiedad hereditaria.*

A continuación mostraremos un ejemplo con el que se demuestra la observación anterior.

Ejemplo 1.3.8. *Sean* $X = \mathbb{R}$ *y* $\tau = \mathcal{I}(0)$. *Notemos que* X *es hiperconexo, pues para cualesquiera* U, V *conjuntos abiertos de* X, $\{0\}$ *está contenido en* $U \cap V$.
Sea $Y = (1, \infty)$, *entonces* $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$.
Tomando ahora a $U = \{0, 3\}$ *y* $V = \{0, 2\}$, *por definición* U, V *son elementos de* τ, *así* $U' = U \cap Y = \{3\}$ *y* $V' = V \cap Y = \{2\}$. *Podemos observar que* U' *y* V' *son conjuntos abiertos ajenos en* Y. *Por lo tanto,* Y *no es hiperconexo.*

Proposición 1.3.9. *Sea* X *hiperconexo. Si* $Y, Z \subseteq X$ *son hiperconexos, entonces* $Y \cup Z$ *es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V elementos de $\tau_{Y \cup Z}$, entonces existen A y B abiertos en X tales que $U = A \cap (Y \cup Z)$ y $V = B \cap (Y \cup Z)$ respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} U \cap V &= [A \cap (Y \cup Z)] \cap [B \cap (Y \cup Z)] \\ &= [(A \cap B) \cap Y] \cup [(A \cap B) \cap Z]. \end{aligned}$$

Pero Y y Z son hiperconexos, por lo cual $(A \cap B) \cap Y$ y $(A \cap B) \cap Z$ son conjuntos no vacíos. De esto se sigue que $U \cap V$ es distinto del vacío. Por lo tanto, $Y \cup Z$ es hiperconexo. □

Proposición 1.3.10. *Si* (X, τ) *es hiperconexo y* $Y \subset X$ *es denso, entonces* (Y, τ_Y) *es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V elementos de τ_Y, entonces existen A y B abiertos en X tales que $U = A \cap Y$ y $V = B \cap Y$ respectivamente. Notemos que $A \cap B$ es un subconjunto abierto no vacío de X pues X es hiperconexo. Como Y es denso en X tenemos que

$$\begin{aligned} U \cap V &= (A \cap Y) \cap (B \cap Y) \\ &= (A \cap B) \cap Y \end{aligned}$$

es un conjunto no vacío. Por lo tanto, Y es hiperconexo. □

Teorema 1.3.11. *Sean* (X, τ) *un espacio hiperconexo y* $Y \subseteq X$. Y *es hiperconexo si y sólo si* $\overline{Y}$ *es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V elementos de $\tau_{\overline{Y}}$ no vacíos, entonces existen A y B abiertos no vacíos de X tales que $U = A \cap \overline{Y}$ y $V = B \cap \overline{Y}$ respectivamente. Así $U \cap V = (A \cap B) \cap \overline{Y}$.
Por otro lado, $(A \cap Y), (B \cap Y)$ son elementos de τ_Y y al ser Y hiperconexo

$(A \cap B) \cap Y$ es no vacío.
Como Y está contenido en $\overline{Y}$, entonces el conjunto no vacío $(A \cap B) \cap Y$ se encuentra contenido en $(A \cap B) \cap \overline{Y} = U \cap V$. Por lo que $\overline{Y}$ es hiperconexo.
Ahora, sean U y V abiertos no vacíos en Y, entonces existen A y B elementos de τ de no vacíos tales que $U = A \cap Y$ y $V = B \cap Y$ respectivamente. Así, $U \cap V = (A \cap B) \cap Y$.
Por otro lado, como $A \cap B$ es un subconjunto abierto de X y $\overline{Y}$ es hiperconexo, entonces $(A \cap B) \cap \overline{Y}$ es no vacío. Sea x_0 un elemento de $\overline{Y} \cap (A \cap B)$. Como $A \cap B$ es un subconjunto abierto de X tal que $x_0 \in A \cap B$ y además $x_0 \in \overline{Y}$, entonces $U \cap V = (A \cap B) \cap Y$ es no vacío. Por lo tanto, Y es hiperconexo. $\square$

Proposición 1.3.12. *Si X es un espacio topológico hiperconexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo, entonces existen U y V dos abiertos ajenos no vacíos de X tales que $U \cup V = X$, sin embargo esto contradice la hipótesis de que X es hiperconexo. Por lo tanto, X es conexo. $\square$

Definición 1.3.13. *Un conjunto maximal hiperconexo de X es un conjunto hiperconexo Y contenido en X tal que si existe un conjunto hiperconexo $Z \subset X$, que contiene a Y, entonces $Y = Z$. A un conjunto maximal hiperconexo de X lo llamaremos* **componente hiperconexa** *de X.*

Ejemplo 1.3.14. *Sean (X_1, τ_1) un espacio topológico hiperconexo y (X_2, τ_2) un espacio topológico. Entonces X_1 es una componente hiperconexa en $X = X_1 \bigoplus X_2$ con la topología de la unión ajena de espacios topológicos.*

Teorema 1.3.15. *Sea X un espacio hiperconexo. Toda componente hiperconexa de X es cerrada.*

Demostración. Sea Y una componente hiperconexa de X. Por el Teorema 1.3.11 $\overline{Y}$ es hiperconexo. Como Y es un conjunto maximal y $Y \subseteq \overline{Y} \subset X$, entonces $Y = \overline{Y}$. Por lo tanto, Y es cerrada. $\square$

Teorema 1.3.16. *Todo subconjunto hiperconexo de un espacio X está contenido en una componente hiperconexa de X.*

Demostración. Sea $Y_0 \subseteq X$ hiperconexo. Hacemos $\mathcal{E} = \{Y \subsetneq X \mid Y$ es hiperconexo y $Y_0 \subseteq Y\}$.

1. $\mathcal{E}$ es no vacío, pues Y_0 es elemento de $\mathcal{E}$.

2. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ una cadena.
   Si $\tilde{\mathrm{Y}} = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$, entonces Y_0 está contenido en $\tilde{\mathrm{Y}}$, pues Y_0 se encuentra en C para todo elemento C de $\mathcal{C}$. De esto se tiene que $\tilde{\mathrm{Y}}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$.
   Entonces $\mathcal{C}$ está acotado superiormente.

Por el Lema de Zorn, $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal.
Es decir, existe Y' una componente hiperconexa maximal tal que Y_0 está contenido en Y'. □

Teorema 1.3.17. *Sean X un espacio hiperconexo y $E \subseteq X$ hiperconexo. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(E)$ es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V elementos no vacíos de $\tau_{f(E)}$, entonces existen A y B abiertos en Y tales que $U = A \cap f(E)$ y $V = B \cap f(E)$. Así $U \cap V = (A \cap B) \cap f(E)$.
Como f es continua, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en X. Sean $U' = f^{-1}(A) \cap E$ y $V' = f^{-1}(B) \cap E$, como E es hiperconexo, $U' \cap V'$ es no vacío. Dado que

$$(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \cap E \subset (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \cap f^{-1}(f(E))$$

y

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cap V) &= f^{-1}((A \cap B) \cap f(E)) \\ &= f^{-1}(A \cap B) \cap f^{-1}(f(E)) \\ &= (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \cap f^{-1}(f(E)) \end{aligned}$$

entonces $\emptyset \neq U' \cap V' \subset f^{-1}(U \cap V)$. Por lo tanto, $f(E)$ es hiperconexo. □

Definición 1.3.18. *Sean $F \subset X$ cerrado y $x \in X$. Decimos que F tiene* **punto genérico** *x, si $F = \overline{\{x\}}$. De igual modo, un punto $x \in X$ es* **genérico** *si $\overline{\{x\}}$ es un conjunto hiperconexo.*

Teorema 1.3.19. *Sea (X, τ) un espacio hiperconexo y T_1. Entonces todo punto $x \in X$ es genérico.*

Demostración. Por ser X un espacio T_1, tenemos que para todo x elemento de X, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X, es decir, $\{x\} = \overline{\{x\}}$. Así, $\overline{\{x\}}$ se vuelve un espacio indiscreto bajo la topología relativa. Por lo tanto, $\overline{\{x\}}$ es hiperconexo y x es genérico. □

Definición 1.3.20. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* **sobrio** *si todo conjunto cerrado hiperconexo tiene un único punto genérico.*

Proposición 1.3.21. *Si X es un espacio hiperconexo y $x \in X$, entonces $\overline{\{x\}} = X$ o $\text{Int}_X(\{x\}) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\overline{\{x\}} \neq X$ e $\text{Int}_X(\{x\})$ es no vacío.
Notemos que $X \setminus \overline{\{x\}}$ es un conjunto subconjunto abierto de X tal que $(X \setminus \overline{\{x\}}) \cap (\text{Int}_X(\{x\}))$ es vacío. Lo cual es una contradicción pues X es hiperconexo.
Por lo tanto, $\overline{\{x\}} = X$ o $\text{Int}_X(\{x\}) = \emptyset$. □

1.4. Espectro de un Anillo

La construcción y aplicación del espacio topológico estudiado en esta sección fueron consultadas en [7] y se incluyen en este trabajo con la intencion de explicar a detalle el comportamiento de un espacio sobrio.

Definición 1.4.1. *Sea A un anillo conmutativo. Definimos como el* **espectro** *de A al conjunto $Spec(A) = \{p \mid p$ es un ideal primo de A y $p \neq A\}$.*

A continuación dotaremos a $Spec(A)$ de una topología.

Teorema 1.4.2. *El conjunto $Spec(A)$ es un espacio topológico con los conjuntos cerrados dados por $V(E) = \{p \mid E \subset p\}$ para cualquier ideal $E \subseteq A$.*

Demostración.

1. Mostraremos que $Spec(A), \emptyset$ son conjuntos cerrados.
   a) Como A se queda contenido en A, entonces

$$\begin{aligned} V(A) &= \{p \mid A \subset p\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\emptyset$ es un conjunto cerrado.
   b) Como $\emptyset$ es ideal primo de A, entonces

$$\begin{aligned} V(\emptyset) &= \{p \mid \emptyset \subset p\} \\ &= Spec(A) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $Spec(A)$ es un conjunto cerrado.

2. Sean $V(E_1), V(E_2)$ cerrados. Mostraremos que $V(E_1) \cup V(E_2)$ es un subconjunto cerrado de $Spec(A)$.
   Afirmación: $V(E_1) \cup V(E_2) = V(E_1 E_2)$.

Sea p un elemento en $V(E_1) \cup V(E_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que p es un elemento de $V(E_1)$, así E_1 se queda contenido en p. De que E_1 es ideal entonces E_1E_2 se queda contenido en E_1 y, a su vez, en p. Por lo cual p pertenece a $V(E_1E_2)$.
Ahora, si p es elemento de $V(E_1E_2)$, como p es ideal primo, E_1 se queda contenido en p o E_2 se queda contenido en p, por lo que p es elemento de $V(E_1) \cup V(E_2)$. Así, $V(E_1) \cup V(E_2) = V(E_1E_2)$. Por lo tanto, $V(E_1) \cup V(E_2)$ es un subconjunto cerrado de $Spec(A)$.

3. Sean I un conjunto de índices y E_α ideal de A para todo α en I. Mostraremos que $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha)$ es un subconjunto cerrado de $Spec(A)$.
Afirmación: $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha) = V(\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)$
Primero sea p elemento en $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha)$, entonces para toda $\alpha \in I$, E_α es subconjunto de p, así $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ se queda contenido en p. Por lo tanto, p es elemento de $V(\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)$.

Ahora, sean α' un elemento de I y p un elemento de $V(\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)$. Por definición, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ se queda contenido en p. En particular $E_{\alpha'}$ es subconjunto de $\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha \subseteq p$, entonces p es elemento de $V(E_{\alpha'})$, para toda $\alpha' \in I$, y por consiguiente elemento de $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha)$. Así $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha) = V(\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{\alpha\in I} V(E_\alpha)$ es un subconjunto cerrado de $Spec(A)$.

□

Teorema 1.4.3. *Sea $f \in A$ y $D_f = \{p \mid p$ es ideal primo de A y $f \notin p\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{D_f \mid f \in A\}$ es una base para una topología sobre $Spec(A)$.*

Demostración. 1. Sea p en $Spec(A)$, dado que p está contenido en A, existe f_0 en A tal que f_0 no es elemento de p. Por lo tanto, p pertenece a D_{f_0}.

2. Sean D_f, D_g elementos de $\mathcal{B}$, mostraremos que $D_f \cap D_g = D_{fg}$. Sea p elemento de $D_f \cap D_g$, así p pertenece a D_f y D_g si y sólo si f y g no son elementos de p, como p es ideal primo, fg no pertenece a p pero esto se da si y sólo si p es elemento de D_{fg}. Por lo cual $D_f \cap D_g = D_{fg}$.

Por lo tanto, por 1. y 2. $\mathcal{B}$ es base para alguna topología sobre $Spec(A)$. $\square$

A continuación mostraremos que la topología generada por la base $\mathcal{B}$ dada en el Teorema 1.4.3 coincide con la topología de $Spec(A)$ dada en el Teorema 1.4.2.

Teorema 1.4.4. *Sean $\tau_{\mathcal{B}}$ la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{D_f \mid f \in A\}$ y τ la topología cuyos cerrados son de la forma $V(E)$ para todo ideal $E \subseteq A$. Entonces $\tau_{\mathcal{B}} = \tau$.*

Demostración. Sea $U \in \tau_{\mathcal{B}}$, entonces existe E un ideal de A tal que

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{f \in E} D_f \\ &= \{p \mid p \in D_f, f \in E\}. \end{aligned}$$

Dicho de otra manera

$$U = \{p \mid E \nsubseteq p\}.$$

Por otro lado, podemos ver que $V(E) = \{p \mid E \subseteq p\}$ es cerrado en la topología τ, pues E está contenido en A, por lo cual $V(E)^c$ es abierto en la topología τ, es decir, $V(E)^c$ pertenece a τ. Pero $V(E)^c = \{p \mid E \nsubseteq p\}$, entonces $V(E)^c = U$. Por lo tanto, $U \in \tau$.

Ahora, sea U elemento de τ, entonces $U^c = V(E)$ para algún E ideal en A. Así,

$$U = \{p \mid E \nsubseteq p\} = \{p \mid f \notin p, \text{ para algún } f \in E\}$$

entonces

$$U = \{p \mid p \in D_f \text{ para algún } f \in E\}.$$

Nótese que $U = \bigcup_{f \in E} D_f$ y es así elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto, $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$. $\square$

Notación: Sea E subconjunto de $Spec(A)$. Denotamos por $J(E)$ a $\bigcap_{p \in E} p$, es decir, $J(E) = \bigcap_{p \in E} p$.

Teorema 1.4.5. *Sea E contenido en $Spec(A)$. Entonces $\overline{E} = V(J(E))$.*

Demostración. Sea p un elemento de E, notemos que p pertenece a $V(J(E))$ pues $\bigcap\limits_{p\in E} p$ se queda contenido en p. Así $E \subseteq V(J(E))$, por lo que $\overline{E} \subseteq \overline{V(J(E))}$. Pero por ser $V(J(E))$ cerrado, $\overline{V(J(E))} = V(J(E))$. Así $\overline{E} \subseteq V(J(E))$.

Ahora, sea p elemento de $V(J(E))$, entonces $J(E)$ se queda contenido en p. Sea D_f tal que p pertenezca a D_f, por definición f no se encuentra en p. Así f no es elemento de $J(E)$, es decir, f no se encuentra en $\bigcap\limits_{p\in E} p$, por lo que existe p_0 en E tal que f no pertenece a p_0. Entonces p_0 pertenece a $D_f \cap E$. Así p es elemento de $\overline{E}$. Por lo tanto, $\overline{E} = V(J(E))$. $\square$

Teorema 1.4.6. *Sea $E \subseteq Spec(A)$. E es hiperconexo si y sólo si $J(E)$ es un ideal primo.*

Demostración. Sean f, g tales que no pertenezcan a $J(E)$ no necesariamente distintos, mostraremos que fg no se encuentran en $J(E)$.
Notemos que f, g existen, pues de lo contrario $J(E) = A$, lo que implicaría que para todo p en E, $p = A$ lo cual es una contradicción, pues p se encuentra contenido propiamente en A para todo p en $Spec(A)$.
Como f, g no son elementos de $J(E)$ entonces existen p_1, p_2 elementos de E tales que p_1 está en D_f y p_2 en D_g. Hagamos $\widehat{D_f} = D_f \cap E$ y $\widehat{D_g} = D_g \cap E$, nótese que $\widehat{D_f}$ y $\widehat{D_g}$ son distintos del vacío pues $p_1 \in D_f \cap E$ y $p_2 \in D_g \cap E$. Dado que E es hiperconexo, se tiene que $\widehat{D_f} \cap \widehat{D_g}$ es no vacío.
Pero $\widehat{D_f} \cap \widehat{D_g} = \widehat{D_{fg}} = \widehat{D_{fg}} = D_{fg} \cap E$ para el que fg no pertenece a p_0, lo que implica que fg no pertenzca a $J(E)$. Por lo tanto, $J(E)$ es ideal primo.

Ahora, sean $\widehat{D_f}, \widehat{D_g}$ abiertos básicos no vacíos de E, mostraremos que $\widehat{D_f} \cap \widehat{D_g}$ es no vacío. Como $\widehat{D_f} = D_f \cap E$ es no vacío, existe p_1 en $\widehat{D_f}$, es decir, existe p_1 elemento de E tal que f no pertenece a p_1 y por esto f no pertenece a $J(E)$.
Análogamente, como $\widehat{D_g} = D_g \cap E$ es distinto del vacío, existe p_2 elemento de E tal que g no se encuentra en p_2 y por consiguiente no se encuentra en $J(E)$.
Por ser $J(E)$ ideal primo, fg no es elemento de $J(E)$, así existe p_0 en E tal que fg no es elemento de p_0, es decir, p_0 está en D_{fg}.
Por lo tanto, p_0 se encuentra en $D_{fg} \cap E = \widehat{D_{fg}}$, y en conclusión, como $\widehat{D_{fg}} = \widehat{D_f} \cap \widehat{D_g}$ es no vacío, entonces E es hiperconexo. $\square$

Proposición 1.4.7. *Sea E un subconjunto hiperconexo de $Spec(A)$. Entonces $\overline{E} = \overline{\{J(E)\}}$.*

Demostración. Nótese que p es elemento de $\overline{E}$ si y sólo si para toda D_f que contenga a p se tiene que $D_f \cap E$ es no vacío. Por otro lado, existe p_0 en E tal que f no se encuentra en p_0 si y sólo si f no se encuentra en $J(E)$. Así $J(E)$ es elemento de D_f si y sólo si $D_f \cap \{J(E)\} \neq \emptyset$, por lo que p es elemento de $\overline{\{J(E)\}}$.
Por lo tanto, $\overline{E} = \overline{\{J(E)\}}$. □

Corolario 1.4.8. *El espacio topológico $Spec(A)$ es un espacio sobrio.*

Demostración. En la proposición anterior hemos visto que todo conjunto cerrado hiperconexo tiene un punto genérico, falta ver que este punto genérico es único. Supongamos que $\overline{\{p\}} = \overline{E} = \overline{\{J(E)\}}$, para algún $p \in Spec(A)$.
Sea f elemento de A, entonces f no pertenece a p si y sólo si p es elemento de D_f, es decir, $D_f \cap \{p\}$ es no vacía, así p pertenece a $\overline{\{p\}}$ si y sólo si p es elemento de $\overline{E}$ y de $\overline{\{J(E)\}}$, entonces la intersección de D_f con $\{J(E)\}$ es no vacía si y sólo si $J(E)$ pertenece a D_f, es decir, f no es elemento de $J(E)$. Por lo tanto, $p = J(E)$.
En conclusión $J(E)$ es el único punto genérico para todo conjunto cerrado hiperconexo. Por lo tanto, $Spec(A)$ es un espacio sobrio. □

1.5. Teoría de Hiperespacios

En esta sección incluimos conocimientos previos que sirven como punto de partida al análisis realizado en este trabajo. En [3] se profundizan las siguientes definiciones y proposiciones.

Definición 1.5.1. *Sea X un espacio topológico con topología τ. Un* **hiperespacio** *de X es una colección de subconjuntos de X con alguna característica específica dotada de alguna topología.*

Ejemplo 1.5.2. *El hiperespacio más grande de X es*

$$CL(X) = \{H \subseteq X \mid H \text{ es cerrado no vacío de } X\}$$

con la topología de Vietoris que definimos a continuación.

Definición 1.5.3. *Sea X es un espacio con topología τ. La topología de Vietoris τ_V para el conjunto $CL(X)$ es la colección de conjuntos generada por la subbase $\{H \in CL(X) \mid H \subset U\} \cup \{H \in CL(X) \mid H \cap V \neq \emptyset\}$ donde $U, V \in \tau$.*

Por conveniencia consideramos los hiperespacios cuyos puntos son subconjuntos cerrados no vacíos de X.

Observación 1.5.4. *El conjunto* $\{H \in CL(X) \mid H \subset K\}$ *es cerrado bajo* τ_V *siempre que* K *es cerrado bajo* τ.

Notación: Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, ..., U_n$ conjuntos abiertos en un espacio topológico X. Al conjunto denotado por

$$\langle U_1, ..., U_n \rangle = \{H \in CL(X) \mid H \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i\}$$

le llamamos conjunto abierto básico de la topología de Vietoris. La familia de conjuntos abiertos básicos forma una base para esta topología.

En *"Hyperspaces of Sets"* de Sam B. Nadler Jr. [10] se estudian los hiperespacios de los espacios métricos, compactos y conexos (continuos), y sus propiedades.

Los hiperespacios de un espacio topológico X más estudiados son:

1. $C(X) = \{A \in CL(X) \mid A \text{ es conexo}\}$.
   Dado n un número natural.

2. $F_n(X) = \{A \in CL(X) \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$.

3. $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$.

4. $C_n(X) = \{A \in CL(X) \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

5. $K(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es compacto y no vacío}\}$.

Para referirse de manera general a cualquiera de los hiperespacios anteriores utilizaremos la notación $H(X)$.

Algunas de las propiedades conocidas de un espacio topológico X y sus hiperespacios son:

1. X es compacto si y sólo si 2^X es compacto. [8, Teorema 4.2]

2. X es localmente compacto si y sólo si 2^X es localmente compacto. Además, si X es localmente compacto $C(X)$ es un abierto en 2^X. [8, Teorema 4.4]

3. X es separable si y sólo si 2^X es separable. [8, Teorema 4.5]

4. X es regular si y sólo si 2^X es de Hausdorff. [8, Teorema 4.9.3]

5. X es de Hausdorff si y sólo si $C(X)$ es de Hausdorff. [8, Teorema 4.9.8]

6. X es metrizable si y sólo si $C(X)$ es metrizable. [8, Teorema 4.9.13]

En conclusión, los hiperespacios cuentan con propiedades que permiten estudiar a X desde otro punto de vista.

Teorema 1.5.5. *Los hiperespacios de continuos son continuos.*

Teorema 1.5.6. *El hiperespacio de subcontinuos y el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo resultan ser unicoherentes y arco-conexos.*

Capítulo 2

Hiperespacios de espacios no métricos

2.1. Propiedades

Otras propiedades que ayudarán al estudio de los espacios no métricos se enlistan a continuación.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. El espacio X es un* **espacio puerta** *si para todo $A \subset X$, A es un subconjunto cerrado o abierto de X.*

Ejemplo 2.1.2. *El espacio $(X, \mathcal{E}(x))$ es un espacio puerta, donde $\mathcal{E}(x)$ es la topología que excluye al punto x, definida en el Ejemplo 1.2.6, pues para todo $A \subseteq X$, $x \in A$ o $x \notin A$, siendo A cerrado o abierto de X, respectivamente.*

Steiner en *"The Lattice of Topologies: Structure and Complementation"* caracteriza a los espacios puerta a través de su topología en dos tipos, véase [11, Teorema 4.4]:

1. Si τ está dada por un ultrafiltro.

2. Si $\tau = \mathcal{E}(x)$.

Definición 2.1.3. *Sea X un espacio topológico. El espacio X es* **submaximal** *si todo conjunto denso en X es un subconjunto abierto de X.*

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio topológico. El espacio X es* **anti-compacto** *si los conjuntos compactos en X son únicamente los conjuntos finitos.*

Definición 2.1.5. *Sea X un espacio topológico. Definimos como* **refinamiento localmente compacto** *de una cubierta abierta para X, la colección de subconjuntos de X tales que para todo punto y un abierto de la cubierta que lo contiene, el conjunto abierto de X intersecta sólo un número finito de elementos de la colección.*

Definición 2.1.6. *Sea X un espacio topológico. El espacio X es* **paracompacto** *si para toda cubierta abierta de X existe un refinamiento abierto localmente finito.*

Definición 2.1.7. *Sea X un espacio topológico. El espacio X es* **anti-paracompacto** *si los conjuntos paracompactos en X son únicamente los conjuntos finitos.*

Definición 2.1.8. *Sean X un conjunto, $S \subset X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Definimos $\tau_{\mathcal{F},S} = \mathcal{F} \cup \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$.*

Sean $S \subset X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. El conjunto $\tau_{\mathcal{F},S}$ es, en efecto, una topología sobre X pues:

1. Mostraremos que X y $\emptyset$ son elementos de $\tau_{\mathcal{F},S}$.
   Al ser $\mathcal{F}$ un filtro, existe $U \in \mathcal{F}$ no vacío. Como $U \subseteq X$, entonces $X \in \mathcal{F}$. Así $X \in \tau_{\mathcal{F},S}$.
   Por otro lado, $\emptyset \subset X$, además $\emptyset \cap S = \emptyset$ para todo S. De esto se implica que $\emptyset \in \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$. Así $\emptyset \in \tau_{\mathcal{F},S}$.

2. Sean I un conjunto de índices y $U_\alpha \in \tau_{\mathcal{F},S}$ para toda $\alpha \in I$, mostraremos que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_{\mathcal{F},S}$.
   Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$, entonces $S \cap U_\alpha = \emptyset$ para toda $\alpha \in I$. Así $S \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) = \emptyset$, por lo cual $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$ y, finalmente, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_{\mathcal{F},S}$.
   Ahora supongamos que existe $\alpha_0 \in I$ tal que $U_{\alpha_0} \in \mathcal{F}$.
   Como $U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, al ser $\mathcal{F}$ un filtro, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{F}$. Así $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_{\mathcal{F},S}$.

3. Sean $U, V \in \tau_{\mathcal{F},S}$, mostraremos que $U \cap V \in \tau_{\mathcal{F},S}$.
   Supongamos que $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$, por lo cual $U \cap V \in \tau_{\mathcal{F},S}$.
   Por otro lado, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $U \cap S = \emptyset$, entonces $(U \cap V) \cap S = \emptyset$, por lo cual $U \cap V \in \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$ y así $U \cap V \in \tau_{\mathcal{F},S}$.

Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{F},S}$ es una topología sobre X.

Proposición 2.1.9. *Sean X un conjunto, $S, S_1, S_2 \subset X$ y, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros sobre X. Entonces:*

1. *Si $S_1 \subset S_2$, $\tau_{\mathcal{F},S_2} \subset \tau_{\mathcal{F},S_1}$.*
2. *Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, $\tau_{\mathcal{F}_1,S} \subset \tau_{\mathcal{F}_2,S}$.*
3. *Si $S = \emptyset$, $\tau_{\mathcal{F},\emptyset}$ es la topología discreta.*
4. *Si $S = X$, $\tau_{\mathcal{F},X} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$.*
5. *Si $\mathcal{F} = \{X\}$, $\tau_{\mathcal{F},S} = \{X\} \cup \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}$.*

Demostración.

1. Sea $U \in \tau_{\mathcal{F},S_2}$, si $U \in \mathcal{F}$ entonces $U \in \tau_{\mathcal{F},S_1}$. Si $U \notin \mathcal{F}$, se tiene que $U \cap S_2 = \emptyset$. Como $S_1 \subset S_2$, se implica que $U \cap S_1 = \emptyset$. Por lo tanto, $U \in \tau_{\mathcal{F},S_1}$.
2. Sea $U \in \tau_{\mathcal{F}_1,S}$, si $U \cap S = \emptyset$, entonces $U \in \tau_{\mathcal{F}_2,S}$. Por otro lado si $U \in \mathcal{F}_1$, por hipótesis, $U \in \mathcal{F}_2$. Por lo tanto, $U \in \tau_{\mathcal{F}_2,S}$.
3. Sea $F \subset X$. Entonces $F \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, $F \in \tau_{\mathcal{F},\emptyset}$.
4. Si $S = X$, se implica que no existe $F \neq \emptyset$ tal que $F \cap X = \emptyset$. Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{F},X} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$.
5. Al ser $\mathcal{F} = \{X\}$, entonces, por definición

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{F},S} &= \mathcal{F} \cup \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\} \\ &= \{X\} \cup \{U \subset X \mid U \cap S = \emptyset\}. \end{aligned}$$

□

Simplificaremos la notación de la topología usada en la Proposición 2.1.9 punto 4, haciendo $\tau_{\mathcal{F},X} = \tau_{\mathcal{F}}$.

Proposición 2.1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es un espacio puerta minimal.*
2. *(X, τ) es un espacio puerta conexo.*
3. *(X, τ) es un espacio puerta minimal submaximal.*

4. (X,τ) es un espacio puerta hiperconexo o $\tau = \mathcal{E}(x)$ para algún $x \in X$.

5. $\tau = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$, donde $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, o $\tau = \mathcal{E}(x)$ para algún $x \in X$.

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (5) Resultado de Steiner en [11, Teorema 4.4].

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea A un conjunto denso en X. Basta probar que A es un subconjunto abierto de X. Dado que X es un espacio puerta podemos suponer que A es un subconjunto cerrado de X. Entonces $A = \overline{A} = X$ de donde A es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto, X es submaximal.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es una consecuencia inmediata de la hipótesis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Al ser (X,τ) un espacio puerta minimal, por (5), $\tau = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$, donde $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, o τ es una topología con un punto excluido. Sean U, V abiertos ajenos de X tales que $U \cup V = X$.

a) Supongamos que τ es una topología con un punto excluido.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que el punto excluido $x_0 \in U$, como $V \cap U = \emptyset$, entonces $V = \emptyset$ y $U = X$.

b) Supongamos que τ está generada por un ultrafiltro. Supongamos que X no es conexo. Entonces existen $U, V \in \tau$ ajenos distintos del vacío tales que $U \cup V = X$. Pero $U, V \in \mathcal{F}$, por lo que $U \cap V \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción pues $U \cap V = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe (X,σ) un espacio topológico puerta tal que $\sigma \subsetneq \tau$. Existe $U \in \tau$ no vacío tal que $U \notin \sigma$, nótese que $U \neq X$. Por ser (X,σ) puerta, U es cerrado en (X,σ). Así $X \setminus U \in \sigma$, entonces $X \setminus U \in \tau$. Pero $(X \setminus U) \cup U = X$, por lo tanto, (X,τ) no es conexo.

(4) $\Rightarrow$ (2) Si X es un espacio puerta hiperconexo, por la Proposición 1.3.12, X es un espacio puerta conexo.
Por otro lado, si $\tau = \mathcal{E}(x)$, por el Ejemplo 2.1.2, X es puerta. Nótese que para cualesquiera U, V abiertos no vacíos tales que $X = U \cup V$ se tiene que $X = U$ o $X = V$, supongamos sin pérdida de generalidad que $U = X$, de este modo, $V \subseteq U$. Así, X es conexo bajo τ.

(5) $\Rightarrow$ (4) Basta ver que un espacio X con una topología dada por un ultrafiltro $\mathcal{F}$ es hiperconexo. Sean $U, V \in \tau$ no vacíos, entonces $U, V \in \mathcal{F}$. Así, $U \cap V \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Las demostraciones de la Proposición 2.1.11 y el Corolario 2.1.12 pueden ser consultadas en [1, Proposición 2.1] y [1, Corolario 2.2]

Proposición 2.1.11. *Sea un espacio topológico (X, τ) infinito tal que cada subespacio infinito contiene un subespacio cerrado infinito discreto. Entonces X es anti-compacto y no es anti-paracompacto.*

Corolario 2.1.12. *Un espacio submaximal (X, τ) infinito tal que cada subespacio infinito contiene un subconjunto denso infinito no cofinito es anti-compacto pero no anti-paracompacto.*

Ejemplo 2.1.13. *Los espacios puerta hiperconexos infinitos son anti-compactos pero no son anti-paracompactos.*

Definición 2.1.14. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos una* **vecindad mínima** *de x como el abierto de menor cardinalidad que contiene a x.*

La siguiente definición fue introducida por Steiner en [11].

Definición 2.1.15. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}_y = \{H \subseteq X \mid y \in H\}$ y $\mathbb{G} = \{\tau_{\mathcal{F}_y,\{x\}} \mid \tau \subseteq \tau_{\mathcal{F}_y,\{x\}},\ x, y \in X \text{ distintos}\}$. Decimos que (X, τ) es* **principal** *si*

$$\tau = \bigcap_{\tau_{\mathcal{F}_y,\{x\}} \in \mathbb{G}} \tau_{\mathcal{F}_y,\{x\}}.$$

Proposición 2.1.16. *Un espacio principal es anti-compacto si y sólo si las vecindades mínimas de cada punto son finitas.*

Demostración. Sea X anti-compacto principal. Sea V una vecindad mínima de $y \in X$. Entonces $\tau_V \subset \mathcal{E}_V(y)$, donde $\mathcal{E}_V(y)$ es la topología que excluye a y heredada a V como subespacio. Por lo tanto, (V, τ_V) es compacto y finito.

Ahora, sea A un subespacio infinito de X. Para cada $a \in A$ sea V_a una vecindad mínima, entonces $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para A, la cual no tiene subcubiertas finitas pues cada vecindad mínima intersecta a A en, a lo más, un número finito de puntos. Por lo tanto, A no es compacto. $\square$

Proposición 2.1.17. *Sean (X, τ) un espacio topológico, V un subconjunto abierto de X y $\sigma' = \{U \in \tau \mid U \cap V = V \text{ o } U \cap V = \emptyset\}$. Entonces σ' es una topología.*

Demostración. 1. X y $\emptyset$ son elementos de σ', por definición de σ'. Pues $X \cap V = V$ y $\emptyset \cap V = \emptyset$.

2. Sean I un conjunto de índices y U_α un elemento de σ' para toda $\alpha \in I$. Si para toda $\alpha \in I$, $U_\alpha \cap V = \emptyset$, entonces $(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap V = \emptyset$. Así $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \sigma'$. Por otro lado, si existe $\alpha \in I$ tal que $U_\alpha \cap V = V$, entonces $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha\right) \cap V = V$. Por lo cual $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \sigma'$.

3. Sean U y W elementos de σ', supongamos que $U \cap V = V$ y $W \cap V = V$, entonces $(U \cap W) \cap V = V$. Así $U \cap W \in \sigma'$. Por otro lado, sin pérdida de generalidad, supongamos que $U \cap V = \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned}(U \cap W) \cap V &= (U \cap V) \cap W \\ &= \emptyset \cap W \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Así $U \cap W \in \sigma'$.

Por lo tanto, σ' es una topología.

□

Teorema 2.1.18. *Sea (X, τ) un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ principal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(X, τ) es anti-compacto minimal.*
2. *(X, τ) es no compacto minimal.*
3. *Sean A el conjunto de los puntos aislados de X, V_y la vecindad mínima para cada $y \in X \setminus A$ y $\{V_{y_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ una familia de vecindades mínimas de puntos en $X \setminus A$. Entonces (X, τ) es anti-compacto y para cada $a \in A$, $a \in X \setminus (\bigcup\limits_{y \in X \setminus A} V_y)$ o $\{a\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$.*

Demostración. La demostración de (3) $\Rightarrow$ (2) se puede consultar en [1, Teorema 2.4].

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe A un conjunto infinito compacto, por la Proposición 2.1.16, existe al menos un punto con vecindad mínima infinita V. Si $X \setminus V$ es finito o compacto para toda cubierta abierta de X, existe un elemento de la cubierta U, tal que $V \subseteq U$, entonces X es compacto . Lo cual es una contradicción.
Si $X \setminus V$ es infinito y no compacto, como $X \setminus V$ no es compacto bajo τ, $X \setminus V$ no es compacto bajo σ' definida en la Proposición 2.1.17. Así X no

es compacto bajo σ', pues toda cubierta de X debe cubrir a $X \setminus V$ y como $\sigma' \subset \tau$, (X, τ) no es no compacto minimal. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe A infinito compacto, es decir, X es anti-compacto.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea $a_0 \in A$ tal que $a_0 \notin X \setminus (\bigcup_{y \in X \setminus A} V_y)$ y $\{a_0\} \neq \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ para cada familia de vecindades mínimas de puntos en $X \setminus A$. Entonces existe $y_0 \in X \setminus A$ tal que $a_0 \in V_{y_0}$. Sea σ la topología con subbase:

$$\{\emptyset, \{a_i\}, V_{y_i}, X : a_i \in A \setminus \{a_0\}, y_i \in X \setminus A \text{ y } V_{y_i} \text{ es la mínima vecindad de } y_i\}.$$

Entonces σ es una topología principal donde cada vecindad es finita, pues $a_0 \in V_0$. Por la Proposición 2.1.16, σ es anti-compacta, es decir, (X, τ) no es anti-compacto minimal. Lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.1.19. *Espacios puerta minimales no satisfacen axiomas altos de separación.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.10 un espacio puerta minimal es puerta hiperconexo o tiene la topología que excluye a un punto. Del Ejemplo 1.2.6, la topología $\mathcal{E}(x)$ es $T_{\frac{3}{4}}$. Por otro lado, por la Proposición 1.3.5 un espacio puerta hiperconexo no es T_2. □

Proposición 2.1.20. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ un espacio topológico, donde $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X. Entonces todo subconjunto abierto de X, U no degenerado es la unión de dos subconjuntos arbitrarios ajenos A, B donde A es un subconjunto abierto de X o B es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto no degenerado de X. Consideremos A un subconjunto propio de U y B el complemento de A en U. Supongamos que A no es un subconjunto abierto de X, entonces $(X \setminus A)$ es un subconjunto abierto de X, al ser U abierto de X, $U \cap (X \setminus A)$ es un subconjunto abierto de X. Como $B = U \cap (X \setminus A)$, entonces B es un conjunto subconjunto abierto de X. □

Proposición 2.1.21. *Todo espacio puerta hiperconexo es anti-compacto.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio puerta hiperconexo y A un subconjunto infinito de X, entonces, por la Proposición 1.2 de [1], τ está dada por un ultrafiltro $\mathcal{F}$. Consideremos dos casos: Primero, si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $X \setminus A$ es un subconjunto abierto de X. Así, $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Para cada elemento x de A hacemos $U_x = (X \setminus A) \cup \{x\}$, nótese que U_x es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\{U_x\}_{x\in A}$ es una cubierta abierta de A sin subcubiertas finitas.

En otro caso, supongamos que A es un subconjunto abierto de X. Afirmamos que existe U un subconjunto abierto no vacío de X, tal que U está contenido en A y $A\backslash U$ es infinito. Supongamos que para todo U subconjunto abierto no vacío de X tal que $U \subset A$, $A\backslash U$ es finito. Por la Proposición 2.1.20 podemos considerar dos subconjuntos infinitos B y C, tales que $U = B \cup C$ donde, sin pérdida de generalidad, B es un subconjunto abierto de X. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la afirmación es cierta.
Entonces para todo x elemento de $A \setminus U$ sea $U_x = U \cup \{x\}$, nótese que U_x es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{F}$. Así, $\{U_x\}_{x\in A\setminus U}$ es una cubierta abierta de A sin subcubiertas finitas. Por lo tanto, A no es compacto.

De ambos casos, X es anti-compacto. □

2.2. Hiperespacios de Espacios no Métricos

Proposición 2.2.1. *Sea X un espacio hiperconexo tal que para cualesquiera dos abiertos no vacíos existe un cerrado no vacío contenido en su intersección. Entonces $CL(X)$ es hiperconexo.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n\rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_m\rangle$ dos abiertos básicos en $CL(X)$, por hipótesis, existen conjuntos cerrados no vacíos contenidos en $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ y $\bigcap_{i=1}^{m} V_i$, entonces $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos no vacíos en $CL(X)$, del mismo modo existe F un cerrado no vacío contenido en $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_i\right)$. Así, $F \in U \cap V$. Por lo tanto, $CL(X)$ es hiperconexo. □

Proposición 2.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que $H(X)$ es hiperconexo y para todo U abierto no vacío en X, $\langle U\rangle_{H(X)}$ es no vacío. Entonces X es hiperconexo.*

Demostración. Sean U, V abiertos no vacíos en X, entonces $\langle U\rangle \neq \emptyset \neq \langle V\rangle$, así por ser $H(X)$ hiperconexo existe $F \in H(X)$ tal que $F \in \langle U\rangle \cap \langle V\rangle$, es decir, $F \subset (U \cap V)$. Así, $U \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, X es hiperconexo. □

Corolario 2.2.3. *Sea X un espacio T_1. Entonces X es hiperconexo si y sólo si $H(X)$ es hiperconexo.*

Corolario 2.2.4. *Sea X un espacio topológico. Si $\bigcup(F_1(X) \cap CL(X))$ es denso en X, entonces X es hiperconexo si y sólo si $H(X)$ es hiperconexo.*

Proposición 2.2.5. *Sea X un espacio topológico anti-compacto. Entonces $F_n(X)$ es anti-compacto*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset F_n(X)$ compacto, nótese que $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto en X, pues dada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta que cubre a $\bigcup \mathcal{A}$, la familia $\{\langle U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_m} \rangle \mid \alpha_i \in I, m \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta que cubre a $\mathcal{A}$, para la cual podemos encontrar una subcubierta finita $\{\langle U_{i_1}, ..., U_{i_j} \rangle\}$ que cubre a $\mathcal{A}$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m_i$ para algunos m y m_i números naturales, así la subcubierta $\{U_{i_j}\}$ donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m_i$ es una subcubierta finita que cubre a $\bigcup \mathcal{A}$. Así $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto. Dado que X es anti-compacto, $\bigcup \mathcal{A}$ es finito. Finalmente como la cantidad de posibles combinaciones de a lo más n elementos de un conjunto finito es finita, $\mathcal{A}$ es finito. Por lo tanto, $F_n(X)$ es anti-compacto. □

Corolario 2.2.6. *Si X es un espacio puerta hiperconexo, entonces $F_n(X)$ es anti-compacto.*

2.3. Espacios Sobrios y sus Hiperespacios

Recordemos que definimos la sobriedad de un espacio como la propiedad de tener un único punto génerico para cada subconjunto cerrado hiperconexo. La sobriedad es independiente de los axiomas de separación que satisface el espacio.

Ejemplo 2.3.1. *Sea X_1 un espacio topológico con la topología cofinita τ_{cof} y X_2 un espacio topológico con la topología del punto incluido $\mathcal{I}(x_0)$. El espacio $X = X_1 \bigoplus X_2$ con la topología de la unión ajena de espacios topológicos es un espacio a lo más $T_{\frac{1}{2}}$ pues para todo $x \in X_1$, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X; para todo $x \in X_2 \setminus \{x_0\}$, $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X y, finalmente, $\{x_0\}$ es un subconjunto abierto de X. Sin embargo X no es sobrio pues $X_1 \subset X$ es un conjunto cerrado hiperconexo para el que no existe $x \in X$ tal que $\overline{\{x\}} = X_1$.*

Proposición 2.3.2. *Sea X un espacio sobrio. Entonces para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}}$ es un cerrado hiperconexo. Además para cualesquiera $x, y \in X$ distintos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$*

Demostración. Sea $x \in X$, por definición $\overline{\{x\}}$ es un subconjunto cerrado de X y para todo $U \in \tau$ tal que $U \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ se tiene que $x \in U$. Así para cualesquiera V, W abiertos en $\overline{\{x\}}$ como subespacio, $V \cap W \neq \emptyset$. De este modo, al ser X sobrio, para cualesquiera $x, y \in X$ distintos tenemos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. $\square$

Corolario 2.3.3. *Sea X un espacio sobrio. Entonces X es T_0.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ distintos, entonces por la Proposición 2.3.2 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $z \in \overline{\{x\}}$ tal que $z \notin \overline{\{y\}}$, notemos que se puede tener $z = x$. Así, existe U subconjunto abierto de X tal que $z \in U$ y $y \notin U$, como $z \in \overline{\{x\}}$, $x \in U$. Por lo tanto, X es T_0. $\square$

2.3.1. Hiperespacios de espacios sobrios

La sobriedad no es una propiedad que se preserve naturalmente entre un espacio y sus hiperespacios. A continuación presentamos a detalle dos ejemplos donde la sobriedad no es preservada.

Ejemplo 1

Sea (X, τ) un espacio topológico infinito donde $\tau = \tau_{cof} \cap \mathcal{E}(x_0)$. En las siguientes proposiciones y corolarios entendemos X como este espacio topológico.
Nótese que X es un espacio $T_{\frac{1}{4}}$ pero no $T_{\frac{1}{2}}$, pues para todo $x \neq x_0$, $\{x\}$ no es un subconjunto abierto o cerrado de X.

Proposición 2.3.4. *X es hiperconexo y no sobrio.*

Demostración.

1. Veamos que X es hiperconexo.
   Sean U, V conjuntos abiertos no vacíos, entonces $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son finitos. Al ser X infinito, existe x elemento de X tal que $x \notin X \setminus U$ y $x \notin X \setminus V$, entonces $x \in U \cap V$. Así $U \cap V$ es no vacío. Por lo tanto, X es hiperconexo.

2. Ahora, veamos que X no es sobrio.
   Nótese que no existe $x \in X$ tal que $X = \overline{\{x\}}$ pues $\overline{\{x\}} = \{x, x_0\}$ para toda $x \in X$. Por lo tanto, X es un conjunto cerrado hiperconexo sin punto genérico.

$\square$

Ahora sea $CL(X)$ el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X, entonces $CL(X) = \{H \subset X \mid H$ es finito y $x_0 \in H\} \cup \{X\}$. Además la siguiente igualdad se sigue:

$$CL(X) = K(X).$$

Proposición 2.3.5. *Los conjuntos abiertos de $CL(X)$, $\langle U \rangle$ son vacíos para todo subconjunto abierto de X, U distinto a X. Además, si el abierto básico $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ es no vacío, entonces existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $U_j = X$.*

Demostración. Es inmediato ya que no existen K un conjunto cerrado y U un conjunto abierto distinto a X tales que $K \subset U$, pues $x_0 \in K$ y $x_0 \notin U$. Por otro lado, si $\langle U_1, ..., U_n \rangle \neq \emptyset$, existe $K \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$ no vacío, como $x_0 \in K$ entonces existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x_0 \in U_j$ pero esto ocurre si y sólo si $U_j = X$. □

Proposición 2.3.6. *El hiperespacio $CL(X)$ es exactamente T_0.*

Demostración. Sean K y H dos subconjuntos cerrados distintos no vacíos donde, sin pérdida de generalidad, existe $x \neq x_0$ tal que $x \in K$ y $x \notin H$, así K es un elemento de $\langle X, X \setminus H \rangle$ pues $x \in X \setminus H$. Así $CL(X)$ es T_0. Ahora sean $H = \{x_0, x, y\}$ y $\mathcal{A} = \{\{x_0, x\}, \{x_0, x, y, z\}\}$ donde y y z son elementos distintos a x y x_0. Para todo básico $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle$ en $CL(X)$ tal que $H \in \mathcal{U}$, se tiene que $\{x_0, x, y, z\} \in \mathcal{U}$, pues $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, entonces existe $j_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $U_{j_0} = X$, así $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$, entonces $\{x_0, x, y, z\} \subset X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, por otro lado como $H \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$, $\{x_0, x, y, z\} \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$, por lo tanto, $\{x_0, x, y, z\} \in \mathcal{U}$. De igual modo para todo básico V en $CL(X)$ tal que $\{x_0, x\} \in V$, se tiene que $H \in V$. Por lo tanto, $CL(X)$ no es $T_{\frac{1}{4}}$. □

Corolario 2.3.7. $CL(X) = \overline{\{X\}}$.

Proposición 2.3.8. *El hiperespacio $CL(X)$ es un espacio hiperconexo.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_m \rangle$ dos abiertos básicos. Por la Proposición 2.3.5, $X \in U$ y $X \in V$. Por lo tanto, $CL(X)$ es hiperconexo. □

Proposición 2.3.9. *Sea $L \subset X \setminus \{x_0\}$ finito. El conjunto $\mathcal{A} = \{\{x_0\} \cup L' \mid L' \subseteq L\}$ es un cerrado hiperconexo en $CL(X)$ tal que $\mathcal{A} = \overline{\{L \cup \{x_0\}\}}$.*

Además, los conjuntos de esta forma son los únicos conjuntos cerrados hiperconexos contenidos propiamente en el hiperespacio $CL(X)$.

Demostración. De la demostración de la Proposición 2.3.6 se sigue que $\mathcal{A}$ es un cerrado hiperconexo tal que $\mathcal{A} = \overline{\{L \cup \{x_0\}\}}$. Basta ver que los conjuntos construidos de la forma $\mathcal{A}$ son los únicos cerrados hiperconexos del hiperespacio $CL(X)$. Es suficiente ver que la familia de los conjuntos de la forma $\mathcal{A}$ es una subbase para los conjuntos cerrados de $CL(X)$ pues de esta forma se demuestra que todos los conjuntos cerrados resultan ser hiperconexos. Dado $L \subset X \setminus \{x_0\}$ finito, el conjunto $\mathcal{A} = \{\{x_0\} \cup L' \mid L' \subseteq L\} = CL(X) \setminus \langle X, X \setminus (L \cup \{x_0\})\rangle$.
$H \in \mathcal{A}$ si y sólo $H \cap (X \setminus (L \cup \{x_0\})) = \emptyset$ si y sólo si $H \notin \langle X, X \setminus (L \cup \{x_0\})\rangle$. □

Corolario 2.3.10. *$CL(X)$ es sobrio.*

Ejemplo 2

Sea (X, τ) un espacio topológico infinito donde $\tau = \tau_{cof} \cap \mathcal{I}(x_0)$. En la siguiente proposición entendemos X como este espacio topológico. Nótese que X es un espacio hiperconexo, sobrio y exactamente $T_{\frac{1}{4}}$.

Proposición 2.3.11. *$CL(X)$ es hiperconexo.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.1 basta ver que para todo U conjunto abierto en X, el conjunto $\langle U\rangle$ es no vacío. Como X es infinito, existe $x \neq x_0$ tal que $x \in U$, así $\{x\} \in \langle U\rangle$. Por lo tanto, $CL(X)$ es hiperconexo. □

Sin embargo no existe $H \in CL(X)$ tal que $CL(X) = \overline{\{H\}}$. Por lo tanto, $CL(X)$ no es sobrio.

Así, con los dos Ejemplos anteriores demostramos que la sobriedad no se preserva de manera natural entre un espacio y su hiperespacio.

2.3.2. Propiedades de hiperespacios sobrios

Proposición 2.3.12. *Sean X un espacio topológico y $H, K \in CL(X)$ tales que $H \neq K$. Entonces $\overline{\{H\}} \neq \overline{\{K\}}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $x \in H$ tal que $x \notin K$, entonces $H \in \langle X, X \setminus K\rangle$. Como $K \notin \langle X, X \setminus K\rangle$, entonces $H \notin \overline{\{K\}}$. Por lo tanto, $\overline{\{H\}} \neq \overline{\{K\}}$. □

Corolario 2.3.13. *Sea X un espacio topológico. El hiperespacio $CL(X)$ no es sobrio si y sólo si existe $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo tal que $\mathcal{A} \neq \overline{\{H\}}$ para toda $H \in CL(X)$.*

Demostración. Por definición de espacio sobrio y la Proposición 2.3.12, $CL(X)$ no es sobrio si y sólo si existe $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo tal que $\mathcal{A} \neq \overline{\{H\}}$ para toda $H \in CL(X)$. □

Sea $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo. Para todo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ definimos:

$$T_{\mathcal{B}} = \overline{\bigcup_{H \in \mathcal{B}} H}.$$

Proposición 2.3.14. *Sea $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo. Para todo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $T_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}$. Además $T_{\mathcal{B}} \notin \overline{\{H\}}$ para toda $H \in \mathcal{B} \setminus \{T_{\mathcal{B}}\}$.*

Demostración. Nótese que $T_{\mathcal{B}} \in CL(X)$. Sea $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ tal que $T_{\mathcal{B}} \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$. Entonces $T_{\mathcal{B}} \subset U$ donde $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $T_{\mathcal{B}} \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$. Así para toda $1 \leq i \leq n$, existe $K_i \in \mathcal{A}$ tal que $U_i \cap K_i \neq \emptyset$. Entonces $K_i \in \langle U, U_i \rangle$ para toda $1 \leq i \leq n$. Al ser $\mathcal{A}$ hiperconexo y cada $\langle U, U_i \rangle \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, $\langle U, U_i \rangle \cap \mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{A}$ y por lo tanto, $(\bigcap_{i=1}^{n} \langle U, U_i \rangle) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, es decir, existe $K \in \mathcal{A}$ tal que $K \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$ y $K \subset U$, así $K \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$ y por ello $\langle U_1, ..., U_n \rangle \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $T_{\mathcal{B}} \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Supongamos que existe $K \in \mathcal{B}$ tal que $T_{\mathcal{B}} \in \overline{\{K\}}$. Notemos que si $U \subset X$ es un subconjunto abierto de X y $T_{\mathcal{B}} \in \langle X, U \rangle$ entonces $K \in \langle X, U \rangle$. Supongamos que $K \subsetneq T_{\mathcal{B}}$ entonces $T_{\mathcal{B}} \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.3.15. *Sea X un espacio topológico. El hiperespacio $CL(X)$ no es sobrio si y sólo si existe $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo tal que para algún $H \in \mathcal{A}$ existe $x \in \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{A}} K}$ tal que $H \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$.*

Demostración. Si $CL(X)$ es un hiperespacio no sobrio, por el Corolario 2.3.13 existe $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo tal que $\mathcal{A} \neq \overline{\{K\}}$ para todo $K \in CL(X)$. Por Proposición 2.3.14, $T_{\mathcal{A}} = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{A}} K} \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A} \neq \overline{\{T_{\mathcal{A}}\}}$, existe $H \in \mathcal{A}$ tal que $H \notin \overline{\{T_{\mathcal{A}}\}}$. Dado que para todo abierto $U \subset X$ tal que $H \cap U \neq \emptyset$, $T_{\mathcal{A}} \cap U \neq \emptyset$, entonces existe V abierto tal que $H \subset V$ y $T_{\mathcal{A}} \nsubseteq V$, es decir, existe $x \in T_{\mathcal{A}}$ tal que $x \notin V$. Así para toda $y \in H$, $y \notin \overline{\{x\}}$. Por lo tanto, $H \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$.

Por otro lado, supongamos que existe $\mathcal{A} \subseteq CL(X)$ un conjunto cerrado hiperconexo tal que para algún $H \in \mathcal{A}$ existe $x \in \overline{\bigcup_{K\in\mathcal{A}} K}$ tal que $H \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$. Para cualquier $K \in \mathcal{A} \setminus \{T_{\mathcal{A}}\}$, por la Proposición 2.3.14, $T_{\mathcal{A}} \notin \overline{\{K\}}$, así $\mathcal{A} \neq \overline{\{K\}}$. Como existe $H \in \mathcal{A}$ para la que existe $x \in \overline{\bigcup_{K\in\mathcal{A}} K}$ y $H \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$, entonces $H \in \langle X \setminus \overline{\{x\}}\rangle$ y $T_{\mathcal{A}} \notin \langle X \setminus \overline{\{x\}}\rangle$, es decir, $H \notin \overline{\{T_{\mathcal{A}}\}}$. Así $\mathcal{A} \neq \overline{\{K\}}$ para toda $K \in \mathcal{A}$, más aún, $\mathcal{A} \neq \overline{\{K\}}$ para toda $K \in CL(X)$. Por lo tanto, $CL(X)$ no es sobrio. □

2.4. Axiomas de separación en hiperespacios

Observación 2.4.1. *Sea X un espacio $T_{\frac{1}{2}}(T_{\frac{3}{4}})$. Entonces $CL(X)$ no necesariamente es $T_{\frac{1}{2}}(T_{\frac{3}{4}})$. Basta observar que los espacios $(X, \mathcal{I}(x))$, $(X, \mathcal{E}(x))$ cumplen axiomas de separacíon que sus respectivos hiperespacios no cumplen.*

Proposición 2.4.2. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces $CL(X)$ es T_1.*

Demostración. Sean H y K dos subconjuntos cerrados no vacíos distintos de X. Mostraremos que existen U, V abiertos en $CL(X)$ tales que $H \in U$, $K \in V$, $H \notin V$ y $K \notin U$. Consideremos tres casos:

1. Si $H \cap K = \emptyset$ entonces $H \in \langle X \setminus K\rangle$ y $K \in \langle X \setminus H\rangle$.

2. Si $H \cap K \neq \emptyset$, $H \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq H$ entonces $H \in \langle X, X \setminus K\rangle$ y $K \in \langle X, X \setminus H\rangle$.

3. Si $H \subset K$ entonces $K \in \langle X, X \setminus H\rangle$.
   Como $H \subset K$ entonces existe $x \in K$ tal que $x \notin H$. Para cada $y \in H$ existe U_y abierto tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$, pues X es T_1. Así $H \subset \bigcup_{y\in H} U_y$ y $x \notin \bigcup_{y\in H} U_y$. Entonces $H \in \langle \bigcup_{y\in H} U_y\rangle$.

Por lo tanto, $CL(X)$ es T_1. □

Existen espacios topológicos con axiomas de separación bajos cuyos hiperespacios con la topología de Vietoris no cumplen los mismos axiomas de separación, algunos ejemplos de estos son los espacios topológicos vistos en la Sección 2.3.1.

Ejemplo 2.4.3. *Sea (X, τ) el espacio de Sierpinski donde $X = \{x, y\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Notemos que X es un espacio exactamente $T_{\frac{1}{2}}$. Por otro lado, $CL(X) = \{\{y\}, X\}$ y $\tau_V = \{\emptyset, \{X\}, CL(X)\}$, es decir, $(CL(X), \tau_V)$ es homeomorfo al espacio de Sierpinski y por lo tanto, un espacio exactamente $T_{\frac{1}{2}}$.*

Proposición 2.4.4. *Si X es un espacio topológico tal que $CL(X)$ no es T_1, entonces existen dos subconjuntos cerrados H y K no vacíos de X tales que $H \in \overline{\{K\}}$ y más aún, $H \subsetneq K$.*

Demostración. Al ser $CL(X)$ un espacio no T_1 existen $H, K \in CL(X)$ tales que, sin pérdida de generalidad, se tiene:

1. Para todo U abierto en X tal que $H \subset U$, entonces $K \subset U$.

2. Para todo U abierto en X tal que $H \cap U \neq \emptyset$, entonces $K \cap U \neq \emptyset$.

Entonces $H \in \overline{\{K\}}$. De (2) notamos que $H \cap (X \setminus K) = \emptyset$. Por lo tanto, $H \subset K$. $\square$

Teorema 2.4.5. *Sea X un espacio topológico y $CL(X)$ un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ pero no T_1. Entonces existen U subconjunto abierto de X y K_0 subconjunto cerrado no vacío de X tales que $K_0 \subsetneq U$ para los cuales existe un único K subconjunto cerrado no vacío de X de que cumple $K_0 \subsetneq K \subseteq U$ y que para todo V subconjunto abierto de X que contiene a K_0, $K \subset V$.*

Demostración. Como $CL(X)$ no es un espacio T_1, de la Proposición 2.4.4, existen H_0 y K subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $H_0 \in \overline{\{K\}}$ y $H_0 \subsetneq K$. Al ser $CL(X)$ un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ y $\{K\}$ un conjunto no cerrado, entonces $\{K\}$ es un subconjunto abierto de $CL(X)$. Al ser un punto aislado existen $U_1, ..., U_n$ abiertos en X tales que $\langle U_1, ..., U_n \rangle = \{K\}$. Como $H_0 \subset K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, existe $1 \leq j_1 \leq n$ tal que $H_0 \cap U_{j_1} = \emptyset$.
Sea $K_1 = (X \setminus U_{j_1}) \cap K$, como $K \cap U_{j_1} \neq \emptyset$, $K_1 \subsetneq K$. Notemos que si existe $H_1 \in CL(X)$ tal que $K_1 \subsetneq H_1 \subsetneq K$, entonces $H_1 \cap U_{j_1} \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $1 \leq j_2 \leq n$, $j_1 \neq j_2$, tal que $H_1 \cap U_{j_2} = \emptyset$ y hacemos $K_2 = (X \setminus U_{j_2}) \cap K$. De manera análoga y finita podemos llegar a K_0 el cerrado más grande contenido propiamente en K.
Por otro lado, sea $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, supongamos que existe $H \in CL(X)$ tal que $H \subset U$ pero $H \nsubseteq K$. Entonces $K \cup H \subset U$ y $(K \cup H) \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq n$, por lo tanto, $(K \cup H) \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$, sin embargo

$\langle U_1, ..., U_n\rangle = \{K\}$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, K es el único conjunto cerrado tal que $K_0 \subsetneq K \subset U$.

Finalmente, supongamos que existe V un abierto en X tal que $K_0 \subseteq V$ y $K \nsubseteq V$, entonces $F = K \cap (X \setminus V)$ es un cerrado no vacío en X, por construcción $K_0 \in \langle X \setminus F\rangle$ y $K \notin \langle X \setminus F\rangle$. Lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.4.6. *Sea X un espacio topológico tal que $CL(X)$ un espacio $T_{\frac{3}{4}}$ pero no T_1. Entonces existen U subconjunto abierto de X y K_0 subconjunto cerrado no vacío de X tal que $K_0 \subsetneq U$ para los cuales existe un único K cerrado no vacío que cumple $K_0 \subsetneq K \subseteq U$ y que para todo V subconjunto abierto de X que contiene a K_0, $K \subset V$. Además para todo V subconjunto abierto de X, si $K_0 \setminus V \neq \emptyset$ y $K_0 \cap V \neq \emptyset$ entonces existen $K_V \subsetneq K_0$ cerrado tal que $K_V \cap V \neq \emptyset$ y W_V abierto tal que $K_V \subseteq W_V$ pero $K_0 \nsubseteq W_V$.*

Demostración. La existencia de U, K y K_0 tales que $K_0 \subsetneq K \subseteq U$ son consecuencia directa del Teorema 2.4.5, sin embargo, al ser $CL(X)$ un espacio $T_{\frac{3}{4}}$, $\{K\}$ es un abierto regular, es decir, $\{K\} =\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\{K\}))$.
Supongamos que para todo abierto V en X tal que $K_0 \cap V \neq \emptyset$ y $K_0 \nsubseteq V$ no existen $K_V \subsetneq K_0$ cerrado tal que $K_V \cap V \neq \emptyset$ y W_V abierto tal que $K_V \subseteq W_V$ pero $K_0 \nsubseteq W_V$.
Sea V un abierto en X tal que $K_0 \cap V \neq \emptyset$ y $K_0 \nsubseteq V$. Si $H \in \langle U, (V \cap U)\rangle$ tal que $K_0 \neq H \neq K$, entonces $H \subsetneq K_0$ y para todo W abierto tal que $H \subseteq W$, $K_0 \subseteq W$ y por lo tanto, $K \subseteq W$.
Así $H \in \overline{\{K\}}$ y $K_0 \in \langle U, (V \cap U)\rangle \subseteq \overline{\{K\}}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, para todo V subconjunto abierto de X, si $K_0 \nsubseteq V$ y $K_0 \cap V \neq \emptyset$ entonces existen $K_V \subsetneq K_0$ cerrado tal que $K_V \cap V \neq \emptyset$ y W_V abierto tal que $K_V \subseteq W_V$ pero $K_0 \nsubseteq W_V$. □

2.5. Funciones continuas

Proposición 2.5.1. *Sean X un espacio hiperconexo, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Entonces Y es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos en Y, por continuidad y suprayectividad de f, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos en X, por lo que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Así $f(x) \in U$ y $f(x) \in V$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, Y es hiperconexo. □

Proposición 2.5.2. *Sean X un espacio hiperconexo, Y un espacio topológico y $f : Y \to X$ continua, inyectiva y abierta. Entonces Y es hiperconexo.*

Demostración. Sean U y V dos abiertos no vacíos en Y, entonces $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos no vacíos en X, así $f(U) \cap f(V) \neq \emptyset$. Sea $x \in f(U) \cap f(V)$, entonces $f^{-1}(x) \in U \cap V$. Por lo tanto, Y es hiperconexo. □

Proposición 2.5.3. *Sean X un espacio anti-compacto, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces Y es anti-compacto.*

Demostración. Sea $A \subset Y$ infinito. Mostraremos que existe una cubierta abierta de A que no tiene subcubiertas finitas.
Al ser A infinito, $f^{-1}(A)$ es infinito, por lo cual $f^{-1}(A)$ no es compacto, es decir, existe una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubre a $f^{-1}(A)$ tal que no contiene subcubiertas finitas que cubren a $f^{-1}(A)$. Así $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de A. Supongamos que existen $U_1, ..., U_n \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tales que $\{f(U_i)\}_{i=1}^n$ es una cubierta de A, entonces $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una cubierta finita para $f^{-1}(A)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Y es anti-compacto. □

Proposición 2.5.4. *Sean X un espacio puerta, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función abierta, cerrada y sobreyectiva. Entonces Y es puerta.*

Demostración. Sea $A \subset Y$, al ser X un espacio puerta, $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto o cerrado de X. Como f es una función abierta y cerrada, A es un subconjunto abierto o cerrado de Y. Por lo tanto, Y es puerta. □

Conclusiones

Como conclusión se prueba cierta la hipótesis planteada por la presente Tesis. Propiedades tales como hiperconexidad, anti-compacidad y, principalmente, sobriedad no pueden ser preservadas al hablar de espacios o hiperespacios que cuentan con ellas. Las relaciones entre un espacio y sus hiperespacios en términos de una de estas propiedades se tornan muy dependientes de las topologías que las dotan de ellas. De igual modo, al estudiar un hiperespacio no metrizable podemos observar que el comportamiento en el espacio original da indicios de topologías muy específicas. Sin embargo, del presente trabajo se derivan las siguientes preguntas:

Pregunta 2.5.5. *¿Qué relación existe entre el hiperespacio de un espacio sobrio y su reflejo de soberificación?*

Pregunta 2.5.6. *¿Qué propiedades de un espacio no métrico pueden ser preservadas de tal modo que se pueda estudiar dicha propiedad del mismo modo en el espacio que en su hiperespacio?*

Bibliografía

1 J. Dontchev, M Ganster, G. J. Kennedy and S. D. McCartan, *On minimal door, minimal anti-compact and minimal $T_{\frac{3}{4}}$-spaces*, Mathematical Proceeding of the Royal Irish Academy 98A (1998), 209-215.

2 J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1967.

3 A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1999.

4 P. Johnstone, *The point of pointless topology*, Bull. Amer. Math. Soc (N.S.) 8, (1983), 41-53.

5 K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, Acad. Press, New York, N.Y., 1966.

6 K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Acad. Press, New York, N.Y., 1968.

7 G. Mazzola, *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, Birkhäuser, 2002.

8 E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

9 J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2ed, España, 2000.

10 S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1978.

11 A. K. Steiner, *The Lattice of Topologies: Structure and Complementation*, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 379-398.