

**VARIABILIDAD DE LOS PARAMETROS DE RADIOPROPAGACION ASOCIADA  
A CAMBIOS DIARIOS EN LA IONOSFERA SOBRE CONCEPCION, CHILE**

Dante R. Figueroa M. y Alberto J. Foppiano B.  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias  
Universidad de Concepción  
Casilla 3 - C, Concepción, Chile

**RESUMEN**

Se estudia la variabilidad de la concentración electrónica de la ionósfera sobre Concepción, Chile, y su efecto en la variabilidad de parámetros de radiopropagación.

Se compara las distribuciones verticales de concentración electrónica, derivadas mediante la técnica de inversión de ionogramas, para el mediodía de unos pocos días de Marzo de 1964, y que fueran publicados hace algún tiempo, con aquellas determinadas usando los modelos de Dudeney y de Bradley y Dudeney. Se encuentra que las distribuciones calculadas con las fórmulas de Dudeney se ajustan mejor a las obtenidas mediante inversión.

Se encuentra que la variabilidad diaria de las distribuciones verticales modeladas para el mediodía de la mayoría de los días de marzo de 1964 es prácticamente independiente del modelo usado. La variabilidad cambia desde un 20% para alturas de la región E hasta alrededor de un 70% a 240 km.

Se analiza el efecto de esta variabilidad diaria sobre parámetros de radiopropagación, usando resultados obtenidos con la técnica de trazado de rayos, para señales de 7.1 y 14.2 MHz emitidas desde Concepción hacia el Norte y Este, con una serie de ángulos de elevación. Se incluye el efecto de la absorción radioeléctrica y del campo magnético. Los gráficos de distancia alcanzada versus ángulo de elevación construidos muestran que los resultados asociados a las distribuciones verticales de Dudeney se ajustan mejor a los resultados correspondientes a la inversión de ionogramas que aquellos asociados a las distribuciones de Bradley y Dudeney.

Se encuentra una variabilidad diaria del 100% para señales de 7.1 MHz y de 80% para señales de 14.2 MHz que se propagan en modo E. Las variabilidades para el modo F son menores, sólo un 25% para 7.1 MHz y ángulo de elevación de 50° y 15% para 14.2 MHz y 30°.

**ABSTRACT**

Ionospheric electron concentration variability over Concepción, Chile, and its effect on the variability of radiopropagation parameters are studied.

Published vertical distributions of electron concentration for a few day of March 1964 at noon, derived using the ionogram inversion technique, are compared with those determined from Dudeney and Bradley and Dudeney models. Distributions computed using Dudeney's formulae are found to systematically better fit those related ionogram inversion.

Day-to-day variability derived using modal vertical distributions for most day of March 1964 at noon is found to be independent of the model considered. It ranges from about 20% at E region heights to 70% at around 240 km.

The effect of this day-to-day variability on radiopropagation parameters was analysed using ray-tracing results for signals of 7.1 MHz and 14.2 MHz launched from Concepción towards the North and East, for a range of elevation angles. Geomagnetic field and radiowave absorption effects were included. Plots of range versus elevation angle show that results associated to Dudeney's vertical distributions better fit those associated to ionogram inversion, than the ones associated to Bradley and Dudeney distributions.

E-mode range day-to-day variability amounts 100% for 7.1 MHz and 80% for 14.2 MHz. F-mode variabilities are smaller, being 25% for MHz signals launched at 50° and 15° for 14.2 MHz signals at 30°.

## INTRODUCCION

La propiedad de refracción de la ionósfera depende de la distribución vertical de concentración electrónica,  $n$ , la que es extremadamente variable tanto espacial como temporalmente. Para un determinado lugar, esta distribución depende principalmente de la hora del día, de la estación del año, y de los niveles de actividad solar y de actividad magnética. Esta variabilidad de la concentración electrónica debe ser considerada tanto en proyectos de propagación de largo plazo, cuyo objetivo es contribuir al diseño de enlaces radioeléctricos, como de mediano plazo, los que permiten la gestión de frecuencias de un enlace ya establecido. En el primer caso se trata de estimar valores medianos mensuales de los parámetros de radiopropagación con meses o años de antelación, junto con alguna medida de la variabilidad diaria de ellos respecto de los valores medianos. En el segundo caso, se trata de estimar los valores de los parámetros con sólo horas o días de antelación.

El objetivo del presente trabajo es mostrar el efecto que tiene la variabilidad diaria de la distribución vertical de concentración electrónica, en las distancias que desde un transmisor pueden cubrir señales radioeléctricas decamétricas. La determinación de las distancias se ha hecho mediante el método de trazado de rayos.

En la sección siguiente se indica los modelos de distribución de concentración electrónica usados, para después describir brevemente el método de trazado de rayos. Luego se presenta los resultados obtenidos para, finalmente, discutir su significación.

## DISTRIBUCIONES VERTICALES DE CONCENTRACION ELECTRONICA

La concentración electrónica con la altura sobre un determinado lugar,  $n(h)$ , fue modelada en este trabajo utilizando tres métodos, lo que se muestra a continuación. En todos los casos se usa como variable la frecuencia de plasma,  $f_p$ , relacionada a la concentración electrónica  $n$  a través de

$$f_p = \left\{ \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} n \right\}^{1/2} \quad (1)$$

con  $e$  la carga del electrón,  $m$  la masa del electrón, y  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío.

## 1. Modelo de Bradley y Dudeney:

El modelo de Bradley y Dudeney (1973) depende de cuatro características ionosféricas que pueden ser medidas fácilmente en un ionograma (Piggott y Rawer, 1972):  $f_oE$ , la frecuencia máxima de reflexión del rayo ordinario en la región  $E$  de la ionósfera;  $f_oF2$ , la frecuencia máxima de reflexión del rayo ordinario en la región  $F2$  de la ionósfera;  $M(3000)F2$ , la razón entre la máxima frecuencia utilizable para una distancia transmisor-receptor de 3000 kilómetros y la frecuencia máxima de reflexión en incidencia vertical (el algoritmo de cálculo de  $M(3000)F2$  corresponde a un modelo de propagación simplificado), y  $h'F2$ , la altura virtual mínima observada de la región  $F2$ .

En este modelo la distribución vertical de concentración electrónica está constituida por tres segmentos (todas las alturas  $h$  están expresadas en kilómetros):

a) La región  $90 < h \leq 110$  (km), en que  $n(h)$  varía parabólicamente con  $h$ , con altura de concentración máxima  $h_m E$  y semiespesor  $y m E$ ,

$$f_p = f_o E \left[ 1 - \left[ \frac{h m E - h}{y m E} \right] \right]^{1/2} \quad (2a)$$

b) La región  $110 < h \leq h_1$ , en que  $n(h)$  varía linealmente con  $h$ , desde  $h_m E$  hasta una altura  $h_1$  en que la concentración electrónica es 2.89 veces la concentración electrónica máxima de la región  $E$ ,

$$f_p = \frac{foE}{\sqrt{h_1 - hmE}} \{1.89 h + (h_1 - 2.89 hmE)\}^{1/2} \quad (2b)$$

donde

$$h_1 = hmF_2 - ymF_2 \left\{1 - \left[\frac{hmF_2 - h}{ymF_2}\right]^2\right\}^{1/2} \quad (2c)$$

c) La región  $h_1 < h \leq hmF_2$ , en que  $a(h)$  varía parabólicamente con la altura, de altura de concentración máxima  $hmF_2$  y semiespesor  $ymF_2$ .

$$f_p = foF_2 \left\{1 - \left[\frac{hmF_2 - h}{ymF_2}\right]^2\right\}^{1/2} \quad (2d)$$

donde

$$hmF_2 = e [M(3000)F_2]^b \quad (2e)$$

y

$$ymF_2 = hmF_2 - (h'F_2 - \Delta h') \quad (2f)$$

En el apéndice se indica cómo calcular  $e$ ,  $b$ , y  $\Delta h'$  a partir de las cuatro características ionosféricas mencionadas arriba.

En la figura 1 se muestra mediante línea continua la distribución electrónica sobre Concepción, Chile, calculada según el modelo de Bradley y Dudeney para los días 17 y 19 de Marzo de 1964, a las 12 horas, tiempo local.

## 2. Modelo de Dudeney

El modelo de Dudeney (1978) depende de las cuatro características ionosféricas usadas en el modelo de Bradley y Dudeney, más una quinta característica:  $foF_1$ , la frecuencia máxima de reflexión del rayo ordinario en la región  $F_1$ , si es que ésta existe.

El modelo de Dudeney comprende tres regiones:

a) La región  $90 < h \leq 110$  (km), donde  $f_p(h)$  tiene la misma forma que en el modelo de Bradley y Dudeney (ecuación 2a).

b) La región  $110 < h \leq h_t$ , donde se debe distinguir dos casos:

(i) Caso de ausencia de región  $F_1$ : Entonces

$$f_p = foE \sec \left[ \frac{h - hmE}{\beta ymF_2} \right] \quad (3a)$$

donde los parámetros  $\beta$  y  $h_t$  son calculados de modo de garantizar continuidad de  $f_p$  y  $\partial f_p / \partial h$  en  $h = h_t$ . En el apéndice se muestra las relaciones que permiten determinar  $\beta$  y  $h_t$ .

(ii) Caso de presencia de región  $F_1$ : En este caso se corrige (3a), quedando

$$f_p = foE \left[ \sec \left[ \frac{h - hmE}{\beta ymF_2} \right] + A_f \left\{ 1 - \cos \left[ 2\pi \frac{h - hmE}{h_t - hmE} \right] \right\} \right] \quad (3b)$$

donde el parámetro  $A_f$  es calculado resolviendo dos ecuaciones acopladas, las que son escritas en el apéndice.

c) La región  $h_0 < h < hmF2$ , en cuyo caso

$$f_p = foF2 \cos \left( \frac{hmF2 - h}{\gamma mF2} \right), \quad (3c)$$

donde  $\gamma mF2$  y  $hmF2$  son los mismos del modelo de Bradley y Dudeney.

En la figura 1 se muestra mediante líneas de trazos la distribución electrónica sobre Concepción, Chile, calculada según el modelo de Dudeney para los días 17 y 19 de Marzo de 1964, a las 12 horas, tiempo local.

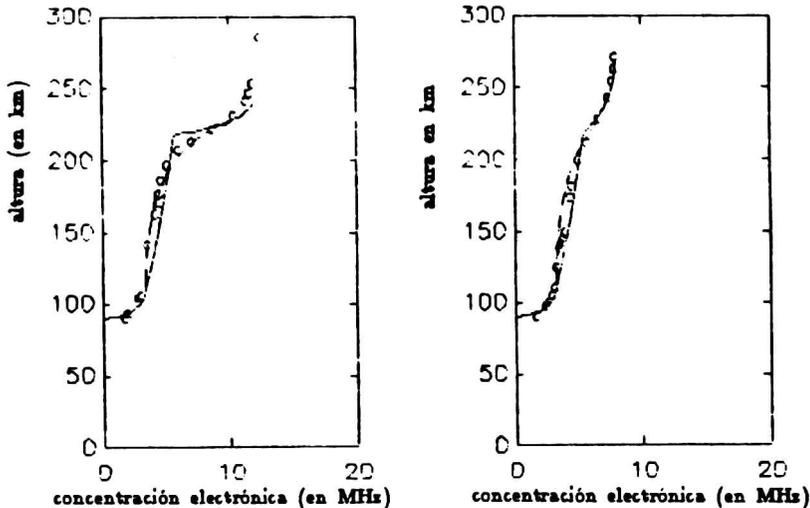


Figura 1: Distribución de electrones libres sobre Concepción, Chile, los días 17 (izquierda) y 19 de marzo de 1964 (derecha) al mediodía (hora local). Línea continua: modelo de Bradley y Dudeney; líneas de trazos: modelo de Dudeney; círculos: resultado de inversión de ionogramas

### 3. Inversión de ionogramas

Mediante la inversión de ionogramas, vale decir, de los registros de altura de reflexión en función de la frecuencia obtenidos con una ionosonda, es posible estimar la distribución de la concentración electrónica con la altura. Estas distribuciones, llamadas *seales* en este artículo, serán usadas aquí sólo como referencia y calibración de los resultados obtenidos usando los modelos de Bradley y Dudeney (BD) y de Dudeney (D), puesto que no se cuenta con ionogramas invertidos para todo el periodo de análisis.

En la figura 1 se muestra mediante círculos estas distribuciones reales, calculadas sobre Concepción, Chile, para los días 17 y 19 de Marzo de 1964, a las 12 horas, tiempo local.

## VARIABILIDAD IONOSFERICA DIARIA

Para estudiar la variabilidad de los parámetros de radiopropagación asociada a cambios diarios en la distribución vertical de concentración electrónica, fueron elegidas distribuciones correspondientes para Concepción, Chile, para cada día de Marzo de 1964 a las 12 horas de tiempo local.

La variabilidad diaria de las distribuciones BD y D para los días con datos disponibles en el mes indicado se muestra en las figuras 2a y 2b, respectivamente. A pesar que las distribuciones con la altura BD son bastante diferentes de las D (ver figura 1), su variabilidad respecto a la mediana del mes es prácticamente la misma, aumentando con la altura desde un 22% a la altura del máximo de concentración electrónica de la región E ( $h_m E$ ) hasta un 68% a unos 240 km de altura. Sobre esa altura, aproximadamente, los valores de variabilidad no son significativos, pues resultan de una muestra muy reducida.

La variabilidad diaria puede ser referida a la mediana de las distribuciones, como en la figura 2, o a una distribución vertical de concentración obtenida mediante el uso de un modelo (BD o D) aplicado a valores medianos de las características ionosféricas ( $f_o E$ ,  $f_o F_2$ , etc.). Sin embargo estas últimas distribuciones resultan indistinguibles de las medianas de las distribuciones, por lo que no son mostradas aquí.

Por otra parte, se ha sugerido (Laird *et al.*, 1974) que los modelos analíticos, como es el caso de BD y D, usados con valores medianos mensuales de las características ionosféricas, no conservan la 'forma' de la distribución vertical implícita en los ionogramas. Para analizar este punto se calculó las trazas del rayo ordinario de todos los ionogramas disponibles correspondientes a Marzo 1964 a las 12 horas tiempo local, y a partir de ellas se obtuvo un 'ionograma' mediano, según las reglas propuestas por Laird *et al.* (1974). Aunque obviamente aparecen diferencias importantes en concentración electrónica entre las distribuciones correspondientes, la medida de la variabilidad diaria respecto de estas nuevas distribuciones es similar a la obtenida más arriba.

## METODO DE TRAZADO DE RAYOS

Dado que las frecuencias de interés en este estudio corresponden a ondas de radio decamétricas, se justifica usar el método de trazado de rayos para determinar el rango de alcance de estas ondas radioeléctricas propagándose en una ionósfera caracterizada por las distribuciones de concentración electrónicas discutidas en la segunda sección.

Jones (1966) y Jones y Stephenson (1975) propusieron un método de trazado de rayos basado en la combinación de un formalismo propuesto por Haselgrove (1955) y Lighthill (1965). Este es el método usado en el presente trabajo.

Para calcular las trayectorias de los rayos es necesario, además de las distribuciones verticales de concentración electrónica, adoptar modelos del campo magnético terrestre y de la distribución con la altura de la frecuencia de colisiones entre los electrones libres y las moléculas del gas neutro. Aquí se supone válidos un modelo dipolar centrado para el campo magnético y una distribución vertical de la frecuencia de colisiones compuesta de dos segmentos exponenciales. No es necesario adoptar modelos más realistas, pues las diferencias entre los parámetros de propagación calculados con distintos modelos no son significativas frente a las diferencias debidas a las distintas distribuciones verticales de concentración electrónica.

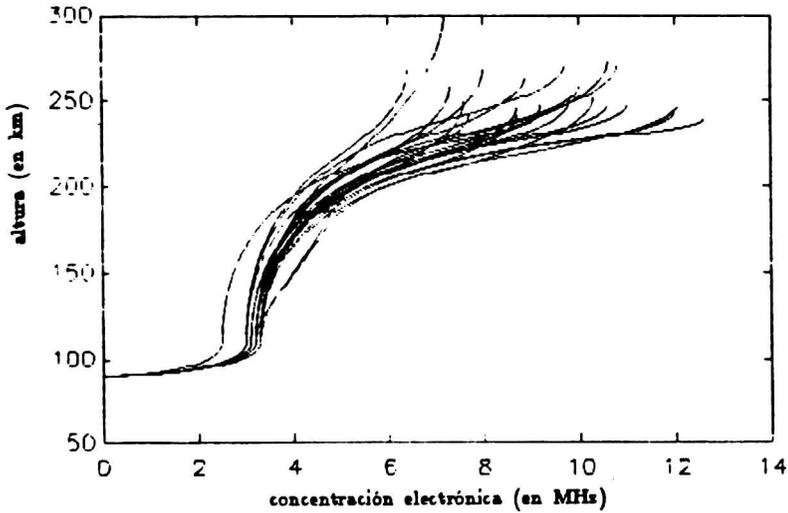
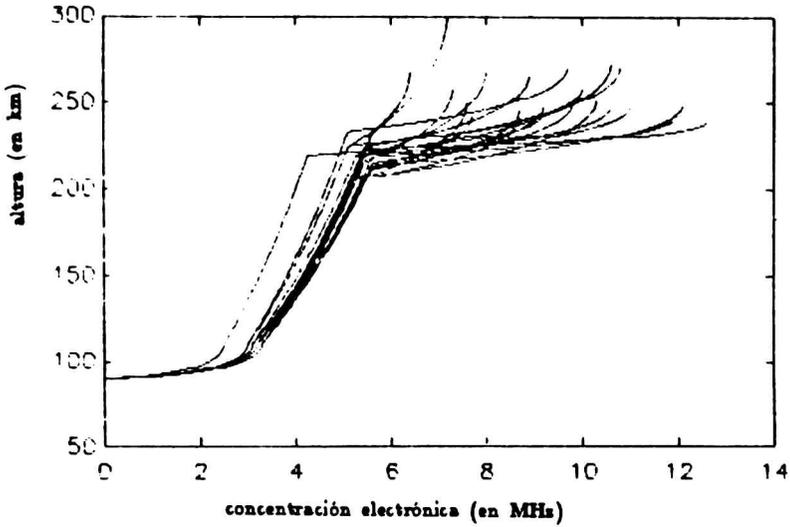


Figura 2: Variabilidad de la concentración electrónica sobre Concepción, Chile, en el mes de marzo de 1964. En la figura superior se usa el modelo de Bradley y Dudeny, en tanto que en la inferior se usa el de Dudeny.

## RESULTADOS

Se hizo trazado de rayos usando las distribuciones verticales de concentración electrónicas discutidas en la segunda sección. Se supuso un transmisor ubicado en Concepción, Chile, capaz de emitir ondas radioeléctricas con ángulos de elevación entre  $0^\circ$  y  $50^\circ$  y hacia el norte o hacia el este, es decir, azimuts de  $0^\circ$  o  $90^\circ$ , respectivamente. Se presentará aquí resultados para ondas de 7.1 y de 14.2 MHz de frecuencia.

En la figura 3 se muestra las trayectorias correspondientes a la distribución D para el 19 de Marzo de 1964 a las 12:00 hrs, tanto para el caso de 7.1 como de 14.2 MHz de frecuencia. En la figura mencionada se ha exagerado la curvatura de la Tierra, a fin dar mayor claridad al esquema. La distancia entre dos marcas (+) en la superficie representa 50 kilómetros. Las diferencias en las distancias alcanzadas por un rayo para una elevación dada y azimut de  $0^\circ$  y  $90^\circ$  son generalmente menores que 5%, excepto en una estrecha banda de ángulos de elevación cercanos al ángulo de penetración de la ionósfera, para la cual la diferencia puede ser substancialmente mayor que el 5% señalado. En el caso mostrado, hay diferencias mayores que 5% solamente para elevaciones entre  $22^\circ$  y  $27^\circ$  para propagación en 7.1 MHz, y entre  $7^\circ$  y  $8^\circ$  para propagación en 14.2 MHz. Esto justifica reducir los trazados de rayos a aquellos correspondientes a azimut  $0^\circ$ , y permite suponer que todos los resultados siguientes son también válidos para transmisiones en todas las direcciones horizontales.

A fin de comparar el trazado de rayos usando distribuciones *reales* a las hechas con distribuciones analíticas, se muestra en la figura 4 la trayectoria de un rayo en función del ángulo de elevación obtenidas para el día 19 de Marzo de 1964 a las 12 horas tiempo local, usando una distribución R, una BD y una D, tanto para ondas de frecuencia 7.1 MHz (diagrama superior) como para el caso de propagación en 14.2 MHz (diagrama inferior). Es inmediato que la distribución D logra un mucho mejor acercamiento a los resultados con distribuciones reales que los resultados obtenidos con distribución BD. Resultados similares se obtiene para los tres días para los que se dispone de distribuciones reales.

En el modo E se observa siempre que los trazados de rayos hechos usando distribuciones D se acercan más a los reales que los hechos con distribuciones BD.

Donde la dependencia del modelo de distribución vertical de concentración usado es más crítico es en la región superior a la región E e inferior a la región F. Como se observa en la figura 1 las distribuciones de concentración reales muestran ligeras inflexiones a alturas cercanas a los 160 km, las que provocan que aparezca un pequeño modo *F1* en cada gráfico de la distancia como función del ángulo de elevación. Por otra parte, como se usó una distribución D sin región *F1* no aparece ese modo en el correspondiente resultado de Dudeney. Sin embargo, a pesar que la distribución D se usó sin región *F1*, la figura 4 parece sugerir que no es necesaria su inclusión. Muy distinto es el caso de los resultados usando distribuciones BD, en que las diferencias entre las funciones ángulo de elevación distancia correspondiente a distribuciones BD y a R son significativas entre  $25^\circ$  y  $45^\circ$  para propagación en 7.1 MHz, y entre alrededor de  $7^\circ$  y de  $18^\circ$  de elevación para el caso de 14.2 MHz.

En el modo F ambos modelos dan buenos resultados, en general, excepto que las distribuciones D muestran sistemáticamente un mayor acercamiento a los resultados obtenidos usando distribuciones R.

Se estimó la sensibilidad de las funciones ángulo de elevación distancia a los métodos de obtener distribuciones verticales de concentración electrónica representativas de un mes determinado haciendo trazado de rayos con las distribuciones medianas y las distribuciones calculadas con medianas de las características ionosféricas discutidas en la tercera sección.

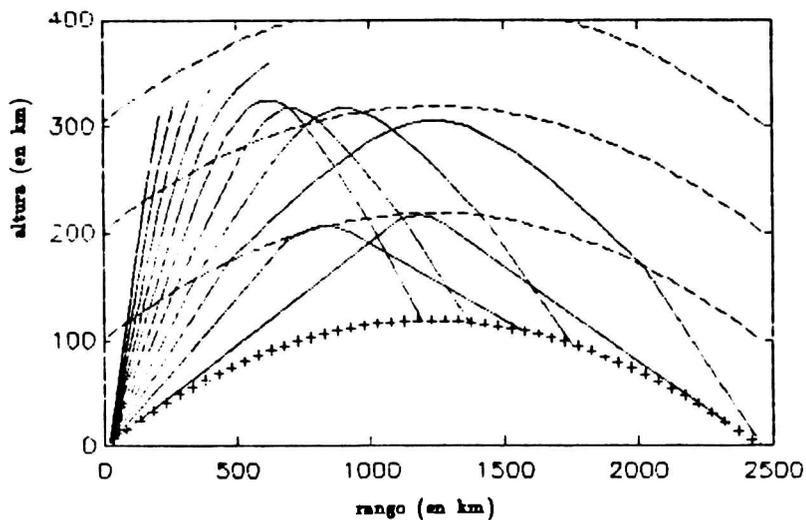
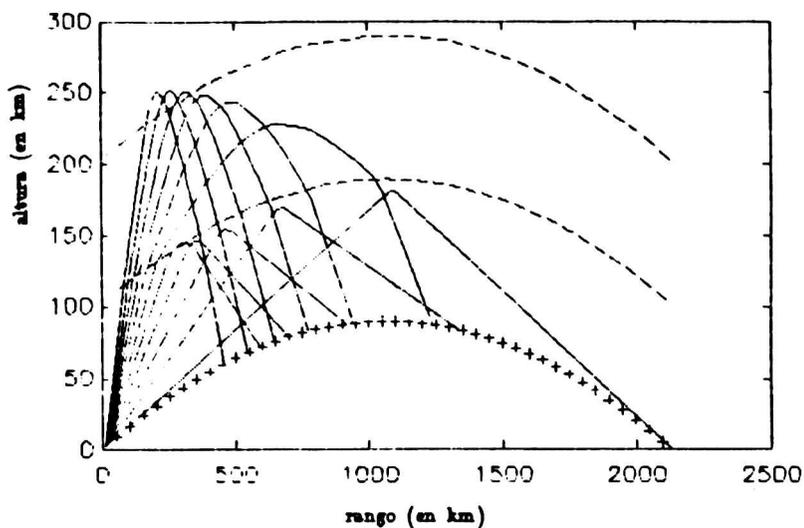


Figura 3: Trayectoria de los rayos obtenida usando la distribución de Dudeney del 19 de marzo de 1992, a las 12 horas. La parte superior muestra el caso de 7.1 MHz y el inferior al de 14.2 MHz. Se muestra con líneas discontinuas las alturas de 100, 200, y 300 km.

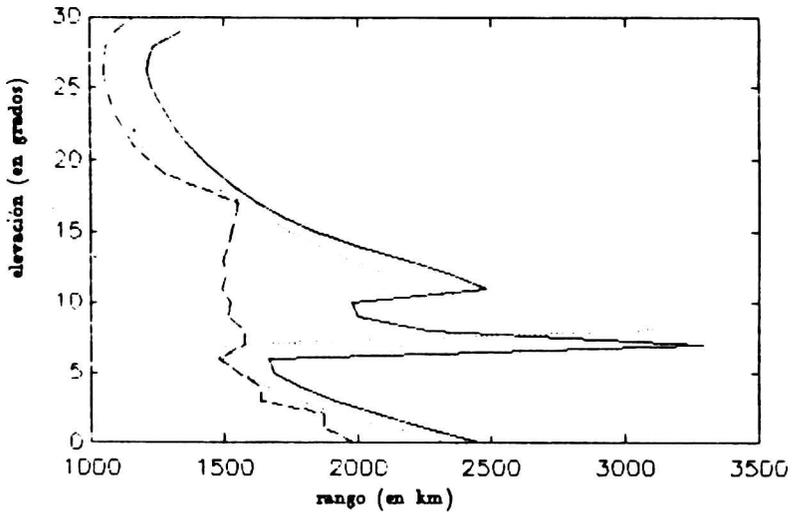
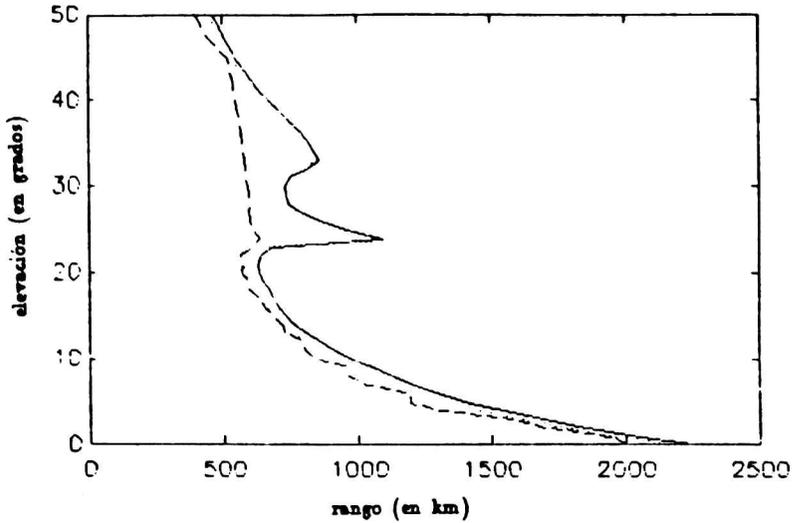


Figura 4: Rango alcanzado por el rayo versus ángulo de elevación para el día 19 de marzo de 1964 a las 12 horas. Línea continua: perfil de concentración electrónica obtenido de inversión del ionograma; línea discontinua: modelo de Bradley y Dudeney; línea de puntos: modelo de Dudeney. Arriba: 7.1 MHz. Abajo: 14.2 MHz

También se hizo trazado de rayos con la distribución vertical correspondiente al 'ionograma' mediano. Los resultados de estos trazados de rayos indican que es imposible distinguir entre las funciones ángulo de elevación distancia asociadas a las dos primeras distribuciones, independientemente del modelo usado. La función ángulo de elevación distancia asociada al 'ionograma' mediano difiere a lo más en 50 km de las funciones anteriores.

Otro resultado obtenido es que la función ángulo de elevación distancia mediana mensual es idéntica a la función obtenida con una distribución vertical de concentración electrónica correspondiente a los valores medianos de las características ionosféricas, obtenidas según el modelo de Dudeney. Lo mismo es probablemente cierto al usar el modelo de Bradley y Dudeney.

Por último en las figuras 5a y 5b se muestra las variabilidades de las funciones ángulo de elevación distancia asociadas a los cambios diarios de las distribuciones D, para propagación en 7.1 y en 14.2 MHz, respectivamente. Para el caso de propagación en 7.1 MHz, la variabilidad diaria es muy grande para el modo E, del orden del 100%, en tanto que en el modo F ésta se reduce a un 25% en el caso de 50° de elevación. En el caso de propagación en 14.2 MHz, se mantiene la alta variabilidad diaria en el modo E, cercana a un 80%, en tanto que en el modo F la variabilidad es de sólo 15% para ángulos de elevación cercanos a 30° (para ángulos de elevación mayores la muestra se reduce significativamente).

Como se mostró en la figura 2, la variabilidad de las concentraciones electrónicas es del orden de un 20% a la altura del hmE y de un 70% a unos 240 km de altura. Esto muestra que la variabilidad relativamente pequeña de la concentración electrónica de la región E puede tener un efecto mucho mayor sobre la variabilidad de los parámetros de radiopropagación que la que puede producir la variabilidad relativamente grande de la concentración electrónica en la zona de los 250 km.

## BIBLIOGRAFIA

- Bradley, P. A.; Dudeney, J.R., 1973: A simple model of the vertical distribution of electron concentration in the ionosphere; *J. Atmosph. Terr. Phys.*, **25**, 2131-2146.
- Dudeney, J.R., 1978: An improved model of the variation of electron concentration with height in the ionosphere; *J. Atmosph. Terr. Phys.*, **40**, 195-203.
- Haselgrove, J., 1955: Ray theory and a new method for ray tracing; in *Report of the Physical Society Conference on the Physics of the Ionosphere*, The Physical Society, London.
- Jones, R.M., 1966: A three-dimensional ray-tracing computer program; Environmental Science Services Administration Technical Report IER 17-ITSA17, U. S. Government Printing Office.
- Jones, R.M.; Stephenson, J.J., 1975: A versatile three-dimensional ray-tracing computer program for radio waves in the ionosphere; Office of Telecommunications Report OT 75-76, U. S. Government printing Office.
- Laird, A.R., Wright, J.W.; Gautier, T.N., 1974: Remarks on achieving representative electron density profiles of the ionosphere: Performance and advantages of the 'composite' virtual height method; *Radio Science*, **9**, 825-835.
- Lighthill, M.J., 1965: Group velocity; *J. Institute of Mathematics and its Applications*, **1**, 1.

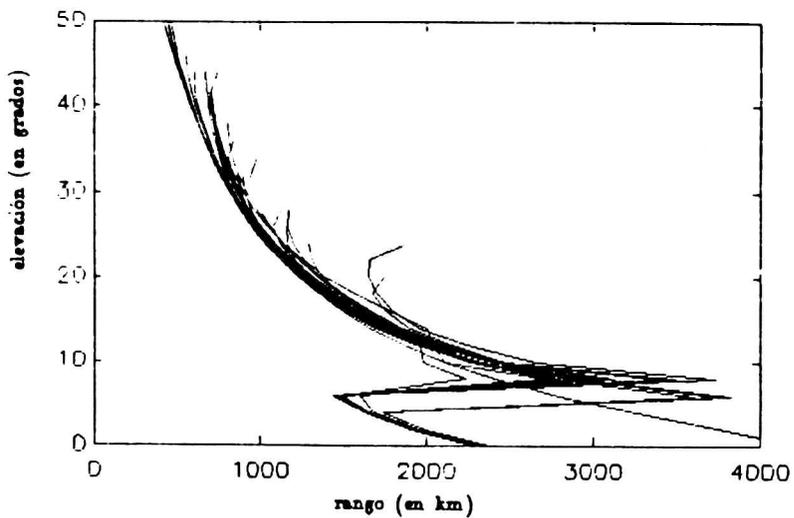
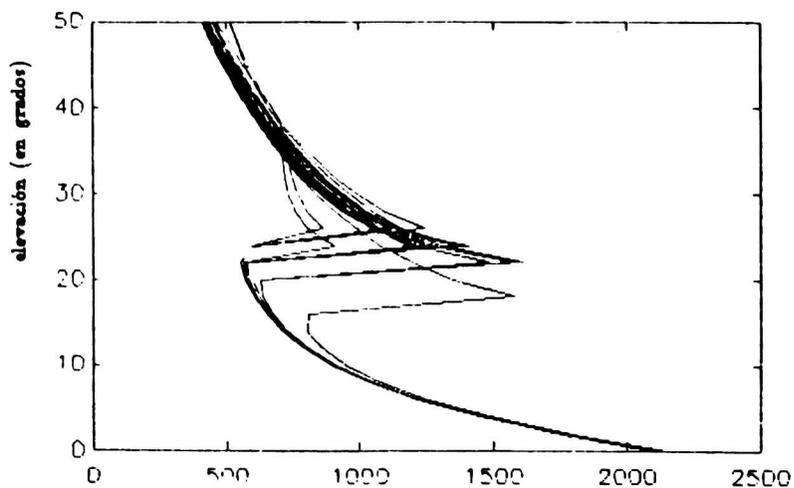


Figura 5: Diagramas rango versus ángulo de elevación para todos los días disponibles de marzo de 1964. La convención de tipo de curvas y frecuencias es la misma que en la figura 4.

Piggott, W.R.; Rawer, K., 1972; U.R.S.I. Handbook of ionogram interpretation and reduction; Second Edition, World Data Center A for Solar-Terrestrial Physics Report UAG-23, U.S. Government Printing Office

APENDICE

Aquí se indica la manera de calcular los parámetros  $\epsilon$ ,  $b$ ,  $\Delta h'$ ,  $h_s$ ,  $\beta$  y  $A_f$  mencionados en la segunda sección, necesarios para ajustar los modelos de Bradley y Dudeney, y de Dudeney.

Las relaciones son:

$$\epsilon = 1890 - \frac{355}{\epsilon - 1.4} \quad (A1)$$

$$b = (2.5 \epsilon - 3)^{0.66} - 1.6 \quad (A2)$$

$$\Delta h' = \left[ \frac{0.613}{\epsilon - 1.33} \right]^{0.66} (h_m F^2 - 104) \quad (A3)$$

$$\epsilon = f_o F^2 / f_o E' \quad (A4)$$

$\beta$  y  $h_s$  son calculados resolviendo las ecuaciones intrínsecas acopladas

$$\beta = \frac{Z_m - \arccos(f_s / f_o F^2)}{\arccos(f_o E' / f_s)} \quad (A5)$$

$$\beta = \frac{f_s}{f_o E'} \left\{ \frac{f_s^2 - f_o E'^2}{f_o F^2 - f_s^2} \right\}^{1/2} \quad (A6)$$

Un valor de  $h_s$  se obtiene de la ecuación intrínseca

$$\left\{ 1 + \sec^2 \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] \right\} \sec^2 \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] + \left[ \frac{2x \beta y m F^2}{h_s - h_m E'} \right]^2 \left\{ \frac{f_s}{f_o E'} - \sec \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] \right\} / \left\{ \sec \left[ 2x \frac{h_s - h_m E'}{h_s - h_m E'} \right] - 1 \right\} = 0. \quad (A7)$$

al cual debe ser usado para evaluar  $A_f$  usando (3b), con  $f = f_o F^2$ . Con este  $A_f$  se evalúa  $df/dh$ . Si esta derivada es mayor o igual a cero los parámetros  $A_f$  y  $h_s$  son los buscados. Si  $df/dh < 0$  debe reevaluarse  $h_s$  usando

$$\sec \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] \tan \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] + \left[ 2x \frac{\beta y m F^2}{h_s - h_m E'} \right] \left\{ \frac{f_s}{f_o E'} - \sec \left[ \frac{h_s - h_m E'}{\beta y m F^2} \right] \right\} \cot \left[ x \frac{h_s - h_m E'}{h_s - h_m E'} \right] = 0. \quad (A8)$$

para usar este valor en la evaluación de  $A_f$  usando (3b), con  $f_p = f_o F^2$ .