ANEXO
Trigonometría

Sebastián I. Besteiro y Héctor A. Salgado

La Trigonometría trata de las mediciones de partes o elementos de 1 triángulo.

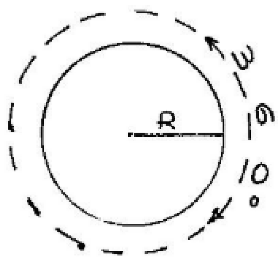
Trigonometría Plana

Se refiere a triángulos contenidos en los planos.

Medida de ángulos

a) Grado (°): ángulo central subtendido por 1 arco = 1/360 de circunferencia.

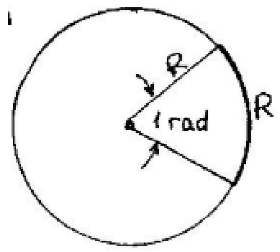
$$\mathbf{2.\pi.R = 360°}$$



b) Radián (rad): ángulo central subtendido por 1 arco cuya longitud es = al radio de la circunferencia.

$$\mathbf{360° = 2\,.\,\pi\,.\,radián}$$

$$\mathbf{1\,rad = \frac{360°}{2\,.\,\pi}}$$



c) Mil: ángulo central subtendido x un arco = 1/6400 de circunferencia.

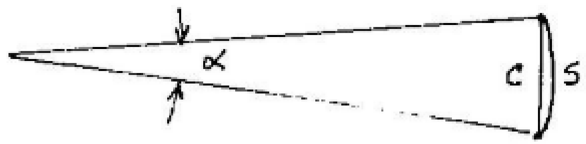
$$\mathbf{1\ mil\ \cong \frac{1}{1000}\ radián}$$

$$\mathbf{360° = 6400\ miles}$$

$$\mathbf{1° = \frac{160}{1000}\ miles}$$

Para ángulos pequeños la longitud de arco (s) es ≅ a la cuerda (c).

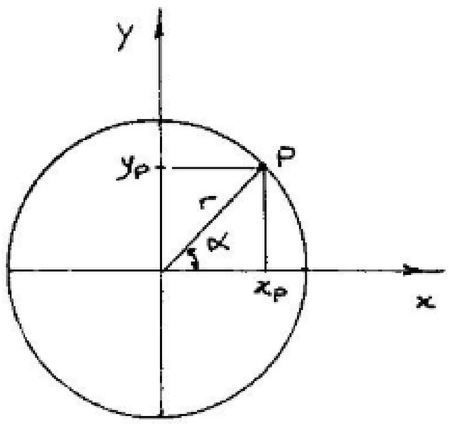
$$\hat{\alpha}_{rad} = \frac{s}{r} \cong \frac{c}{r}$$



Funciones Trigonométricas

- Sistema de coordenadas cartesianas: Consiste en 2 escalas (ejes), cuya intersección (origen) es el origen de cada escala. Corrientemente se eligen ejes perpendiculares entre sí (coordenadas **cartesianas ortogonales**).

Cada punto P queda representado por un par de valores (x y) medibles sobre los ejes.



$$sen \propto = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r}$$

$$cos \propto = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

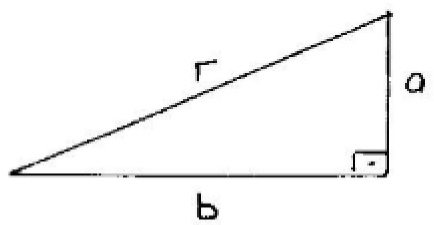
$$tg \propto = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{y}{x}$$

- Cuadrantes:

Función	Cuadrantes							
	0°	I	90°	II	180°	III	270°	IV
Seno	0	+	1	+	0	-	-1	-
Coseno	1	+	0	-	-1	-	0	+
Tangente	0	+	∞	-	0	+	-∞	-

- Pitágoras (Teorema):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$



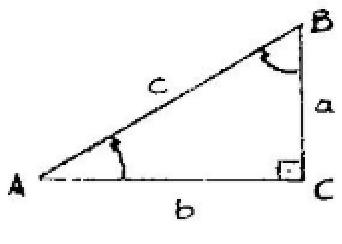
- Funciones inversas:

$$sen \propto \rightarrow\ cosec \propto = \frac{1}{sen \propto}$$

$$cos \propto \rightarrow\ sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$$

$$tg \propto \rightarrow cotg \propto = \frac{1}{tg \propto}$$

- Funciones trigonométricas de ángulos complementarios:



B̂ es complementario de $\hat{A}$

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} = cos\,\hat{A}$$

$$cos\,\hat{B} = \frac{a}{c} = sen\,\hat{A}$$

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{a} = ctg\,\hat{A}$$

- Cifras significativas: sean, por ejemplo, 2 números: 35 y 35,0. Ambos números (35 y 35,0) no expresan la = medición

35 m → 2 cifras idem → 3,5; 0,35; 0,035

35,0 → 3 cifras idem → 3,50; 0,350

Un resultado no debe exceder las cifras decimales de los factores que intervienen en la medición. Por consiguiente:

Para conservar la coherencia entre mediciones angulares y lineales es importante.

Distancias medidas con 2 cifras significativas → Ángulos expresados al 1°
Distancias medidas con 3 cifras significativas → Ángulos expresados a 10´
Distancias medidas con 4 cifras significativas → Ángulos expresados a 1´
Distancias medidas con 5 cifras significativas → Ángulos expresados a 0,1´

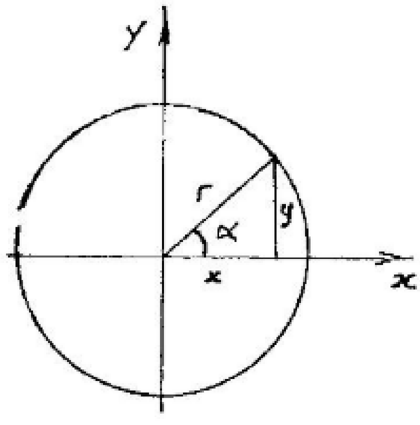
Relaciones fundamentales

- Relaciones por cociente

$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} \quad ; \quad ctg \propto = \frac{cos \propto}{sen \propto}$$

- Relaciones pitagóricas

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (A) \quad , donde: \quad x = r\,.\,cos\,\alpha \quad ; \quad y = r\,.\,sen\,\alpha$$



1- Dividiendo **(A)** por r^2:

$$\frac{r^2.cos^2 \propto}{r^2} + \frac{r^2.sen^2 \propto}{r^2} = cos^2 \propto + sen^2 \propto = 1$$

$$cos^2 \propto + sen^2 \propto = 1$$

2- Dividiendo **(A)** por x^2:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\therefore \quad 1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto} \quad \text{ó} \quad 1 + tg^2 \propto = sec^2 \propto$$

2- De idéntico modo:

$$1 + ctg^2 \propto = cosec^2 \propto$$

Funciones trigonométricas de 2 ángulos

- Fórmulas para la suma:

$$sen(\propto + \beta) = sen \propto . cos\beta + cos \propto . sen\beta$$

$$cos(\propto + \beta) = cos \propto . cos\beta - sen \propto . sen\beta$$

$$tg(\propto + \beta) = \frac{tg \propto + tg\beta}{1 - tg \propto . tg\beta}$$

- Fórmulas para la diferencia:

$$sen(\propto - \beta) = sen \propto . cos\beta - cos \propto . sen\beta$$

$$cos(\propto - \beta) = cos \propto . cos\beta + sen \propto . sen\beta$$

$$tg(\propto - \beta) = \frac{tg \propto - tg\beta}{1 + tg \propto . tg\beta}$$

- Fórmulas para el ángulo duplo:

$$sen\ 2 \propto = 2\ sen \propto . cos \propto$$

$$cos\ 2 \propto = cos^2 \propto - sen^2 \propto = 1 - 2\ sen^2 \propto = 2\ cos^2 \propto - 1$$

$$tg\ 2 \propto = \frac{2 . tg \propto}{1 - tg^2 \propto}$$

- Productos de senos y cosenos:

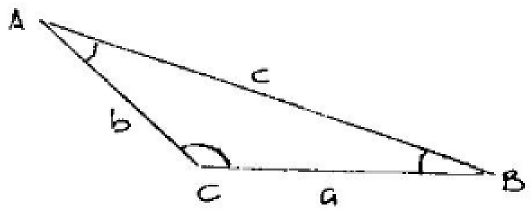
$$sen \propto . cos\beta = \frac{1}{2}\ [sen(\propto + \beta) + sen(\propto - \beta)]$$

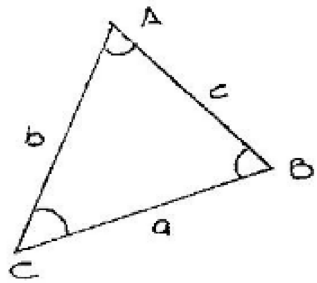
$$cos \propto . cos\beta = \frac{1}{2}\ [cos(\propto + \beta) + cos(\propto - \beta)]$$

$$sen \propto . sen\beta = \frac{1}{2}\ [cos(\propto + \beta) - cos(\propto - \beta)]$$

Resoluciones de triángulos oblicuos

- Triángulo oblicuángulo es aquél que no tiene ningún ángulo recto:





Un triángulo queda determinado cuando se conocen 3 cualesquiera de sus elementos, excepto cuando son 3 ángulos.

- Ley del seno:

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}}$$

- Ley del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\,cos\,\widehat{A}$$

Cálculo de superficies y circunferencias

- Superficie

a- Dados 2 ángulos y 1 lado:

$$S = \frac{a^2\,.\,sen\,\widehat{B}\,.\,sen\,\widehat{C}}{2\,sen\,\widehat{A}} = \frac{b^2\,.\,sen\,\widehat{C}\,.\,sen\,\widehat{A}}{2\,sen\,\widehat{B}} = \frac{c^2\,.\,sen\,\widehat{A}\,.\,sen\,\widehat{B}}{2\,sen\,\widehat{C}}$$

b- Dados 2 lados y el ángulo comprendido:

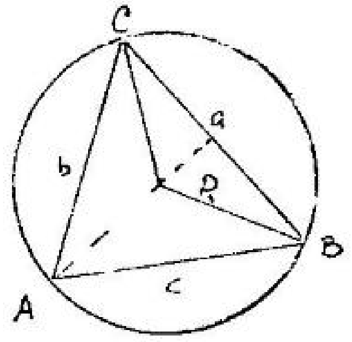
$$S = \frac{1}{2}\,.\,b\,.\,c\,.\,sen\,\widehat{A} = \frac{1}{2}\,.\,a\,.\,c\,.\,sen\,\widehat{B} = \frac{1}{2}\,.\,b\,.\,a\,.\,sen\,\widehat{C}$$

c- Dados los tres lados:

$$S = \sqrt{n\,.\,(n-a)\,.\,(n-b)\,.\,(n-c)} \qquad ,donde: \qquad n = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$$

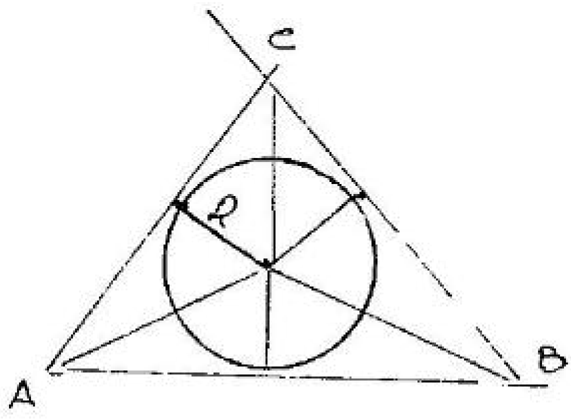
- Radio de la circunferencia circunscripta:

$$R = \frac{a}{2\,sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{2\,sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{2\,sen\,\widehat{C}}$$



- Radio de la circunferencia inscripta:

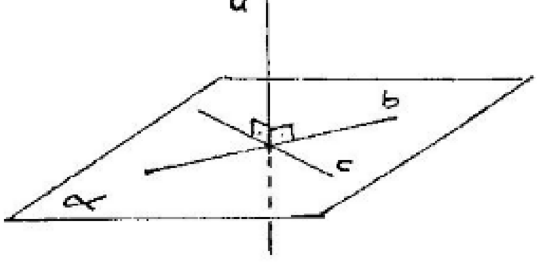
$$\boldsymbol{R = \sqrt{\frac{(n-a)\,.\,(n-b)\,.\,(n-c)}{n}}} \qquad \boldsymbol{,donde}: \qquad \boldsymbol{n = \frac{1}{2}\,(a+b+c)}$$



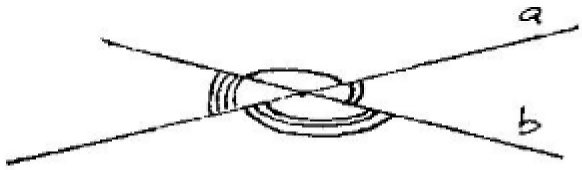
Trigonometría Espacial

Conceptos sobre geometría del espacio

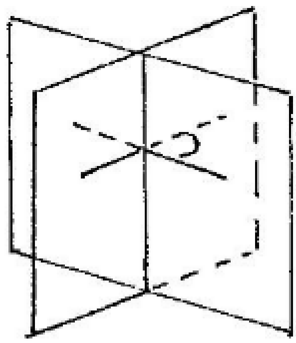
a) Una recta es perpendicular al plano si, al cortar al plano, es perpendicular a por lo menos 2 rectas secantes en el punto intersección de la recta y el plano.



b) Cuando 2 rectas tienen 1 solo punto común, determinan 4 ángulos planos.



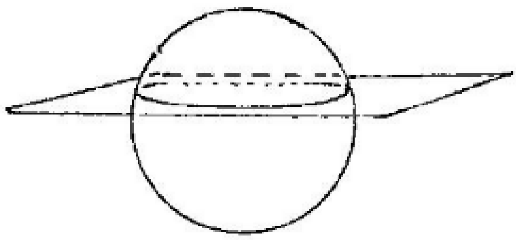
c) Cuando 2 planos tienen una sola recta común, determinan 4 ángulos diedros.



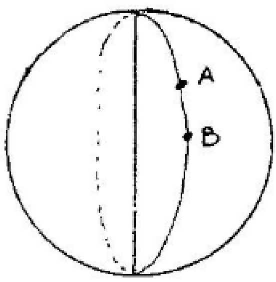
La recta intersección (arista)

El ángulo plano formado por 2 rectas, que pertenecen a caras ≠ de un ángulo diedro y que son perpendiculares a la arista, es el ángulo plano del ángulo diedro.

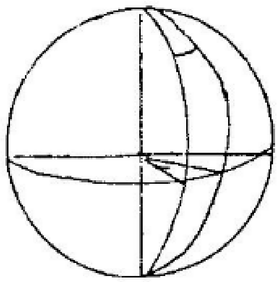
d) La intersección de 1 plano y 1 esfera es una circunferencia. Se llama circunferencia máxima si el plano secante pasa por el centro de la esfera.



e) Dados 2 puntos A y B sobre 1 esfera, el arco de la circunferencia máxima que los une es la menor distancia que puede trazarse sobre la esfera entre A y B.

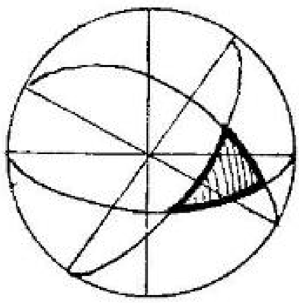


f) El ángulo formado en 1 esfera por 2 arcos secantes de circunferencias máximas se llama ángulo esférico.



Triángulo esférico

Es la superficie de una esfera limitada por 3 arcos de circunferencia máxima. Los arcos son los lados del triángulo esférico, y los vértices de los 3 ángulos esféricos son los vértices del triángulo esférico.



Fórmulas fundamentales

Coseno:

$$\cos \boldsymbol{a} = \cos \boldsymbol{b} \,.\, \cos \boldsymbol{c} + \boldsymbol{sen\ b} \,.\, \boldsymbol{sen\ c} \,.\, \cos \widehat{\boldsymbol{A}}$$

Seno:

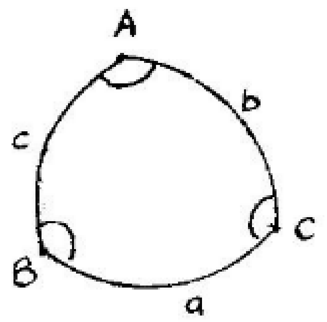
$$\frac{\boldsymbol{sen\ a}}{\boldsymbol{sen\ \widehat{A}}} = \frac{\boldsymbol{sen\ b}}{\boldsymbol{sen\ \widehat{B}}} = \frac{\boldsymbol{sen\ c}}{\boldsymbol{sen\ \widehat{C}}}$$

Cotangente:

$$\cos \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{cos}\ \widehat{\boldsymbol{C}} = \mathbf{sen\ a} \,.\, \mathbf{ctg\ b} - \mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{C}} \,.\, \mathbf{ctg}\ \widehat{\mathbf{B}}$$

En general:

- lado b = lado extremo
- ángulo B = ángulo extremo
- lado a = lado medio
- ángulo C = ángulo medio

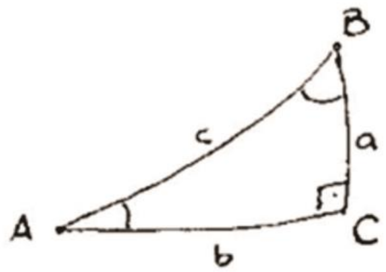


cos (   ) . cos (   ) = sen (   ) . ctg (   ) – sen (   ) . ctg (   )

lado medio | elementos medios | el otro lado | el otro ángulo | ángulo medio

Triángulo esférico rectángulo

Es el triángulo esférico tal que uno de sus ángulos es recto. En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, en el cual el $\hat{C}$ es recto se cumple:



$\boldsymbol{sen\ a = sen\ \hat{A}\ .\ sen\ c}$	$\boldsymbol{sen\ b = sen\ \hat{B}\ .\ sen\ c}$
$\boldsymbol{tg\ a = tg\ \hat{A}\ .\ sen\ b}$	$\boldsymbol{tg\ b = tg\ \hat{B}\ .\ sen\ a}$
$\boldsymbol{tg\ a = cos\ \hat{B}\ .\ tg\ c}$	$\boldsymbol{tg\ b = cos\ \hat{A}\ .\ tg\ c}$
$\boldsymbol{cos\ c = cos\ b\ .\ cos\ a}$	$\boldsymbol{cos\ c = ctg\ \hat{A}\ .\ ctg\ \hat{B}}$
$\boldsymbol{cos\ \hat{A} = sen\ \hat{B}\ .\ cos\ a}$	$\boldsymbol{cos\ B = sen\ \hat{A}\ .\ cos\ b}$

Referencias

Ayres, F. B. (1970). Teoría y problemas de trigonometría: plana y esférica (No. 514.116 AYR).
Virgile, L. (1971). Astronomía Náutica. Tomo I. Escuela Naval Militar Río Santiago, Argentina.