DETERMINANTES FUNCIONALES EN REGIONES CON BORDES

H.Falomir E.M.Santangelo
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, C.C.67, 1900 La Plata.

Se estudian determinantes funcionales que surgen al cuantificar teorías de campos definidos sobre variedades con bordes, haciendo uso de métodos desarrollados por R.Forman para la evaluación de cocientes de determinantes de operadores diferenciales con diferentes condiciones de contorno, regularizados por el método de la ζ de Riemann. Se analiza el caso de condiciones de contorno locales del tipo que caracteriza a las bolsas quirales.

INTRODUCCION

Presentamos en este trabajo una aplicación física, de interés en Teoría de Campos y Mecánica Estadística, del método debido a R.Forman para el cálculo de determinantes funcionales en regiones con bordes [1]. A diferencia de otros métodos, que requieren el conocimiento de las funciones de Green que satisfacen las condiciones de contorno consideradas [2], éste permite calcular cocientes de determinantes con diferentes condiciones de contorno regularizados con la ζ de Riemann, a partir de los valores de borde de funciones en el núcleo del operador (es decir, soluciones de una ecuación diferencial homogénea), subespacio independiente de las condiciones de contorno.

La aplicación física en cuestión es al problema de las llamadas bolsas quirales, utilizadas como modelo fenomenológico para el confinamiento de quarks. En estos modelos, se tiene una teoría de fermiones no interactuantes, confinados al interior de una región (bolsa) del espacio-tiempo, acoplados en el borde con un campo externo a través de condiciones de contorno que garantizan la conservación de la corriente quiral (condiciones de contorno quirales) [3].

CALCULO DE LA ENERGIA LIBRE PARA CONDICIONES DE CONTORNOS ESTATICAS

En primer lugar, estudiaremos la energía libre de un sistema de fermiones de Dirac sin masa, a temperatura finita, confinados en una bolsa Euclídea bidimensional $\Omega : [0,\beta] \otimes [0,L]$ y acoplados en los bordes "espaciales" con un campo bosónico externo estático $\varphi_\alpha (\alpha = 0,L)$.

Como es sabido, la función de partición de esta teoría está dada por:

$$Z \sim Det(i\partial)_{BU^{-1}} \tag{1}$$

donde $(i\partial)_{BU^{-1}}$ es el operador de Dirac definido sobre funciones que satisfacen:

$$\begin{aligned} \psi(\beta,x_1) &= -\psi(0,x_1) \\ B_\alpha U_\alpha^{-1}\psi(x_0,\alpha) &= 0, \quad \alpha = 0,L. \end{aligned} \tag{2}$$

Aquí $B_\alpha = (1-n(\alpha))/2$, con $n(L) = -n(0) = \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $U_\alpha = \exp(\gamma_5 \varphi_\alpha)$, φ_0 y φ_L son los valores que toma el campo externo en $x_1 = 0$ y L respectivamente. Es fácil verificar que el problema de valores de borde definido por $(i\partial)_{BU^{-1}}$ es no singular (es decir $i\partial\psi = 0$ para ψ que satisface la ecuación (2) implica $\psi = 0$).

Con el fin de aplicar el método de Forman [1], introducimos un parámetro auxiliar μ, llamando:

$$U_\alpha(\mu) = \exp(\mu\gamma_5\varphi_\alpha) \tag{3}$$

Bajo ciertas condiciones sobre el operador [1] (que se satisfacen en el problema considerado), un teorema de Forman permite escribir

$$\frac{d}{d\mu}\log\left(\frac{Det(i\partial)_{BU^{-1}(\mu+\tau)}}{Det(i\partial)_{BU^{-1}(\mu)}}\right) = \frac{d}{d\mu}\log Det\, \Phi_\mu(\tau), \tag{4}$$

o bien, integrando en μ:

$$\frac{Z(\mu+\tau)}{Z(\mu)}=\frac{Det(i\partial)_{BU^{-1}(\mu+\tau)}}{Det(i\partial)_{BU^{-1}(\mu)}}=C(\tau)Det\Phi_\mu(\tau), \quad (5)$$

donde se ve que la evaluación de $F_\mu(\tau)$ y $C(\tau)$ nos permitirá obtener la función de partición (tomando $\mu = 0$ y $\tau = 1$) y, por lo tanto, la energía libre de una bolsa quiral comparada con la de una bolsa no quiral (correción a la energía libre de los fermiones debida a su acoplamiento con φ_0 y φ_L en los bordes).

En la ecuación 4 los determinantes a la izquierda son determinantes regularizados por el método de la ζ de Riemann, mientras que el de la derecha es el determinante del operador de Forman, que actúa sobre funciones en el borde, y está definido como se explica a continuación.

Dada una función $T\psi(x_0,x_1)$ en el núcleo del operador, llamaremos $\psi(x_0,\alpha)$ a su valor en el punto α del borde, y $h_\mu(x_0,\alpha)$ a su proyección con $BU^{-1}(\mu)$; entonces:

$$h_\mu(x_0) = \begin{pmatrix} h_\mu(x_0,0) \\ h_\mu(x_0,L) \end{pmatrix} =1/2\begin{pmatrix}(1,1)U_0^{-1}(\mu)\psi(x_0,0) \\ (1,-1)U_0^{-1}(\mu)\psi(x_0,L)\end{pmatrix} \quad (6)$$

El operador de Forman relaciona las proyecciones de una misma función en los subespacios que corresponden a ambos tipos de condiciones de contorno de la siguiente manera:

$$h_{\mu+\tau}(x_0) = \Phi_\mu(\tau)h_\mu(x_0) \quad (7)$$

Por lo tanto, a fin de evaluar $\Phi_\mu(\tau)$, debemos elegir una base en el núcleo de $i\partial$, y determinar a partir de 7 la acción de $\Phi_\mu(\tau)$ sobre un conjunto completo de funciones en el borde. Nótese que las funciones de dicha base no necesitan satisfacer nhnguna condición de contorno particular. Por conveniencia en el cálculo, elegimos una base compuesta por dos tipos de funciones $\{\psi_n(x_0,x_1), \chi_n(x_0,x_1)\}$, ambas antiperiódicas en la dirección ''temporal'' y cada una de las cuales satisface sólo una de las condiciones de contorno en dirección ''espacial'':

$$\psi_n(x_0,x_1) = \exp[i\omega_n(x_0 - i\gamma_5 x_1)]U_0(\mu)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$x_n(x_0,x_1) = \exp[i\omega_n(x_0 - i\gamma_5(x_1-L))]U_L(\mu)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde wn $= (2n + 1)\pi/\beta$, con $n \in Z$, y

$$B_0U_0\text{-}1(\mu)\psi_n(x_0,0) = 0$$

$$B_LU_L^{-1}(\mu)\chi_n(x_0,L) = 0. \quad (9)$$

Las proyecciones de sus valores de borde con $B_\alpha U_\alpha^{-1}(\mu+\tau)$ están dadas por:

$$h^n_{\mu+\tau}(x_0) = 1/2 \begin{pmatrix} (1,1)U_0^{-1}(\mu+\tau)\psi_n(x_0,0) \\ (1,-1)U_L^{-1}(\mu+\tau)\psi_n(x_0,L)\end{pmatrix}$$

$$= \exp(i\omega_n x_0)\begin{pmatrix} -\sinh(\tau\varphi_0) \\ \cosh(\omega_n L-\mu\varphi_- -\tau\varphi_L)\end{pmatrix}$$

$$k^n_{\mu+\tau}(x_0) = 1/2 \begin{pmatrix} (1,1)U_0^{-1}(\mu+\tau)\chi_n(x_0,0) \\ (1,-1)U_L^{-1}(\mu+\tau)\chi_n(x_0,L)\end{pmatrix}$$

$$= \exp(i\omega_n x_0)\begin{pmatrix} \cosh(\omega_n L-\mu\varphi_- +\tau\varphi_0) \\ -\sinh(\tau\varphi_L)\end{pmatrix}, \quad (10)$$

donde $\varphi_- = \varphi L\text{-}\varphi_0$. De las ecuaciones

$$h^n_{\mu-\tau}(x_0) = \Phi_\mu(\tau)h^n_\mu(x_0)$$

$$k^n_{\mu-\tau}(x_0) = \Phi_\mu(\tau)k^n_\mu(x_0) \quad (11)$$

puede determinarse la acción de $\Phi_\mu(\tau)$ sobre la base en el borde

$$\{\exp(i\omega_n x_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \exp(i\omega_n x_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$$

y es fácil ver que los subespacios correspondientes a frecuencias ω_n dadas son invariantes, resultando en cada uno de ellos:

$$[\Phi_\mu(\tau)]_n = \frac{1}{\cosh(\omega_n L-\mu\varphi_-)}$$

$$\begin{pmatrix} \cosh(\omega_n L - \mu\varphi_- + \tau\varphi_0) & -\sinh(\tau\varphi_0) \\ -\sinh(\tau\varphi_L) & \cosh(\omega_n L - \mu\varphi_- + \tau\varphi_L)\end{pmatrix}, \quad (12)$$

de modo que :

$$det\,[\Phi_\mu(\tau)]_n = \frac{\cosh[\omega_n L - (\mu+\tau)\varphi_-]}{\cosh[\omega_n L - \mu\varphi_-]} \quad (13)$$

Definimos:

$$Det\,\Phi_\mu(\tau) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=-N-1}^{N} det\,[\Phi_\mu(\tau)]_n =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+2\exp(-2\omega_n L)\cosh[2(\mu+\tau)\varphi_-]+\exp(-4\omega_n L)}{1+2\exp(-2\omega_n L)\cosh(2\mu\varphi_-)+\exp(-4\omega_n L)} \quad (14)$$

Nos interesa la función de partición para valores del campo φ en el espacio de Minkowski, razón por la cual efectuamos el cambio $\varphi_\alpha^{(E)} = i\varphi_\alpha^{(M)}$, con lo cual obtenemos:

$$\frac{Z(\mu+\tau)}{Z(\mu)} = \tag{15}$$

$$= C(\tau)\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+2\exp(-2\omega_n L)\cosh[2(\mu+\tau)\varphi_-]+\exp(-4\omega_n L)}{1+2\exp(-2\omega_n L)\cosh(2\mu\varphi_-)+\exp(-4\omega_n L)}.$$

Es posible mostrar, mediante razonamientos basados en la periodicidad de las condiciones de contorno [5], que $C(\tau) = 1$, de modo que, tomando $\mu = 0$ y $\tau = 1$, se obtiene para la variación de la energía libre:

$$F(\varphi) - F(0) =$$

$$1/\beta \log \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+2\exp(-2\omega_n L)\cos(2\varphi_-)+\exp(-4\omega_n L)}{1+2\exp(-2\omega_n L)+\exp(-4\omega_n L)}. \tag{16}$$

El límite $\beta \to \infty$ de esta expresión da la corrección a la energía de Casimir de los fermiones debida a la presencia del campo:

$$E_0(\varphi) - E_0(0) =$$

$$1/2\pi \int_0^\infty d\omega \log \frac{1+2\exp(-2\omega L)\cos(2\varphi_-)+\exp(-4\omega L)}{1+2\exp(-2\omega L)+\exp(-4\omega L)}$$

$$= \varphi_-^2/2\pi L, \tag{17}$$

para $|\varphi_-| \leq p/2$, y su extensión periódica (período π) para otros valores de φ_-.

CALCULO DE LA ACCION EFECTIVA PARA CONDICIONES DE CONTORNO DEPENDIENTES DEL TIEMPO.

A continuación, consideramos el problema de un campo $\varphi(x_0)$, con una dependddncia ''temporal'' arbitraria. Por simplicidad, nos limitaremos a estudiar el caso de un solo borde ''espacial'' en $x_1 = 0$, con las condiciones de contorno:

$$B_0 U^{-1}(x_0)\psi = B_0 \exp(\gamma_5\varphi(x_0))\psi = 0$$

$$\psi(\beta, x_1) = -\psi(0, x_1) \tag{18}$$

Puede verificarse que el problema de contorno es no singular.

Nos interesa encontrar la acción efectiva Euclídea para φ, que está dada por:

$$\exp(-S[\varphi]) \sim Det(i\partial)_{BU^{-1}(x_0)} \tag{19}$$

Para hacerlo, resulta conveniente considerar en principio una bolsa finita de longitud L, con $\varphi_L = 0$ y tomar después el límite $L \to \infty$.

Elegimos, en el núcleo de $i\partial$, un sistema completo de funciones que satisfacen:

$$\psi_n(\beta, x_1) = -\psi_n(0, x_1)$$

$$B_L \psi_n(x_0, L) = 0, \tag{20}$$

a saber:

$$\psi_n(x_0, x_1) = \exp[i\omega_n(x_0 - i\gamma_5(x_1 - L))]\binom{1}{1}, n \in Z. \tag{21}$$

Nuevamente, introduciendo un parámetro auxiliar μ mediante la sustitución $\varphi \to \mu\varphi$ y proyectando los valores de borde en $x_1 = 0$, se tiene:

$$h_\mu^n(x_0) = 1/2(1,1)\exp(-\mu\varphi(x_0)\gamma_5)\psi_n(x_0, 0)$$

$$= \cosh(\mu\varphi(x_0) + \omega_n L)\exp(i\omega_n x_0). \tag{22}$$

El operador de Forman puede determinarse de

$$h^n_{\mu+\tau}(x_0) = \Phi_\mu(\tau) h_\mu^n(x_0), \tag{23}$$

que en este caso resulta:

$$\Phi_\mu(\tau)\cosh(\mu\varphi(x_0) + \omega_n L))\exp(i\omega_n x_0) =$$

$$\cosh((\mu+\tau)\varphi(x_0) + \omega_n L)\exp(i\omega_n x_0). \tag{24}$$

Eligiendo una base en el borde $\partial\Omega$ dada por $\{\exp(i\omega_n x_0)\}$, resulta claro que el operador sólo es diagonal para φ estático.

Es posible obtener para $\Phi_\mu(\tau)$ un desarrollo sistemático en potencias de φ que, al orden más bajo no nulo (y en el límite $L \to \infty$), da por resultado:

$$\frac{Z(\mu+\tau)}{Z(\mu)} = C(\tau)\exp(\mu\tau H[\varphi]), \tag{25}$$

donde

$$H[\varphi] = i/\pi \int_0^\beta dx_0 \varphi(x_0)\partial_0(\varphi^*_+(x_0) - \varphi_+(x_0)) \tag{26}$$

con

$$\varphi_+(x_0) = \sum_{N=1}^{\infty} \varphi(N) \exp(2\pi i N x_0/\beta) \qquad (27)$$

En la expresión anterior, $\tilde{\varphi}(N)$ es el coeficiente de Fourier en el desarrollo de $\varphi(x_0)$.

Tomando $\mu = 0$ y $\tau = 1$ en la ecuación (26), queda claro que (a diferencia del caso estático) la acción efectiva resulta determinada por $C(1)$. Sin embargo, de la igualdad

$$\frac{Z(\mu+\tau)}{Z(\mu)} = \frac{Z(\mu+\tau)}{Z(0)} \cdot \frac{Z(0)}{Z(\mu)} , \qquad (28)$$

es posible obtener una ecuación diferencial para $C(\tau)$, cuya resolución da por resultado la funcional no local [6]:

$$\exp(-S[\varphi]) = C(1) = \exp[i/2\pi \int_0^\beta dx_0 \varphi \partial_0 (\varphi^*_+ - \varphi_+)], \qquad (29)$$

Es de destacar que, aunque sólo hemos considerado el primer orden no nulo en potencias de φ, este resultado coincide, en el límite $\beta \to \infty$, con el resultado exacto que habíamos obtenido en un trabajo anterior [2], haciendo uso de los desarrollos de Seeley para potencias complejas de operadores elípticos [4]. Es fácil ver analíticamente que las contribuciones de tercer orden en φ se anulan, y hemos verificado numericamente que también se anulan las de cuarto orden, pero no tenemos un argumento general que nos permita afirmar que ese hecho se verifica a todo orden.

CONCLUSIONES

Hemos mostrado una aplicación física del método de Forman para la evaluación de cocientes de determinantes regularizados por el método de la ζ de Riemann, que tiene la ventaja de requerir sólo el conocimiento de los valores de borde de funciones en el núcleo del operador diferencial involucrado. Hemos obtenido así la corrección a la energía libre de fermiones en una bolsa estática finita, debida a su acoplamiento con un campo externo en los bordes, como también la co-rrespondiente corrección a la energía de Casimir.

En el caso más general de un campo φ con dependencia arbitraria en x_0, hemos dado una expresión para la acción efectiva, como desarrollo en potencias del campo. Dicho resultado coincide, en el límite de temperatura nula, con el obtenido previamente mediante un método que requiere el conocimiento de la función de Green [2], basado en los desarrollos de R.T.Seeley [4].

Este método es de aplicación también en problemas de interés en Mecánica Estadística. Por ejemplo, el caso de fermiones con condiciones de contorno "twisted" (no locales), ha sido tratado por nosotros en una publicación anterior [5].

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el CONICET (Argentina)

REFERENCIAS

[1] R.Forman, Invent. Math. 88, 447 (1987).

[2] H.Falomir, M.A.Muschietti, and E.M.Santangelo, Jour.Math.Phys. 31, 989 (1990)

[3] A.Chodos, and C.B.Thorn, Phys.Rev. D12, 2733 (1975): T.Inowe, and T.Maskawa, Progr. Theor. Phys. 54, 1833 (1975): G.E.Brown,and M.Rho, Phys.Lett. B82, 177 (1979).

[4] R.T.Seeley, Am.J.Math. 91, 889 (1969); 91, 963 (1969).

[5] H.Falomir, and E.M.Santangelo, Phys. Rev. D42 (1990), 590-593.

[6] H.Falomir, and E.M.Santangelo, Phys.Rev.D en prensa.