Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Ecuaciones Diferenciales

Técnicas de resolución.

Anahí Dello Russo

2021

Estas son las guías que se elaboraron especialmente para dictar el curso Matemáticas Especiales II en la FCE-UNLP durante la cuarentena 2020-2021.

Matemáticas Especiales II es, básicamente, una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales y una asignatura obligatoria para los alumnos de la Licenciatura en Astronomía y de Geofísica.

Las guías contienen una serie de problemas resueltos que intentan ayudar al estudiante a desarrollar su capacidad de cálculo y de análisis de los resultados que va obteniendo sin contar (necesariamente) con la presencia del profesor. Incluyen, también, un buen número de ejercicios seleccionados.

Los temas considerados son clásicos; la fundamentación de los resultados teóricos que se enuncian en cada capítulo pueden encontrarse en los muchos y excelentes textos disponibles en Internet. En la bibliografía se listaron solo aquellos que se han usado en la elaboración de estas guías (varios de ellos corresponden al nivel de la asignatura Matemáticas Especiales II). Muchas de las gráficas que ilustran los ejemplos son de elaboración propia, otras (las mejores logradas, por supuesto) fueron tomadas de algunos de estos libros.

Las notas que aquí se presentan podrían resultar útiles para cualquier estudiante interesado en las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones con conocimientos de álgebra lineal y cálculo diferencial.

Índice general

1. Conceptos fundamentales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita.

Clasificaremos a las ecuaciones diferenciales por **tipo, orden** y **linealidad**.

Si la función incógnita es de una variable la ecuación se llama **ordinaria (EDO)**; si es de varias variables, la ecuación es **en derivadas parciales (EDP)**.

Ejemplo 1.

- Ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$
$$y'' + y' + x = \cos x$$
$$(x^2 + y^2)\, dx + (x - y)\, dy = 0$$

- Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2t\,\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$u_x + y\, u_y = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xy}$$

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella.

Ejemplo 2.

$4x^2y' + y = x$ es una EDO de primer orden

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^3 - 4y = e^{-x}$ es una EDP de segundo orden

Una ecuación diferencial es **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas solo aparecen como polinomios de grado uno.

Ejemplo 3.

$y''' + xy' - 5y = e^x$ es una EDO lineal de tercer orden

$(1 - y)y' + 2y = \sin x$ es una EDO no lineal de primer orden

$y'' + x \sin y = 0$ es una EDO no lineal de segundo orden

$\dfrac{d^4 y}{dx^4} + y^2 = 0$ es una EDO no lineal de cuarto orden

Se llama **solución** de una EDO de orden n a una función $\varphi(x)$, definida en un intervalo I junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive; tal que, al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, esta se convierte en una identidad para todo x en el intervalo I. El intervalo I se conoce como **intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez** o **dominio de la solución**.

Ejemplo 4.

- La función $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.

  En efecto, $\varphi(x)$ está definida y es derivable en $(0, \infty)$ y verifica

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) = x\,(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x} = 0 \quad \forall x \in (0, \infty).$$

- La función $\varphi(x) = x + 4\sqrt{x+2}$ es solución de la ecuación diferencial $(y - x)y' = y - x + 8$ en el intervalo $(-2, \infty)$.

  En efecto, $\varphi(x)$ está definida en $[-2, \infty)$ y es derivable en $(-2, \infty)$ y verifica

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{lado izquierdo de la EDO}: & (\varphi(x) - x)\varphi'(x) = (x + 4\sqrt{x+2} - x)(1 + \dfrac{4}{2\sqrt{x+2}}) = 8 + 4\sqrt{x+2} \\ \text{lado derecho de la EDO}: & \varphi(x) - x + 8 = x + 4\sqrt{x+2} - x + 8 = 8 + 4\sqrt{x+2} \end{array}}_{\text{son iguales } \forall x \in (-2,\infty)}$$

- La función $\varphi(x)$ definida implícitamente por la relación $e^{-\varphi(x)} + x = 1$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + 1 = e^y$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

  En efecto, si $x \in (-\infty, 1)$, $\varphi(x) = -\ln(1 - x)$. Luego,

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{lado izquierdo de la EDO}: & x\varphi'(x) + 1 = x\,\dfrac{1}{1-x} + 1 = \dfrac{1}{1-x} \\ \text{lado derecho de la EDO}: & e^{\varphi(x)} = \dfrac{1}{1-x} \end{array}}_{\text{son iguales } \forall x \in (-\infty,1)}$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $(1-x)y'' + 4xy' - 5y = \cos x$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

(c) $u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = F(x,y)$ $\qquad$ ($k > 0$ es constante, $F(x,y)$ es dato)

(d) $u_x + u_y = 1$

(e) $y'' + y' + y = \cos(x+y)$

2. Compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

   (a) $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $\qquad xy' + y = \cos x$

   (b) $\varphi(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $\qquad yy' = x - 2x^3$

   (c) $\varphi(x) = e^{-x^2}\Big(1 + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\Big)$; $\qquad y' + 2xy = 1$

   (d) $\varphi(x) = e^{3x}\cos(2x)$; $\qquad y'' - 6y' + 13y = 0$

   (e) $\varphi(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$; $\qquad y' = 2xy^2$

   (f) $\varphi(x) = (2 - \ln x)\sqrt{x}$; $\qquad 4x^2y'' + y = 0$

3. Compruebe que la función definida por tramos $\varphi(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = |y| + 1$ en $(-\infty, \infty)$.

⋆ ⋆ ⋆

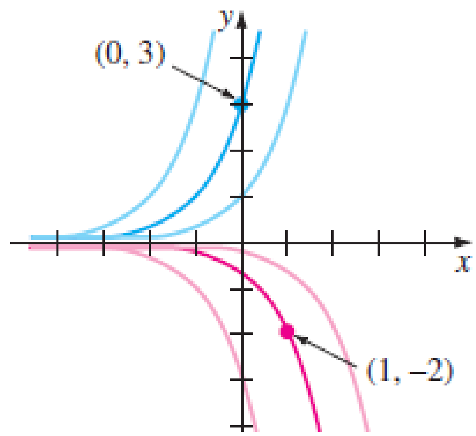
Se llama **solución general** de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ a una función $y = \varphi(x,C)$ que depende de una constante arbitraria C y que satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de la constante C. Se llama **solución particular** a la que se obtiene de la solución general asignándole un valor determinado a la constante C.

Ejemplo 5.

La función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para todo C real. En particular, eligiendo

* $C = 3$, obtenemos la solución $y = 3e^x$ que pasa por el punto $(0,3)$,

* $C = -2e^{-1}$, obtenemos la solución $y = -2e^{x-1}$, que pasa por el punto $(1,-2)$.



Geométricamente, la solución general $y = Ce^x$ determina una familia de curvas en el plano (la familia es infinita ya hay una curva para cada valor real de la constante C); se denominan *curvas integrales*. La solución particular $y = 3e^x$ es la curva integral que pasa por el punto de coordenadas $(0, 3)$.

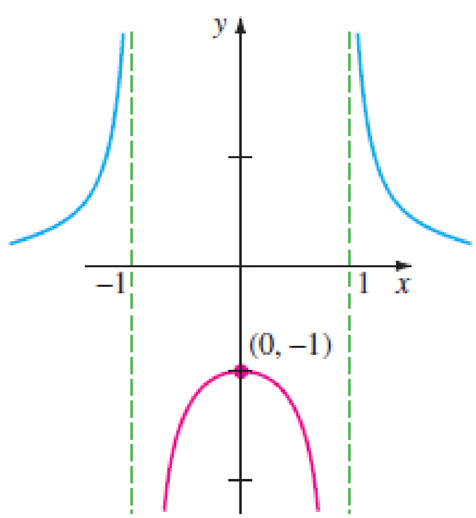
> El problema de encontrar la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ sujeta a la condición $y(x_0) = y_0$ se denomina **Problema de valores iniciales** (PVI).

Ejemplo 6.

La función $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ es la solución del PVI $\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

En efecto, $\varphi(x)$ está definida y es derivable para todo x en $(-1, 1)$; el intervalo $(-1, 1)$ contiene al punto inicial $x_0 = 0$; $\varphi(0) = -1$ y

$$\varphi'(x) + 2x(\varphi(x))^2 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} + 2x\Big(\frac{1}{x^2-1}\Big)^2 = 0.$$



⋆ ⋆ ⋆

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

   (a) $\varphi(x,c) = \dfrac{ce^x}{1+ce^x}$; $\qquad y' = y(1-y)$
   (b) $\varphi(x,c) = \dfrac{c}{\cos x}$; $\qquad y' - \tan x \cdot y = 0$
   (c) $\varphi(x,c) = x(c - \ln|x|)$; $\qquad xy' - y = -x$
   (d) $\varphi(x,c) = cx - x\cos x$; $\qquad xy' - y = x^2 \sin x$
   (e) $\varphi(x,c_1,c_2) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$; $\qquad y'' - 4y' + 4y = 0$

   En cada caso, grafique las curvas integrales para distintos valores de c.

5. La función $\varphi(x,c) = \dfrac{1}{1-ce^{-x}}$ es una familia de soluciones (de un parámetro) de la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Defina un PVI asociado a esta ecuación diferencial y encuentre la solución correspondiente a la condición inicial

   (a) $y(0) = -1/3$
   (b) $y(-1) = 2$

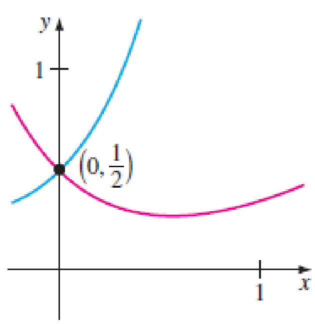
   Graficar las soluciones halladas.

6. Verificar primero que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada. Después determinar un valor de la constante C tal que $y(x)$ satisfaga la condición inicial dada.

   (a) $y' = 3x^2(y^2+1)$; $\quad y(x) = \tan(x^3 + C)$; $\quad y(0) = 1$
   (b) $y' + y\,\tan x = \cos x$; $\quad y(x) = (x + C)\cos x$; $\quad y(\pi) = 0$
   (c) $xy' - 3y = x^3$; $\quad y(x) = x^3(C + \ln x)$; $\quad y(1) = 17$

   Graficar las soluciones halladas.

7. Considere el PVI $\begin{cases} y' = x - 2y \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$. Determine cuál de las curvas que se muestran en la siguiente figura es la única solución posible. Explique su razonamineto.



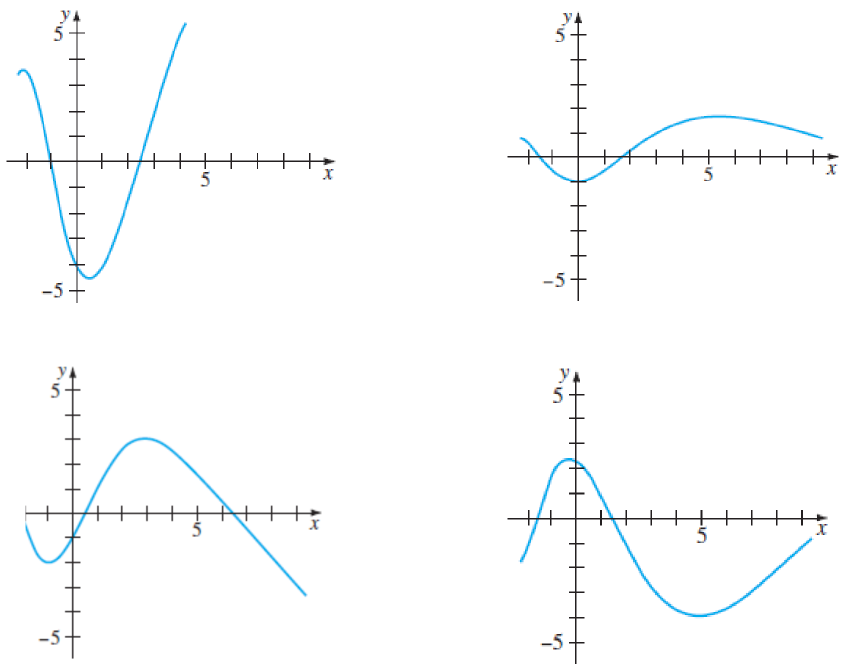
8. La función $\varphi(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia de soluciones (de dos parámetros) de la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Defina un PVI asociado a esta ecuación diferencial y encuentre la solución correspondiente a las condiciones iniciales

   (a) $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

   (b) $y(-1) = 5$; $y'(-1) = 1$

   Graficar las soluciones halladas.

9. Las gráficas muestran soluciones particulares de la EDO de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$.



   Relacione cada solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

(a) $y(1) = 1$; $y'(1) = -2$	(b) $y(-1) = 0$; $y'(-1) = -4$	(c) $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$
(d) $y(0) = -1$; $y'(0) = 2$	(e) $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$	(f) $y(0) = -4$; $y'(0) = -2$

10. Una función $g(x)$ se describe por alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $y'(x) = f(x, y)$ que tenga a la función $g(x)$ como su solución (o como una de sus soluciones) en los siguientes casos:

   (a) la pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es igual a la suma de x y de y,

   (b) la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) corta al eje de las x en el punto $(x/2, 0)$,

   (c) la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) pasa a través del punto $(-y, x)$,

   (d) todas las rectas normales a la gráfica de g pasan a través del punto $(0, 1)$ (cómo sería la gráfica de la función g?).

⋆ ⋆ ⋆

La ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

determina en cada punto (x, y) (en el que $f(x, y)$ está definida) el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución o integral en ese punto.

Luego, podemos asociar a cada punto (x, y) del plano un segmento de pendiente $f(x, y)$; es decir, un vector (unitario) de coordenadas

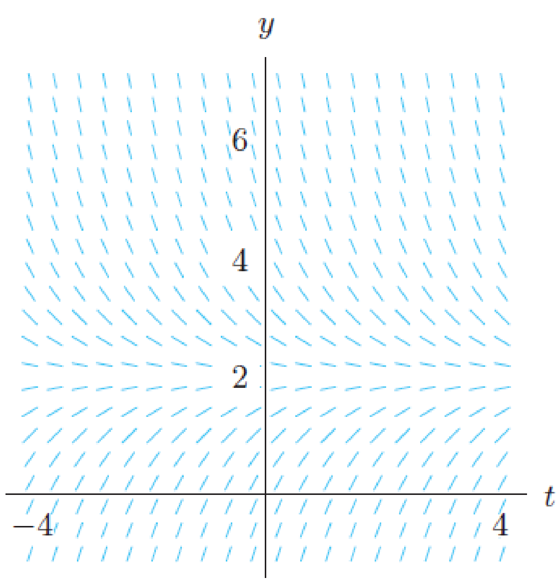
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f(x, y))^2}}, \frac{f(x, y)}{\sqrt{1 + (f(x, y))^2}} \right). \tag{2}$$

A este conjunto de vectores se lo denomina **campo de direcciones** correspondiente a la ecuación diferencial (1). Una vez dibujado dicho campo (lo que se puede hacer sin resolver la ecuación diferencial), las soluciones de (1) serán las curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones.

El campo de direcciones asociado a una EDO nos permite inferir propiedades cualitativas de sus soluciones (por ejemplo, si son asintóticas a una recta, si son cerradas o abiertas, etc.).

Ejemplo 7.

El campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial $y' = 2 - y$ se muestra en la figura siguiente.



En este caso, cada vector unitario viene dado por (ver (2)):

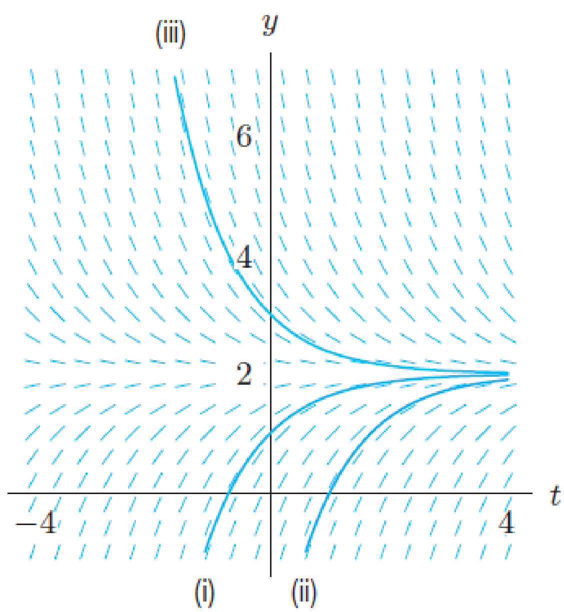
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2-y)^2}}, \frac{2-y}{\sqrt{1+(2-y)^2}}\right) \quad \color{red}{\to} \quad \begin{cases} y=3 & \color{red}{\to} \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ y=2 & \color{red}{\to} \quad (1,0) \\ y=1 & \color{red}{\to} \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ y=-1 & \color{red}{\to} \quad (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}) \end{cases}$$

Observemos que

- sobre cada linea horizontal (donde y es constante) las pendientes son constantes; esto es así porque y' depende de y solamente,
- la recta $y = 2$ divide la plano en dos regiones; en cada una de estas regiones la derivada y' tiene el mismo signo (las curvas integrales serán crecientes si $y < 2$ y decrecientes si $y > 2$),
- la ecuación diferencial también brinda información sobre la concavidad de las curvas integrales; en efecto, derivando se tiene $y'' = 0 - y' = -(2-y)$, por lo tanto, las curvas integrales serán cóncavas hacia arriba si $y > 2$ y cóncavas hacia abajo si $y < 2$.

En la figura siguiente se muestra un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

i) $(0,1)$ ii) $(1,0)$ iii) $(0,3)$

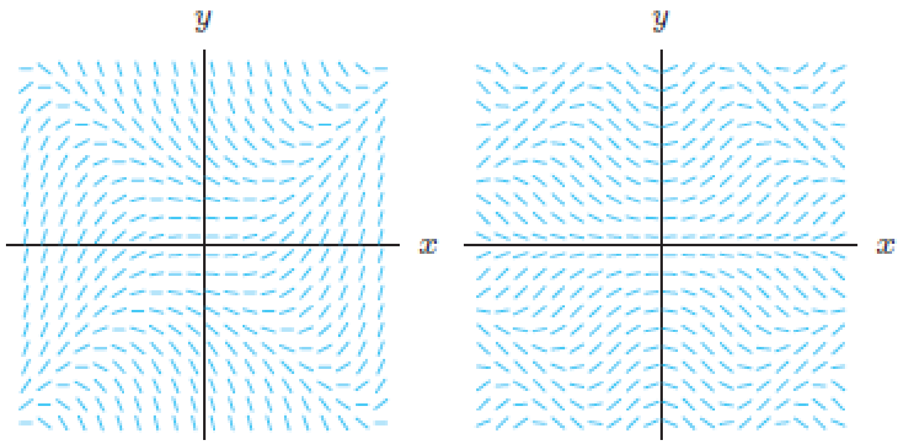


Observemos también que

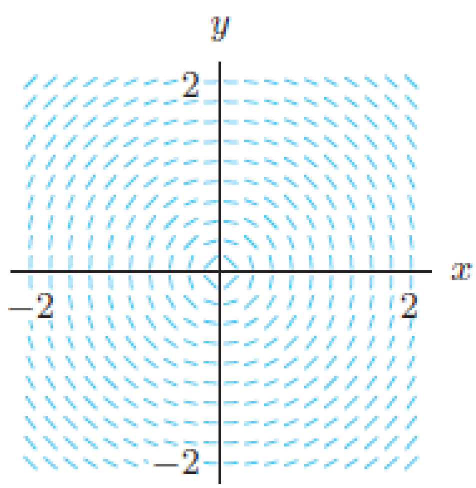
- todas las curvas integrales tienen a $y = 2$ como asíntota horizontal; por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 2$.

⋆ ⋆ ⋆

11. En la siguiente figura se muestran dos campos de direcciones; cuál de ellos corresponde a la ED $y' = x^2 - y^2$? Ubique en el gráfico a los puntos $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ y haga un bosquejo de la curva integral que pasa por el punto $(0,1)$ hasta que interseca a la recta $x = 2$.



12. En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente a la ED $y' = -\frac{x}{y}$. Haga un bosquejo de algunas curvas integrales; estarán representadas por una única función?



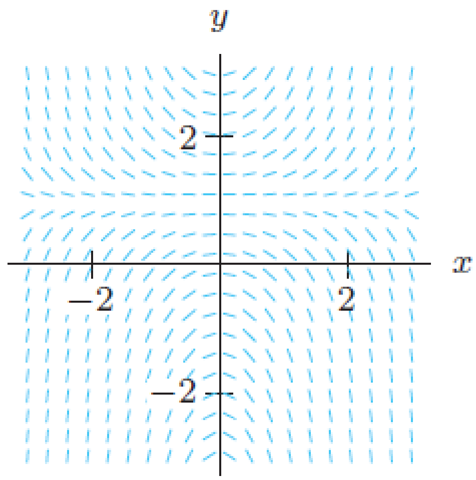
13. El campo de direcciones correspondiemte a la ED $y' = x(y-1)$ se muestra en la figura siguiente.

    (a) Haga un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

    i) $(0,0)$ ii) $(0,1)$ iii) $(0,-1)$

    (b) A partir de los bosquejos, proponga una expresión para la curva integral que pasa por el punto $(0,1)$.

    (c) Chequee la propuesta del inciso anterior reemplazándola en la ecuación diferencial.



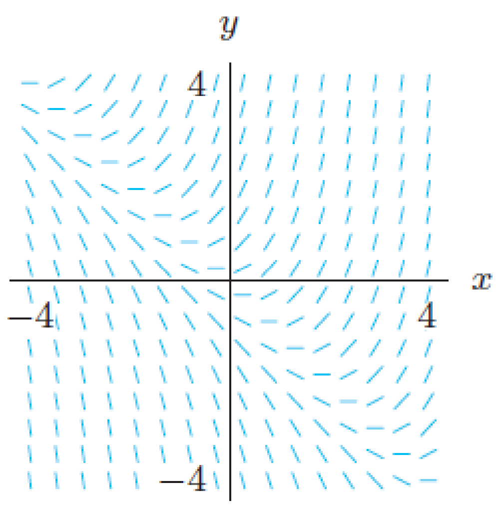
14. El campo de direcciones correspondiemte a la ED $y' = x + y$ se muestra en la figura siguiente.

    (a) Haga un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

    i) $(0, 0)$ ii) $(-3, 1)$ iii) $(-1, 0)$

    (b) A partir de los bosquejos, proponga una expresión para la curva integral que pasa por el punto $(-1, 0)$.

    (c) Chequee la propuesta del inciso anterior reemplazándola en la ecuación diferencial.



⋆ ⋆ ⋆

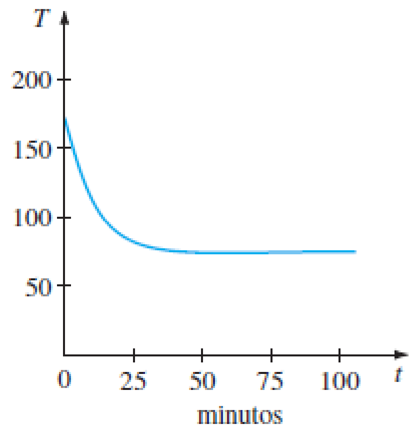
Por siglos las ecuaciones diferenciales han ocupado los esfuerzos de científicos para describir algún fenómeno físico o para traducir una ley empírica o experimental en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático**.

⋆ ⋆ ⋆

15. De acuerdo con la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea o temperatura ambiente.

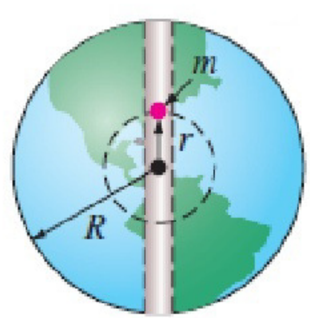
    (a) Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t y T_m es la temperatura ambiente, determine una ecuación diferencial que traduzca matemáticamente la ley de Newton.

    (b) En la gráfica se muestra la variación con el tiempo de la temperatura $T(t)$ de una taza de café que se enfría de acuerdo con la ley de Newton.



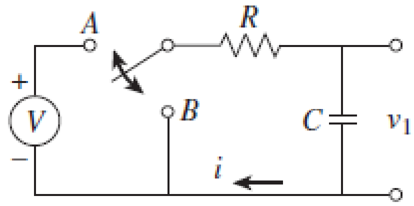
Utilice estos datos para ajustar las constantes de la EDO que gobierna este proceso y para determinar T_0, la temperatura en el momento en que se sirve el café ($t = 0$). Luego, defina el PVI correspondiente.

16. Suponga que se hace un agujero que pasa por el centro de la Tierra y que por él se deja caer una bola de masa m como se muestra en la figura. Construya un modelo matemático que describa el posible movimiento de la bola.

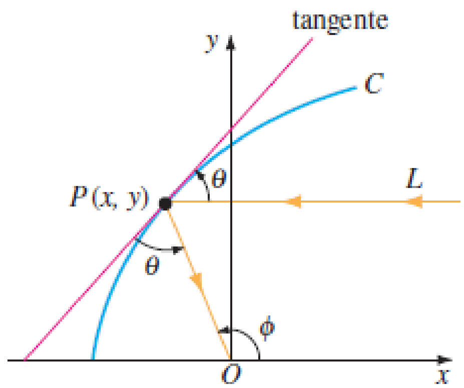


El túnel está excavado de polo a polo de manera que la rotación de la Tierra no influye sobre el movimiento.

17. En la figura se muestra un circuito con una resistencia y un capacitor. El voltaje de la batera V es constante y el capacitor está inicialmente descargado. Al inicio, el interruptor está cerrado en el punto B. En $t = 0$, el interruptor se mueve repentinamente del punto B al punto A. Obtenga el modelo de ecuación diferencial para el voltaje del capacitor V_I en función del tiempo.



18. Suponga que cuando la curva plana C que se muestra en la figura se gira respecto al eje x genera una superficie de revolución con la siguiente propiedad: todos los rayos de luz paralelos al eje x que inciden en ella son reflejados a un solo punto O (el origen). Utilice el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecuación diferencial que describa la forma de la curva C. *Esta curva C es importante en aplicaciones como construcción de telescopios o antenas de satélites, faros delanteros de automóviles y colectores solares.*



2. Ecuaciones de variables separables y ecuaciones que se reducen a ellas

Una EDO de primer orden se dice que es **separable** o que tiene **variables separables** si es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

La integral general de esta ecuación tiene la forma

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy - \int f(x)\,dx = C.$$

Después de integrar, se obtiene una familia monoparamétrica de soluciones (usualmente, quedan expresadas de manera implícita).

Ejemplo 1. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial $y' - (x+1)y^3 = 0$. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

Observemos primero que

$$y'(x) = \underbrace{(x+1)y^3}_{f(x,y)}$$

es una ED no lineal de primero orden. Observemos también que $f(x,y)$ es separable y que, claramente, $y = 0$ es una solución de la ED con dominio en $\mathbb{R}$. Si $y \neq 0$, podemos expresar la ED de la siguiente manera

$$\frac{y'}{y^3} = x + 1$$

Multiplicando por dx e integrando con respecto a x se obtiene

$$\int \frac{y'(x)}{y^3}\,dx = \int (x+1)\,dx - C \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^3} = \int (x+1)dx - C \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2y^2} = \frac{(x+1)^2}{2} - C.$$

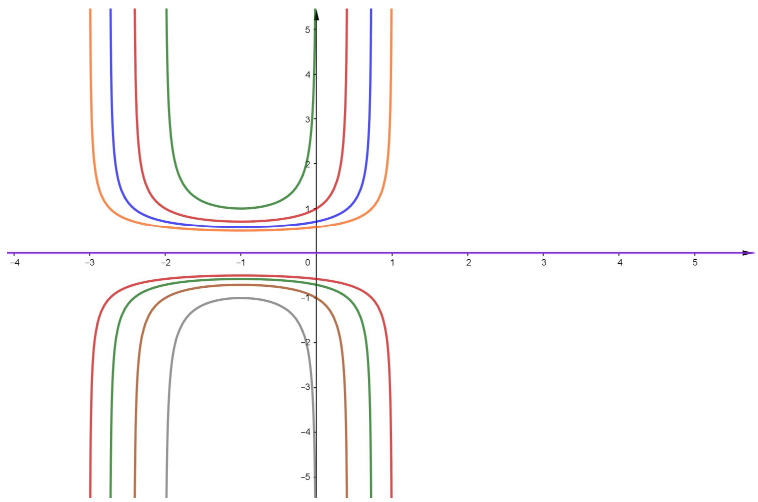
Luego, las curvas solución satisfacen la relación

$$(x+1)^2 + \frac{1}{y^2} = 2C$$

donde, obviamente, debe ser $C > 0$. Observemos que el dominio de la solución depende del valor de C o, equivalentemente, del dato $y(x_0) = y_0$. En efecto, la solución estará bien definida si

$$-(x+1)^2 + 2C > 0 \qquad \rightarrow \qquad |x+1| < \sqrt{2C}.$$

La dependencia del dominio de validez con la constante de integración es frecuente en ED no lineales. En la siguiente figura se muestran las curvas integrales correspondientes a distintos valores de C y la solución trivial $y = 0$.



Ejemplo 2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $(1+e^x)y\,y' = e^x$.

Se comprueba que es de variables separables escribiendo la ED en la forma standard; es decir,

$$y' = \underbrace{\frac{e^x}{(1+e^x)y}}_{f(x,y)} \qquad \Longrightarrow \qquad y\,y' = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Integrando, hallamos la solución general

$$\frac{1}{2}\,y^2 = \ln(1+e^x) + c; \qquad c \in \mathbb{R} : \ \ln(1+e^x) + c \geq 0.$$

Resolviendo para y explícitamente, obtendremos dos soluciones

$$y = \sqrt{2\ln(1+e^x) + 2c} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{2\ln(1+e^x) + 2c}.$$

Sabemos que la constante de integración c queda determinada si se conoce un punto por donde pasa la curva solución (dato inicial). Supongamos, entonces, que $y(x_0) = y_0$ es un dato inicial cualquiera; obtendremos inmediatamente

$$c_0 = \frac{1}{2}y_0^2 - \ln(1+e^{x_0}).$$

Obsérvese que, si $c_0 > 0$, ambas soluciones están definidas para todo x. En cambio, si $c_0 < 0$, las soluciones solo existen si

$$\ln(1+e^x) + c_0 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \ln(-1+e^{-c_0}).$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $y' = y^2 - 4$.

Supongamos que $y^2 - 4 \neq 0$; esto nos permitirá separar variables; tendremos

$$\frac{1}{y^2-4}\,y' = 1 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\Big)\,y' = 1.$$

Integrando y utilizando propiedades de los logaritmos, se obtiene

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = x + c.$$

La expresión anterior nos permite resolver para y explícitamente; en efecto, usando las propiedades de las exponenciales

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+4c} = e^{4x}\,e^{4c} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4c}\,e^{4x} \quad \Longrightarrow \quad y = 2\frac{1+k\,e^{4x}}{1-k\,e^{4x}}, \qquad \text{con } k = \pm e^{4c}.$$

Dado un dato inicial $y(x_0) = y_0$ cualquiera, puede determinarse la constante de integración k. En este caso, se obtiene inmediatamente

$$k_0 = \frac{y_0 - 2}{y_0 + 2} e^{-4x_0}.$$

Obsérvese que, si $k_0 < 0$, la solución está definida para todo x. En cambio, si $k_0 > 0$, la solución solo existe si

$$1 - k_0 e^{4x} \neq 0 \quad \to \quad x \neq -\frac{1}{4}\ln k_0.$$

Estas son todas las soluciones posibles?

Una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable independiente no aparece explícitamente se llama **autónoma**; es de la forma

$$y' = f(y). \tag{1}$$

Supondremos que la función f en la ecuación (1) y su derivada f' son funciones continuas de y en algún intervalo I; las raíces de la función f son de especial importancia en este contexto.

Decimos que un número real α es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma (1) si es una raíz de f; es decir, si $f(\alpha) = 0$. Un punto crítico también se llama punto de equilibrio o punto estacionario. Ahora observe que si sustituimos la función constante $y(x) = \alpha$ en la ecuación (1), entonces ambos lados de la ecuación son iguales a cero.

> *Si α es un punto crítico de la ecuación (1), entonces $y(x) = \alpha$ es una solución constante de la ecuación diferencial autónoma; se llama solución de equilibrio.*

Las soluciones de equilibrio son las únicas soluciones constantes de la ecuación (1).

Volviendo a la ecuación que estábamos resolviendo, el lado derecho es $y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$; por lo tanto, $y = 2$ e $y = -2$ son dos soluciones constantes o de equilibrio. Finalmente, el conjunto completo de soluciones será

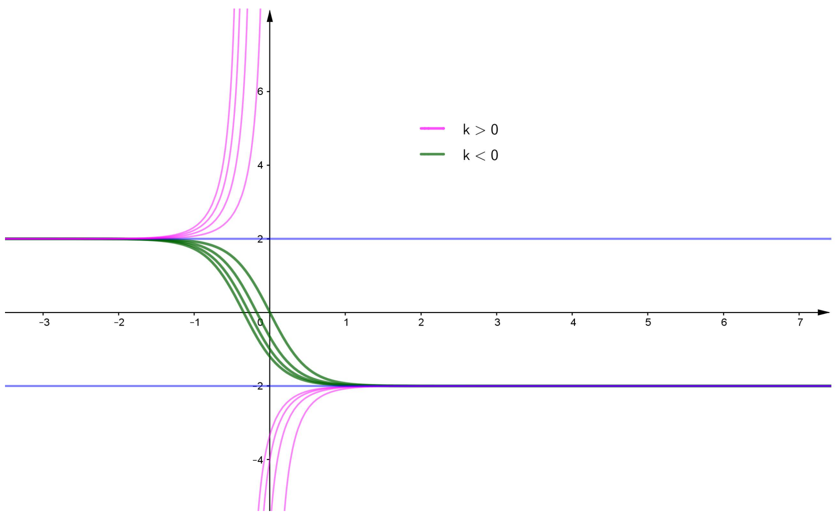
$$y = \begin{cases} -2 \\ \\ 2\,\dfrac{1+k\,e^{4x}}{1-k\,e^{4x}}; \quad k \neq 0 \\ \\ 2 \end{cases}$$

Observése que la solución $y = 2$ podría obtenerse del conjunto completo de soluciones para $k \to 0$. Por otro lado, si multiplicáramos numerador y denominador por $c = \dfrac{1}{k}$, la familia de soluciones podría escribirse de la siguiente manera:

$$y = \begin{cases} -2 \\ \\ 2\,\dfrac{c+e^{4x}}{c-e^{4x}}; \quad c \neq 0 \\ \\ 2 \end{cases}$$

Ahora, la solución $y = -2$ puede obtenerse de la expresión general haciendo $c \to 0$. En conclusión, si se permitiera que la constante de integración k tomara los valores límites 0 y ∞, se podría escribir simplemente

$$y = 2\,\frac{1+k\,e^{4x}}{1-k\,e^{4x}}.$$



⋆ ⋆ ⋆

1. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

   (a) $(3-x)y' - (2+y) = 0$

   (b) $xy\,dx - (1+x^2)\,dy = 0$

   (c) $y' - 6x(y-1)^{2/3} = 0$

   (d) $(x+\sqrt{x})y' = (y+\sqrt{y})$

   (e) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

2. Resuelva el siguiente PVI $\begin{cases} (1+e^x)\,y\,y' = e^y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

3. En cada uno de los siguientes casos, encuentre la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la función dada de las coordenadas y pasa por el punto particular indicado:

(a) $4y, \qquad (1,1)$

(b) $y\sqrt{x}, \qquad (1,4)$

(c) $2xy, \qquad (3,1)$

(d) $\dfrac{x}{y}, \qquad (1,\sqrt{2})$

⋆ ⋆ ⋆

Una ecuación de la forma $\Phi(x,y,\alpha) = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$, referida a un sistema de ejes rectangulares representa, para cada valor de α, una curva plana; es decir, es una *familia de curvas dependiente del parámetro* α o *una familia monoparamétrica de curvas planas.* Eliminando el parámetro α entre las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{cases} \Phi(x,y,\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\, y' = 0, \end{cases}$$

es posible encontrar la ecuación diferencial que verifican todas las curvas de la familia.

Cuando todas las curvas de una familia $y = \varphi(x, c_1)$ intersecan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $y = \zeta(x, c_2)$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí.

Ahora bien, dos curvas son ortogonales cuando las rectas tangentes a las respectivas gráficas son perpendiculares en los puntos donde se intersecan. De la geometría euclídea, se sabe que dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si, y solo si, $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Luego, si $y' = f(x,y)$ es la ecuación diferencial de una familia, la ecuación diferencial que determina las trayectorias ortogonales será

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

Ejemplo 4.

a) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $\varphi_\alpha(x) = \alpha\, x^5$, $\alpha \neq 0$.

Encontremos primero la ecuación diferencial que satisfacen las curvas $\varphi_\alpha(x)$; hacemos $y = \varphi_\alpha(x)$ y buscamos eliminar el parámetro α entre las ecuaciones

$$\begin{cases} y - \alpha\, x^5 = 0, \\ -5\alpha\, x^4 + y' = 0. \end{cases}$$

Haciendo esto, obtenemos

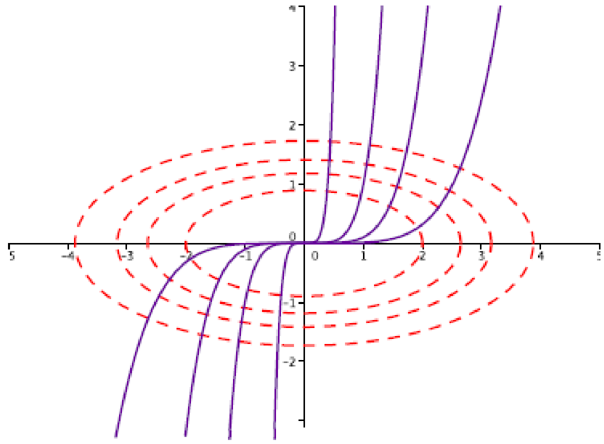
$$y' = \underbrace{5\,\frac{y}{x}}_{f(x,y)}\,.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales será

$$y' = -\frac{1}{5}\,\frac{x}{y}, \quad x \neq 0,\, y \neq 0$$

que es una EDO de variables separables. Resolviendo,

$$5\,y\,y' = -x \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \beta \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 5\,y^2 = 2\,\beta \quad \therefore \text{ es una familia de elipses.}$$



b) Encontrar las líneas de fuerza del campo eléctrico cuyas curvas equipotenciales están dadas por $\cos y - \alpha\, e^{-x} = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza de un campo eléctrico constituyen familias de trayectorias ortogonales; así, el problema se reduce a determinar las trayectorias ortogonales correspondientes a las curvas $\cos y - \alpha\, e^{-x} = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallemos primero la ecuación diferencial asociada a esta famillia. Derivando implícitamente con respecto a x, se tendrá

$$-y' \,\sin y + \alpha\, e^{-x} = 0.$$

Si se eliminara α entre las dos ecuaciones

$$\begin{cases} \cos y - \alpha\, e^{-x} = 0, \\ -y' \,\sin y + \alpha\, e^{-x} = 0, \end{cases}$$

se obtendría la ecuación diferencial de las curvas equipotenciales; haciendo esto, se llega a

$$-y' \,\sin y + \cos y = 0 \qquad \to \qquad y' = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Luego, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales será:

$$y' = -\tan y \qquad \to \qquad \text{es de variables separables.}$$

Observemos primero que las rectas $y = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, son solución. Para $y \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, tendremos

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = -\int dx \quad \to \quad \ln|\sin y| = -x + c \quad \to \quad |\sin y| = e^c e^{-x} \quad \to \quad \sin y = \pm e^c\, e^{-x}.$$

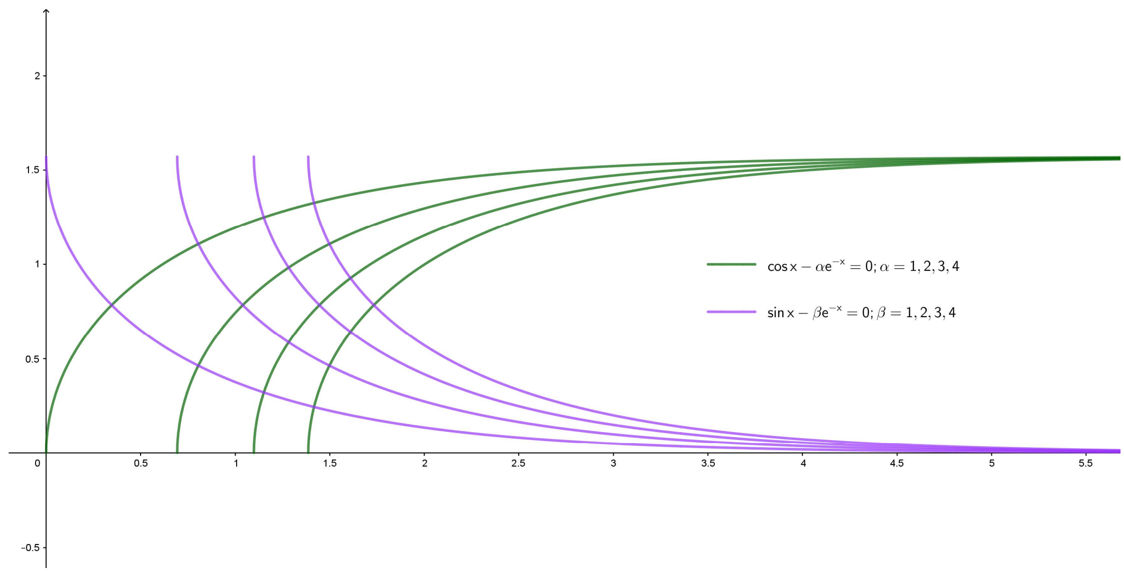
Finalmente, ambos tipos de soluciones pueden escribirse de la forma

$$\sin y - \beta\, e^{-x} = 0; \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que, si se elige $\beta \neq 0$, el dominio de cada solución quedará determinado por

$$-1 \leq \beta\, e^{-x} \leq 1 \quad \to \quad x \geq \ln|\beta|.$$

En la siguiente figura, se muestran las equipotenciales y las líneas de campo correspondientes a valores positivos de α y β; para ello, se ha restringido la variación de la función y al intervalo $0 \leq y \leq \pi/2$.



⋆ ⋆ ⋆

4. Considere la familia de curvas $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{1}{x+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentre la ecuación diferencial que tiene a $\varphi_\alpha(x)$ como solución general.

   (b) Determine las trayectorias ortogonales de esta familia.

   Trazar las gráficas de ambas familias en un mismo sistema de ejes coordenados.

5. Encuentre una solución de la ecuación $xy' = y^2 - y$ que pase por el punto de coordenadas

   (a) $(0, 1)$

   (b) $(0, 0)$

   (c) $(2, 1/4)$

   Graficar las soluciones halladas.

6. Con frecuencia, un cambio radical en la forma de la solución de un PVI corresponde a un cambio muy pequeño en la condición inicial. Determine una solución explícita de la ED $y' = (y-1)^2$ sujeta a la siguiente condición inicial:

   (a) $(0, 1)$

   (b) $(0, 1.1)$

   (c) $(0, 1.15)$

   Graficar las soluciones halladas; comparar cada solución en una vecindad del punto $(0, 1)$.

7. En los problemas siguientes, resolver las ecuaciones diferenciales sujetas a la condición indicada cuando $x \to \infty$.

(a) $(x+1)y' = y - 1, \quad y$ acotada para $x \to \infty$

(b) $x^3 \sin y \cdot y' = 2, \quad y \to \pi/2, \quad x \to +\infty$

(c) $y' = 2x(y+\pi), \quad y$ acotada para $x \to \infty$

(d) $x^3 y' - \sin y = 1, \quad y \to 5\pi, \quad x \to \infty$

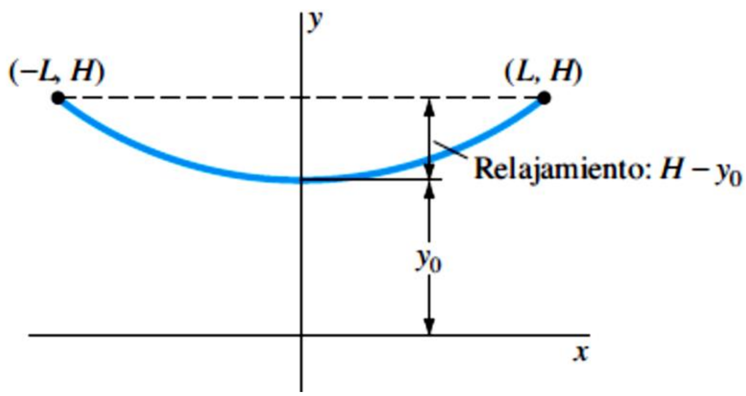
8. Dentro de ciertas limitaciones de velocidad, la resistencia del aire en un automóvil es proporcional a la velocidad. Por lo tanto, si $\mathbf{F}$ es la fuerza neta generada por el motor, tenemos

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{kv}.$$

Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, demostrar que:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{k}(1 - e^{-(k/M)t}).$$

9. Supóngase que un cable uniforme flexible está suspendido entre dos puntos $(\pm L, H)$ ubicados simétricamente a un lado y otro del eje x.



Pueden utilizarse principios de física para mostrar que la forma $\varphi(x)$ del cable colgando satisface la ecuación diferencial

$$ay'' = \sqrt{1 + (y')^2};$$

donde la constante $a = T/\rho$ es la relación entre la tensión T del cable en su punto más bajo $x = 0$ (donde $y'(0) = 0$) y su densidad lineal ρ que se asume constante. Resolver esta ecuación diferencial usando el cambio de variable $v(x) = y'(x)$. Mostrar que

$$\varphi(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Esta curva se llama *catenaria*, nombre que proviene de la palabra latina *cadena*.

⋆ ⋆ ⋆

La ecuaciones del tipo $y' = f(ax+by+c)$ se reducen a ecuaciones de variables separables mediante el cambio de variable $z = ax + by + c$.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $y' = (x+y+3)^2$.

Se resuelve por sustitución; en efecto, haciendo

$$v(x) = x + y(x) + 3 \quad \to \quad y(x) = v(x) - x - 3 \quad \to \quad y'(x) = v'(x) - 1.$$

Luego, la ecuación diferencial transformada será

$$v' = 1 + v^2 \quad \to \quad \text{es de variables separables.}$$

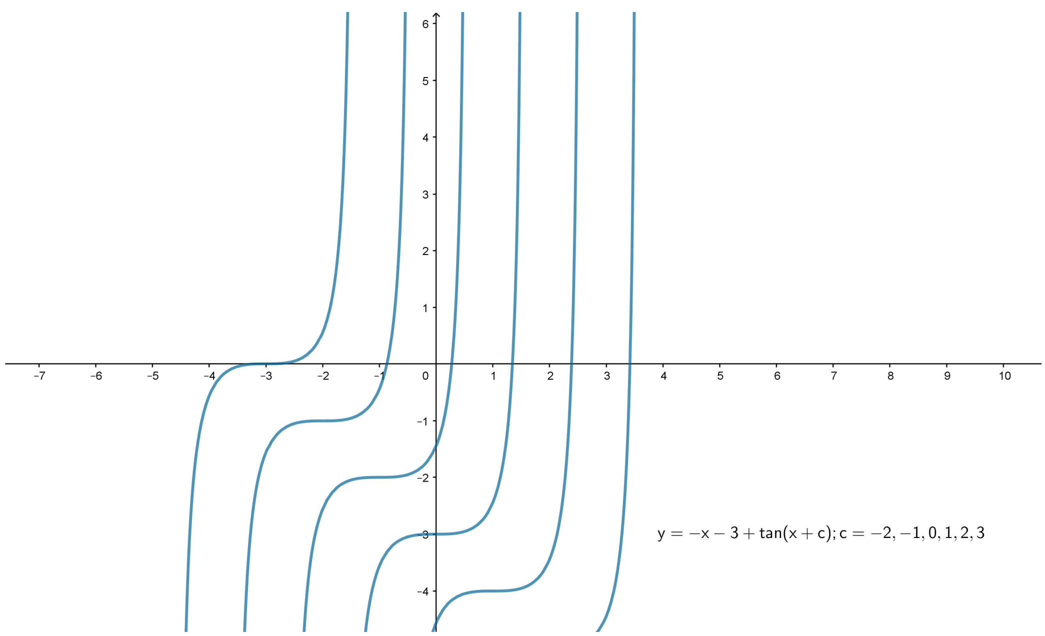
Integrando, obtendremos

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \int dx \quad \to \quad \arctan v = x + c \quad \to \quad v = \tan(x+c) \quad \to \quad x + y + 3 = \tan(x+c).$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial original es

$$y = -x - 3 + \tan(x+c); \quad c \in \mathbb{R}.$$

La siguiente figura muestra las curvas solución para distintos valores de c. Se observa que, aunque la función $f(x,y) = (x+y+3)^2$ es continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cada solución es continua solamente en un intervalo acotado. Más precisamente, debido a que la función tangente es continua en el intervalo abierto $-\pi/2 < x < \pi/2$, cada solución particular es continua en el intervalo $-\pi/2 - c < x < \pi/2 - c$. Esta situación es bastante común en ecuaciones diferenciales no lineales.



⋆ ⋆ ⋆

10. Resolver:

(a) $y' = \dfrac{x + 2y - 8}{2x + 4y - 1}$

(b) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$

(c) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

(d) $y' = 1 + e^{y-x+5}$

(e) $y' = \sin(x-y)$

11. Encuentre la solución del PVI $\begin{cases} y' = (-2x+y)^2 - 7 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Compruebe que la solución $\varphi(x)$ no es acotada conforme $x \to \infty$. Sin embargo, $\varphi(x)$ es asintótica a una curva conforme $x \to \infty$, cuál es la ecuación de esa curva? es solución de la ecuación diferencial?, cómo se comporta la solución cuando $x \to -\infty$?

Graficar la solución hallada y las curvas límites.

$\star \quad \star \quad \star$

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x,y)$ se dice **homogénea** si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero en sus argumentos.

Una ecuación homogénea siempre se puede escribir de la forma

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

De esta manera, introduciendo una nueva función incóngnita $u = \dfrac{y}{x}$, la ecuación (2) se reduce a la ecuación de variables separables.

$$x\,u' = \varphi(u) - u \tag{3}$$

Ejemplo 6. Resolver la ecuación $x\,y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ para $x > 0$.

Escribamos la ecuación de la forma

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Como la ecuación es homogénea, hacemos $y = x\,u$; entonces $y' = u + x\,u'$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene

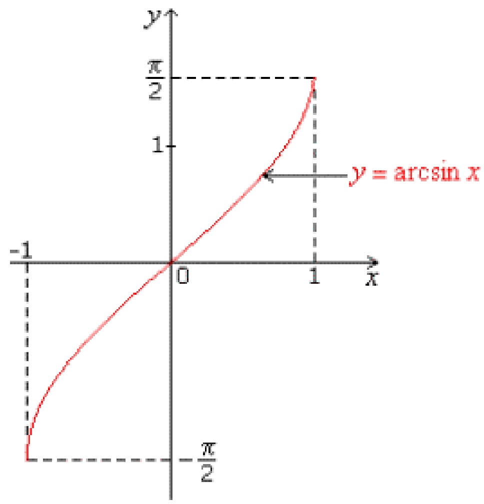
$$u + x\,u' = \sqrt{1-u^2} + u \qquad \Longrightarrow \qquad x\,u' = \sqrt{1-u^2}.$$

Supongamos que $u \neq \pm 1$. Separando variables e integrando, obtendremos

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,u' = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \arcsin u = \ln x + c = \ln x + \ln k = \ln(k\,x), \quad \text{con } k = e^c$$

Observemos que

$$|\ln(k\,x)| < \pi/2 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-\pi/2} < k\,x < e^{\pi/2}.$$



Por consiguiente, la solución general será

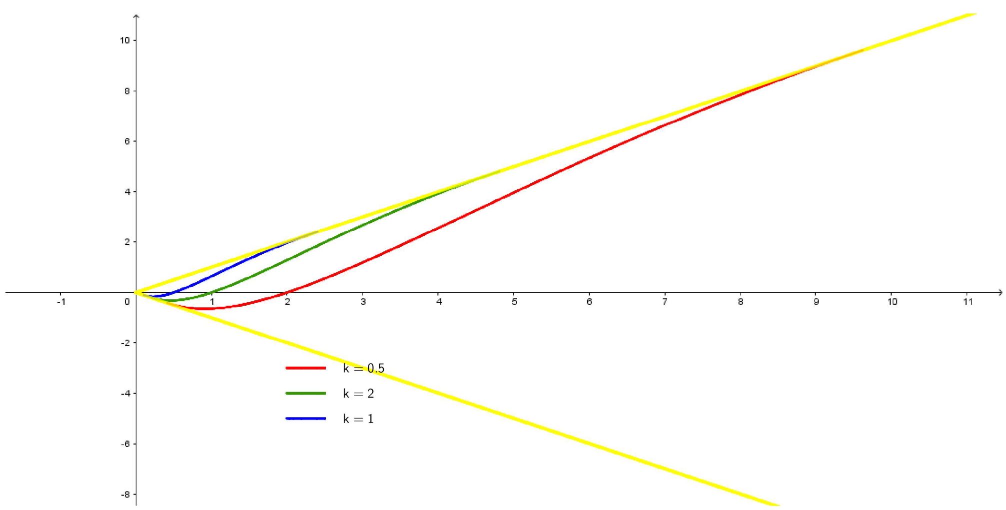
$$y(x) = x \sin(\ln(k\,x)), \quad k > 0.$$

Estas son todas las soluciones posibles?

El proceso de separación de variables excluyó a las rectas $u = \pm 1$; es decir $y = \pm x$ que satisfacen la ecuación diferencial (comprueben que es cierto). Entonces, el conjunto completo de soluciones será

$$y(x) = \begin{cases} -x & \\ x \sin(\ln(k\,x)) & k > 0 \\ x & \end{cases}$$

En la siguiente figura, se muestran las curvas solución correspondientes a $k = 0.5, 1, 2$. Debido al radical presente en la ecuación diferencial, estas curvas están confinadas en la región triangular $x \geq |y|$.



Obsérvese que las curvas integrales correspondientes a estos valores de k son tangentes a las curvas $y = \pm x$ en los puntos extremos de sus dominios. En general, si $k > 0$, tendremos

$$y'(x) = \sin(\ln(k\,x)) + \cos(\ln(k\,x)) \quad \rightarrow \quad y'\Big(\frac{e^{\pm\pi/2}}{k}\Big) = \pm 1.$$

Las rectas $y = \pm x$ son soluciones singulares de la ecuación diferencial.

$\star \quad \star \quad \star$

12. Resolver:

    (a) $x\,y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

    (b) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

    (c) $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

    (d) $xy' = y + 2x\,e^{-\frac{y}{x}}; \quad y(1) = 0$

13. Las curvas equipotenciales de cierto campo electrostático se pueden aproximar por las elipces $x^2 - 2\alpha\,x + 2y^2 = 0$. Encuentre las líneas de fuerza.

$\star \quad \star \quad \star$

Las ecuaciones de la forma $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ se convierten en ecuaciones diferenciales homogéneas trasladando el origen de coordenadas al punto (x_0, y_0) de intersección de las rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Esto se consigue haciendo el cambio de variables

$$u = x - x_0 \qquad v = y - y_0.$$

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $y' = \dfrac{2y - x + 7}{4x - 3y - 18}$.

Examinemos el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{cases} 2y - x + 7 = 0 \\ 4x - 3y - 18 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \triangle = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad \rightarrow \quad \text{tiene solución única.}$$

Resolviendo, encontramos que la solución es $(x_0, y_0) = (3, -2)$. Luego, hacemos la sustitución

$$\begin{cases} u(x) = x - x_0 = x - 3 \\ v(x) = y(x) - y_0 = y(x) + 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = u(x) + 3 \\ y(x) = v(x) - 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du},$$

y la ecuación diferencial se transforma en

$$v'(u) = \frac{2v - u}{4u - 3v} \quad \rightarrow \quad \text{es homogénea.}$$

Para resolver la ecuación transformada, hacemos una nueva sustitución

$$v(u) = uz(u) \quad \rightarrow \quad v' = z + z'u \quad \rightarrow \quad z + z'u = \frac{2z - 1}{4 - 3z} \quad \rightarrow \quad \text{es de variables separables.}$$

Separando variables, tendremos

$$z'u = \frac{3z^2 - 2z - 1}{4 - 3z} \quad \to \quad \frac{4/3 - z}{(z-1)(z+1/3)}\, z' = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{5}{z+1/3}\Big) z' = \frac{1}{u}.$$

Integrando, hallamos

$$\ln\Big|\frac{z-1}{(z+1/3)^5}\Big| = \ln u^4 + c \qquad \to \qquad \frac{z-1}{(z+1/3)^5} = \pm\, e^c\, u^4.$$

Finalmente, volviendo a las variables originales

$$z = \frac{v}{u} = \frac{y+2}{x-3} \qquad \to \qquad \frac{y-x+5}{(x+3y+3)^5} = \alpha; \quad \alpha = \pm\frac{e^c}{3^5} \neq 0.$$

⋆ ⋆ ⋆

14. Resolver:
    (a) $(x+y+2) + (x-y+4)y' = 0$
    (b) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y+1}\right)^2$
    (c) $(x-y)y' = x+y-6$

⋆ ⋆ ⋆

Supongamos que la función $f(x,y)$ tiene la siguiente propiedad: existe $\alpha \neq 0$, fijo, tal que

$$f(t\,x, t^\alpha y) = t^{\alpha-1} f(x,y).$$

Entonces, el cambio de variable $y = u^\alpha$ transforma la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ en una ecuación diferencial homogénea.

⋆ ⋆ ⋆

15. Resolver:
    (a) $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3 dx = 0$
    (b) $(y^4 - 3x^2)dy + xy\,dx = 0$

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Con las técnicas introducidas en esta guía, se pueden resolver las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 10-12 de la Práctica 0. Encuentre las soluciones correspondientes y compare con el bosquejo de las curvas integrales que hizo en esa ocasión.
2. Encuentre la forma de un espejo que refleja todos los rayos que emanan de un mismo punto en forma paralela a una determinada dirección. *(Sugerencia: ver el ejercicio 15 de la Práctica 0).*

3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y ecuaciones que se reducen a ellas.

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \tag{1}$$

se dice que es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y. Se asume que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en el intervalo donde se busca la solución de (1).

Si $q(x) = 0$, la ecuación (1) se llama **lineal homogénea**; en caso contrario, se llama **lineal no homogénea**. La ecuación lineal homogénea es una ecuación de variables separables; tiene una solución general de la forma

$$y_c(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

La solución general de la ecuación (1) puede escribirse como la suma de dos soluciones

$$y(x) = y_c(x) + \underbrace{e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx}_{y_p(x)}; \tag{2}$$

la función $y_p(x)$ es una **solución particular** de la ecuación no homogénea (1).

Ejemplo 1.

a) Resuelva la ecuación $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Observemos primero que $p(x) = 2x$ y $q(x) = 2x\,e^{-x^2}$ son funciones que están definidas y son continuas en $(-\infty, \infty)$.

Comencemos resolviendo la ecuación homogénea asociada; esto es $y' + 2xy = 0$. Separando variables e integrando, obtendremos

$$\frac{1}{y}\,dy = -2x\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -x^2 + k \Longrightarrow |y| = e^{k-x^2} \Longrightarrow y = \pm e^k e^{-x^2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Luego, haciendo $c = \pm e^k$, se tiene $y_c = c\,e^{-x^2}$.

Para hallar la solución particular, tengamos en cuenta que $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x^2}$. Entonces,

$$y_p = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}\,e^{x^2}\,dx\right) = x^2e^{-x^2}.$$

Finalmente, la solución general será

$$y = y_c + y_p = (x^2 + c)e^{-x^2}.$$

con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$.

b) Resuelva la ecuación $xy' - 4y = x^6e^x$.

Observemos primero que $p(x) = -\dfrac{4}{x}$ y $q(x) = x^5 e^x$ son funciones que están definidas y son continuas en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Como siempre resulta tedioso memorizar fórmulas, vamos a presentar un método alternativo (pero completamente equivalente) para hallar la solución general de una EDO lineal de primer orden.

Supongamos que $y = u(x)v(x)$; con u y v funciones derivables a determinar. Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$x(u'v + uv') - 4uv = x^6 e^x \Longrightarrow (xu' - 4u)v + xuv' = x^6 e^x \Longrightarrow \begin{cases} xu' - 4u & = 0 \\ \quad xuv' & = x^6 e^x \end{cases}$$

Así, hemos transformado la ecuación original en un sistema de EDOs de primer orden. Resolvemos primero la ecuación homogénea. Separando variables e integrando, se tiene

$$\frac{1}{u}\,du = \frac{4}{x}\,dx \Longrightarrow \ln|u| = 4\ln|x| + k \Longrightarrow |u| = x^4 e^k \Longrightarrow u = \pm e^k\, x^4 \Longrightarrow u = \alpha\, x^4, \quad \alpha = \pm e^k$$

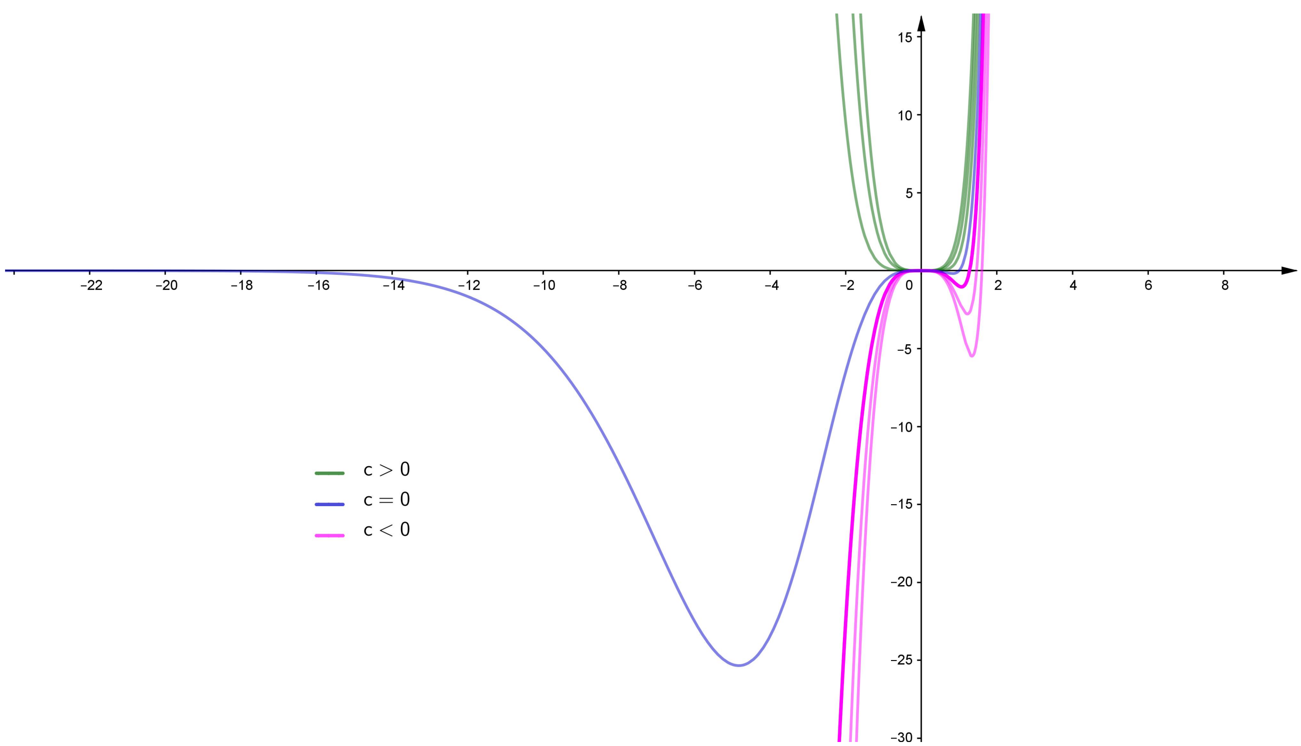
Luego, reemplazando $u = \alpha\, x^4$ en la ecuación no homogénea obtendremos

$$\alpha\, x^5 v' = x^6 e^x \Longrightarrow v' = \frac{1}{\alpha}\, xe^x \Longrightarrow v = \frac{1}{\alpha}(xe^x - e^x + c).$$

Finalmente, la solución general será

$$y = uv = \alpha\, x^4 \cdot \frac{1}{\alpha}(xe^x - e^x + c) = x^5 e^x - x^4 e^x + c\, x^4.$$

con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$.



Observación 1: Analizando los cálculos realizados, es evidente que la constante de integración k podría haberse elegido igual a cero sin perder generalidad.

Observación 2: Los valores de x para los que $p(x)$ es discontinua se llaman **puntos singulares** de la ecuación. Los puntos singulares son potencialmente problemáticos.

En el último ejemplo analizado, la ecuación diferencial tiene un punto singular en $x = 0$; los problemas causados por esta singularidad se ponen de manifiesto cuando intentamos dar respuesta a la siguiente pregunta: cuál es la curva solución que pasa por el origen?

⋆ ⋆ ⋆

1. Sean a y λ dos constantes positivas y b es un número real cualquiera. Mostrar que toda solución $\varphi(x)$ de la ecuación diferencial $y' + ay = be^{-\lambda x}$ tiene la siguiente propiedad $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ *(considerar los casos $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$ separadamente).*

2. Hallar el valor de y_0 de manera tal que la solución del siguiente PVI $\begin{cases} y' - y = 1 + 3\sin x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ se mantenga acotada cuando $x \to \infty$.

3. Hallar el valor de y_0 de manera tal que la solución del siguiente PVI $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{3}y = 1 - \dfrac{x}{2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ toque, pero no corte, al eje x.

4. Integrar las siguientes ecuaciones lineales.

   (a) $y' - 2\,\dfrac{y}{x+1} = e^x(1+x)^2$

   (b) $(1+x^2)y' + y = \arctan x$

   (c) $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = a,$ considerar los casos $|x| < 1$ y $|x| > 1$

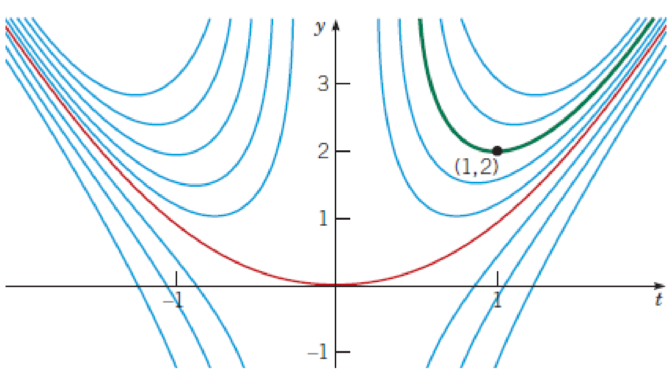
5. En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular indicada.

   (a) $y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x,$ y acotada cuando $x \to \infty$

   (b) $y' + ye^x = 3e^x,$ $y \to 2$ cuando $x \to -\infty$

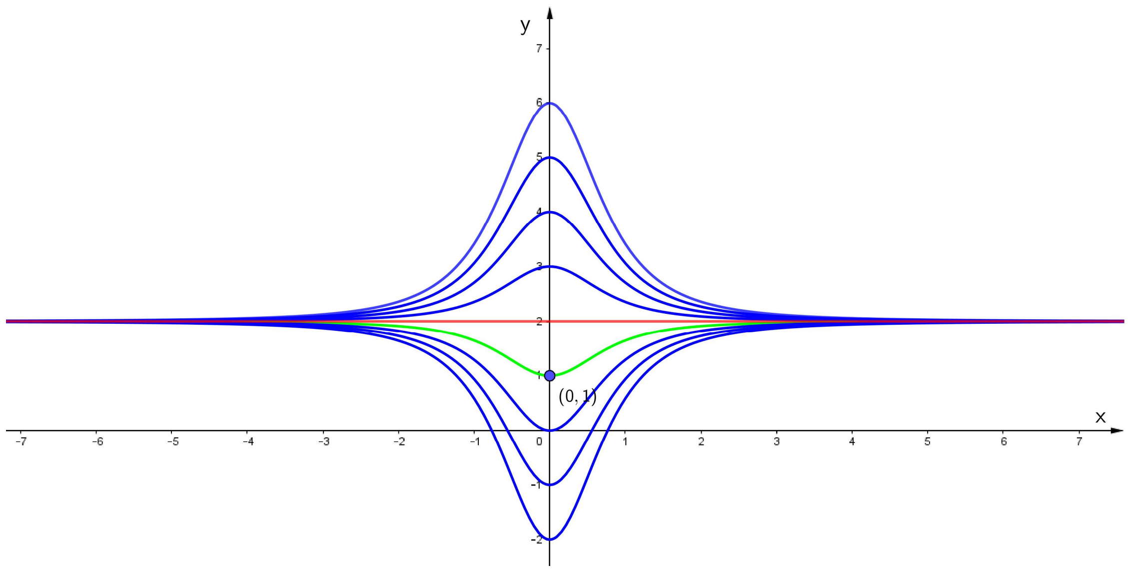
   (c) $y' + \dfrac{2}{x}\,y = 4x,$ $y(1) = 2$

   A continuación, se muestran las curvas integrales correspondientes a la ecuación del ejercicio 5c). La curva en rojo es la solución particular correspondiente a $C = 0$. Obsérvese que esta curva separa soluciones que tienen comportamientos bien diferenciados; se denomina *solución crítica* de la ED.



(d) $(1+x^2)y' + 3xy = 6x, \quad y(0) = 1$

A continuación se muestran las curvas integrales correspondientes al ejercicio 5d). Obsérvese que, conforme $x \to \infty$, todas las otras curvas solución se aproximan a la solución particular $y(x) = 2$ que corresponde a $C = 0$. Esta solución constante se conoce como una *solución de equilibrio* de la ED.



(e) $x \ln x \, y' - (1 + \ln x)\, y + \frac{1}{2}(2 + \ln x)\sqrt{x} = 0; \quad y(e) = 1$

⋆ ⋆ ⋆

En muchos problemas (por ejemplo, en problemas de naturaleza geométrica), las variables x e y son absolutamente equivalentes. Por lo tanto, si el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

suele considerarse también las soluciones del problema asociado

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{4}$$

Si ambos problemas están definidos para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces son problemas idénticos; en efecto, si $y = \varphi(x)$ es una solición de (3), la función inversa $x = \varphi^{-1}(y)$ será solución de (4) y, por lo tanto, ambos problemas tienen el mismo conjunto de curvas integrales. Pero, si en ciertos puntos $f(x, y)$ no estuviera definida, sería natural investigar las soluciones del problema (3) en esos puntos reemplazándolo por el problema (4).

⋆ ⋆ ⋆

6. Resolver

   (a) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

   (b) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$

   (c) $y' = \dfrac{1}{x + y\,e^{y}}$

⋆ ⋆ ⋆

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde n es cualquier número real, se denominan de Bernoulli en honor del matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705).

Obsérvese que, para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación se reduce a una ED lineal. Si $n \neq 0$ o $n \neq 1$, el cambio de variable $u = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal para u.

Ejemplo 2. Hallar la solución de siguiente PVI $\begin{cases} xy' + 6y = 3xy^{4/3}, \\ y(1) = 1/8. \end{cases}$

Observemos que la ecuación diferencial no es de variables separables, ni homogénea, ni lineal, pero es una ecuación de Bernoulli con $n = 4/3$. Entonces, las sustituciones

$$1 - n = -1/3; \quad u = y^{-1/3} \quad \rightarrow \quad y = u^{-3} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -3u^{-4}\frac{du}{dx},$$

la transforman en

$$-3xu^{-4}\frac{du}{dx} + 6u^{-3} = 3xu^{-4} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = 1}_{\text{ED lineal}}; \quad x \neq 0.$$

Ahora, podemos usar la expresión (2) para encontrar a $u(x)$. Para esto, tengamos en cuenta que $p(x) = -\dfrac{2}{x}$ y $q(x) = 1$. Es fácil comprobar que

$$e^{\int p(x)\,dx} = \frac{1}{x^2},$$

$$u_c(x) = c\,e^{-\int p(x)\,dx} = c\,x^2,$$

$$u_p(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx = x^2\Big(\int \frac{1}{x^2}\,dx\Big) = x.$$

Finalmente, tendremos

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x) = (x + cx^2) \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{(x + cx^2)^3}.$$

Para determinar la solución del PVI, será necesario ajustar la constante c de manera tal que se verifique la condición inicial. Haciendo esto, encontramos

$$y_0 = \frac{1}{(x_0 + cx_0^2)^3} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{(1+c)^3} \qquad \rightarrow \qquad c = 1.$$

Luego,

$$y(x) = \frac{1}{(x+x^2)^3}, \quad \text{con dominio en } (0, \infty).$$

Observación importante: el dominio de $y(x)$ como función real es $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$; pero el dominio de $y(x)$ como solución del PVI es $(0, \infty)$.

⋆ ⋆ ⋆

7. Resolver:
   (a) $xy' + y = y^2 \ln x$
   (b) $y' - 4\,\dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}$
   (c) $x^2 y' - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \frac{1}{2}$
   (d) $xy^2 y' + y^3 = x \cos x$

⋆ ⋆ ⋆

La ecuación de Ricatti es una ecuación no lineal de la forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2,$$

llamada así en honor del matemático y filósofo italiano Jacobo Francesco Ricatti (1676-1754).

Una ecuación de Riccati se puede resolver por medio de dos sustituciones consecutivas, siempre y cuando se conozca una solución particular, y_p, de la ecuación. La sustitución $y = y_p + u$ reduce la ecuación de Riccati a una ecuación de Bernoulli para u con $n = 2$.

Ejemplo 3. La función $y_p(x) = \dfrac{2}{x}$ es una solución de la ecuación $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$. Usando esta información, determine la familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial.

Observemos primero que $p(x) = -\dfrac{4}{x^2}$, $q(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $r(x) = 1$ están definidas y son continuas en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Como la ecuación diferencial es de Riccati, hacemos $y(x) = \dfrac{2}{x} + u(x)$ y sustituimos en la ecuación diferencial para obtener

$$-\frac{2}{x^2} + u' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + u\right) + \left(\frac{2}{x} + u\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{u' = \frac{3}{x}u + u^2}_{\text{ED de Bernoulli con } n=2}.$$

Ahora, para resolver la ecuación de Bernoulli, hacemos $v = u^{1-2} = \dfrac{1}{u} \Rightarrow u = \dfrac{1}{v}$ y susitituimos en la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de u. Haciendo esto, tendremos

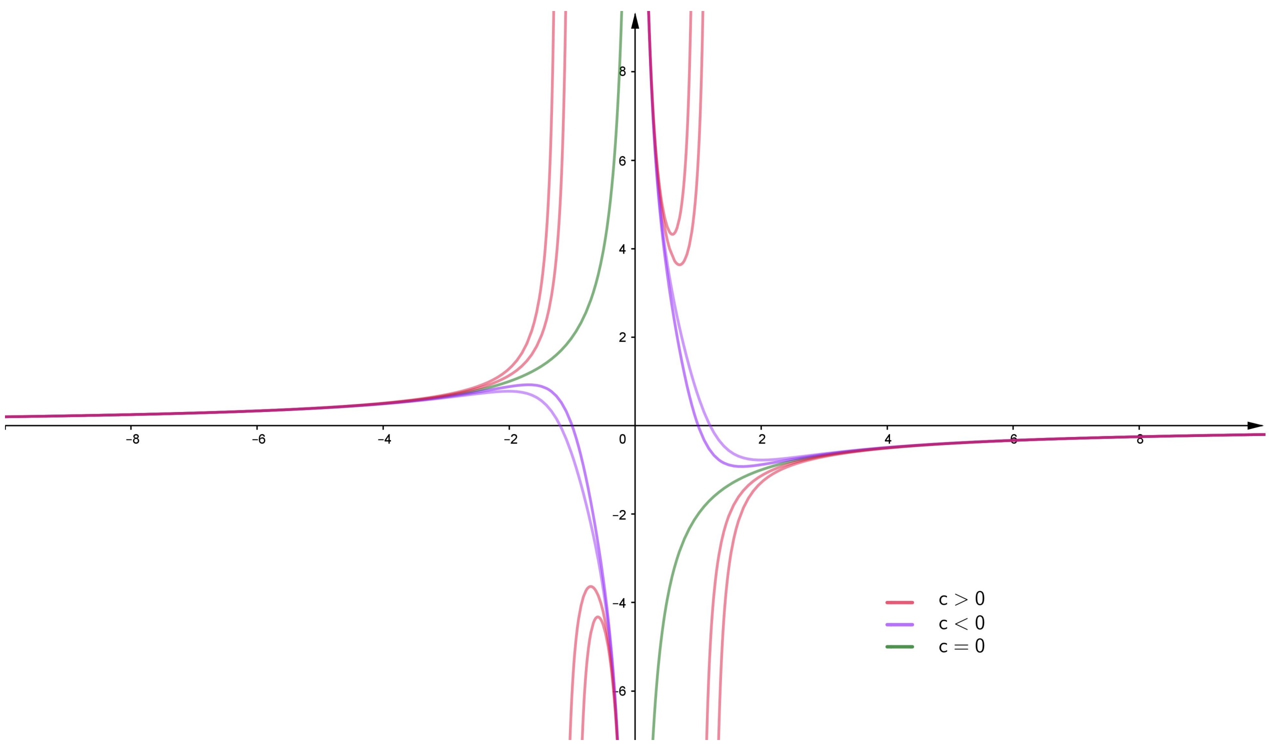
$$-\frac{1}{v^2}\, v' = \frac{3}{x}\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{v' = -\frac{3}{x}\, v - 1}_{\text{ED lineal}}\,.$$

Para resolver la ecuación lineal, escribimos $v = z(x)w(x)$ y reemplazmos la ecuación diferencial por el sistema de escuaciones

$$\left\{\begin{aligned} z' + \frac{3}{x}\, z &= 0 \Rightarrow z = \frac{1}{x^3} \\ zw' &= -1 \Rightarrow w' = -x^3 \Rightarrow w = -\frac{x^4}{4} + c \end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow v = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^4}{4} + c\right) = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3} = \frac{4c - x^4}{4x^3}.$$

Finalmente, $y(x) = y_p(x) + u(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{v(x)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4x^3}{4c - x^4}$.

En la siguiente figura, se muestran las correspondientes curvas integrales para distintos valores de la constante c.



⋆ ⋆ ⋆

8. Comprobar que y_p es una solución particular y resolver.

   (a) $y' = 2 - 2x\,y + y^2, \qquad y_p(x) = 2x$

(b) $y' = e^{2x} + (1 + 2e^{x})\, y + y^2, \qquad y_p(x) = -e^{x}$

(c) $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}\, y - 2y^2, \qquad y_p(x) = x$

Comentario: la solución de una EDO podría quedar expresada en términos de una integral no elemental; en ese caso, no intente resolver la integral.

4. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición. Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

es exacta si existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$d\,\varphi(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Teorema. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas, con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa del plano xy, entonces la ecuación (1) es exacta si, y solo si,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Método de solución. Las soluciones de la ecuación (1) están dadas (en forma implícita) por las curvas de nivel $\varphi(x,y) = c$; o bien,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(\hat{x}, y_0)\,d\hat{x} + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{y} = c \qquad \text{(ver Figura 1)}$$

o, alternativamente,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} N(x_0, \hat{y})\,d\hat{y} + \int_{(x_0,y)}^{(x,y)} M(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x} = c \qquad \text{(ver Figura 2)}$$

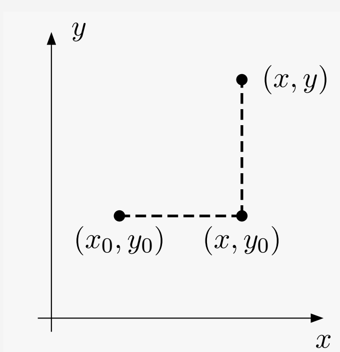


Figura 1

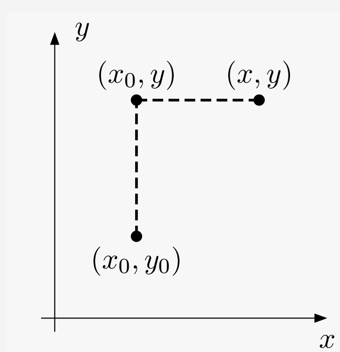


Figura 2

Ejemplo 1.

a) Resolver la ecuación diferencial $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$.

Comprobemos primero que la ecuación dada sea una diferencial exacta. En este caso, las funciones M y N son infinitamente derivables en $\mathbb{R}^2$ y, además,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy\cos xy) = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}x^2\cos xy = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por consiguiente,

$$\varphi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} \hat{x}_0^2\cos x_0\hat{y}\,d\hat{y} + \int_{(x_0,y)}^{(x,y)}(\sin\hat{x}\hat{y} + \hat{x}\hat{y}\cos\hat{x}\hat{y})\,d\hat{x} = x_0\sin x_0\hat{y}\Big|_{y_0}^{y} + \hat{x}\sin\hat{x}\hat{y}\Big|_{x_0}^{x} = c,$$

de modo que la solución general de la ecuación (definida en forma implícita) será

$$x\sin xy - x_0\sin x_0y_0 = c \Longrightarrow x\sin xy = k; \quad k = c + x_0\sin x_0y_0.$$

b) Resolver el PVI $\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - \cos x\sin x}{y(1-x^2)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Primero, escribamos la ecuación de la forma

$$\underbrace{(\cos x\sin x - xy^2)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{y(1-x^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0,$$

y comprobemos que sea una diferencial exacta. Se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x};$$

por lo tanto, existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = N(x,y).$$

Determinaremos $\varphi(x,y)$ integrando $M(x,y)$ respecto a x mientras y se mantiene constante; haciendo esto, tendremos

$$\varphi(x,y) = \int(\cos x\sin x - xy^2)\,dx + \eta(y) = -\frac{1}{2}(\cos^2 x + x^2y^2) + \eta(y),$$

donde la función arbitraria $\eta(y)$ es la *constante de integración con respecto a x.*

Para determinar $\eta(y)$ derivamos esta expresión parcialmente con respecto a y e igualamos el resultado a $N(x,y)$; de este modo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = -x^2y + \eta'(y) = y(1-x^2) \Longrightarrow \eta'(y) = y \Longrightarrow \eta(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Luego, las curvas integrales estarán definidas implítamente por la relación

$$\varphi(x,y) = c \Longrightarrow -\frac{1}{2}(\cos^2 x + x^2y^2) + \frac{1}{2}y^2 = c \Longrightarrow y^2(1-x^2) - \cos^2 x = 2c.$$

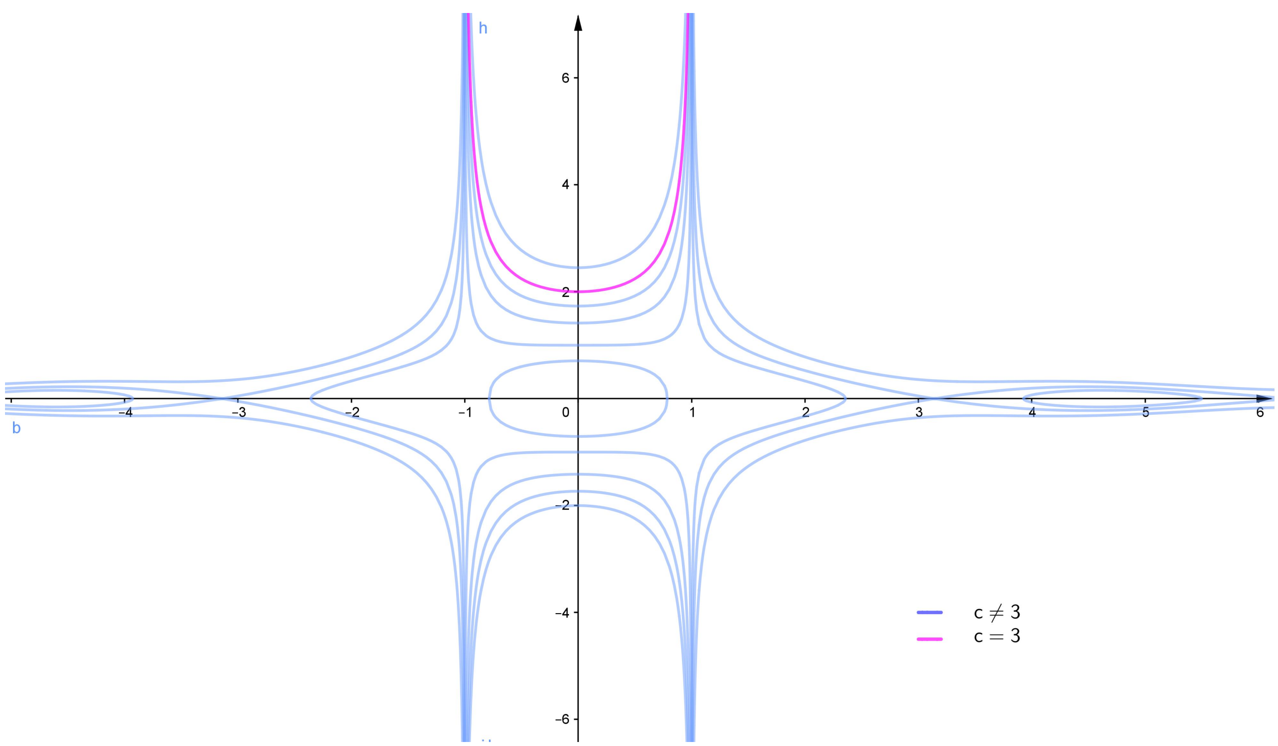
Podríamos haber usado el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior? Sí, por supuesto, pero de esta manera no hace falta memorizar fórmulas!

La condición inicial $y(0) = 2$ exige que $4(1-0) - \cos^2 0 = 2c$ y, por lo tanto, $2c = 3$. Finalmente, la solución del PVI será

$$y = \sqrt{\frac{3+\cos^2 x}{1-x^2}}$$

con dominio de validez en $(-1, 1)$.

Observación: la función $f(x,y) = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}$ (el lado derecho de la ED) no está definida para $x = \pm 1$; por consiguiente, es natural que los dominios de validez de las soluciones estén restringidos a los intervalos $|x| < 1$ y $|x| > 1$. La siguiente figura muestra algunas curvas que pertenen a la familia de soluciones de la ED; se destaca, en particular, la curva solución del PVI.



⋆ ⋆ ⋆

1. Verificar que las siguientes ecuaciones son diferenciales exactas y resolver.

   (a) $(2x - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0$

   (b) $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dy = 0$

(d) $(x^2 - y)\,dx - (x + \sin^2 y)\,dy = 0$

2. Encontrar el valor de b para el cual la ecuación diferencial dada es exacta; luego, resolver usando ese valor de b.

   (a) $(xy^2 + bx^2y) + (x + y)x^2\,y' = 0$

   (b) $(ye^{2xy} + x) + bxe^{2xy}\,y' = 0$

⋆ ⋆ ⋆

> Definición. Una función $\mu(x, y)$ que al multiplicar una ecuación diferencial que no es exacta la convierte en una exacta se denomina **factor integrante.**

Ejemplo 2.

Mostrar que $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2y}$ es un factor integrante para la ecuación diferencial $-y^2\,dx+(x^2+xy)\,dy = 0$.

Observemos primero que

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y) = -y^2 & \rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = -2y \\[2ex] N(x,y) = x^2 + xy & \rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Luego, la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicando cada término de la ecuación diferencial por $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2y}$ se obtiene

$$-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{x+y}{xy}\,dy = 0.$$

Para esta ecuación

$$\left.\begin{array}{lcl} \widehat{M}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} & \rightarrow & \dfrac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\[2ex] \widehat{N}(x,y) = \dfrac{x+y}{xy} & \rightarrow & \dfrac{\partial \widehat{N}}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x}.$$

Como la nueva ecuación diferencial es exacta, existirá una función $\varphi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = \widehat{M}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = \widehat{N}(x,y).$$

Procediendo como en el Ejemplo 1, se se obtiene

$$\frac{y}{x} + \ln y = C$$

Observación. En el proceso de multiplicar por un factor integrante, puede ocurrir que se pierdan o se ganen soluciones. En el ejemplo anterior, $y = 0$ es una solución de la ecuación original que se perdió al multiplicar por el factor integrante $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 y}$.

Cómo se calcula un factor integrante?

En teoría, existe un factor integrante para cada ecuación de la forma $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$. Supongamos que $\mu(x, y)$ sea un factor integrante para esta ecuación diferencial con primeras derivadas parciales continuas. Entonces (por definición) debe verificarse

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)\, M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y) N(x, y)),$$

de donde se obtiene

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big)\, \mu$$

o, equivalentemente,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

En general, resolver la ecuación (3), que es una ecuación en derivadas parciales, es al menos tan difícil como resolver el problema original. Por lo tanto, aunque en principio los factores integrantes son herramientas poderosas para resolver ecuaciones diferenciales, en la práctica solo se pueden encontrar para ciertos casos especiales.

Las situaciones más importantes en las que se pueden encontrar factores integrantes simples ocurren cuando μ es función de un solo argumento (por ejemplo es sólo función de x, o sólo de y, o sólo de $x \pm y$, o sólo de x/y, ect.). En estos casos, se puede integrar la ecuación (3) sin dificultad e indicar las condiciones bajo las cuales existe un factor integrante del tipo considerado.

Ejemplo 3.

Encontrar un factor integrante para la ecuación diferencial $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$.

Comencemos por comprobar que la ED no es exacta. En este caso,

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = 4xy - 6y^2 \neq 0.$$

Observemos que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M(x, y)} \Big(\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)\Big) & = \dfrac{4xy - 6y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \dfrac{2}{y} \\[2ex] \dfrac{1}{N(x, y)} \Big(\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)\Big) & = \dfrac{4xy - 6y^2}{7 - 3xy^2}. \end{cases}$$

Dado que uno de estos cocientes solo depende de la variable y, asumiremos que el factor integrante será también una función de y solamente. Imponiendo esta condición en la ecuación (3), obtenemos

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M - \dfrac{\partial}{\partial x} N}{M} = -\frac{2}{y} \quad \Longrightarrow \quad \ln|\mu| = -2 \ln|y| + c \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{k}{y^2};\ k = \pm e^c.$$

Ahora, la ecuación diferencial modificada (elegimos $k=1$, sin pérdida de generalidad) será

$$\underbrace{\frac{2xy^2-3y^3}{y^2}}_{\widehat{M}(x,y)}\,dx+\underbrace{\frac{7-3xy^2}{y^2}}_{\widehat{N}(x,y)}\,dy=0.$$

Calculando las derivadas parciales,

$$\frac{\partial}{\partial y}\widehat{M}(x,y)=-3=\frac{\partial}{\partial x}\widehat{N}(x,y),$$

lo que prueba que es exacta.

Teorema. Si el cociente

$$P=-\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)$$

es una función solo de la variable y, la ecuación diferencial (1) admitirá un factor integrante que estará dado por

$$\mu(y)=exp\int_{y_0}^{y}P(\eta)\,d\eta.$$

Si, en cambio, el cociente

$$Q=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)$$

solo depende de la variable x, la ecuación (1) admitirá un factor integrante de la forma

$$\mu(x)=exp\int_{x_0}^{x}Q(\eta)\,d\eta.$$

⋆ ⋆ ⋆

3. La ecuación $x\,dy-y\,dx=0$ no es exacta.

   (a) Verificar que admite los siguientes factores integrantes y encontrar la diferencial exacta correspondiente en la que se transforma.

      i. $\dfrac{1}{x^2}$

      ii. $\dfrac{1}{x^2+y^2}$

      iii. $\dfrac{1}{xy}$

      iv. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$

(b) Verificar que todas las diferenciales exactas halladas en el inciso anterior conducen a la solución general $\dfrac{y}{x} = c$.

Graficar las curvas integrales para distintos valores de c.

4. Compruebe que la ecuación diferencial dada es no exacta. Multiplique la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(x, y)$ indicado y compruebe que la nueva ecuación es exacta. Resuelva.

   (a) $(-xy \sin x + 2y \cos x)\, dx + 2x \cos x\, dy = 0; \quad \mu(x, y) = xy$

   (b) $(2x^2 + e^{-y})\, dx + (x^3 + xy)\, dy = 0; \quad \mu(x, y) = \dfrac{e^y}{x}$

   (c) $(3y^2 - x)\, dx + (2y^3 - 6xy)\, dy = 0; \quad \mu(x, y) = \dfrac{1}{(x + y^2)^3}$

   (d) $(1 - x^2)\, dx + (1 + x)^2\, dy = 0; \quad \mu(x, y) = e^{-x+y}$

5. Resolver verificando que admiten factores integrantes de una sola variable.

   (a) $\left(y - \tan y \cos^2 x\right)\, dx + \left(\sin x \cos x - x\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y}\right)\, dy = 0$

   (b) $(2xy + 1)y\, dx + (y - x)\, dy = 0$

   (c) $\sin x - x \cos x - 3x^2(y - x)^2 + 3x^2(y - x)^2 y' = 0$

   (d) $(x^3 + y^3)\, dx - xy^2\, dy = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales sabiendo que admiten un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$, con α, $\beta \in \mathbb{R}$ constantes a determinar.

   (a) $(y^3 + xy^2 + y)\, dx + (x^3 + x^2 y + x)\, dy = 0$

   (b) $(3y^2 + 10xy)\, dx + (5xy + 12x^2)\, dy = 0$

   (c) $(7x^4 y - 3y^8)\, dx + (2x^5 - 9xy^7)\, dy = 0$

7. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $(x + y)^m$, con $m \in \mathbb{R}$ constante a determinar.

8. Una ecuación diferencial de la forma $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ se dice homogénea si las funciones P y Q son homogéneas del mismo grado. Mostrar que admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$ (asumiendo siempre que el denominador no se anula idénticamente).

   El siguiente resultado será de utilidad para resolver este ejercicio: si $F(x, y, z)$ es una función homogénea de grado m, entonces se verifica

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = mF \qquad \textit{(Teorema de Euler).}$$

9. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$ *(Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior).*

10. Suponga que las funciones P y Q satisfacen $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = f(x)Q(x,y) - g(y)P(x,y)$. Mostrar, entonces, que la ecuación diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ admite el factor integrante $\mu(x,y) = e^{\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy}$.

11. Resolver la ecuación diferencial $(2x^2y+y^2)\,dx+(2x^3-xy)\,dy = 0$ *(Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior).*

5. Teorema de Existencia y Unicidad - Método de Picard

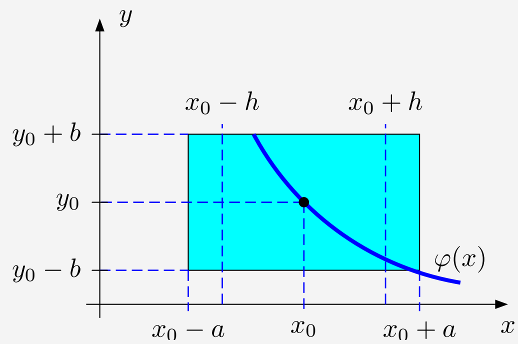
Teorema de Existencia y Unicidad. Considere el PVI $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo $\mathcal{D} := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, entonces existe una única solución del PVI definida en (al menos) un entorno de x_0. La solución puede hallarse por el método de las aproximaciones sucesivas de Picard. Este método consiste en formar una sucesión de funciones $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ definidas por

$$y_0(x) = y_0, \qquad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Si se cumplen las hipótesis del teorema, se puede probar que la sucesión $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ converge a la solución del PVI en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (x_0 - a, x_0 + a)$, donde

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad \text{y} \quad M = \max_{(x,y) \in \mathcal{D}} |f(x,y)|.$$



Observaciones:

- la continuidad de $f(x,y)$ en un entorno de (x_0, y_0) garantiza la existencia de al menos una solución del PVI, pero es insuficiente para probar la unicidad,

- el teorema expresa las condiciones suficientes para la existencia de una única solución del PVI; pero estas condiciones no son necesarias (es decir, un PVI podría tener solución única aunque en el punto (x_0, y_0) la función $f(x,y)$ no cumpla una de las condiciones o, incluso, no cumpla ninguna de las condiciones),

- el teorema asegura la existencia de una **solución local** del PVI (no es útil para determinar el dominio de validez de la solución),

- el número h depende directamente de la elección de a y b; más aún, h no necesariamente crece si lo hacen a y b ya que un incremento de a o de b podría producir también un incremento de M.

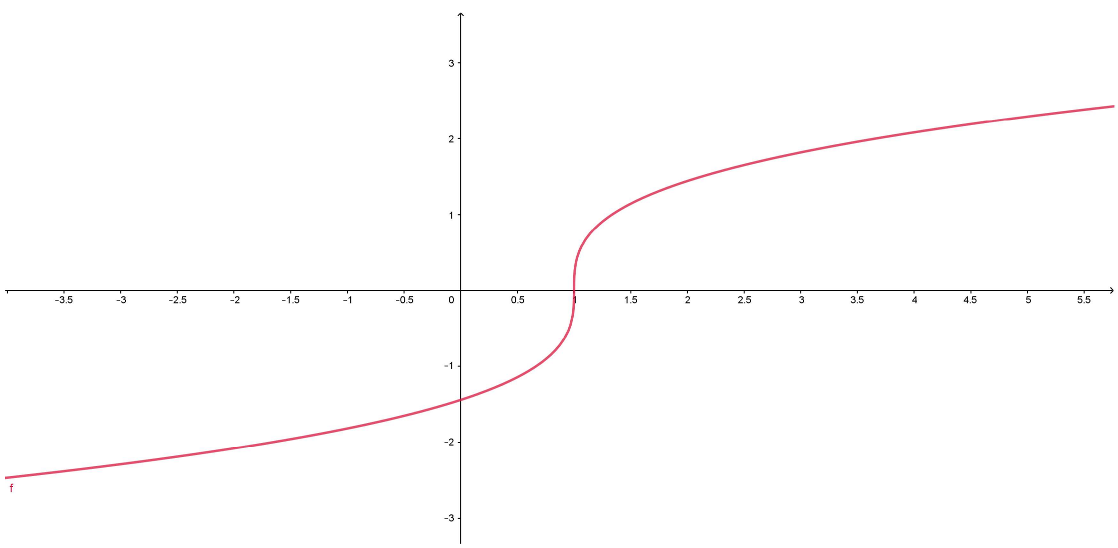
Ejemplos 1. Existe solución del siguiente PVI $\begin{cases} y' = 3\sqrt{x}\, y^2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$?

Aquí, $f(x,y) = 3\sqrt{x}\, y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6\sqrt{x}\, y$ son continuas en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Como $x_0 > 0$, se puede aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad para asegurar que el PVI tiene una sola solución (observar que este teorema exige que $f(x,y)$ y $f_y(x,y)$ sean continuas en un entorno de (x_0, y_0)).

Ejemplos 2. Existe solución del siguiente PVI $\begin{cases} y^2 y' = 1 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$?

Aquí, $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$. En los puntos de la forma $(x_0, 0)$ no se cumple ninguna de las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad. Sin embargo, por cada punto $(x_0, 0)$ pasa una sola curva integral (ver figura) definida por

$$y(x) = \sqrt[3]{3(x - x_0)}.$$



Ejemplos 3. Considere la ecuación diferencial (no lineal) $(y^2 - x)y' = y + 2x$. Cuál es la región del plano xy donde tendrá solución única ?

Llevando la ED a la forma normal, obtenemos

$$y' = \underbrace{\frac{y + 2x}{y^2 - x}}_{f(x,y)}; \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y^2 + x + 4xy}{(y^2 - x)^2}$$

Tanto $f(x,y)$, como su derivada parcial con respecto a y, son discontinuas sobre la curva $y^2 = x$. Las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad no se cumplen en los puntos de dicha curva. Luego, se puede asegurar que por cada punto (x_0, y_0) situado en alguna de las dos regiones $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > x\}$ o $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x\}$ pasará una, y solo una, curva solución.

Ejemplos 4. Considere el PVI $\begin{cases} y' = y^2 - 9y + 8 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. Para que valores de y_0 tendrá soluciones acotadas? Encontrar la respuesta sin hacer cálculos.

Observemos que la ecuación diferencial es autónoma

$$y' = y^2 - 9y + 8 = \underbrace{(y-1)(y-8)}_{f(x,y)=g(y)}.$$

Luego, las únicas soluciones constantes serán los ceros de $g(y)$. Así que, $\varphi_1(x) = 1$ y $\varphi_2(x) = 8$ son soluciones de la ecuación diferencial definidas en $(-\infty, \infty)$ y, obviamente, son acotadas. Existirán otras?

Veamos, $f(x,y)$ es continua, con primeras derivadas parciales continuas en todo punto del plano xy; de modo que, en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se satisfacen las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad. Esto implica que las curvas integrales no pueden tener puntos en común. En particular, las curvas $\varphi_1(x) = 1$ y $\varphi_2(x) = 8$ no pueden tener intersección con otras soluciones de la misma ED. Entonces, la gráfica de cualquier solución que satisface la condición inicial con $y_0 \in (0,8)$ tendrá que estar contenida en la banda $1 < y < 8$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$ y, por lo tanto, esa solución será acotada.

Ejemplos 5. Probar que el PVI $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tiene solución única y que esta solución existe (al menos) en $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$.

Como $f(x,y)$ es un polinomio, el Teorema de Existencia y Unicidad nos asegura que el PVI tiene solución única para cualquier condición inicial $y(x_0) = y_0$ y esta solución estará definida en un entorno x_0. Podemos determinar el radio de ese entorno? En este caso, la ED no puede resolverse por métodos analíticos; luego, solo será posible *estimar* el radio del entorno calculando el valor de h según el Teorema de Existencia y Unicidad.

Dado que $(x_0, y_0) = (0,0)$, consideramos la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ -b \leq y \leq b\}$. En este rectángulo, tendremos

$$|f(x,y)| = x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \Longrightarrow M = a^2 + b^2 \Longrightarrow h = \min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Evidentemente, el resultado dependerá de los valores elegidos para a y b. Por ejemplo, si

$$\begin{array}{llcl}
a = 1; & b = 1/2 & \rightarrow & h = \min(1, 2/5) = 2/5, \\
a = 1; & b = 1 & \rightarrow & h = \min(1, 1/2) = 1/2, \\
a = 1/2; & b = 1/4 & \rightarrow & h = \min(1/2, 4/5) = 1/2, \\
a = 2; & b = 1 & \rightarrow & h = \min(2, 1/5) = 1/5.
\end{array}$$

Surge, entonces, la siguiente pregunta: cómo podemos elegir a y b de maneral tal que h resulte lo más grande posible? Por su definición, para que h sea máximo imponemos

$$a = \frac{b}{a^2+b^2} \Longrightarrow b^2 - \frac{b}{a} + a^2 = 0 \Longrightarrow b = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} - 4a^2} \Longrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego, basta con elegir $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ para que h sea máximo. Con esta elección, resulta $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Otra manera de resolver este problema es la siguiente: se considera la función $\eta(b) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ (con a fijo), definida para todo $b \in \mathbb{R}$, y se buscan sus extremos. Esta función alcanza su máximo valor en $b = a$ y, ese valor máximo, es $\eta(a) = \dfrac{1}{2a}$. Luego, se plantea

$$h = \min\left(a, \frac{1}{2a}\right) \Longrightarrow \text{ será máximo si } a = \frac{1}{2a} \Longrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El Teorema de Picard es ***insufiente*** para resolver un PVI ya que sólo asegura la solución en un entorno $I_h(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h)$. No obstante, bajo ciertas condiciones, el intervalo de definición de la solución puede ser prolongado del siguiente modo: considérese un punto $(x_1, y(x_1))$, con $x_1 \in I_h(x_0)$. Si las condiciones del teorema vuelven a verificarse en un cierto rectángulo $\mathcal{D}_1$ centrado en ese punto, el teorema garantiza la existencia de una única solución $y_1(x)$ que pasa por ese punto y está definida en un intervalo $I_{h_1}(x_1) = (x_1 - h_1, x_1 + h_1)$. Pero como la primera solución también pasa por el punto $(x_1, y(x_1))$, ambas deben coincidir en $I_h \cap\ I_{h_1}$. Si se verifica $x_1 + h_1 > x_0 + h$, la nueva solución permite alargar el intervalo de definición de la solución hasta $x_1 + h_1$. Se dice, en estos casos que se ha obtenido una prolongación de la solución.

Definición. Dado un problema de valor inicial, se denomina ***solución maximal*** del mismo a una solución cuyo dominio de definición no admite prolongación alguna.

Teorema. Considere el PVI $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un dominio Ω, abierto y conexo, y $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces el problema admite una única solución maximal $y(x)$ que está definida en un intervalo abierto $I \subseteq \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in \Omega\}$.

Ejemplos 6.

Encuentre el intervalo maximal para el PVI $\begin{cases} y' = x\sqrt{1-y} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$.

Observemos que $f(x,y) = x\sqrt{1-y}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{x}{2\sqrt{1-y}}$ son continuas en la región abierta y conexa $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1\}$. Como $(0, 1/2) \in \Omega$, por el Teorema de Existencia y Unicidad, el PVI tiene una única solución en algún intervalo abierto que contiene a $x_0 = 0$.

Resolviendo por separación de variables,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \int x\,dx + C \qquad \rightarrow \qquad -2\sqrt{1-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Como $-2\sqrt{1-y} \le 0$ en Ω, el dominio de la solución obtenida estará restringido por la condición $\dfrac{x^2}{2} + C \le 0$. Imponiendo la condición inicial $y(0) = 1/2$, se tiene $C = -\sqrt{2}$. Finalmente

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,x^2 - \frac{1}{16}\,x^4 \quad \text{con dominio} \quad |x| \le 2^{3/4}.$$

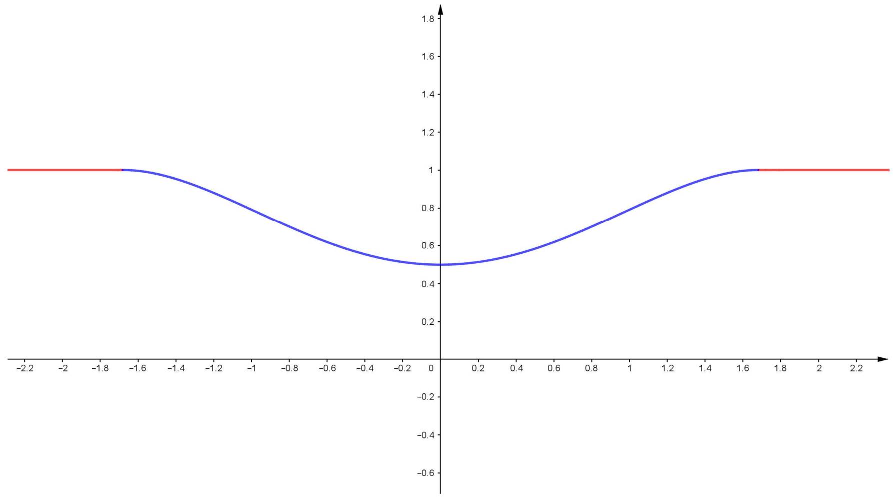
Ahora, observemos que

$$\lim_{x \to \pm 2^{3/4}} y(x) = 1 \qquad \text{y que} \qquad \lim_{x \to \pm 2^{3/4}} y'(x) = 0.$$

Teniendo en cuenta que la función $\varphi(x) = 1$ es solución de la ED, la función

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < -2^{3/4} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,x^2 - \dfrac{1}{16}\,x^4 & \text{para } -2^{3/4} \le x \le 2^{3/4} \\ 1 & \text{para } x > 2^{3/4} \end{cases}$$

es una extensión de $y(x)$ que satisface la EDO inicial (ver figura). Con ello, $(-2^{3/4}, 2^{3/4})$ no es un intervalo maximal de existencia para la solución del PVI. Dada la existencia de $\zeta(x)$, el intervalo en cuestión es simplemente $I = (-\infty, \infty)$.



Ejemplos 7. Obtenga las iteraciones de Picard para el PVI $\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ y compruebe que convergen a la solución exacta.

En este caso, $f(x, y) = 2x(1 + y)$ es una función continua con derivadas primeras parciales continuas en todos los puntos del plano xy; por lo tanto, en virtud del Teorema de Existencia y Unicidad, el PVI tendrá solución única definida en (al menos) un entorno de $x_0 = 0$. Más concretamente, busquemos una solución local en la región

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \, -1 \le y - 1 \le 1\}.$$

En esta región, tendremos

$$2|x||y+1| \le 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2+1) \le 3 \Longrightarrow M = |f(x,y)| = 3 \Longrightarrow h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Luego, podemos asegurar que las aproximaciones de Picard convergen a la solución del PVI en (al menos) el intervalo $-1/3 < x < 1/3$. Estas aproximaciones son

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= y_0(x) + \int_0^x 2t(1 + y_0(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t(1+1)\,dt = 1 + 2x^2 \\
y_2(x) &= y_0(x) + \int_0^x 2t(1 + y_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t(1+1+2t^2)\,dt = 1 + 2x^2 + x^4 \\
y_3(x) &= y_0(x) + \int_0^x 2t(1 + y_2(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t(1+1+2t^2+t^4)\,dt = 1 + 2x^2 + x^4 + \frac{x^6}{3} \\
y_4(x) &= y_0(x) + \int_0^x 2t(1 + y_3(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t(1+1+2t^2+t^4+\frac{t^6}{3})\,dt = 1 + 2x^2 + x^4 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{12} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_n(x) &= y_0(x) + \int_0^x 2t(1 + y_{n-1}(t))\,dt = 1 + \int_0^x 2t\Big(1+1+2t^2+t^4+\frac{t^6}{3}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}t^{2n-1}\Big)\,dt \\
&= 1 + 2\Big(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\Big)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

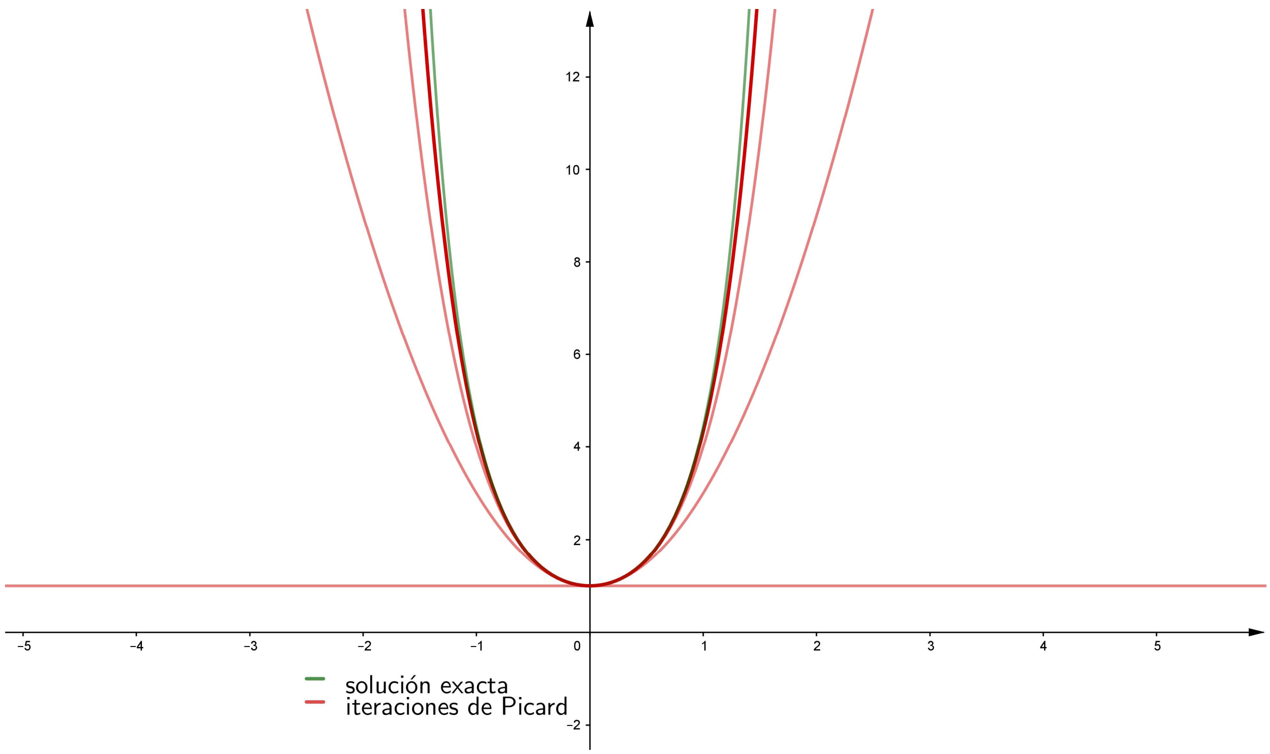
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

vemos que las iteraciones de Picard convergen a

$$y(x) = 1 + 2(e^{x^2} - 1) = -1 + 2e^{x^2}$$

que es la solución exacta del PVI con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$. Observemos que el método solo asegura convergencia en (al menos) $(-1/3, 1/3)$; como $(-1/3, 1/3) \subset (-\infty, \infty)$, los resultados no se contradicen.

En la siguiente figura se muestran las tres pimeras iteraciones $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$. Obsérvese que las iteraciones parecen permanecer cercanas en un intervalo cuyo radio aumenta gradualmente, lo que pone en evidencia convergencia a una función límite.



⋆ ⋆ ⋆

1. Determinar una región del plano xy tal que la ecuación $y' = f(x, y)$ tenga solución única.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{y} - x$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

   (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

2. Considerar el siguiente PVI $\begin{cases} (1+x^2)\, y' = \sqrt{1+y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

   (a) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI no tiene solución.

   (b) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene solución única. Determinar la solución.

   (c) Encontrar todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el PVI tiene más de una solución. Determinar esas soluciones.

3. Para cada uno de los PVI que se listan a continuación, compruebe que existe solución única y que está definida (al menos) en el intervalo que se indica.

   (a) $y' = y^2 + \cos^2 x, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1/2$

   (b) $y' = y^2 + e^{-x^2}, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}$

   (c) $y' = 1 + y + y^2 \cos x, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1/3$

4. Considere el problema de valores iniciales

$$y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Aplicar el Método de Picard y determinar explícitamente $y_n(x)$, $n \geq 1$.

   (b) Hallar la solución exacta $\varphi(x)$ de este problema.

   (c) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \varphi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Considere el problema de valores iniciales

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

   (a) Aplicar el Método de Picard y calcular hasta $y_4(x)$.

   (b) Probar que el problema de valores iniciales tiene una solución en (al menos) cualquier intervalo de la forma $(-1/2, 1/2)$.

   (c) Hallar la solución exacta de la ecuación diferencial y, de ese modo, demostrar que la solución del PVI está definida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

6. Considere el PVI $\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

   Probar que si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en un intervalo que contiene al punto x_0, entonces existe una solución única del PVI en ese intervalo.

   Este resultado es importante; nos dice que si la ED es lineal, entonces el intervalo de validez de la solución es el intervalo más grande posible donde $p(x)$ y $q(x)$ son continuas ; en otras palabras, asegura la existencia de una única **solución global** del PVI. Otra consecuencia interesante del resultado anterior es que intervalo de validez de la solución depende de x_0 solamente.

7. Sin resolver, determine el intervalo de validez para las soluciones de los siguientes PVI.

   (a) $(x^2-9)y'+2y=\ln(5-x), \quad y(4)=-3$

   (b) $y'=\dfrac{2x-y}{x-1}, \quad y(-3)=4$

   (Sugerencia: utilice el ejercicio anterior)

⋆ ⋆ ⋆

La siguiente es una versión *más débil* (menos exigente) del Teorema de Existencia y Unicidad.

Considere el PVI $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$.

Supongamos que $f(x,y)$ es continua en el rectángulo $\mathcal{D}:=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ y que satisface en $\mathcal{D}$ la condición de Lipschitz; es decir, existe una constante positiva N tal que

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2|\leq N|y_1-y_2|.$$

Entonces, existe una única solución el PVI en el intervalo (x_0-h,x_0+h), donde

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right) \quad \text{y} \quad M=\max_{(x,y)\in\mathcal{D}}|f(x,y)|.$$

Comentario. En el Anexo, se presenta una breve exposición sobre las funciones Lipschitz continuas y sus propiedades. Se sugiere la lectura de este complemento antes de resolver los ejercicios que se listan a continuación.

Ejemplos 8. Resolver el PVI $\begin{cases} y'=|2y+x| \\ y(2)=-1 \end{cases}$.

Comencemos por observar que la función $f(x,y)=|2y+x|$ es continua y Lipschitz continua con respecto a y para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Luego, el TEyU asegura la existencia de una solución única para todo dato inicial (x_0,y_0).

Para calcular la solución, notemos primero que el dato inicial, el punto $(2,-1)$, pertenece a la recta $2y+x=0$. Entonces, tendremos que resolver los siguientes PVIs

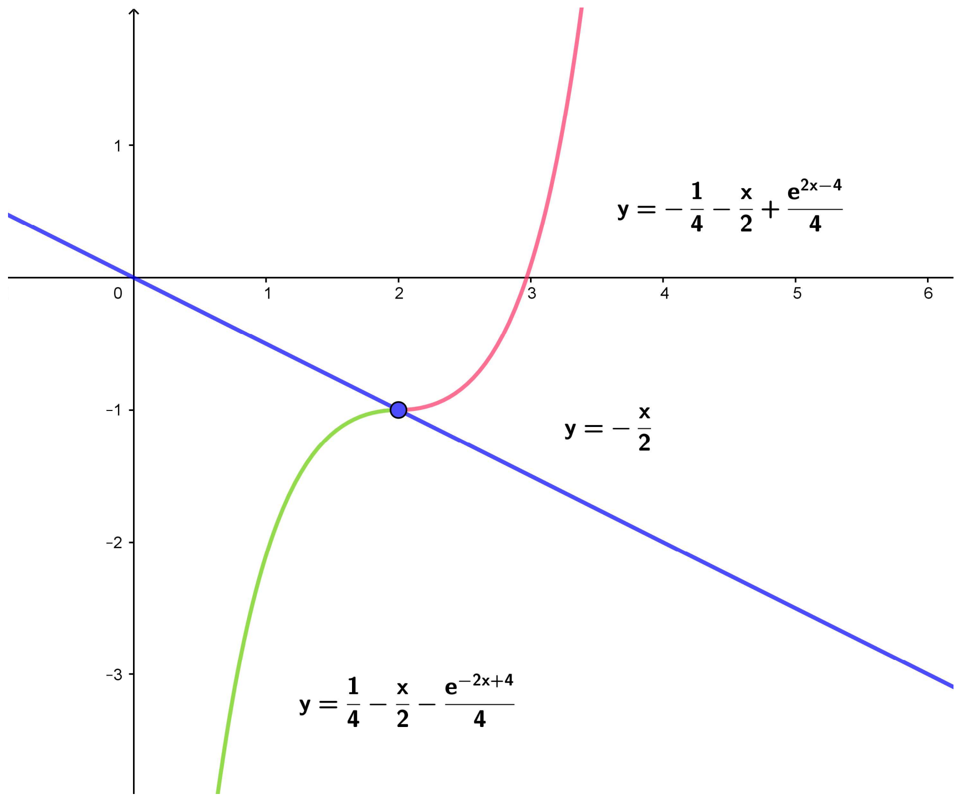
$$\text{si} \quad 2y+x\geq 0, \quad \begin{cases} y'=2y+x \\ y(2)=-1 \end{cases} \qquad\qquad \text{si} \quad 2y+x\leq 0, \quad \begin{cases} y'=-2y-x \\ y(2)=-1 \end{cases}$$

Resolviendo, la solución del PVI puede escribirse

$$y=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}e^{-2(x-2)} & x\leq 2 \\ \\ -\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{2(x-2)} & x\geq 2 \end{cases}$$

con dominio de validez $(-\infty,\infty)$. En el siguiente gráfico se muestra la solución hallada. Se puede comprobar que

$$y(2)=-1, \qquad y'(2)=0, \qquad y'(x)>0\forall x\neq 2.$$



⋆ ⋆ ⋆

8. Considere las ecuaciones diferenciales

   (a) $y' = \frac{1}{2}(ax+y) + \frac{1}{2}|x - by|$; a y b constantes reales,

   (b) $y' = 2x\sqrt{|y|}$.

   En cada caso, determinar las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ para las cuales se puede garantizar la existencia de una única solución del PVI asociado.

9. Resolver el PVI $\begin{cases} y' = |x^2 - y| \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

   Solución: $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \\ -4e^{x-1} + x^2 - 2x + 2 & x \leq 1 \end{cases}$

10. Estudiar primero la existencia y unicidad del PVI para un (x_0, y_0) cualquiera y, luego, resolver para los datos iniciales indicados.

    (a) $\begin{cases} y' = |x| - y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

    i. $(x_0, y_0) = (0, 0)$

       Solución: $y = \begin{cases} x - 1 + e^{-x} & x \geq 0 \\ 1 - x - e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

ii. $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Solución: $y = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x - 2e^{-x} & x \leq 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = \begin{cases} x & y \geq x \\ y & y \leq x \end{cases} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

i. $(x_0, y_0) = (-3, 3)$.

Solución: $y = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} & x \leq -1 \\ -e^{x+1} & x \geq -1 \end{cases}$

Graficar las soluciones halladas en los ejercicios anteriores.

⋆ ⋆ ⋆

En lo que siguiente, ampliaremos el concepto de solución de una EDO de la forma

$$y'(x) = f(x, y). \tag{1}$$

Se llamará **curva integral** de la ecuación (1) a una curva que es tangente en cada punto al campo de direcciones correspondiente a (1) aunque esta curva no esté descripta por una única función $y(x)$ o tenga tangente vertical en algún punto (ver Ejemplo 2.). Para precisar más esta idea, tendremos que considerar a la EDO en la *forma equivalente*

$$x'(y) = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Como la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función original, es claro que las EDOs (1) y (2) tienen las mismas curvas integrales (aunque, en sentido estricto, puede haber soluciones de una ecuación que no sean soluciones de la otra). Entonces, una **curva integral** de la ecuación (1) será una curva formada por soluciones $y(x)$ de (1), por soluciones $x(y)$ de (2) o por ambas.

Qué conclusiones se pueden sacar de aplicar el TEyU a la EDO (2)?

El TEyU habla de existencia y unicidad de soluciones. Si por un punto pasa una única solución $y(x)$ de (1), evidentemente, por ese punto pasará una única curva integral de (1). Supongamos ahora que, en un entorno del punto (x_0, y_0), $f(x, y)$ y/o $\partial_y f(x, y)$ no son continuas, pero que $(f(x, y))^{-1}$ y $\partial_y (f(x, y))^{-1}$ sí lo son. Entonces, pasará una única solución $x(y)$ de (2) y, por lo tanto, existirá una única curva integral de (1)(que en muchas ocasiones no será solución en sentido estricto de (1)). En consecuencia, podrían pasar más de una curva integral de (1) solamente por aquellos puntos en los que falle el TEyU tanto para (1) como para (2).

Ejemplo 9. Consideremos la EDO $y'(x) = e^{y^{1/3}}$.

Aquí, $f(x, y) = e^{y^{1/3}}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y $\partial_y f(x, y) = \frac{1}{3}\, y^{-2/3}\, e^{y^{1/3}}$ es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Luego, aplicando el TEyU, el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tendrá solución para todo dato (x_0, y_0) y será única si $y_0 \neq 0$. Pero, cuántas soluciones tendrá el PVI si $y_0 = 0$?

Analicemos la EDO equivalente $x'(y) = e^{-y^{1/3}}$. Como $(f(x,y))^{-1} = e^{-y^{1/3}}$ y $\partial_x (f(x,y))^{-1} = 0$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, el TEyU nos asegura solución única todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Luego, solo habrá una curva integral pasando por los puntos de la forma $(x_0, 0)$ y el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

tendrá solución única para todo x_0.

Ejemplo 10. Consideremos la EDO $y'(x) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

En este caso, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ y $\partial_y f(x,y) = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ son continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Luego, aplicando el TEyU, el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única para todo $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Existirá solución del PVI si $(x_0, y_0) = (0,0)$?

Analicemos la EDO equivalente $x'(y) = x^2 + y^2$. Como $(f(x,y))^{-1} = x^2 + y^2$ y $\partial_x (f(x,y))^{-1} = 2x$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, el TEyU nos asegura solución única todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Luego, solo habrá una curva integral pasando por el punto $(0,0)$. Esta curva integral será, de hecho, también una función $y(x)$, pero con derivada infinita en $x = 0$ (no es derivable en $x = 0$). Concluimos que el PVI no tiene solución en sentido estricto con el dato $y(0) = 0$.

Ejemplo 11. Consideremos la EDO $y'(x) = \dfrac{y(y-x)}{x}$.

Aquí, $f(x,y) = \dfrac{y(y-x)}{x}$ y $\partial_y f(x,y) = \dfrac{2y-x}{x}$ son continuas en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Luego, aplicando el TEyU, el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tendrá solución única para todo dato (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$. Observemos, además, que $y = 0$ es solución de esta EDO definida para todo x (en rigor, es solución para dodo $x \neq 0$, pero podemos extender la defincíón de $f(x,y)$ imponiendo que sea cero en $x = 0$).

Consideremos ahora el PVI equivalente

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{y(y-x)} \\ x(y_0) = x_0 \end{cases}.$$

Aplicando el TEyU, podemos asegurar que existe solución única para todo (x_0, y_0) con $x_0 \neq y_0$, $y_0 \neq 0$. Observemos, además, que $x = 0$ es solución definida para todo y.

En conclusión, por cada punto, salvo tal vez por el origen, pasa una única curva integral. Por el punto $(0,0)$ pasan al menos dos curvas integrales $y = 0$ y $x = 0$.

⋆ ⋆ ⋆

11. Para cada una de siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = \begin{cases} 2\dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (b) $y' = \begin{cases} -\dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $y' = \begin{cases} \dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (d) $y' = -\dfrac{x}{y}.$

(i) Hallar las curvas integrales y representarlas en un mismo gráfico para distintos valores de la constante de integración.

(ii) Podría determinar unívocamente la solución del PVI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases} ?$$

Explicar el comportamiento de las soluciones en un entorno del origen usando el Teorema de Existencia y Unicidad.

⋆ ⋆ ⋆

Considere el PVI $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Un punto (x_0, y_0) en un entorno del cuál no existe solución del PVI o, si existe, no es única se denomina **punto singular**. Para encontrar los puntos singulares de una ED, es necesario encontrar primero los puntos donde no se satisfacen las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad; solamente ese conjunto de puntos puede incluir a los puntos singulares (por supuesto, no todo punto que no cumpla las condiciones del teorema será un punto singular puesto que el teorema establece solo condiciones suficientes).

Las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad no se verifican en aquellos puntos donde

- tanto $f(x,y)$ como $\dfrac{1}{f(x,y)}$ son discontinuas,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ crece sin límites; es decir, $\dfrac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} \to 0$.

Una solución $\widehat{y}(x) = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x,y)$$

se llama **singular**, si en cada uno de sus puntos se infringe la propiedad de unicidad; es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0), además de esta solución, pasa también otra solución que tiene en (x_0, y_0) la misma tangente que $\varphi(x)$ pero que difiere de $\varphi(x)$ en todo entorno de (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño. La gráfica de una solución singular se denomina **curva integral singular** de la ecuación diferencial.

Ejemplo 12. Compruebe que el PVI $\begin{cases} y' = 1 + (x-y)^{3/4} \\ y(x_0) = x_0 \end{cases}$ tiene por lo menos dos soluciones. Tiene soluciones singulares?

La función $f(x,y) = 1 + (x-y)^{3/4}$ es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq 0\}$; su derivada con respecto a y es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$. Entonces, el PVI tiene solución, pero la unicidad de la solución no está garantizada.

En este caso, la ecuación diferencial puede resolverse mediante una sustitución adecuada; si se hace

$$u(x) = x - y(x) \quad \rightarrow \quad u'(x) = 1 - y'(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = 1 - u'(x),$$

la ecuación diferencial original se transforma en

$$1 - u'(x) = 1 + u(x)^{3/4} \quad \rightarrow \quad u' = -u^{3/4} \quad \rightarrow \quad \text{es de variables separables.}$$

Integrando, encontramos

$$u(x) = \left(c - \frac{x}{4}\right)^4 \quad \rightarrow \quad y(x) = x - \left(c - \frac{x}{4}\right)^4 \quad \rightarrow \quad \text{con dominio de validez } x \leq 4c.$$

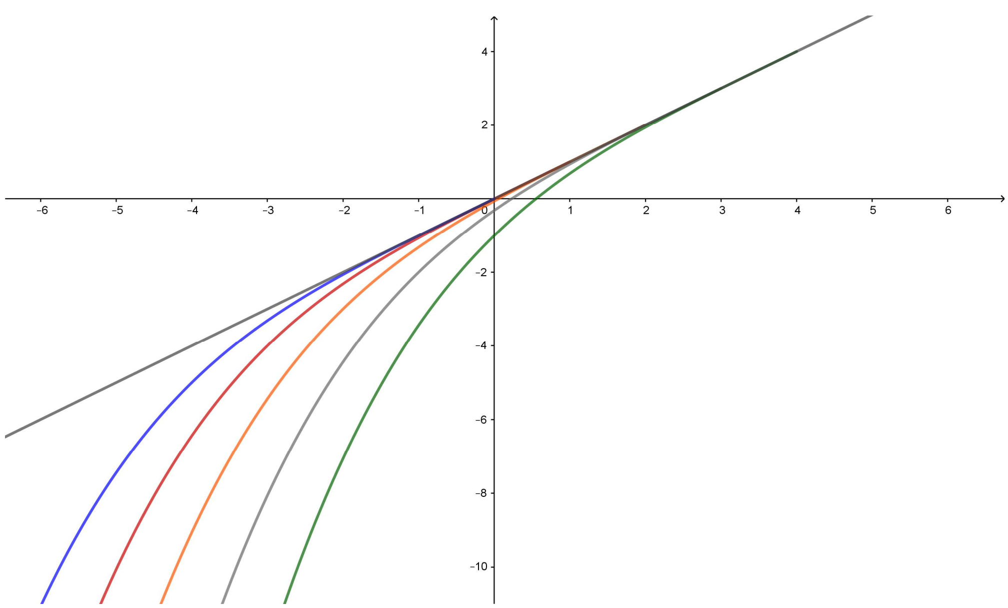
Ajustando c para que se satisfaga la condición inicial, las soluciones adquieren la forma

$$y(x) = x - \left(\frac{x_0 - x}{4}\right)^4 \quad \rightarrow \quad \text{con dominio de validez } x \leq x_0.$$

Además, es evidente que $y = x$ es solución del PVI con dominio de validez en $\mathbb{R}$.

En la figura siguiente, se muestran las soluciones encontradas para distintos valores de x_0. Se observa que la solución $y = x$ satisface la definición de solución singular. En consecuencia, es posible construir otras soluciones del PVI; por ejemplo,

$$y(x) = \begin{cases} x - \left(\dfrac{x_0 - x}{4}\right)^4 & \text{si } x < x_0. \\ x & \text{si } x \geq x_0, \end{cases}$$



⋆ ⋆ ⋆

12. Encontrar una solución del PVI $\begin{cases} y' &= x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) &= -1 \end{cases}$ distinta de la solución $y = -1$. Contradice esto el Teorema de Existencia y Unicidad?. Luego, cambiar el dato inicial por $y(x_0) = 1$ y resolver. A qué conclusión se llega? Explique.

    Graficar las dos soluciones en un mismo sistema de coordenadas.

13. La ecuación $y' = ay^{2/3} - by$, con a y b constantes positivas, es una ecuación diferencial autónoma.

    (a) Determinar las soluciones de equilibrio.

    (b) Es posible encontrar dos soluciones distintas que satisfagan la condición inicial $y(x_0) = 0$? En caso afirmativo, contradice esto el Teorema de Existencia y Unicidad?. Explique.

    (c) Determinar si esta ecuación posee soluciones singulares.

    Graficar las dos soluciones en un mismo sistema de coordenadas.

14. (a) Encuentre el conjunto completo de soluciones de la ecuación diferencial $1 + (y')^2 = \dfrac{1}{y^2}$.

    (b) Considere ahora el PVI $\begin{cases} 1 + (y')^2 &= \dfrac{1}{y^2} \\ y(x_0) &= 1 \end{cases}$ Tiene solución? Si la solución existe, es única?

    (c) Concluir que la recta $y = 1$ es una solución singular de la ecuación diferencial.

    (d) Cambiar el dato inicial por $y(x_0) = -1$ y repetir el análisis. A qué conclusión se llega??

    Graficar las soluciones en un mismo sistema de coordenadas.

15. Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales poseen soluciones singulares.

    (a) $y' = x^2 + y^2$

    (b) $y' = \sqrt[3]{x - 5y} + 2$

    (c) $y' = x\sqrt{|y|}$

    (d) $y' = \dfrac{1+y}{x-y}$

⋆ ⋆ ⋆

Sea f una función continuamente diferenciable. Una ecuación diferencial de la forma

$$y = xy' + f(y'), \tag{3}$$

se llama de Clairaut en honor al matemático francés Alexis-Claude Clairault (1713-1765). Presenta varias propiedades interesantes.

Para resolverla, se hace el cambio de variable $p(x) = y'(x)$; en efecto, derivando en (3) y reemplazando, se tiene

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'' \implies 0 = (x + f'(y'))y'' \implies 0 = (x + f'(p))p'.$$

Esta ecuación se satisface si se cumplen cualquiera de las siguientes condiciones:

- $p' = 0 \Rightarrow p = c$, donde c es una constante arbitraria; sustituyendo en (3) llegamos la solución general $y = cx + f(c)$,
- $x + f'(p) = 0$, en este caso, usando la ecuación (3), tendremos

$$\begin{cases} x &= -f'(p) \\ y &= -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

ecuaciones que definen paramétricamente otra solución de la ecuación de Clairaut.

Ejemplo 7.

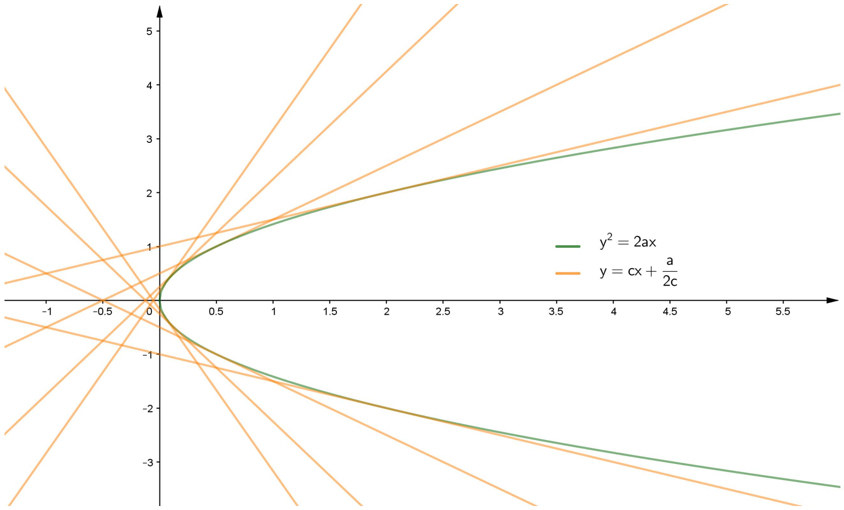
Hallar las soluciones de la EDO $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$, a es constante

Hacemos el cambio de variable $p(x) = y'(x)$ y obtendremos

$$p' = 0 \implies p = c \implies cx + \frac{a}{2c} \implies \text{solución general}$$

$$\begin{cases} x &= -f'(p) = \dfrac{a}{2p^2} \\ y &= -pf'(p) + f(p) = p\,\dfrac{a}{2p^2} + \dfrac{a}{2p} = \dfrac{a}{p} \end{cases} \implies y^2 = 2ax \implies \text{solución singular}$$

Es simple comprobar que cada recta de la familia $\{y = cx + \frac{a}{2c}; c \in \mathbb{R}\}$ toca a la parábola $y^2 = 2ax$ en uno y solo un punto y que las coordenadas de ese punto son $(x_*, y_*) = \left(\frac{a}{2c^2}, \frac{a}{c}\right)$. Obviamente, en el punto de intersección, cada recta es tangente a la parábola. Desde el punto de vista geométrico, la curva integral definida por $y^2 = 2ax$ es la **envolvente** del haz de rectas $\{y = cx + \frac{a}{2c}; c \in \mathbb{R}\}$ y es singular puesto que la propiedad de unicidad no se satisface en ninguno de sus puntos.



1. Encontrar todas las soluciones de la siguientes ecuaciones:

   (a) $y = xy' + \dfrac{1}{2}(y')^2$,

   (b) $y = xy' + 2\sqrt{1 + (y')^2}$,

   (c) $y = xy' + 1 - \ln y'$

   En cada caso, graficar la familia de soluciones y su envolvente.

ANEXO

Funciones uniformemente continuas y Lipschitz continuas

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces, por definición,

$$\forall x_1 \in A, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \text{ si } x_2 \in A \text{ y } |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon; \tag{4}$$

donde δ depende de ϵ y también del punto $x_1 \in A$. La dependencia con el punto está indicando que, fijado $\epsilon > 0$, algunos puntos en A pueden exigir valores de δ mucho más pequeños que otros (dicho intuitivamente, depende de la rapidez con que varía la función f cerca del punto considerado).

Definición. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si, para cada $\epsilon > 0$, puede encontrarse un $\delta > 0$ tal que, si $x_1, x_2 \in A$ verifican que $|x_2 - x_1| < \delta$, entonces $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$. Simbólicamente:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \text{ si } x_1, x_2 \in A \text{ y } |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon. \tag{5}$$

Obsérvese la sutil, pero importante, diferencia entre (4) y (5): como ya se ha explicado, en (4) se permite que δ dependa de x_1 y de ϵ, mientras que en (5) solo puede depender de ϵ. Por supuesto, si f es uniformemente continua, podemos asegurar que f es continua, pero el recíproco no es cierto.

Contraejemplo. La función $f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$ pero no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Si lo fuese, usando (5) con $\epsilon = 1$, existiría $\delta > 0$ tal que

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |x_2^2 - x_1^2| < 1;$$

pero esto no es posible; en efecto, si fijamos $n \in \mathbb{N}$; con $1/n < \delta$, podríamos elegir

$$x_1 = n, \qquad x_2 = n + (1/n) \qquad \Rightarrow \qquad 2 + \frac{1}{n^2} = |x_2^2 - x_1^2| < 1 \qquad \text{absurdo!}$$

Veamos ahora una propiedad sencilla que implica la continuidad uniforme.

Definición. *Se dice que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua (o lipschitziana) cuando existe una constante $M > 0$ tal que:*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M\,|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in A. \tag{6}$$

Desde el punto de vista geométrico, la condición de Lipschitz asegura que las pendientes de las rectas secantes de la curva $\{(x, f(x))\}$ están acotadas; por lo tanto, la gráfica de una función lipschitziana no puede volverse infinitamente empinada en ningún punto de su dominio.

Claramente, existe una mínima constante $M_0 > 0$ que verifica la desigualdad (6) dada por

$$M_0 = \sup_{x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2} \left\{ \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \right\} \qquad \to \qquad M_0 \text{ es la constante de Lipschitz de } f \text{ en } A.$$

Ejemplos.

- La función $f(x) = |x|$ es Lipschitz en toda la recta real con $M = 1$. Para probarlo basta observar que
$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

- La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es lipschitziana en el intervalo $(0,1)$. Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que sea lipschitziana en $(0,1)$; entonces, debe existir $M > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in (0,1).$$

Como la función f es derivable en $(0,1)$, se cumple

$$|f'(x_1)| = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \qquad \forall x_1 \in (0,1).$$

Combinando la desigualdad con la identidad anteriores, se concluye

$$|f'(x)| \leq M \qquad \forall x \in (0,1);$$

lo cual es imposible, pues la derivada de $f(x)$ *explota* en el origen.

- La función $f(x) = 1/x$ es Lipschitz en el intervalo $[a, \infty)$, $a > 0$. En efecto,

$$\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right| \leq \frac{1}{a^2}\,|x_2 - x_1| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, \infty).$$

Los resultados que se presentan a continuación, pondrán en evidencia que la propiedad de *lipschitzidad* es más *fuerte* que la de continuidad, pero es más *débil* que la de poseer derivada continua.

De la desigualdad (6), se deduce que, dado $\epsilon > 0$ y, tomando $\delta > 0$ de forma que $\delta M < \epsilon$, se tendrá que $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$, siempre que $x_1, x_2 \in A$ verifiquen $|x_2 - x_1| < \delta$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado:

- *Toda función lipschitziana es uniformemente continua.*

El Teorema del Valor Medio nos proporciona un criterio cómodo para saber si una función derivable en un intervalo es lipschitziana.

- *Sea f una función continua $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) f es lipschitziana.

  (ii) f' está acotada, es decir, existe $M \geq 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$.

  Si se verifica (ii), la constante de Lipschitz de f viene dada por

$$M_0 = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|. \tag{7}$$

Probemos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Si M_0 es la constante de Lipschitz de f, fijado $x_1 \in (a,b)$, se tiene

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq M_0 \quad \forall x_2 \in (a,b) : x_2 \neq x_1,$$

de donde se deduce, claramente, que $|f'(x)| \leq M_0$. Es decir, f' está acotada en (a,b) y se puede escribir

$$M = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| \qquad \rightarrow \qquad M \leq M_0.$$

Probemos que $(ii) \Rightarrow (i)$. Se define M como antes. Para $x_1, x_2 \in (a,b)$, con $x_1 \neq x_2$, el Teorema del Valor Medio nos asegura la existencia de (al menos) un punto intermedio $c \in (a,b)$ tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|.$$

Esto prueba que f es lipschitziana con constante de Lipschitz $M_0 \leq M$. Combinando las dos demostraciones, se concluye la desigualdad (7).

Ejemplos.

- La función $f(x) = \sin(x^2)$ es acotada, pero no es Lipschitz en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$|f'(x)| = |2x\cos(x^2)| \qquad \text{no puede acotarse cuando } x \to \infty.$$

- La función $f(x) = x + \sin x$ no es acotada, pero es Lipschitz $\mathbb{R}$. En efecto,

$$|f'(x)| = |1 + \cos x| \leq 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Una forma fácil de asegurarse la acotación de la derivada es imponer que la derivada sea continua y trabajar en un intervalo cerrado y acotado para poder aplicar el Teorema de Weierstrass:

- *Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$. Si la función f tiene derivada continua en $[a,b]$, entonces f es lipschitziana en $[a,b]$.*

Ejemplos.

- La función $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$ es lipschitziana en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$|f'(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right| = \sqrt{\frac{x^2}{a^2+x^2}} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- La función $f(x) = \tan x$ es derivable en cada punto $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Sin embargo, dado que f' no está acotada en $(-\pi/2, \pi/2)$, f no puede ser lipschitziana en $(-\pi/2, \pi/2)$. Pero, eligiendo a y b tales que $-\pi/2 < a < b < \pi/2$, entonces f es continuamente derivable en $[a,b]$ y, por lo tanto, lipschitziana en $[a,b]$.

Para concluir esta breve discusión sobre las funciones lipschitzianas, extendemos la primera definición a funciones de dos variables en el siguiente sentido:

Definición. *Se dice que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es globalmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω si existe $L > 0$ tal que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega.$$

Ejemplos.

- Sean a y b constantes reales; la función $f(x,y) = |ax+by|$ es globalmente lipschitziana respecto de la variable y en $\mathbb{R}^2$. En efecto,

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = ||ax+by_2| - |ax+by_2|| \leq |(ax+by_2) - (ax+by_2)| = |b||y_2 - y_1|.$$

- La función $f(x) = \dfrac{x}{1+y^2}$ tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2} \quad \text{no está acotada en } \mathbb{R}^2,$$

  f no es globalmente lipschitziana respecto de la variable y en $\mathbb{R}^2$. Ahora, si restringimos el dominio de f al conjunto

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -a \leq x \leq a,\ -\infty < y < \infty;\ a \neq 0\}$$

  f será globalmente lipschitziana respecto de la variable y en Ω.

6. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Parte 1 - Sistemas lineales homogéneos

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde la derivada de cada variable dependiente x_i es función de la variable independiente t, de ella misma y de todas las restantes variables x_j; $j \neq i$. Definiendo los vectores

$$
\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix},
$$

el sistema de ecuaciones puede escribirse de la siguiente manera

$$
\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).
$$

Teorema de existencia y unicidad. Considere el PVI $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$. Si, en una vecindad del punto $(t_0, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{f}$ es continua y todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ son acotadas, el PVI tiene solución única en el intervalo $|t - t_0| < h$, para cierto $h > 0$.

Ejemplo 1.

Considere el sistema de EDOs $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_1x_2 + \cos t \\ x_1x_2 - 4x_2 + t - \ln t \end{pmatrix}$. Como las funciones f_i, $i = 1, 2$, son continuamente derivables en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$, la solución que satisface $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ existe y será única para todo $t_0 > 0$.

Cuando cada una de las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ es lineal en las variables dependientes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, el sistema (1) puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n) + g_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n) + g_2(t) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n) + g_n(t)
\end{aligned}$$

que se conoce como la ***forma normal*** de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden. Cuando $g_i(t) = 0$ para todo t y para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, se dice que el sistema lineal es ***homogéneo***; en caso contrario, es ***no homogéneo***. Definiendo

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(t) \end{pmatrix},$$

se puede obtener la ***forma matricial*** del sistema de EDOs lineales de primer orden; es decir,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{2}$$

Supongamos que los coeficientes a_{ij}; $i, j = 1, 2, \cdots, n$, así como las funciones g_i; $i = 1, 2, \cdots, n$, son continuas en un intervalo común I. Un vector solución en I es una matriz columna

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1(t) \\ \widehat{x}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widehat{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones derivables que satisfacen (2) para todo $t \in I$.

Ejemplo 2.

El vector $\widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -t+1 \end{pmatrix}$ es un vector solución, en $(-\infty, \infty)$, del sistema

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2t-7 \\ -4t-18 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(t)}.$$

Observe primero que todas las entradas de la matriz $\mathbf{A}$ y del vector $\mathbf{g}$ son funciones polinomiales; en virtud del Teorema de existencia y unicidad, podemos asegurar que la solución del sistema existe en $(-\infty, \infty)$ y será única cualquiera sea la condición inicial $(t_0, \mathbf{x}_0)$ elegida. Ahora,

lado izquierdo de la ecuación $\rightarrow$ se deriva el vector $\widehat{\mathbf{x}}(t)$:

$$\widehat{\mathbf{x}}'(t) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lado derecho de la ecuación $\rightarrow$ se reemplaza el vector $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ en el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\cdot\widehat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2t+5 \\ -t+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2t-7 \\ -4t-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t+9 \\ 4t+17 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2t-7 \\ -4t-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ambos lados son iguales $\quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\cdot\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{g} \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$.

Considere el sistema de EDOs lineal y homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x}(t).$$

Siempre se supondrá que las a_{ij}; $i, j = 1, 2, \cdots, n$, son funciones continuas de t en algún intervalo común I.

- ***(Principio de superposición)*** Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$; $k \le n$, es un conjunto de vectores solución en un intervalo I, la combinación lineal

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k,$$

  donde las c_i, $i = 1, 2, \cdots, k$, son constantes arbitrarias, también es solución en I.

- ***(Sobre la independencia lineal de las soluciones)*** Supongamos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ son n vectores solución en un intervalo I; serán linealmente independientes en I si, y solo si, el Wronskiano

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) = \begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdot\;\cdot\;\cdot & \uparrow \\ \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdot\;\cdot\;\cdot & \mathbf{x}_n(t) \\ \downarrow & \downarrow & \cdot\;\cdot\;\cdot & \downarrow \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

  Puede probarse que solo existen dos posibilidades: $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) \equiv 0$ para todo $t \in I$ o $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

- Cualquier conjunto $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ de n vectores solución linealmente independientes en un intervalo I se dice que es ***un conjunto fundamental de soluciones*** en ese intervalo.

- Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ un conjunto fundamental de soluciones en un intervalo I. Entonces, la ***solución general*** del sistema homogéneo en ese intervalo será

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

  donde las c_i; $i = 1, 2, \cdots, n$, son constantes arbitrarias.

⋆ ⋆ ⋆

1. Encontrar los intervalos en los que se tiene garantía de la existencia de una solución única.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^2-1} & e^t \\ t & \dfrac{1}{t+1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

2. Escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial y compruebe que el vector $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ indicado es una solución del mismo.

   (a) $\left\{ \begin{array}{ll} x_1' & = 2x_1 + x_2 \\ x_2' & = -x_1 \end{array} \right. ;\qquad \widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 3-4t \end{pmatrix} e^t$

   (b) $\left\{ \begin{array}{ll} x_1' & = (2t-1)x_1 \\ x_2' & = x_1 + 2tx_2 \end{array} \right. ;\qquad \widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} e^{t(t-1)} \\ e^{t^2} - e^{t(t-1)} \end{pmatrix}$

   (c) $\left\{ \begin{array}{ll} x_1' & = -3x_1 + 2x_2 + 3 - 2t \\ x_2' & = -5x_1 + 3x_2 + 6 - 3t \end{array} \right. ;\qquad \widehat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos t \\ t + 3\cos t - \sin t \end{pmatrix}$

   (d) $\left\{ \begin{array}{ll} x_1' & = \dfrac{2}{t^2}\, x_2 + \dfrac{1}{t} \\ x_2' & = x_1 + t^2 \end{array} \right. ;\qquad \widehat{\mathbf{x}}(t) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$

3. Suponga que los vectores dados son soluciones de un sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$. Determine si forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \qquad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

4. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$$

   (a) Probar que la solución general, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es el siguiente vector

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}; \qquad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes reales.}$$

   (b) Hallar la solución que satisface la condición inicial

$$\widehat{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⋆ ⋆ ⋆

Cuando la matriz de coeficientes es independiente de t (es decir, es una matriz de constantes), el sistema de EDOs homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

describe el comportamiento de los ***sistemas autónomos***. Una característica importante de estos sistemas es que sus propiedades no cambian con el tiempo; se denomina ***invariancia frente a traslaciones en la variable temporal***.

Matemáticamente, la propiedad de invariancia temporal implica que, si $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ es la solución del sistema que satisface $\widehat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{a}$, entonces $\widehat{\mathbf{x}}(t-t_0)$ será la solución del sistema que satisface la condición inicial $\widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{a}$; es decir, la respuesta es la misma que antes pero retardada en t_0.

En rigor, no existen sistemas invariantes en el tiempo; sin embargo, es frecuente que la variación que experimenta un sistema dado con el transcurso del tiempo sea tan lenta que se considera despreciable para todo efecto práctico.

Ejemplo 3.

El siguiente sistema

$$\begin{cases} x'(t) = & -ax + bxy \\ y'(t) = & dy - cxy \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas, es un sistema autónomo no lineal. Este es un sistema famoso de ecuaciones diferenciales; se denomina modelo depredador-presa de Lotka-Volterra.

Según el principio de superposición, para hallar la solución general de cualquier sistema lineal homogéneo hay que diseñar un método que permita calcular n soluciones linealmente independientes. A continuación, se abordará este problema para los sistemas lineales con coeficientes constantes; los únicos para los que existen métodos analíticos generales de resolución.

Considere el sistema lineal autónomo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

y suponga que todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son reales y distintos. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los n autovalores de $\mathbf{A}$ y sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ los autovectores correspondientes. Entonces, la solución general del sistema de EDO homogéneo estará dada por

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t},$$

con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 4.

Encontrar la solución general del siguiente sistema de EDOs $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

Se procede por pasos:

primer paso $\rightarrow$ encontrar los autovalores de $\mathbf{A}$; es decir, las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

segundo paso $\rightarrow$ encontrar los autovectores de $\mathbf{A}$; es decir, las soluciones de los sistemas lineales

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i; \;\; \mathbf{v}_i \neq 0; \;\; i = 1, 2, 3$$

(quedarán determinadas a menos de una constante multiplicativa); en este caso,

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 0 \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

tercer paso $\rightarrow$ construir la solución general; es decir, una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$; $i = 1, 2, 3$,

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{4t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^t + c_3 \mathbf{v}_3.$$

⋆ ⋆ ⋆

La aplicación **Matrix Calculator** (https://matrixcalc.org/en/) permite el cómputo de los autovalores y autovectores de una matriz de entradas constantes.

⋆ ⋆ ⋆

5. Encontrar el vector solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ en los siguientes casos

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6. (a) Probar que, si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, el vector $\widehat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v} e^{\lambda(t-t_0)}$, con t_0 constante, es una solución del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$.

   (b) Usando el resultado anterior, resuelva el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

7. Sea $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ la solución general del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -5/2 & 0 & 3/4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

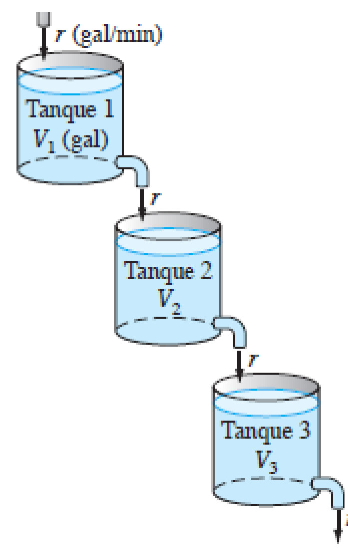
Pruebe que $\lim\limits_{t\to\infty} \widehat{\mathbf{x}}(t) = 0$ *(Ayuda: será necesario calcular los autovectores?).*

8. Considere el sistema de $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 & 2 \\ -3/4 & 1/2 & 0 & -3/4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1/2 & -3 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar $V \subset \mathbb{R}^4$ tal que, si $\mathbf{x}_0 \in V$, la solución del sistema que satisface la condición inicial $\widehat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ tienda a cero cuando $t \to \infty$ *(Ayuda: el subespacio V puede describirse en términos de los autovectores de* $\mathbf{A}$*).*

La figura muestra tres tanques de salmuera conteniendo V_1, V_2 y V_3 (galones) de la solución, respectivamente. Agua fresca fluye hacia el tanque 1, mientras que la salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hasta el tanque 2, desde éste hacia el tanque 3 y, finalmente, sale de este último. Represéntese por $x_i(t)$ la cantidad (libras) de sal en el tanque i; $i = 1, 2, 3$, en el tiempo t. Si cada razón de flujo es igual a r (galones por minuto), entonces, de un conteo simple de las concentraciones de sal, se obtiene el sistema de primer orden



9. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

donde $k_i = r/V_i$; $i = 1, 2, 3$. Supóngase que $V_1 = 20$, $V_2 = 40$, $V_3 = 50$, $r = 10$ y que las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontrar la cantidad de sal en cada uno de los tanques en el tiempo $t \geq 0$.

(b) Encuentre la cantidad máxima de sal en los tanques 2 y 3.

(c) Determinar el menor valor de T a partir del cual $|x_i(t)| \leq 5$; $i = 1, 2, 3$, para todo $t \geq T$.

⋆ ⋆ ⋆

Considere el sistema lineal autónomo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

y suponga que $\lambda_C = (\alpha + i\beta)$ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ con autovector $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_R + i\mathbf{v}_I$. Entonces,

$$\mathbf{x}_1(t) = (\mathbf{v}_R \cos \beta t - \mathbf{v}_I \sin \beta t)e^{\alpha t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_R \sin \beta t + \mathbf{v}_I \cos \beta t)e^{\alpha t}$$

son dos soluciones (reales) linealmente independientes del sistema de EDOs en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 5.

Encontrar la solución del PVI

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, se procede por pasos:

primer paso $\rightarrow$ encontrar los autovalores de $\mathbf{A}$;

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)(\lambda - (1+\mathrm{i}))(\lambda - (1-\mathrm{i}))$$

segundo paso $\rightarrow$ encontrar los autovectores de $\mathbf{A}$; para ello, buscamos soluciones de los sistemas lineales

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i;\ \mathbf{w}_i \neq 0;\ i = 1, 2, 3;$$

en este caso, trabajando en $\mathbb{C}$, se tiene

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underbrace{\lambda_2 = 1 + i \rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 1 - i \rightarrow \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}}_{\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 \text{ y } \mathbf{w}_3 = \overline{\mathbf{w}}_2}$$

tercer paso $\rightarrow$ encontrar tres soluciones linealmente independientes del sistema de EDOs;

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 & \rightarrow & \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^t \\ \mathbf{v}_C = \mathbf{w}_2 & \rightarrow & \mathbf{v}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_R \cos t - \mathbf{v}_I \sin t)e^t \\ \mathbf{x}_3(t) = (\mathbf{v}_R \sin t + \mathbf{v}_I \cos t)e^t \end{array} \end{array}$$

cuarto paso $\rightarrow$ construir la solución general

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t$$

quinto paso $\rightarrow$ imponer la condición inicial; esto es, tomando $t = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0.$$

$\star \quad \star \quad \star$

10. Para qué valores de α, las soluciones del sistema homogéneo

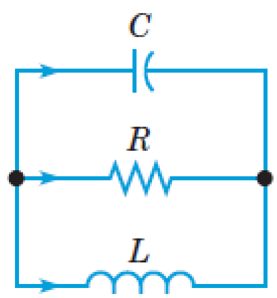
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$$

exhibirán un comportamiento oscilatorio?.

11. Para qué conjunto de vectores $\mathbf{x}_0$, el PVI

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t); \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

tendrá soluciones acotadas?



El comportamiento del circuito eléctrico que se muestra en la figura se describe mediante el sistema de ecuaciones diferenciales

12. $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix},$$

donde I es la corriente que atraviesa del inductor y V el la caída de potencial en el capacitor.

(a) Muestre que los autovalores de la matriz de coeficientes serás reales y diferentes si $L > 4R^2C$.

(b) Suponga que $R = 1$ (ohmio), $C = 1/2$ (faradio) y $L = 1$ (henrio); encontrar la solución general del sistema en este caso.

(c) Encontrar la solución particular para las condiciones $I(0) = 2$ (amperios) y $V(0) = 1$ (voltio).

(d) Determine los valores límites $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ y $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)$. Estos límites, dependen de las condiciones iniciales?

13. Encontrar la solución del siguiente PVI

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t); \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\star \quad \star \quad \star$

Considere el sistema lineal autónomo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

y suponga que ξ es un autovalor de $\mathbf{A}$ de *multiplicidad algebraica* $m \leq n$; es decir, $(\lambda - \xi)^m$ es un factor del polinomio característio

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|.$$

La solución general del sistema dependerá de la *multiplicidad geométrica* del autovalor ξ; es decir, de la dimensión del espacio propio correspondiente. Claramente, se distinguen dos situaciones:

1. la multiplicidad geométrica de ξ coincide con su multiplicidad algebraica
2. la multiplicidad geométrica de ξ es menor que su multiplicidad algebraica

Caso 1.

Cuando la multiplicidad geométrica del autovalor ξ de $\mathbf{A}$ coincide con su multiplicidad algebraica m, existen m autovectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ linealmente independientes asociados con el autovalor ξ. Luego, existen m soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\xi t},\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\xi t}, \cdots, \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{v}_m e^{\xi t}$$

linealmente independientes entre sí. Dicho de otra manera, cuando la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica, se procede como si se tuvieran m autovalores distintos, no hay diferencia. Este caso siempre ocurre cuando $\mathbf{A}$ es una matriz hermitiana.

Ejemplo 6.

Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\mathbf{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Como en los ejemplos anteriores, procederemos por pasos.

primer paso $\rightarrow$ encontrar los autovalores;

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda+1)^2(\lambda - 5)$$

segundo paso $\rightarrow$ encontrar los autovectores de $\mathbf{A}$;

$$\lambda_1 = 5 \rightarrow (\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|0) = \underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{operaciones entre filas}} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{eligiendo } x_3 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{I}|0) = \underbrace{\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{operaciones entre filas}} \rightarrow \{\; x_1 = x_2 - x_3$$

$$\text{eligiendo } x_2 = 1, x_3 = 0 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{eligiendo } x_2 = 0, x_3 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tercer paso $\rightarrow$construir la solución general del sistema de EDOs;

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{5t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{-t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{-t}$$

En lo que sigue usaremos frecuentemente la siguiente notación:

Ker$\mathbf{M}$ $\rightarrow$ núcleo de una matriz $\mathbf{M}$; es decir, el conjunto de vectores $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{M}\cdot\mathbf{v} = 0$,

span$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ $\rightarrow$ colección de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r$.

Caso 2.

Si el autovalor ξ de $\mathbf{A}$, con multiplicidad algebraica igual a m, tiene asociados $l < m$ autovectores linealmente independientes, entonces existirán solamente l soluciones linealmente independientes de la forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\, e^{\xi t}$. Por lo tanto, para construir la solución general del sistema, será necesario encontrar otras $m - l$ soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}(t)$; observemos que ya no serán puramente exponenciales. El número $d = m - l$ se denomina *defecto* del autovalor ξ.

Un teorema fundamental de álgebra lineal establece que toda $n \times n$-matriz $\mathbf{A}$ tiene n autovectores generalizados linealmente independientes.

Definición. Supóngase que λ es un eigenvalor de una $n \times n$-matriz $\mathbf{A}$. Un *autovector generalizado* de rango k asociado con λ es un vector $\mathbf{w} \neq 0$ tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \text{pero} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1} \cdot \mathbf{w} \neq 0.$$

Si $k = 1$, entonces la definición anterior significa que $\mathbf{w}$ es, simplemente, un autovector asociado a λ. De este modo, un autovector generalizado de rango 1 es un autovector ordinario.

Definición. Una cadena de longitud k de autovectores generalizados basada en el autovector ordinario $\mathbf{w}_1$ es un conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_k\}$ de k autovectores generalizados tales que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_k &= \mathbf{w}_{k-1}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_{k-1} &= \mathbf{w}_{k-2}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_1.\end{aligned} \tag{3}$$

Observación. Dado que $\mathbf{w}_1$ es un autovector ordinario, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_1 = 0$; por lo tanto, a partir de (3), se concluye

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \cdot \mathbf{w}_k = 0. \tag{4}$$

Asociados con el autovalor λ, se consideran los subespacios propios generalizados

$$E_\lambda^p = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^p; \quad p = 1, \cdots, k.$$

Estos espacios verifican la siguiente *cadena de inclusiones* $E_\lambda^1 \subset E_\lambda^2 \subset \cdots \subset E_\lambda^k$.

Cada cadena de longitud k de autovectores generalizados $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_k$ determina un conjunto de k soluciones linealmente independientes correspondientes al autovalor λ de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{w}_1 e^{\lambda t} \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{w}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{w}_2 e^{\lambda t} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{w}_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \mathbf{w}_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{w}_{k-1} t e^{\lambda t} + \mathbf{w}_k e^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{5}$$

Uniendo todas las *cadenas de soluciones* correspondientes a las diferentes cadenas de autovectores generalizados, se obtiene un conjunto completo de n soluciones linealmente independientes para el sistema de EDs

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Ejemplo 7. Encontrar tres soluciones linealmente independientes para los siguientes sistemas de EDs.

a) $$\mathbf{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Comencemos calculando el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(\lambda + 1)^3.$$

Luego, el único valor propio de $\mathbf{A}$ es $\lambda = -1$. El subespacio propio asociado a λ es

$$E_\lambda^1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \operatorname{span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

De aquí se concluye que el autovalor λ, con ***multiplicidad algebraica*** igual a tres, solo tiene dos autovectores asociados (el espacio propio asociado a λ tiene dimensión igual a dos o, equivalentemente, la ***multiplicidad geométrica*** de λ es igual a dos). En consecuencia, los vectores solución correspondientes al sistema homogéneo serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1 e^{-t}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{v}_2 e^{-t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= (\mathbf{w}_1 t + \mathbf{w}_2) e^{-t}; \quad \mathbf{w}_1 \text{ y } \mathbf{w}_2 \text{ son solución de } \left\{ \begin{aligned} (\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 \cdot \mathbf{w}_2 &= 0, \\ (\mathbf{A}+\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_1. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Determinemos primero $\mathbf{w}_2$. Un cálculo directo muestra que

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad E^2_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 = \mathbb{R}^3.$$

Entonces, $\mathbf{w}_2$ puede ser cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ que no pertenezca a E^1_λ; usando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, elegimos

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{A}+\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in E^1_\lambda.$$

Luego, tendremos

$$\mathbf{x}_3(t) = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-t}.$$

b) $\mathbf{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t).$

Procediendo como en el ejemplo anterior; determinemos

* el polinomio característico correspondiente a la matriz $\mathbf{A}$:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 25) = -\lambda(\lambda-5)^2$$

* los subespacios propios asociados con los autovalores de $\mathbf{A}$:

$$\text{para } \lambda_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad E^1_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = \mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{para } \lambda_2 = 5 \qquad \rightarrow \qquad E^1_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) = \mathrm{span}\left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

* los vectores solución correspondientes al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{v}_2 e^{5t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= (\mathbf{w}_1 t + \mathbf{w}_2) e^{5t}; \qquad \mathbf{w}_1 \text{ y } \mathbf{w}_2 \text{ son solución de } \left\{ \begin{aligned} (\mathbf{A}-5\mathbf{I})^2 \cdot \mathbf{w}_2 &= 0 \\ (\mathbf{A}-5\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$*$ una base para $E^2_{\lambda_2}$:

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} -4 & 20 & -8 \\ -5 & 25 & -10 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E^2_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$*$ una elección apropiada para el vector $\mathbf{w}_2$ (no puede pertenecer a $E^1_{\lambda_2}$):

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{A}-5\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_2 \in E^1_{\lambda_2}$$

Luego, tendremos

$$\mathbf{x}_3(t) = \left(\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) e^{5t}.$$

Ejemplo 8. Hallar la solución general de los siguientes sistemas de EDOs:

a) $$\mathbf{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t)$$

La solución general estará dada por una combinación lineal de cuatro soluciones del sistema de EDs. que sean linealmente independientes. Procediendo como en el ejemplo anterior; determinemos

$*$ el polinomio característico correspondiente a la matriz $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$$

$*$ los subespacios propios asociados con los autovalores de $\mathbf{A}$:

$$\text{para } \lambda_1 = 2 \quad \rightarrow \quad E^1_{\lambda_1} = \text{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \text{span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{para } \lambda_2 = 3 \quad \rightarrow \quad E^1_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = \text{span}\left\{ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$*$ los vectores solución correspondientes al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1 e^{2t}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{v}_2 e^{2t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \mathbf{v}_3 e^{3t}, \\ \mathbf{x}_4(t) &= (\mathbf{w}_1 t + \mathbf{w}_2) e^{3t}; \quad \mathbf{w}_1 \text{ y } \mathbf{w}_2 \text{ son solución de } \left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2 \cdot \mathbf{w}_2 & = 0 \\ (\mathbf{A}-3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 & = \mathbf{w}_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

* una base para $E^2_{\lambda_2}$:

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad \color{red}{\rightarrow} \quad E^2_{\lambda_2}=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

* una elección apropiada para el vector $\mathbf{w}_2$ (no puede pertenecer a $E^1_{\lambda_2}$):

$$\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix} \quad \color{red}{\rightarrow} \quad \mathbf{w}_1=(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\cdot\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}=\mathbf{v}_3\in E^1_{\lambda_2}$$

Finalmente, tendremos

$$\mathbf{x}_4(t)=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right)e^{3t}=\begin{pmatrix}1+t\\3-t\\-t\\1+3t\end{pmatrix}e^{3t}.$$

b) $$\mathbf{x}'(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}(t).$$

Procediendo como en el ejemplo anterior; determinemos

* el polinomio característico correspondiente a la matriz $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda-1)(\lambda+2)^3$$

* los subespacios propios asociados con los autovalores de $\mathbf{A}$:

$$\text{para } \lambda_1=1 \quad \color{red}{\rightarrow} \quad E^1_{\lambda_1}=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I})=\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{para } \lambda_2=-2 \quad \color{red}{\rightarrow} \quad E^1_{\lambda_2}=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+2\mathbf{I})=\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

* los vectores solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t)&=\mathbf{v}_1e^{t},\\ \mathbf{x}_2(t)&=\mathbf{v}_2e^{-2t},\\ \mathbf{x}_3(t)&=(\mathbf{w}_1t+\mathbf{w}_2)e^{-2t}\\ \mathbf{x}_4(t)&=(\mathbf{w}_1\frac{t^2}{2}+\mathbf{w}_2t+\mathbf{w}_3)e^{-2t};\qquad \mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2 \text{ y } \mathbf{w}_3 \text{ solución de }\left\{\begin{aligned}(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^3\cdot\mathbf{w}_3&=0\\ (\mathbf{A}+2\mathbf{I})\cdot\mathbf{w}_3&=\mathbf{w}_2\\ (\mathbf{A}+2\mathbf{I})\cdot\mathbf{w}_2&=\mathbf{w}_1\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

* una base para $E^2_{\lambda_2}$

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E^2_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^2 = \operatorname{span}\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

* una base para $E^3_{\lambda_2}$

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad E^3_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

* una elección apropiada para el vector $\mathbf{w}_3$ (no puede pertenecer ni a $E^1_{\lambda_2}$ ni a $E^2_{\lambda_2}$)

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{A}+2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \in E^2_{\lambda_2}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{A}+2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2 \in E^1_{\lambda_2}$$

Finalmente, tendremos

$$\mathbf{x}_3(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t};$$

$$\mathbf{x}_4(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} 1+t+t^2/2 \\ 2t+t^2/2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

⋆ ⋆ ⋆

14. Hallar la solución general de los siguientes sistemas de EDOs.

(a) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

(b) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

(c) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

(d) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2.5 & 1 & 1 \\ 1 & -2.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2.5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

(e) $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

En cada caso, indicar las multiplicidades algebraica y geométrica de cada autovalor de $\mathbf{A}$ y el conjunto de autovectores generalizados correspondientes.

⋆ ⋆ ⋆

Parte 2 - Sistemas lineales no homogéneos

Una matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ se denomina ***matriz fundamental de soluciones*** del sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \tag{6}$$

si sus columnas forman un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (6). Es claro que, si $\mathbf{c}$ es un vector de constantes arbitrario, la solución general del sistema homogéneo puede escribirse como el producto

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{c}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la definición anterior: una matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental de (6) si, y solo si,

- $\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0$
- $\dfrac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{\Phi}(t)$

Considere ahora el sistema de EDOs no homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{7}$$

Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado, entonces, la solución de (7) estará dada

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{c} + \underbrace{\mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{g}(\eta) \, d\eta}_{\text{solución particular}}.$$

Ejemplo 9. Resuelva el siguiente PVI

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{5t}; \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dividir el cálculo en varios pasos simples reduce significativamente la complejidad del mismo y, en general, evita la aparición de errores.

primer paso $\rightarrow$ hallar un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo; del Ejemplo 6, se tiene

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}}_{\mathbf{x}_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}}_{\mathbf{x}_2(t)} + c_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}}_{\mathbf{x}_3(t)}$$

segundo paso $\rightarrow$ construir una matriz fundamental para el sistema homogéneo; usando la definición de matriz fundamental, es inmediato que

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \mathbf{x}_3(t) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{-t} & 0 \\ e^{5t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

tercer paso $\rightarrow$ calcular la inversa de la matriz fundamental; en este caso,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \frac{1}{\det \mathbf{\Phi}(t)} \operatorname{adj} \mathbf{\Phi}(t) = \frac{1}{\det \mathbf{\Phi}(t)} (\operatorname{cof} \mathbf{\Phi}(t))^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5t} & -e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{t} & 2e^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$$

cuarto paso $\rightarrow$ hallar el producto $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$; en este caso,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-5t} & -e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{t} & 2e^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{5t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quinto paso $\rightarrow$ integrar el producto $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$; se tiene

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{g}(\eta)\, d\eta = \int_0^t \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sexto paso $\rightarrow$ construir una solución particular del sistema inhomogéneo;

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{-t} & 0 \\ e^{5t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 e^{5t}$$

séptimo paso $\rightarrow$ construir la solución general; dado $\mathbf{c}$, un vector de constantes arbitrarias, se tiene

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{-t} & 0 \\ e^{5t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 e^{5t}.$$

último paso $\rightarrow$ imponer la condición inicial; evaluando en $t_0 = 0$,

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0) \cdot \mathbf{c} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{-1}(0) \cdot \mathbf{x}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

⋆ ⋆ ⋆

15. Considere un sistema lineal $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$, donde las entradas de $\mathbf{A}(t)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Es posible que la matriz
$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ \sin t & e^{-t} \end{pmatrix}$$
sea una matriz fundamental para este sistema?

16. Suponga que $r_1 \neq r_2$ son raíces de la ecuación $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$. Mostrar que la matriz
$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$
es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$.

17. Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental de soluciones del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$ en un intervalo I. Mostrar que, si $\mathbf{C}$ es una $n \times n$-matriz de constantes no singular, entonces $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{C}$ es también una matriz fundamental del mismo sistema.

18. Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$. Mostrar que la solución del PVI $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ está dada por $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) \cdot \mathbf{x}_0$.

    $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)$ es la ***única*** matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ que satisface $\mathbf{\Psi}(t_0) = \mathbf{I}$; por esta razón, se la denomina ***matriz fundamental principal en*** t_0.

19. Considere la matriz
$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} & \dfrac{1}{1+t} \\ 1+t & 0 & e^{-3t} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
    (a) Para qué intervalos de $\mathbb{R}$, $\mathbf{\Phi}(t)$ puede ser matriz fundamental de un sistema de EDOs lineales homogéneo?
    (b) Si $t_0 = 0$ pertenece a uno de esos intervalos, hallar la matriz fundamental principal en t_0.
    (c) Construir el sistema de EDOs.

20. Hallar una matriz fundamental correspondiente a los sistemas de EDOs de los Ejemplos 7 y 8. Es la principal en $t = 0$?

21. Los siguientes ejercicios se refieren a un sistema de EDOs no homogéno de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t).$$

En cada caso, encontrar la solución del sistema que satisface la condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1. Encontrar el conjunto fundamental de soluciones para los siguientes sistemas autónomos.

   (a) $\begin{cases} y_1' = & 2y_1 - y_2 \\ y_2' = & 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y_1' = & y_1 - 2y_2 \\ y_2' = & y_1 + 3y_2 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y_1' = & 7y_1 - 3y_2 \\ y_2' = & 4y_1 - y_2 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} y_1' = & y_2 \\ y_2' = & -4y_1 \end{cases}$

2. Hallar la solución del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ que tienda a cero cuando $t \to \infty$.

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. (a) Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales $t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$ en el intervalo $t > 0$. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de constantes, el vector solución tiene la forma $\mathbf{x}(t) = t^r\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ un vector de constantes. Mostrar que $\mathbf{v}$ y r deben satisfacer la relación $(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0$ a fin de asegurar soluciones no triviales.

   (b) Resolver

      i. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

      ii. $t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$

4. En los siguientes casos, hallar la solución del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ que satisface la condición inicial $\mathbf{x}(0)$.

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. En cada caso, verificar que el vector $\mathbf{x}_h$ es una solución general del sistema homogéneo asociado; después, resolver el sistema inhomogéneo. Suponer que $t > 0$.

   (a) $t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$; $\qquad \mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

   (b) $t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) - \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^4 \end{pmatrix}$; $\qquad \mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$

6. ⋆ Considere el sistema de EDs

$$\mathbf{x}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t).$$

   La ecuación característica correspondiente a la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 6\lambda + 25)^2 = 0.$$

   Por tanto, $\mathbf{A}$ tiene un par de autovalores complejos conjugados repetidos $3 \pm 4i$. Primero muestre que los vectores complejos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

   forman una cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de longitud 2 asociada al autovalor $\lambda = 3 - 4i$. Entonces, calcule las partes real e imaginaria de las soluciones a valores complejos

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t}$$

   para encontrar las cuatro soluciones de valores reales independientes del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$.

Parte 3 - Matriz exponencial

Suponga que $\mathbf{A}$ es una $n \times n$-matriz de entradas constantes y t un escalar. Se define la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ por medio del desarrollo

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k + \cdots = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k. \tag{1}$$

Puede probarse que esta función es absoluta y uniformemente convergente respecto de la norma

$$\|T\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |T(\mathbf{x})|$$

donde

- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal,
- $|\mathbf{x}|$ es la norma euclidiana de un vector en $\mathbb{R}^n$,
- si T está representado por la matriz $\mathbf{A}$ en la base standard de $\mathbb{R}^n$; es decir, si $T(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ entonces $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{máximo autovalor de la matriz } \mathbf{A}^T\mathbf{A}}$.

A partir de esta definición, puede probarse que

- $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
- $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{B}t}$ solamente si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $e^{-\mathbf{A}t} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1}$ ya que $\underbrace{e^{-\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t+\mathbf{A}t}}_{-\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{A} \text{ conmutan}} = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
- $\dfrac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{A}$

Ejemplo 9.

Supóngase que $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{A}$, donde α es un número real distinto de cero. Encontrar la matriz $e^{\mathbf{A}t}$.

Obsérvese primero que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{A}^2 = \alpha^2\mathbf{A} \\
\mathbf{A}^4 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot (\alpha^2\mathbf{A}) = \alpha^2\mathbf{A}^2 = \alpha^3\mathbf{A} \\
&\vdots \\
\mathbf{A}^k &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1} = \mathbf{A} \cdot (\alpha^{k-2}\mathbf{A}) = \alpha^{k-2}\mathbf{A}^2 = \alpha^{k-1}\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Luego, usando la definición,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \alpha\frac{t^2}{2!}\mathbf{A} + \alpha^2\frac{t^3}{3!}\mathbf{A} + \cdots + \alpha^{k-1}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A} + \cdots = \underbrace{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{\alpha}\Big(\underbrace{\alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\alpha t)^k}{k!} + \cdots}_{e^{\alpha t}-1}\Big)}_{\mathbf{I} + \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}\mathbf{A}}$$

⋆ ⋆ ⋆

22. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Mostrar que $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$.

23. Sean $\mathbf{P}$ una $n \times n$-matriz invertible y $\mathbf{B}$ una $n \times n$-matriz. Probar que $e^{\mathbf{P}\cdot\mathbf{B}t\cdot\mathbf{P^{-1}}} = \mathbf{P} \cdot e^{\mathbf{B}t} \cdot \mathbf{P^{-1}}$.

⋆ ⋆ ⋆

Sea $\mathbf{A}$ una $n \times n$-matriz. Recordemos que

- si tiene n autovectores linealmente independientes, entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable,
- $\mathbf{A}$ es diagonalizable si, y solo si, para cada uno de sus valores propios la multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad algebraica.

Sea $\mathbf{A}$ una $n \times n$-matriz diagonalizable. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ los autovectores de $\mathbf{A}$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, respectivamente. Definamos

$$\mathbf{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{diag}[\lambda_i]} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Como los autovectores de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes, la matriz $\mathbf{P}$ resulta invertible. Obtenemos, así, una transformación de similitud que diagonaliza a $\mathbf{A}$; es decir,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Luego, usando los resultados de los ejercicios anteriores, se tendrá

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{\text{diag}[e^{\lambda_i t}]} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Observación 1. Encontrar la matriz exponencial de una matriz diagonalizable no encierra ninguna dificultad (solo hay que determinar todos los autovalores de $\mathbf{A}$ y sus correspondientes autovectores).

Se dice que una $n \times n$-matriz $\mathbf{N}$ es nilpotente cuando existe algún entero $m > 0$ tal que $\mathbf{N}^m = \mathbf{0}$. Al menor entero positivo m para el cual esta igualdad se cumple, se lo denomina *índice de nilpotencia* de la matriz $\mathbf{N}$.

Observación 2. La serie (1) para una matriz nilpotente se vuelve una suma finita, ya que el número de sumandos queda acotado por el índice de nilpotencia.

Ejemplo 10.

Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Claramente,

$$\underbrace{\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}} \quad \rightarrow \quad e^{\mathbf{A}t} = e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{N})t} = e^{\lambda\mathbf{I}t} \cdot e^{\mathbf{N}t}}_{\mathbf{I} \text{ conmuta con cualquier matriz } \mathbf{N}}$$

Cálculando las potencias de $\mathbf{N}$, encontramos

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$e^{\mathbf{N}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{t^2}{2}\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

⋆ ⋆ ⋆

24. Comprobar que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

25. Comprobar que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es nilpotente. Calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

⋆ ⋆ ⋆

El siguiente resultado se conoce como *Teorema fundamental para sistemas lineales de EDOs.*

Teorema 1. Sea $\mathbf{A}$ una $n \times n$-matriz de constantes reales. Para un dado vector $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{2}$$

tiene una única solución y está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}_0.$$

Teorema 2. Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz fundamental del sistema (2), entonces

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) \qquad \rightarrow \qquad \text{(única) matriz fundamental principal en } t_0.$$

Utilizando el método de variación de los parámetros, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3. Supongamos que el vector $\mathbf{f}(t)$ es continuo en un intervalo I. Si $t_0 \in I$, entonces el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

tiene solución única en I y está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}(s-t)} \cdot \mathbf{f}(s)\, ds.$$

⋆ ⋆ ⋆

26. En cada caso, aplicar el Teorema 3 para encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{x}(t_{0)} &= \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} t \\ 3t-5 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

27. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{Y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{Y}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-t}.$$

(a) Comprobar que $\mathbf{A}$ puede descomponerse en una matriz diagonal más una matriz nilpotente. Usando este resultado, obtener $e^{\mathbf{A}t}$.

(b) Sea $\mathbf{Y}_C(t)$ la solución del sistema homogéneo. Comprobar que el $\lim_{t\to\infty} \mathbf{Y}_C(t)$ es independiente de las condiciones iniciales.

(c) Encontrar la solución general para el sistema no homogéneo.

A continuación, usaremos los conceptos expuestos en la primera parte de la guía 5; en particular, aquellos que refieren a matrices con autovalores múltiples.

Teorema 4. Sea $\mathbf{A}$ una $n\times n$-matriz real. Si todos sus autovalores son reales, entonces $\mathbf{A}$ es semejante a la matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_p \end{pmatrix};$$

donde cada $\mathbf{J}_k$ es una $n_k \times n_k$-matriz de la forma

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix};$$

λ_k es uno de los p valores propios (distintos) de la matriz $\mathbf{A}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k = n$.

Los bloques $\mathbf{J}_k$, de tamaño n_k, se denominan *bloques de Jordan*. Si $n_k = 1$ para todo k, $\mathbf{J}_k = (\lambda_k)$ y $\mathbf{A}$ es semejante a una matriz diagonal; es decir, es diagonalizable.

El número total de veces que encontramos cada valor propio λ_k de $\mathbf{A}$ en la diagonal principal de su forma de Jordan coincide con la multiplicidad algebraica de λ_k. En consecuencia, obsérvese que dos bloques $\mathbf{J}_i$ y $\mathbf{J}_j$, con $i \neq j$, pueden corresponderse con un mismo valor propio. La forma canónica de Jordan es única, salvo por el orden de los bloques de Jordan (lo mismo que ocurría con la forma diagonal de las matrices diagonalizables).

Asumamos que $\mathbf{A}$ es semejante a $\mathbf{J}$, entonces existe una matriz $\mathbf{P}$, invertible, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Escribamos esta relación en la forma equivalente

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{J} \quad \color{red}{\rightarrow} \quad \mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_p\end{pmatrix}$$

y efectuemos las multiplicaciones por columnas; del bloque $\mathbf{J}_1$, asociado con el valor propio λ_1, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1 &= \lambda_1\cdot\mathbf{v}_1\\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_{k-1}+\lambda_1\cdot\mathbf{v}_k \quad \color{red}{\rightarrow} \quad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_{k-1}, \quad k=2,\cdots,n_1\end{cases} \tag{3}$$

Las últimas n_1-1 ecuaciones definen de manera recursiva los vectores $\{\mathbf{v}_{n_1},\mathbf{v}_{n_1-1},\cdots,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\}$ que forman lo que se conoce como una *cadena de Jordan*. En dicha cadena, el vector $\mathbf{v}_1$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ (como se observa en la primera de las ecuaciones); $\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_{n_1}$, por su parte, son *vectores propios generalizados* (Para los otros bloques se procedería de la misma forma).

Corolario 1. Bajo las hipótesis del Teorema 3, la solución del problema de valores iniciales (2) es:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{P}\cdot\mathbf{J}t\cdot\mathbf{P}^{-1}}\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{P}\cdot e^{\mathbf{J}t}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{P}\cdot\mathrm{diag}[e^{\mathbf{J}_k t}]\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{x}_0,$$

donde

$$e^{\mathbf{J}_k t}=e^{(\lambda_k\mathbf{I}+\mathbf{N})t}=e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix}1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{k-1}/(k-1)!\\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{k-2}/(k-2)!\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Observación 3. La exponencial de una matriz diagonal por bloques puede obtenerse exponenciado cada bloque de la diagonal separadamente.

Ejemplo 11.

Hallar la solución del siguiente PVI:

$$\mathbf{x}'(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$$

Se aplicará el Corolario 1. Para calcular la matriz $\mathbf{P}$, es necesario conocer un conjunto apropiado de n autovectores generalizados de $\mathbf{A}$ que generen $\mathbb{R}^4$ (*una base de Jordan*). Para esto, comenzamos determinando:

* el polinomio característico correspondiente a la matriz $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda-2)^3(\lambda-3).$$

* los subespacios propios asociados con los autovalores de $\mathbf{A}$:

$$\text{para } \lambda_1 = 3 \qquad \color{red}{\rightarrow} \qquad E^1_{\lambda_1} = \text{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \text{span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{para } \lambda_2 = 2 \qquad \color{red}{\rightarrow} \qquad E^1_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \text{span}\left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ_2 (igual a 2) no coincide con su multiplicidad algebraica (igual a 3); por lo tanto, para construir una base de $\mathbb{R}^4$, será necesario encontrar un vector propio generalizado asociado con λ_2 que no pertenzca a $E^1_{\lambda_2}$. Para ello, primero, determinemos una base para $E^2_{\lambda_2}$:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \color{red}{\rightarrow} \quad E^2_{\lambda_2} = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para que la base de $\mathbb{R}^4$ sea una base de Jordan, los vectores propios generalizados deberán satisfacer las ecuaciones (3); en este caso

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_1 & = 0 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 & = \mathbf{w}_1 \end{cases} \quad \color{red}{\rightarrow} \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \quad \color{red}{\rightarrow} \quad \mathbf{w}_2 \in E^2_{\lambda_2}.$$

Eligiendo $\mathbf{w}_2$ apropiadamente (no puede pertenecer a $E^1_{\lambda_2}$), tendremos

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \color{red}{\rightarrow} \qquad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \in E^1_{\lambda_2}.$$

Luego, el conjunto de vectores

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

forma una base de Jordan. En esta base, la matriz $\mathbf{A}$ es similar a una matriz diagonal por bloques. En efecto,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&-1/10&0&17/5\\0&1/10&0&-2/5\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1&-3\\0&2&10&4\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&1&0\\4&0&10&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$$

Entonces,

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{J}_1&0&0\\0&\mathbf{J}_2&0\\0&0&\mathbf{J}_3\end{pmatrix};\quad \text{donde}\quad \begin{array}{lcl}\mathbf{J}_1=(3) & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l}\text{multiplicidad algebraica 1}\\ \text{multiplicidad geométrica 1}\end{array}\right.\\[2ex] \mathbf{J}_2=(2) & & \\ \mathbf{J}_3=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} & \rightarrow & \left\{\begin{array}{l}\text{multiplicidad algebraica 3}\\ \text{multiplicidad geométrica 2}\end{array}\right.\end{array}$$

Dado que

$$\mathbf{J}_3=2\mathbf{I}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\mathbf{N}}.\qquad\rightarrow\qquad e^{\mathbf{J}_3t}=e^{(2\mathbf{I}+\mathbf{N})t}=e^{2t}\left[\mathbf{I}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}t\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{\mathbf{J}_1t}&0&0\\0&e^{\mathbf{J}_2t}&0\\0&0&e^{\mathbf{J}_3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&0&0&0\\0&e^{2t}&0&0\\0&0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&0&e^{2t}\end{pmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}\cdot e^{\mathbf{J}t}\cdot\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}e^{2t}&0&te^{2t}&3(e^{2t}-e^{3t})\\0&e^{2t}&10te^{2t}&4(e^{3t}-e^{2t})\\0&0&e^{2t}&0\\0&0&0&e^{3t}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0.$$

⋆ ⋆ ⋆

28. Sea $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$. Mostrar que $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&0\\-2e^t+(2-t)e^{2t}&te^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}$.

29. Sea $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha&1\\-\omega^2&\alpha\end{pmatrix}$.

   (a) Definiendo $\mathbf{J}_\omega=\begin{pmatrix}0&1\\-\omega^2&0\end{pmatrix}$, probar que $e^{\mathbf{A}t}=e^{\alpha t}\,e^{\mathbf{J}_\omega t}$.

(b) Comprobar que $e^{\mathbf{A}t} = e^{\alpha t}\Big(\mathbf{I}\cos\omega t + \mathbf{J}_\omega \dfrac{\sin\omega t}{\omega}\Big)$,

(c) Resolver el PVI $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

30. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostrar que $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(Sugerencia: la matriz $\mathbf{A}$ *es diagonal por bloques.)*

1. Calcular $e^{\mathbf{A}t}$

   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

2. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Definiendo $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es fácil comprobar que $\mathbf{A} = 3\mathbf{I} + 5\mathbf{M}$.

   (a) Probar que $e^{\mathbf{A}t} = e^{3t}\, e^{5\mathbf{M}t}$.

   (b) Comprobar que $e^{5\mathbf{M}t} = \mathbf{I}\cos 5t + \mathbf{M}\sin 5t$.

   (c) Resolver el PVI $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

3. $\star$ El Método de las aproximaciones sucesivas puede aplicarse para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Considere el PVI
$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$
donde $\mathbf{A}$ es una matriz de constantes.

   (a) Asumiendo que existe una solución $\boldsymbol{\varphi}(t)$ de este PVI, mostrar que debe satisfacerse
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varphi}(s)\, ds.$$

   (b) Comenzando por una aproximación inicial $\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \mathbf{x}_0$, obtener una nueva aproximación $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$. Mostrar que
$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \Big(\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0)\Big)\cdot\mathbf{x}_0.$$

   (c) Repetir este proceso para obtener una sucesión de aproximaciones $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\varphi}_n(t)$. Usando un argumento de inducción, probar que
$$\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \mathbf{A}^2\,\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\,\frac{(t-t_0)^n}{n!}\right)\cdot\mathbf{x}_0.$$

   (d) Hacer tender t a infinito y mostrar que la solución del PVI es
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\cdot\mathbf{x}_0.$$

7. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n

Una ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{1}$$

Introduciendo las variables $Y_0 = y$, $Y_1 = y'$, $Y_2 = y''$, $\cdots$, $Y_{n-1} = y^{(n-1)}$, la ecuación (1) se reduce a un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{cases} Y_0' = Y_1 \\ Y_1' = Y_2 \\ Y_2' = Y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-2}' = Y_{n-1} \\ Y_{n-1}' = -a_0(x)Y_0 - a_1(x)Y_1 - \cdots - a_{n-2}(x)Y_{n-2} - a_{n-1}(x)Y_{n-1} + f(x) \end{cases} \tag{2}$$

o, en notación matricial,

$$\mathbf{Y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & -a_3(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que, para poder determinar unívocamente una solución de este sistema, será necesario especificar las n componentes del vector solución $\mathbf{Y}(x)$ en algún punto x_0; en este caso,

$$Y_0(x_0) = y(x_0),\ Y_1(x_0) = y'(x_0),\ Y_2(x_0) = y''(x_0),\ \cdots,\ Y_{n-1}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0);$$

lo que implica imponer n condiciones iniciales sobre la solución $y(x)$.

Puede probarse que, si $y(x)$ es solución de (1), entonces el vector $\mathbf{Y} = \left(y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)^T$ será solución del sistema (2) y, recíprocamente, si $\mathbf{Y} = \left(Y_0, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}\right)^T$ es solución de (2), entonces la función $y(x) = Y_0(x)$ será solución de la ecuación (1). Esta ***equivalencia entre problemas diferenciales*** permite aplicar los resultados válidos para los sistemas de EDOs de primer orden a las EDOs de orden n.

Teorema de existencia y unicidad. Sea I un intervalo abierto y supóngase que $a_i(x)$; $i = 0, \cdots, (n-1)$, y $f(x)$ son funciones continuas en I. Si x_0 es un punto de I, existe una única solución de (1) que satisface

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

cualquiera sea la n-upla $(y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ elegida, y su dominio de validez es I.

Considérese ahora la ecuación homogénea asociada a (1); es decir

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{3}$$

Se asume que las funciones $a_i(x)$; $i = 0, \cdots, (n-1)$, son continuas en algún intervalo común I. Sea $\mathbf{\Lambda} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ un conjunto de n soluciones de (3) en I; entonces

- ***(Principio de superposición)*** cualquier combinación lineal de elementos de $\mathbf{\Lambda}$ también es solución de (3) en I,
- ***(Sobre la independencia lineal de las soluciones)*** $\mathbf{\Lambda}$ es linealmente independiente (es decir, es un ***conjunto fundamental de soluciones***) si, y solo si, el Wronskiano

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall x \in I,$$

- $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ si, y solo si, $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$.

Supóngase que $\mathbf{\Lambda}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3) en I; entonces, la ***solución general*** de (3) en ese mismo intervalo será

$$\widehat{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde c_i; $i = 1, \cdots, n$, son constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.

Considere la siguiente ED de segundo orden

$$2x^2\, y'' + 3x\, y' - y = 0.$$

Mostrar que el conjunto $\{y_1(x) = x^{1/2},\ y_2(x) = 1/x\}$ es un sistema fundamental de soluciones en $(0, \infty)$.

Para probar esta afirmación, comprobemos primero que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfacen la ED en $(0, \infty)$. Derivando,

$$y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad y_1''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \quad \rightarrow \quad 2x^2\Big(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\Big) + 3x\Big(\frac{1}{2}x^{-1/2}\Big) - x^{1/2} = \Big(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\Big)x^{1/2} = 0$$

$$y_2'(x) = -x^{-2}, \quad y_1''(x) = 2x^{-3} \quad \rightarrow \quad 2x^2\Big(2x^{-3}\Big) + 3x\Big(-x^{-2}\Big) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0$$

Ahora, calculemos el Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Tendremos,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-3/2} \neq 0 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Concluimos, entonces, que la afirmación es cierta. Así, en $(0, \infty)$, la solución general para la ED puede escribirse de la siguiente manera

$$y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}.$$

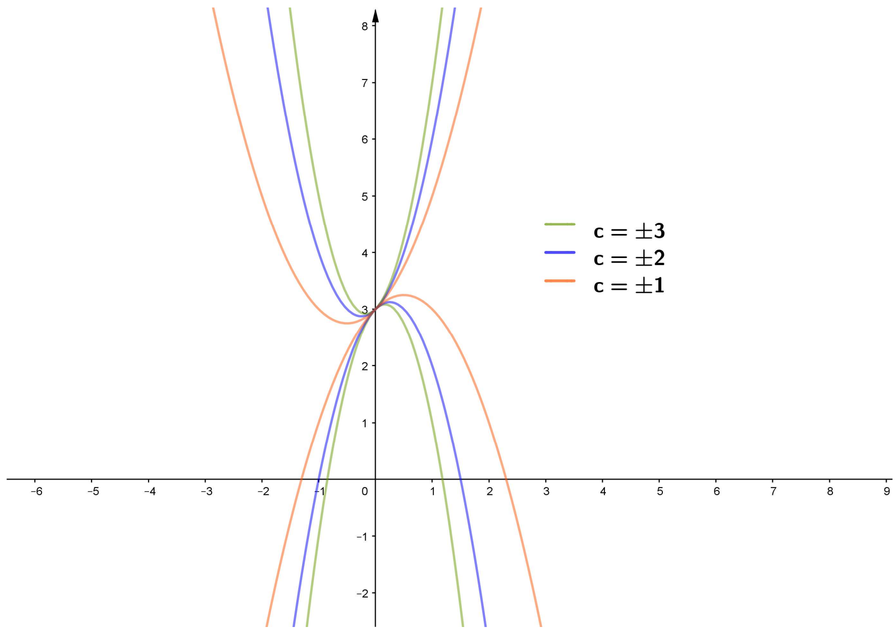
Ejemplo 2.

La función $y_c(x) = cx^2 + x + 3$ es una solución general de la ED $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$ para $x \in (-\infty, \infty)$ y para $c \in \mathbb{R}$. Puede determinarse c de manera que el PVI $\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \end{cases}$ tenga solución única?.

Calculando las derivadas de $y(x)$, tendremos

$$y_c'(x) = 2cx + 1, \quad y_c''(x) = 2c \qquad \rightarrow \qquad x^2(2c) - 2x(2cx+1) + 2(cx^2 + x + 3) = 6$$

que se verifica para todo x y todo c. En la figura se muestran las curvas integrales $y_c(x)$ para distintos valores de c. Obsérvese que, cualquiera sea c, $y_c(x)$ satisface las condiciones iniciales; claramente, el PVI no tiene solución única.



Este resultado no contradice el Teorema de existencia y unicidad; escribiendo la ecuación en la forma normal

$$y'' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{a_1(x)} y' + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{a_0(x)} y = \underbrace{\frac{6}{x^2}}_{f(x)},$$

se observa que las funciones $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $f(x)$ son discontinuas en $x_0 = 0$.

⋆ ⋆ ⋆

1. Encuentre un intervalo centrado en x_0 para el cual el PVI dado tiene una solución única.

   (a) $(x-2)y'' + 3y = x; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

   (b) $x^3(\ln x - 1)y'' - x^2y' + xy = 2\ln x; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

   (c) $x(x-3)y''' + xy' - 2(x-3)y = -3x^2; \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -5,\ y''(1) = 0$

2. Compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ED en el intervalo que se indica.

   (a) $4(x^2+x)y'' + 2(2x+1)y' - y = 0; \quad y_1(x) = \sqrt{x},\ y_2(x) = \sqrt{1+x}; \quad (0,\infty)$

   (b) $(1-x)y'' + xy' - y = 0; \quad y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x; \quad (1,\infty)$

   (c) $y'' + \dfrac{2}{x}y' - y = 0; \quad y_1(x) = \dfrac{e^x}{x},\ y_2(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}; \quad (0,\infty)$

3. ⧫ Comprobar primero que $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\ln|x|$, $y_3(x) = x^2$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de tercer orden

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Luego, encontrar una solución particular de esta ecuación que satisfaga las siguientes condiciones iniciales

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 1.$$

Será única? Cuál será su intervalo de validez?

4. ⧫ Compruebe, primero, que $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = \sqrt{x}$ son soluciones de la ED $yy'' + (y')^2 = 0$ para $x > 0$. Luego, muestre que $y(x) = 1 + \sqrt{x}$ no es una solución de esta ecuación. Contradice este resultado el Principio de superposición?

⋆ ⋆ ⋆

Supóngase que $y_1(x)$ es una solución no trivial de (3) definida en I. Se quiere encontrar una segunda solución $y_2(x)$ que sea linealmente independiente de $y_1(x)$ en I. Es posible reducir el orden de la ED en una unidad, por medio de la sustitución $y(x) = y_1(x)u(x)$, preservando la linealidad y la homogeneidad de la ecuación. Esta estrategia se conoce como ***Método de reducción del orden***.

Veamos como se aplica esta idea para $n = 2$. En este caso, la ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente manera

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{4}$$

Asumamos que $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo común I. Sea $y_1(x)$ una solución no trivial de (4) en I. Haciendo $y(x) = y_1(x)u(x)$ y reemplazando $y(x)$ en (4), se tiene

$$(uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1) + p\,(uy_1' + u'y_1) + q\,uy_1 = u\underbrace{(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1)}_{\text{cero}} + u'(2y_1' + p\,y_1) + u''y_1$$

Esto implica que

$$u'(2y_1' + p\,y_1) + u''y_1 = 0 \;\overbrace{\rightarrow}^{w(x)=u'(x)}\; \underbrace{w' + \frac{2y_1' + p\,y_1}{y_1}\,w = 0 \quad \rightarrow \quad w(x) = c_1\,\frac{e^{-\int^x p(\eta)\,d\eta}}{(y_1(x))^2}}_{\text{lineal y de variables separables}}.$$

Integrando la expresión anterior,

$$u(x) = c_1 \int^x \frac{e^{-\int^\zeta p(\eta)\,d\eta}}{(y_1(\zeta))^2}\,d\zeta + c_2 \quad \rightarrow \quad y_1(x)u(x) = c_1y_1(x)\int^x \frac{e^{-\int^\zeta p(\eta)\,d\eta}}{(y_1(\zeta))^2}\,d\zeta + c_2y_1(x).$$

Finalmente, como podemos elegir $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ sin perder generalidad, la solución buscada será

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{e^{-\int^\zeta p(\eta)\,d\eta}}{(y_1(\zeta))^2}\,d\zeta.$$

Ejemplo 3.

La función $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación diferencial $xy'' - xy' + y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ (**comprobarlo!**). Sea $y(x) = xu(x)$. Reemplazando en la ED y usando que $y_1(x)$ es solución de la ED homogénea, se tiene

$$xu'' + (2 - x)u' = 0 \quad \rightarrow \quad xw' + (2 - x)w = 0 \quad \rightarrow \quad w(x) = c_1\frac{e^x}{x^2} \quad \rightarrow \quad u(x) = c_1\int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\,d\eta + c_2.$$

Luego,

$$y(x) = xu(x) = c_1 x \int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta + c_2 x \underbrace{\quad\rightarrow\quad}_{c_1=1 \text{ y } c_2=0} y_2(x) = x \int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta$$

Por construcción, $y_2(x)$ es solución de la ED en $(0, \infty)$ y, además, es linealmente independiente de $y_1(x)$ en el mismo intervalo; en efecto,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x\displaystyle\int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta \\ 1 & \displaystyle\int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta + \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = x \int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta + e^x - x \int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta = e^x \neq 0\ \forall x.$$

Finalmente, la solución general de la ED en $(0, \infty)$ será

$$\widehat{y}(x) = c_1 x + c_2 x \int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\, d\eta.$$

⋆ ⋆ ⋆

5. Comprobar primero que $y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo que se indica. Luego, encontrar la solución general.

   (a) $x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - 1/4)y = 0;\quad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}};\quad (0, \infty)$

   (b) $y'' + y' + e^{-2x}y = 0;\quad y_1(x) = \cos(e^{-x});\quad (-\infty, \infty)$

   (c) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0;\quad y_1(x) = 1 + x;\quad (1, \infty)$

   (d) $\cos^2 x\, y'' - \sin x \cos x\, y' - y = 0;\quad y_1(x) = \sec x;\quad (-\pi/2, \pi/2)$

6. ♦ Considere la ecuación diferencial $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

   (a) Para qué valores (reales) de α y β la función $x^{-\alpha} + \beta$ será una solución de esta ecuación?

   (b) Determinar un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo $(0, \infty)$.

7. Probar que el cambio de variable $y' = vy$ reduce la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{5}$$

   a la ecuación de Ricatti

$$v' + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0. \tag{6}$$

   Deducir de ello que el problema de resolver (5) es equivalente al de resolver el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y' &= vy \\ v' &= -v^2 - a_1(x)v - a_0(x) \end{cases}. \tag{7}$$

   La ecuación (6) se conoce como la ecuación de Ricatti asociada con (5). Qué condiciones deben imponerse a (7) para que se correspondan con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$?

8. Encontar la solución general de la ecuación diferencial $y'' - (1 + 2e^x)y' + e^{2x}y = 0$ *(Sugerencia: encontrar la ecuación de Ricatti asociada).*

⋆ ⋆ ⋆

Consideremos el conjunto de funciones $\mathbf{\Lambda} = \{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ y supongamos que sea linealmente independiente en un intervalo I. Existirá alguna ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0 \tag{8}$$

que admita a $\mathbf{\Lambda}$ como conjunto fundamental de soluciones?

Asumamos que tal ecuación existe; entonces, cualquier solución $y(x)$ de la misma tendrá que ser una combinación lineal de los elementos de $\mathbf{\Lambda}$. En consecuencia,

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n, y)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) & y'(x) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \ \ \forall x \in I.$$

Desarrollando el determinante por la última columna, se obtiene

$$\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0 \ \forall x \in I} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \cdots = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de orden n. Se concluye, entonces, que el conjunto $\mathbf{\Lambda}$ determina por completo la ecuación diferencial (8) ya que, al dividir por el Wronskiano, quedan bien definidos los coeficientes $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$. En particular,

$$p_1(x) = -\frac{1}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -\frac{W'(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)}.$$

Integrando, se obtiene la ***fórmula de Abel***:

$$x_0 \in I, \quad W(x) = W(x_0)e^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)d\eta}.$$

Ejemplo 4.

a) Encontrar la ecuación diferencial para la cual $\mathbf{\Lambda} = \{e^x, e^{-x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Si $y(x)$ representa cualquier solución de la ED buscada, tendremos

$$0 = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} y = -2y'' + 2y$$

Luego, la ED que admite a $\mathbf{\Lambda}$ como conjunto fundamental de soluciones es

$$y'' - y = 0.$$

b) Determinar la solución del PVI $\begin{cases} xy'' - y' - 4x^3y = 0 \\ y(1) = 1,\, y'(1) = 0 \end{cases}$ sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es una solución de la ED homogénea.

Comencemos por escribir la ecuación en la forma normal;

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2y = 0 \quad \rightarrow \quad p_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Sea $I = (0, \infty)$. Para $x_0 \in I$,

$$-\int_{x_0}^{x} p(\eta)\, d\eta = \ln(\frac{x}{x_0}) \quad \rightarrow \quad e^{-\int_{x_0}^{x} p(\eta)d\eta} = \frac{x}{x_0}.$$

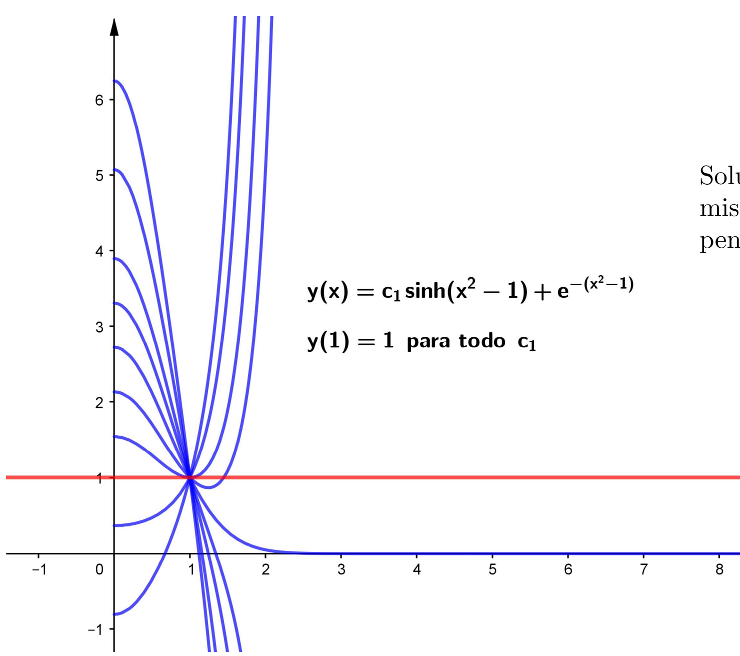
Luego, aplicando la fórmula de Abel,

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & y \\ 2xe^{x^2} & y' \end{vmatrix} = (y' - 2xy)e^{x^2} = \frac{W(x_0)}{x_0}\,x \quad \rightarrow \quad y' - 2xy = \frac{W(x_0)}{x_0}\,xe^{-x^2} \quad \rightarrow \quad y(x) = -\frac{W(x_0)}{4x_0}\,e^{-x^2} + ce^{x^2}.$$

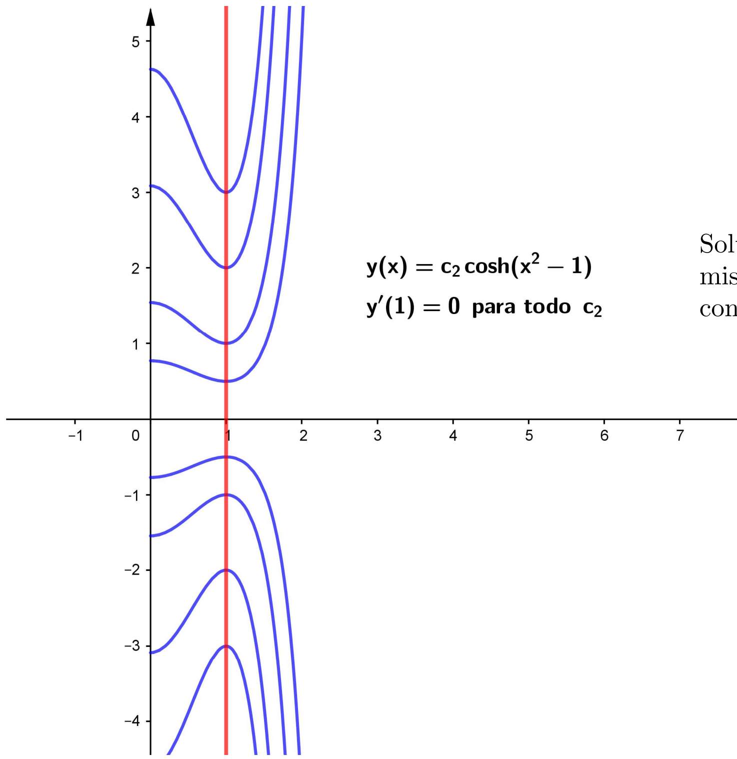
Eligiendo $c = 0$, la función $y_2(x) = e^{-x^2}$ determina junto a $y_1(x)$ un conjunto fundamental de soluciones. En particular, observemos que

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix} = -4x \quad \rightarrow \quad -\frac{W(x_0)}{4x_0} = 1.$$

La solución general de la ED será, entonces, $\widehat{y}(x) = c_1e^{x^2} + c_2e^{-x^2}$ que es una familia doblemente infinita. Las siguientes figuras muestran las familias monoparamétricas que se obtienen imponiendo una de las dos condiciones iniciales.



Soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ con el mismo valor inicial $y(1) = 1$, pero con pendientes iniciales diferentes.



Soluciones de $xy''-y'-4x^3y=0$ con la misma pendiente inicial $y'(1)=0$, pero con diferentes valores iniciales.

Resta determinar los coeficientes c_1 y c_2; para ello, se imponen las condiciones iniciales a la solución general. Usando notación matricial, tendremos

$$\begin{pmatrix} \widehat{y} \\ \widehat{y}' \end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix} e^1 & e^{-1} \\ 2e^1 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2e^{-1} & e^{-1} \\ 2e^1 & -e^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\widehat{y}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-1} + e^{-(x^2-1)}\right) = \cosh(x^2-1).$$

c) Sea $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xe^x y = 0.$$

Si se sabe que $W(y_1,y_2)(1) = 2$, cuál será el valor de $W(y_1,y_2)(4)$?

Observemos que, gracias a la fórmula de Abel, no será necesario determinar las soluciones de la ED para dar una respuesta. Escribiendo la ED en su forma normal, tendremos

$$y'' + \frac{2}{x}y' + e^x y = 0 \qquad \rightarrow \qquad p(x) = \frac{2}{x} \qquad \rightarrow \qquad e^{-\int_{x_0}^{x} p(\eta)\, d\eta} = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{2}{\eta}\, d\eta} = \frac{x_0^2}{x^2}; \qquad x_0 > 0.$$

Luego, eligiendo $x_0 = 1$,

$$W(x) = W(x_0)\frac{x_0^2}{x^2} \qquad \rightarrow \qquad W(4) = W(1)\frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

⋆ ⋆ ⋆

9. Asumamos que $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo abierto I y que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ED $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ en ese mismo intervalo.

(a) Probar que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ se hacen cero en el mismo punto x_0 de I, entonces no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones en I.

(b) Probar que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ tienen un punto de inflexión x_0 en común en I, entonces no pueden formar un conjunto fundamental de soluciones en I a menos que $p(x)$ y $q(x)$ se anulen en x_0.

10. Encontrar la ecuación lineal homogénea correspondiente al sistema fundamental de soluciones dado.

   (a) $y_1(x) = x; \quad y_2(x) = \dfrac{1}{x}$

   (b) $y_1(x) = 1; \quad y_2(x) = x; \quad y_3(x) = x^2$

11. Utilizando la fórmula de Abel y la solución dada, integre las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) $x^3y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$

   (b) $(x+1)y'' + (x+2)y' + y = 0. \quad y_1(x) = e^{-x}$

   En cada caso, determinar un intervalo de validez para la solución.

12. ♦ La ecuación diferencial $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ tiene dos soluciones de la forma $y_1 = u(x)$ e $y_2 = xu(x)$; donde $u(0) = 1$. Usando la fórmula de Abel, determinar $u(x)$ y $Q(x)$ explícitamente en función de x.

⋆ ⋆ ⋆

Teorema. Considérese la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x). \tag{9}$$

Se supone que $p_i(x)$; $i = 1, \cdots, n$, y $f(x)$ son funciones continuas en un intervalo común I. Sean

- $y_p(x)$ cualquier solución particular de la ED no homogénea en I,
- $\mathbf{\Lambda} = \{y_l, y_2, \cdots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones en I correspondiente a la ED homogénea asociada.

Entonces, la solución general de la ecuación no homogénea estará dada por

$$\widehat{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x);$$

donde c_i; $i = 1, 2, \cdots, n$, son constantes arbitrarias (pueden determinarse si se especifican n condiciones iniciales en un punto $x_0 \in I$).

(***Método de variación de parámetros***) La solución particular $y_p(x)$ tiene la forma

$$y_p(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)y_n(x)$$

donde las funciones $\alpha_i(x)$; $i = 1, 2, \cdots, n$, son solución del sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(x) \\ \alpha_2'(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x) \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{M}(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)$ se denomina ***matriz wronskiana*** asociada a $\mathbf{\Lambda}$; notar que es invertible para todo $x \in I$.

(*Principio de superposición para ED lineales no homogéneas.*) Sean $y_{p_i}(x)$; $i = 1, \cdots, k$, soluciones particulares de la ecuación (9) con datos $f_i(x)$; $i = 1, \cdots, k$, respectivamente. Entonces

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{k} y_{p_i}(x) \quad \text{es solución de la ecuación (9) con dato} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Ejemplo 5.

Hallar la solución general de la ecuación diferencial $(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2 e^x$ sabiendo que $\mathbf{\Lambda} = \{x, e^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Comencemos por escribir la ecuación diferencial en la forma normal

$$y'' + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{p_1(x)} y' - \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{p_2(x)} y = \underbrace{(1-x)e^x}_{f(x)}.$$

La solución de la ecuación homogénea asociada será

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{x}_{y_1(x)} + c_2 \underbrace{e^x}_{y_2(x)}$$

Para aplicar el método de variación de parámetros, se asume que la solución particular tiene la forma

$$y_p(x) = \alpha_1(x)x + \alpha_2(x)e^x.$$

y se determinan los coeficientes $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ resolviendo el sistema

$$\mathbf{M}(x, e^x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(x) \\ \alpha_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(x) \\ \alpha_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)e^x \end{pmatrix}.$$

Haciendo esto, se tiene

$$x \neq 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ (1-x)e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = e^x \quad \rightarrow \quad \alpha_1(x) = e^x \\[4ex] \alpha_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (1-x)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = -x \quad \rightarrow \quad \alpha_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

Finalmente, la solución buscada será $\widehat{y}(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 x + c_2 e^x + xe^x - \dfrac{1}{2}x^2 e^x$.

⋆ ⋆ ⋆

13. ♦ Hallar una solución general de la ecuación $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$ sabiendo que $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada en $(0, \infty)$.

14. ♦ Hallar una solución general de la ecuación $x^2y'' + x^3y' - 2(1+x^2)y = x$ sabiendo que la ecuación homogénea asociada tiene una solución de la forma x^m; m número natural. (*Sugerencia: no intentar resolver las integrales*).

15. Se sabe que $(1+x)^2$ es una solución de la ecuación diferencial $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ y que el Wronskiano de cualesquiera dos soluciones es constante. Encontrar la solución general de $y''+p(x)y'+q(x)y=1+x$

16. Encontrar una solución particular de la ecuación $x^3y'''+5x^2y''+2xy'-2y=x^4$ sabiendo que $\left\{x, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada en $(0,\infty)$.

⋆ ⋆ ⋆

Una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n es de la forma:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+a_{n-2}y^{(n-2)}(x)+\cdots+a_1y'(x)+a_0y(x)=0. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden n, se puede concluir que la solución general de la ecuación (10) dependerá de los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

Luego, $\mathbf{\Lambda}$, el conjunto fundamental de soluciones, dependerá de las raíces de $p(\lambda)$. Se pueden presentar las siguientes situaciones:

- todas las raíces son reales y distintas; en este caso,

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Lambda}=\{e^{\lambda_1x},e^{\lambda_2x},\cdots,e^{\lambda_nx}\}$$

- las raíces son reales, pero algunas de ellas se repiten; por ejemplo, suponga que

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k}_{\text{iguales a }\lambda},\underbrace{\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n}_{\text{distintas}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Lambda}=\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x},x^2e^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x},e^{\lambda_{k+1}x},\cdots,e^{\lambda_nx}\}$$

- $p(\lambda)$ tiene raíces complejas que no se repiten; por ejemplo, suponga que

$$\underbrace{(\alpha+i\beta)}_{\lambda_1},\underbrace{(\alpha-i\beta)}_{\lambda_2},\underbrace{\lambda_3,\cdots,\lambda_n}_{\text{distintas}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Lambda}=\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x,e^{\lambda_3x},\cdots,e^{\lambda_nx}\}$$

- $p(\lambda)$ tiene raíces complejas múltiples; por ejemplo, suponga que

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}_{\text{iguales a }(\alpha+i\beta)}\ ,\ \underbrace{\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6}_{\text{iguales a }(\alpha-i\beta)}\ ,\underbrace{\lambda_7,\cdots,\lambda_n}_{\text{distintas}}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{\Lambda}=\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x,x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,e^{\lambda_7x},\cdots,e^{\lambda_nx}\}$$

Ejemplo 6.

a) Hallar la solución general de la ED $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

El polinomio característico correspondiente a esta ED es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Como las raíces de $p(\lambda)$ son reales y distintas, la solución general tendrá la forma

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}.$$

b) Hallar la solución general de la ED $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

El polinomio característico correspondiente a esta ED es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

En este caso, $\lambda = 1$ es raíz de $p(\lambda)$ con multiplicidad igual a 3; por lo tanto, la solución general será

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

c) Hallar la solución general de la ED $y^v - 2y^{iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

El polinomio característico correspondiente a esta ED es

$$p(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2;$$

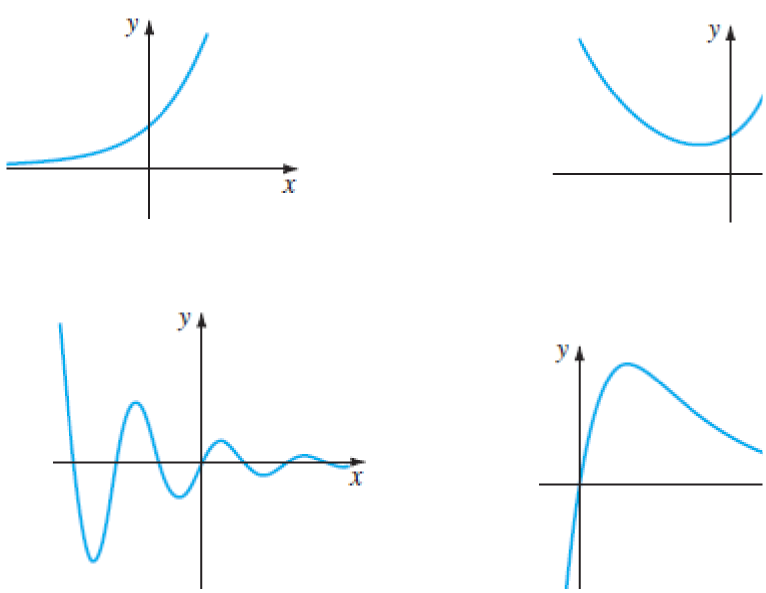
tiene las siguientes raíces: $\lambda_1 = 2$, real de multiplicidad 1, $\lambda_2 = i$, compleja de multiplicidad 2, y $\lambda_3 = -i$, compleja de multiplicidad 2. La solución general será

$$y(x) = c_1 e^{2x} + (c_2 + xc_3)\cos x + (c_4 + xc_5)\sin x.$$

⋆ ⋆ ⋆

17. En la siguiente figura, cada gráfica representa una solución particular correspondiente a una de las EDOs que se listan. Puede relacionar cada curva solución con una ED?

 (a) $y'' - 3y' - 4y = 0$ (b) $y'' + 2y' + y = 0$ (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ (d) $y'' - 3y' + 2y = 0$



18. ⧫ Resolver la siguiente ED
$$y'' - (\alpha - 3)\, y' - 2(\alpha - 1)\, y = 0.$$
Determinar, luego, los valores de α tal que todas las soluciones tiendan a cero cuando $x \to \infty$.

19. ⧫ Resolver el siguiente PVI
$$y'' + 2\alpha\, y' + (\alpha^2 + 1)\, y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$
Considerar, luego, el caso $\alpha = 1/2$. Encontrar el mínimo valor x_0 tal que $|y(x)| < 0.1$ para todo $x > x_0$.

20. ⧫ Resolver el siguiente PVI
$$2\, y'' + 3\, y' - 2\, y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta, \quad \beta > 0.$$
   (a) Para $\beta = 1$, encontrar las coordenadas del punto (x_0, y_0) donde la solución alcanza su mínimo.
   (b) Encontrar el valor más pequeño del parámetro β a partir del cual la solución no tendría mínimos.

21. Utilizando el Método de variación de parámetros, resolver:
   (a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$
   (b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
   (c) $y'' - y = \dfrac{1 + x}{x^2}$
   (d) $y'' + a^2 y = f(x); \quad f(x)$ función continua
   (e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$
   (f) $y^{iv} - y'' = 2xe^x$

⋆ ⋆ ⋆

Consideremos el problema de hallar una solución particular $y_p(x)$ para la ecuación diferencial
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x); \tag{11}$$
donde los coeficientes a_i; $i = 0, \cdots, (n-1)$, son constantes reales.

En el caso general, la integración de la ecuación (11) puede realizarse utilizando el ***Método de variación de parámetros.*** No obstante, cuando $g(x)$ tiene una forma especial, la solución particular puede hallarse más fácilmente por medio del ***Método de los coeficientes indeterminados.*** La idea fundamental detrás de este método es una conjetura sobre la forma de $y_p(x)$ motivada por las clases de funciones que forman la función dato $g(x)$. La aplicación de método de los coeficientes indeterminados está limitada a la siguiente situación:

- la ecuación diferencial tiene que ser lineal con coeficientes constantes
- la inhomogeneidad tiene que ser de la forma (en el caso general)
$$g(x) = e^{\alpha x}(P_{m_p}(x) \cos \beta x + Q_{m_q}(x) \sin \beta x),$$
  donde $P_{m_p}(x)$ y $Q_{m_q}(x)$ son polinomios de grado m_p y m_q, respectivamente.

En este caso, el método propone buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(\widehat{P}_k(x)\cos\beta x + \widehat{Q}_k(x)\sin\beta x),$$

donde

- s es la multiplicidad de $\lambda = \alpha \pm i\beta$ como raíz del polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea asociada ($s = 0$ si $\alpha \pm i\beta$ no es raíz del polinomio característico),
- $\widehat{P}_k(x)$ y $\widehat{Q}_k(x)$ son polinomios de grado k con coeficientes a determinar,
- $k = \begin{cases} \max\{m_p, m_q\} & \text{si} \quad P_{m_p}(x) \neq 0;\ Q_{m_q}(x) \neq 0, \\ m_p & \text{si} \quad Q_{m_q}(x) = 0, \\ m_q & \text{si} \quad P_{m_p}(x) = 0. \end{cases}$

Ejemplo 7.

a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

En este caso, polinomio característico es

$$p(\nu) = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1 = (\nu - 1)(\nu^2 + 1);$$

por consiguiente, la solución general de la ED homogénea asociada será

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Comparando a $x^2 + x$ con la forma general ***permitida*** para $g(x)$, se tiene $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $m_p = 2$ y $m_q = 0$. Como $\lambda = \alpha \pm i\beta = 0$ no es raíz de $p(\nu)$, se propone

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

donde A, B y C son coeficientes indeterminados; para hallarlos, se sustituye la expresión de $y_p(x)$ en la ED. Haciendo esto,

$$-Ax^2 + (2A - B)x + (B - 2A - C) = x^2 + x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A &= -1 \\ 2A - B &= 1 \\ B - 2A - C &= 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -3 \\ C = -1 \end{array}$$

Luego, la solución general de la ED no homogénea será

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 \cos(x) + c_3 \sin x + x^2 - 3x - 1.$$

b) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

En este caso, polinomio característico es

$$p(\nu) = \nu^2 - 6\nu + 9 = (\nu - 3)^2;$$

por consiguiente, la solución general de la ED homogénea asociada será

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$

Comparando a $25e^x \sin x$ con la forma general ***permitida*** para $g(x)$, se tiene $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $m_q = 0$. Como $\lambda = 1 \pm i$ no es raíz de $p(\nu)$, se propone

$$y_p(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

donde A y B son coeficientes indeterminados; para hallarlos, se sustituye la expresión de $y_p(x)$ en la ED. Haciendo esto,

$$(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x=25\sin x \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{ll} 3A-4B & =0 \\ 4A+3B & =25 \end{array} \right. \quad \to \quad \begin{array}{l} A=4 \\ B=3 \end{array}.$$

Luego, la solución general de la ED no homogénea será

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=(c_1+xc_2)e^{3x}+(4\cos x+3\sin x)e^x.$$

c) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y''-y''=12x^2+6x$.

En este caso, polinomio característico es

$$p(\nu)=\nu^3-\nu^2=\nu^2(\nu-1);$$

por consiguiente, la solución general de la ED homogénea asociada será

$$y_h(x)=c_1+c_2xc_3e^x.$$

Comparando a $12x^2+6x$ con la forma general ***permitida*** para $g(x)$, se tiene $\alpha=0$, $\beta=0$, $m_p=2$ y $m_q=0$. Como $\lambda=0$ es raíz (doble) de $p(\nu)$, se propone

$$y_p(x)=x^2(Ax^2+Bx+C)$$

donde A, B, y C son coeficientes que se determinan sustituyendo $y_p(x)$ en la ED. Haciendo esto,

$$-12Ax^2+(24A-6B)x+(6B-2C)=12x^2+6x \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{rl} -12A & =12 \\ 24A-6B & =6 \\ 6B-2C & =0 \end{array} \right. \quad \to \quad \begin{array}{l} A=-1 \\ B=-5 \\ C=-15 \end{array}$$

Luego, la solución general de la ED no homogénea será

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=c_1+c_2x+c_3e^x-x^2(x^2+5x+15)$$

► Otros ejemplos (todos corresponden al caso en que $\alpha \pm i\beta$ no es raíz de $p(\nu)$).

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x+7$	$Ax+B$
3. $3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4. x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10. $e^{3x}\operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2\operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

$d)$ Hallar la solución general de la ecuación $y'' + y = x\cos x$.

En este caso, polinomio característico es

$$p(\nu) = \nu^2 + 1 = (\nu - i)(\nu + i);$$

por consiguiente, la solución general de la ED homogénea asociada será

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Comparando a $x\cos x$ con la forma general ***permitida*** para $g(x)$, se tiene $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y $m_p = 1$ Como $\lambda = \pm i$ es raíz (simple) de $p(\nu)$, se propone

$$y_p(x) = x((A_1 + B_1 x)\cos x + (A_2 + B_2 x)\sin x)$$

donde A_1, B_1, A_2 y B_2 son coeficientes que se determinan sustituyendo $y_p(x)$ en la ED.

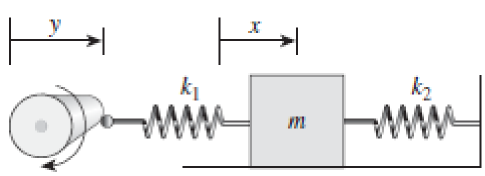
Intente completar los cálculos.
Le parece el camino más apropiado para resolver esta ED?
Cuál sería la alternativa?

⋆ ⋆ ⋆

22. Hallar una ecuación diferencial lineal, con coeficientes constantes, cuya solución general sea
    (a) $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$
    (b) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + x + 4$
    (c) $y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + x/3$
    (d) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - (2x + 4/3)e^{2x}$

23. ♦ Si $y_{p1}(x) = -\frac{1}{3}x+1$ es una solución particular de $y''+6y'+9y = 7-3x$ e $y_{p2} = -2e^{-2x}+\frac{1}{9}$ es una solución particular de $y''+6y'+9y = -2e^{-2x}+1$, determine la solución general de $y''+6y'+9y = 3x+11-2e^{-2x}$.

24. En el sistema de la figura, el extremo izquierdo del resorte k_1, cuyo desplazamiento es y, es impulsado por la leva giratoria. El desplazamiento y es una función del tiempo dada. Cuando $x = y = 0$, ambos resortes están en su longitud natural.



    (a) Si γ es el coeficiente de fricción en la supeficie; muestre que la ecuación diferencial del movimiento en términos de x está dada por:

$$mx'' + \gamma x' + (k_1 + k_2)x = k_1 y$$

    (b) Resolver la ED homogénea para $m = 1\,kg$, $c = 2\,N.s/m$, $k_1 = 12N/m$ y $k_2 = 13N/m$.
    (c) Resolver la ED no homogénea para $y(t) = 3\sin 5t$.

(d) Resolver el PVI correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 6cm$, $x'(0) = 0$.

25. Encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas.

(a) $y'' - y = 1$; solución acotada para $x \to \infty$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

(c) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$

(d) $y'' + 4y = \cos x$

(e) $y'' - 5y' + 6y = e^x(x^2 - 3)$

(f) $y'' - y = e^x + \sin x$

(g) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin x$

(h) $y'' + y = \sin x$; $y(\pi/2) = 3$, $y'(\pi/2) = -1 + \pi/4$

⋆ ⋆ ⋆

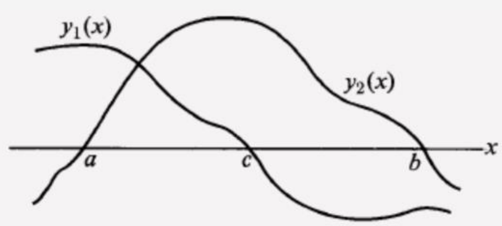
Los siguientes dos resultados son consecuencia de la fórmula de Abel; describen el comportamiento de los ceros de las soluciones de las EDO homogéneas de segundo orden.

Teorema de separación de Sturm. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en un intervalo I. Entonces los ceros de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se alternan en I.

► Supóngase que a y b ($a < b$) son dos puntos en I tales que $y_2(a) = y_2(b) = 0$ y que $y_2(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. El objetivo es probar que existe exactamente un punto c entre a y b tal que $y_1(c) = 0$.



Por hipótesis, $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ED en I; entonces, para todo $x \in I$, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. En virtud de la fórmula de Abel, el signo de $W(y_1, y_2)(x)$ se mantiene constante en I. En particular,

$$0 \neq W(y_1, y_2)(a) = y_1(a)y_2'(a) \quad \text{tiene el mismo signo que} \quad W(y_1, y_2)(b) = y_1(b)y_2'(b) \neq 0$$

A partir de este resultado y teniendo en cuenta que el signo de $y_2'(a)$ debe ser distinto que el signo de $y_2'(b)$ (a y b son dos ceros consecutivos de $y_2(x)$ que es una función continua en I), se concluye que el signo de $y_1(a)$ debe ser distinto que el signo de $y_1(b)$. Luego, por el Teorema del valor intermedio, existe (al menos) un punto $c \in (a, b)$ tal que $y_1(c) = 0$.

Usando el mismo argumento, pero intercambiando roles entre $y_1(x)$ e $y_2(x)$, se concluye que entre dos ceros consecutivos de $y_1(x)$ existe al menos un cero de $y_2(x)$.

Teorema de comparación de Sturm. Sean y_1 e y_2 soluciones no triviales de las ecuaciones diferenciales

$$y'' + p_1(x)y = 0 \qquad \text{e} \qquad y'' + p_2(x)y = 0,$$

respectivamente, en un intervalo común I. Supongamos que $p_1(x) > p_2(x)$ para todo $x \in I$. Entonces, entre dos ceros cualesquiera de y_2 hay al menos un cero de y_1.

► Sean a y b $(a < b)$ ceros consecutivos de $y_2(x)$ y supóngase que $y_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Dado que los ceros de una función $y(x)$ son los mismos que los de $-y(x)$, podemos suponer que $y_(x)$ e $y_2(x)$ tienen el mismo signo; digamos positivo, en (a, b).

Argumentando como en la prueba del teorema anterior;

$$W(y_1, y_2)(a) = y_1(a)y_2'(a) \geq 0 \quad \text{y} \quad W(y_1, y_2)(b) = y_1'(b)y_2(b) \leq 0.$$

Por otro lado, $W(y_1, y_2)(x)$ es creciente en (a, b); en efecto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y_1, y_2)(x) &= \frac{d}{dx}(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= (p_1(x) - p_2(x))y_1(x)y_2(x) > 0 \end{aligned}$$

Es claro que ambos resultados se contradicen; por lo tanto, $y_1(x)$ debe tener un cero en algún punto entre a y b.

Ejemplo 8.

Probar que todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial tienen infinitos ceros.

$$y'' + \frac{ax}{1+x}\,y = 0; a > 0. \tag{12}$$

Sea $p_1(x) = \dfrac{ax}{1+x}$; observemos que

$$\lim_{x\to+\infty} p_1(x) = a \quad \rightarrow \quad \text{existe } x_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } |p_1(x) - a| < \frac{a}{2} \ \ \forall x > x_0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{a}{2}}_{p_2(x)} < p_1(x) < \frac{3a}{2} \ \ \forall x > x_0.$$

Compararemos, entonces, la ecuación diferencial (12) con la siguiente ecuación

$$y'' + \frac{a}{2}\,y = 0 \tag{13}$$

en (x_0, ∞). Por el Teorema de Comparación de Sturm, entre dos ceros de cualquier solución de (13) debe existir al menos un cero de toda solución de (12). Ahora bien, la función

$$y(x) = \sin\sqrt{\frac{a}{2}}x$$

es una solución de (13) con infinitos ceros en (x_0, ∞). Luego, toda solución de (12) tiene infinitos ceros en (x_0, ∞).

⋆ ⋆ ⋆

26. Mostrar que las funciones $y_1(x) = a_1 \sin x + a_2 \cos x$ e $y_2(x) = b_1 \sin x + b_2 \cos x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ siempre que $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$. Probar, entonces, que los ceros de $y_2(x)$ alternan con los ceros de $y_1(x)$ en $(-\infty, \infty)$.

27. Es esto cierto o falso?

    (a) Toda solución de la ecuación $y'' + xy = 0$ tiene infinitos ceros en $(0, \infty)$.

    (b) Las soluciones no triviales de $y'' - e^x y = 0$ tienen a lo sumo un cero positivo.

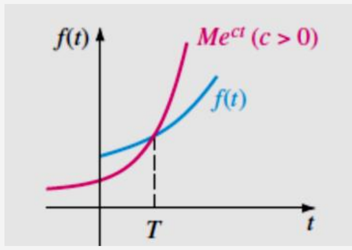
28. Sea $f(x)$ una función continua en $(0, \infty)$. Suponga que existen constantes positivas c y K tales que, para todo $x > 0$, $c \leq f(x) \leq K$. Mostrar que toda solición no trivial de la ecuación $y'' + f(x)\, y = 0$

    (a) tiene infinitos ceros en $(0, \infty)$,

    (b) la distancia d entre ceros consecuticos puede estimarse por $\dfrac{\pi}{\sqrt{K}} \leq d \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{c}}$.

8. La transformada de Laplace

▶ Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial α cuando $t \to \infty$ si existen constante $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ para todo $t > T$.



▶ Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua en cada intervalo $[0, t_0]$; $t_0 > 0$, y de orden exponencial α cuando $t \to \infty$. Entonces, para $\operatorname{Re} s > \alpha$, la siguiente integral existe y converge absolutamente

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \qquad \leftarrow \qquad \text{transformada de Laplace de } f(t).$$

Observación: cuando la integral converge, el resultado es una función de la variable s; se indicará este hecho usando la siguiente notación $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Definición: Una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se dirá ***admisible*** si es continua por tramos y de orden exponencial α cuando $t \to \infty$.

Propiedad: La transformada de Laplace es una operación ***lineal***; es decir, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ entonces, para cualequier par de constantes a y b, se verifica

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] = aF(s) + bG(s).$$

Ejemplo 1.

▶ Hallar $\mathcal{L}[1]$.

Por definición,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty 1\, e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b 1\, e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-bs} + 1}{s} = \frac{1}{s} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

Observación. El límite calculado no existiría si $\operatorname{Re} s < 0$, ya que el término e^{-sb}/s no permanecería acotado cuando $b \to \infty$. Así, $\mathcal{L}[1]$ está definida solo si $\operatorname{Re} s > 0$. Esto es habitual con las transformadas de Laplace; el dominio de la transformación es siempre de la forma $\operatorname{Re} s > s_0$ para algún valor determinado de s_0 que se denomina ***abscisa de convergencia***.

▶ Hallar $\mathcal{L}[t]$.

Por definición,

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t\, e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t\, e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \Big(-\frac{be^{-bs}}{s} + \frac{-e^{-bs} + 1}{s^2} \Big) = \frac{1}{s^2} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

▶ Hallar $\mathcal{L}[e^{at}]$; $a > 0$.

Por definición,

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-b(s-a)} + 1}{s-a} = \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}\, s > a$$

▶ Hallar $\mathcal{L}[\cos at]$ y $\mathcal{L}[\sin at]$; $a > 0$.

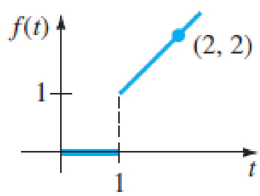
Las transformadas de Laplace se pueden determinar directamente como en los otros ejemplos, pero es más cómodo utilizar la propiedad de linealidad y la fórmula de Euler. En efecto,

$$\mathcal{L}[\cos at] + i\mathcal{L}[\sin at] = \int_0^\infty e^{st} \cos at\, dt + i \int_0^\infty e^{st} \sin at\, dt = \int_0^\infty e^{iat}\, e^{st} dt = \frac{1}{s - ia} \qquad \mathrm{Re}\,(s - ia) > 0.$$

Igualando las partes reales e imaginarias,

$$\frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} \quad \to \quad \begin{cases} \mathcal{L}[\cos at] & = \dfrac{s}{s^2+a^2} \\ \\ \mathcal{L}[\sin at] & = \dfrac{a}{s^2+a^2} \end{cases}$$

▶ Hallar $\mathcal{L}[f(t)]$.



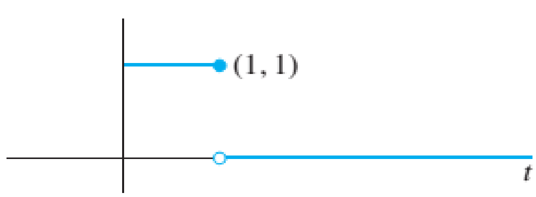
$$\to \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1, \\ t & t > 1. \end{cases}$$

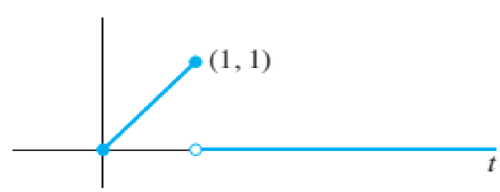
Por definición,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b t e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-be^{-bs} + e^{-s}}{s} + \frac{-e^{-bs} + e^{-s}}{s^2} \right) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Aplicar la definición para encontrar las transformadas de Laplace de las siguiente funciones (descritas gráfiamente):





2. Utilizando la definición, encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones. En aquellos problemas donde aparecen, a y b representan constantes reales.

   (a) $f(t) = \begin{cases} at + b, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

   (b) $f(t) = e^{-at+b}$

   (c) $f(t) = te^{at}$

(d) $f(t) = e^t \cos t$

(e) $f(t) = \sinh t$

3. Utilizando propiedades de linealidad, calcular la transformada de Laplace para las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = t^2 + 6t - 3$

   (b) $f(t) = 1 + e^{4t}$

   (c) $f(t) = 4t^3 - 5\sin 3t$

   (d) $f(t) = \cos 5t + \sin 2t$

   (e) $f(t) = 5\cos(t - \frac{\pi}{6})$

   (f) $f(t) = \sin^2 t$

4. Evaluar las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t} \sin t\, dt$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3t}(1 - \sin 3t)dt$

⋆ ⋆ ⋆

Observación. No es necesario ni práctico recurrir a la definición de la transformación de Laplace cada vez que se quiera determinar la transformada de una función. Un enfoque más práctico es determinar la transformada de las funciones que se encuentran frecuentemente y listarlas en una tabla; por ejemplo la del **Anexo 1**. Así, es posible determinar la transformada de una función simplemente buscándola en la tabla. Ninguna tabla es lo suficientemente grande como para contener las transformadas de todas las funciones concebibles; a menudo se necesita expresar la función de la forma que *aparece* en la tabla. Las propiedades de la transformada de Laplace que se explican a continuación serán muy útiles a este respecto.

⋆ ⋆ ⋆

Traslación sobre el eje s. Sea $f(t)$ es una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a).$$

La prueba de esta propiedad es inmediata a partir de la definición; en efecto,

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t}\, dt = F(s - a).$$

Cambio de escala. Sea $f(t)$ es una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces,

$$a > 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\Big(\frac{s}{a}\Big).$$

A partir de la definición y, con el cambio de variable $u = at$, se tiene

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at) e^{-st}\, dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{s}{a}u}\, du = \frac{1}{a} F\Big(\frac{s}{a}\Big).$$

Ejemplo 2.

▶ Hallar la transformada de Laplace de la función $g(t) = e^{-t}\sin^2 t$.

Usando una identidad trigonométrica, se tiene

$$g(t) = e^{-t}\sin^2 t = e^{-t}\,\frac{1-\cos 2t}{2} \underbrace{\longrightarrow}_{\text{linealidad}} \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-t}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t]$$

A partir de las transformadas de las funciones conocidas (ver Anexo 1)

$$\underbrace{\mathcal{L}[e^{-t}] = \mathcal{L}[e^{-t}f(t)]}_{f(t)=1} = \frac{1}{s+1} \quad \leftarrow \quad \text{propiedad de traslación con } a=-1$$

$$\underbrace{\mathcal{L}[e^{-t}\cos 2t] = \mathcal{L}[e^{-t}f(t)]}_{f(t)=\cos 2t} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \quad \leftarrow \quad \text{propiedad de traslación con } a=-1$$

⋆ ⋆ ⋆

5. Aplicando la propiedad de traslación, calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
   (a) $f(t) = t^3e^{-2t}$
   (b) $f(t) = t(e^{-t}+e^{2t})^2$
   (c) $f(t) = e^{-3t}\cos 3t$
   (d) $f(t) = (1-3t+5\sin t)e^{3t}$

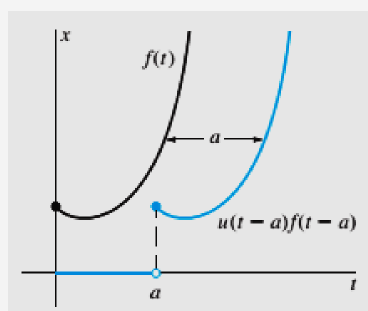
⋆ ⋆ ⋆

En el **Anexo 2**, se presenta una breve exposición sobre la función escalón unitario. Se sugiere la lectura de este complemento antes de continuar con la guía.

⋆ ⋆ ⋆

Sean $f(t)$ una función con dominio en $[0,\infty)$ y $u(t-a)$ la función escalón unitario. Asociada a $f(t)$, se define la función

$$f_a(t) =: f(t-a)\,u(t-a) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < a, \\ f(t-a) & t \ge a. \end{cases}$$



Traslación en el eje t. Sea $f(t)$ es una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}[f_a(t)] = e^{-as}F(s).$$

Por definición,

$$\mathcal{L}[f_a(t)] = \int_0^\infty f(t-a)\,u(t-a)e^{-st}\,dt = \underbrace{\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}\,du}_{x=t-a} = e^{-as}F(s).$$

Ejemplo 3.

▶ Hallar la transformada de Laplace de la función $g(t) = (3t-1)\,u(t-2)$.

Observemos primero que

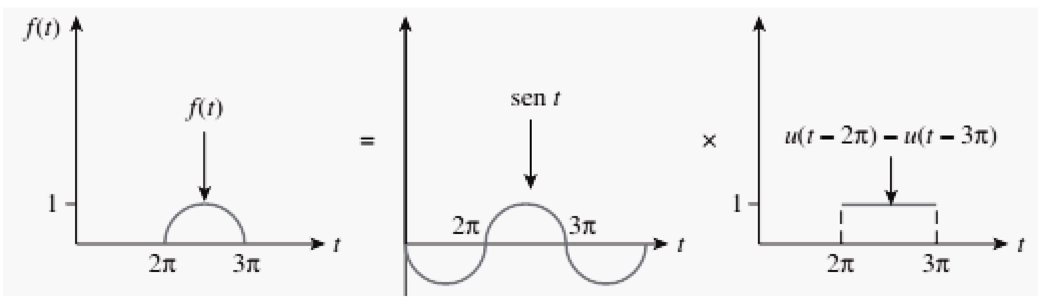
$$3t - 1 = 3(t-2) + 5 \underbrace{\;\rightarrow\;}_{f(t)=3t+5} g(t) = f(t-2)\,u(t-2) = f_2(t).$$

Luego, aplicando la propiedad de traslación,

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)] = e^{-2s}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-2s}\underbrace{\mathcal{L}[3t+5] = \Big(3\mathcal{L}[t] + 5\mathcal{L}[1]\Big)}_{\text{linealidad}} e^{-2s} = \Big(\frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}\Big)e^{-2s}.$$

▶ Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2\pi, \\ \sin t & 2\pi \le t \le 3\pi, \\ 0 & t > 3\pi. \end{cases}$

Esta función puede considerarse como el producto de la diferencia entre dos funciones escalón unitario por la función $g(t) = \sin t$, como se muestra en la figura



Así, $g(t)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$f(t) = (u(t-2\pi) - u(t-3\pi))\sin t = u(t-2\pi)\underbrace{\sin(t+2\pi)}_{\sin t} + u(t-3\pi)\underbrace{\sin(t+3\pi)}_{-\sin t} = g_{2\pi}(t) + g_{3\pi}(t).$$

Ahora, la transformada de Laplace de $f(t)$ puede calcurse fácilmente combinando la propiedad de linealidad con la de traslación; en efecto,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g_{2\pi}(t) + g_{3\pi}(t)] = (e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t})\mathcal{L}[g))] = (e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t})\mathcal{L}[\sin t] = \frac{e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t}}{s^2+1}.$$

⋆ ⋆ ⋆

6. Sea $f(t)$ la función cuya gráfica se muestra en la figura de la derecha. Considere las funciones definidas por

   (a) $f(t) - f(t)u(t-b)$

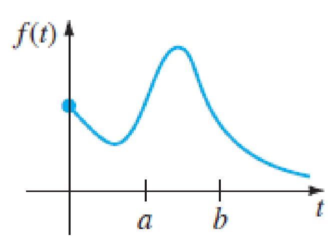
   (b) $f(t-b)u(t-b)$

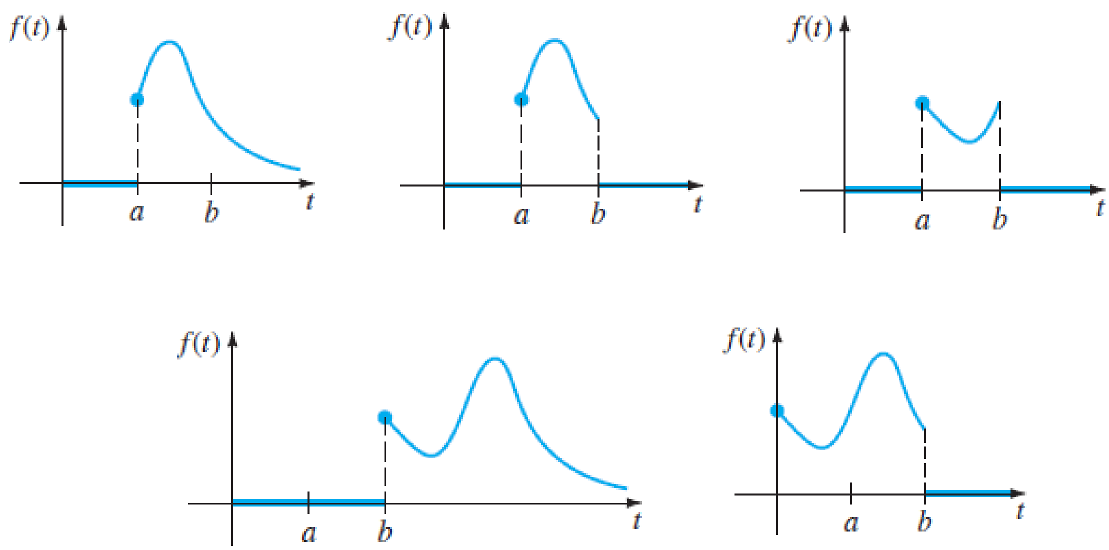
   (c) $f(t)u(t-a)$

   (d) $f(t)u(t-a) - f(t)u(t-b)$

   (e) $f(t-a)u(t-a) - f(t-a)u(t-b)$

   Cómo se corresponden estas funciones con las gráficas que se muestran a continuación?





7. Aplicando la propiedad de translación, calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

   (a) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

   (b) $g(t) = e^t u(t-2)$

   (c) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3\pi/2 \\ \sin t, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$

   (d) $g(t) = \cos 2t\, u(t-\pi)$

⋆ ⋆ ⋆

Comportamiento de $F(s)$ cuando $s \to \infty$. Sea $f(t)$ una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces, $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Por hipótesis, existen constantes $M_1 > 0$, α, $M_2 > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| < M_1$, si $t \in [0, T]$ ($f(t)$ es continua por tramos), y $|f(t)| \leq M_2 e^{\alpha t}$, para todo $t > T$ ($f(t)$ es de orden exponencial α cuando $t \to \infty$). Luego, para $\operatorname{Re} s > \alpha$,

$$|F(s)| \leq \int_0^T |f(t)|e^{-st}\,dt + \int_T^\infty |f(t)|e^{-st}\,dt \leq M_1 \underbrace{\int_0^T e^{-st}\,dt}_{\frac{1-e^{-sT}}{s}} + M_2 \underbrace{\int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt}_{\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha}} \quad \to 0 \text{ si } s \to \infty.$$

⋆ ⋆ ⋆

8. Considere la función $F(s) = \dfrac{s}{s+1}$. Es la transformada de Laplace de una función continua?

⋆ ⋆ ⋆

Transformada de una integral. Sea $f(t)$ es una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Si $a > 0$, entonces,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

Debido a que $f(t)$ es continua por tramos, el teorema fundamental del cálculo implica que

$$g(t) = \int_0^t f(\eta)\,d\eta$$

es continua y que $g'(t) = f(t)$ donde $f(t)$ es continua; así, $g(t)$ es continua y suave por tramos para $t \geq 0$. Más aún,

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\eta)|\,d\eta \leq M\int_0^t e^{a\eta}\,d\eta = \frac{M}{a}(e^{at}-1) < \frac{M}{a}\,e^{at};$$

así, $g(t)$ es de orden exponencial conforme $t \to \infty$. Se concluye entonces que $g(t)$ s una función admisible.

Integrando por partes, se tiene

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(x)\,dx\right) e^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(x)\,dx\Big|_0^\infty + \underbrace{\frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{st}\,dt}_{\frac{F(s)}{s}}.$$

Luego, para $\operatorname{Re} s$ suficentemente grande,

$$-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(x)\,dx\Big|_0^\infty \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

Derivada de la transformada de Laplace. Sea $f(t)$ es una función admisible con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Se tiene (ver Teorema 2 en el **Anexo 3**)

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\,f(t)e^{-st}\,dt = -\int_0^\infty t\,f(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}[t\,f(t)].$$

El resultado anterior puede usarse para encontrar la transformada de Laplace de $t^2 f(t)$; en efecto,

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[t(tf(t))] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\Big(-\frac{d}{ds}F(s)\Big) = \frac{d^2}{ds^2}F(s).$$

De este modo, el resultado general se obtiene por iteración.

Ejemplo 4.

▶ Hallar la transformada de Laplace de la función $g(t) = \displaystyle\int_0^t xe^{-x}\sin x\,dx$.

Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[t\,e^{-t}\sin t] = -\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[e^{-st}\underbrace{\sin t}_{f(t)}] = -\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds}\,F(s+1) = -\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds}\,\frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{2(s+1)}{s((s+1)^2+1)^2}.$$

⋆ ⋆ ⋆

9. Calcular la transformada de Laplace de:

   (a) $f(t) = te^{3t}$

   (b) $f(t) = t^2 \sin kt$

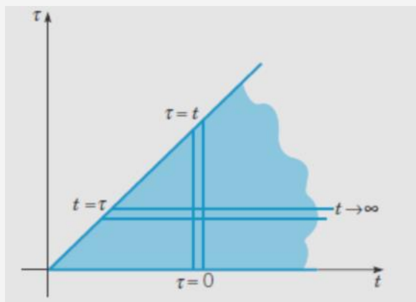
   (c) $f(t) = te^{-t} \cos t$

   (d) $f(t) = e^{-3t} \displaystyle\int_0^t x \cos 4x \, dx$

⋆ ⋆ ⋆

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$. Se define

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \, d\tau \qquad \leftarrow \qquad \text{producto de convolución entre } f \text{ y } g.$$



El producto de convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria; en efecto, puede probarse que

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (g + h) = f * g + f * h$,
- $f * 0 = 0 * f = 0$.

Teorema de convolución. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones admisibles (ambas de orden exponencial α cuando $t \to \infty$) con transformadas de Laplace de $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente. Entonces, la transformada de Laplace de $(f * g)(t)$ existe para $\operatorname{Re} s > \alpha$ y se verifica

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s).$$

Ejemplo 5.

▶ Hallar la transformada de Laplace de la función $g(t) = t \displaystyle\int_0^\tau \tau e^{2\tau} \, d\tau$.

Aplicando propiedades de la transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\left[t \int_0^\tau \tau e^{2\tau} \, d\tau\right] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left[\int_0^\tau \tau e^{2\tau} \, d\tau\right] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[1 * te^{2t}] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[1] \, \mathcal{L}[te^{2t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} \frac{1}{(s-2)^2} = -\frac{3s-2}{s^2(s-2)^3}.$$

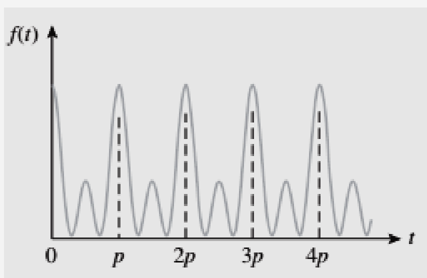
⋆ ⋆ ⋆

10. Evaluar
    (a) $1 * 1$
    (b) $e^{at} * e^{bt}$
    (c) $\sin at * \cos bt$
    (d) $f(t) * u(t-a)$

11. Aplicar el Teorema de convolución para calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.
    (a) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \sin\mu \cos(t-\mu)\, d\mu$
    (b) $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-\mu} \cos\mu\, d\mu$
    (c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \mu e^{t-\mu}\, d\mu$
    (d) $f(t) = e^{2t} * \sin t$

⋆ ⋆ ⋆

Se dice que una función $f(t)$ es periódica si existe un número positivo p tal que $f(t+p) = f(t)$ para cada valor positivo de t; el número p, denominado período, es el número más pequeño que cumpla esta definición. Observe que cualquier múltiplo entero de p también satisface la relación de periodicidad.



Transformada de Laplace para funciones periódicas. Sea $f(t)$ una función continua por tramos y periódica, con período p, para $t \geq 0$. Entonces, su transformada de Laplace existe y se determina por

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

Iniciamos la prueba dividiendo el intervalo $[0, \infty)$ en segmentos de longitud p, entonces

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Ahora cambiamos la variable de integración a $x = t - np$. Sustituyendo, se tiene

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p e^{-s(x+np)} f(x+np)\, dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nps} \right) \int_0^p e^{-sx} f(x)\, dx$$

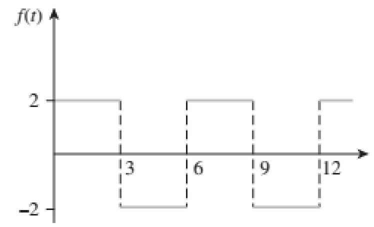
Observemos ahora que $|e^{-ps}| < 1$, ya que tanto p como $\text{Re}\, s$ son positivos; luego, la serie es una serie geométrica con razón menor que 1. Así,

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx} f(x)\, dx.$$

Ejemplo 6.

▶ Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función periódica con periodo $p = 6$

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 3, \\ -2 & 3 \le t \le 6. \end{cases}$$



Esta es una función de ***onda cuadrada*** con una amplitud $A = 2$ y un periodo $p = 6$. Usando la propiedad de la transformada de Laplace para funciones periódicas, tenemos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1-e^{-6s}}\left(\int_0^3 2e^{-st}\,dt + \int_3^6 (-2)e^{-st}\,dt\right) = \frac{2}{1-e^{-6s}}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^3 + \frac{e^{-st}}{s}\bigg|_3^6\right) = \frac{2(1-2e^{-3s}+e^{-6s})}{s(1-e^{-6s})} \\ &= \frac{2(1-e^{-3s})^2}{s(1-e^{-3s})(1+e^{-3s})} = \frac{2(1-e^{-3s})}{s(1+e^{-3s})} = \frac{2}{s}\tanh 3s. \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

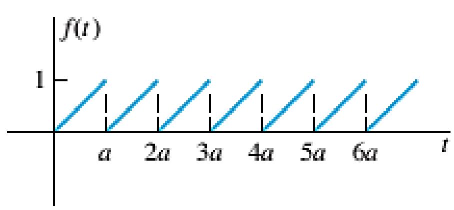
12. Dadas las constantes a y b, $a \neq b$, considerar la función $f(t)$ definida para $t \ge 0$ por medio de

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } n-1 \le t < n \quad \text{y } n \text{ es impar}, \\ b & \text{si } n-1 \le t < n \quad \text{y } n \text{ es par}. \end{cases}$$

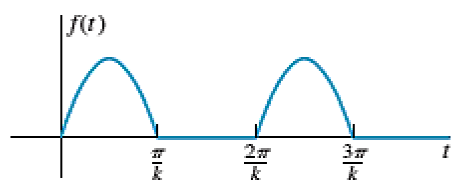
Trazar la gráfica de $f(t)$ y comprobar que $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{a+be^{-s}}{s(1+e^{-s})}$.

13. Mostrar que la transformada de Laplace de la función diente de sierra es $F(s) = \dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$.

14. Suponga que $f(t)$ es la rectificación de media onda de la función $\sin kt$. Verificar que $F(s) = \dfrac{k}{(s^2+k^2)(1-e^{-\pi s/k})}$.

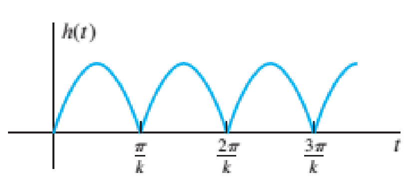


Función diente de sierra



Rectificación de media onda de sin kt

15. Sea $g(t) = f(t-\pi/k)u(t-\pi/k)$, donde $f(t)$ es la rectificación de media onda de la función $\sin kt$ y $k > 0$. Observe que $h(t) = f(t) + g(t)$ es la rectificación de onda completa que se muestra en la figura. Con esta información, deduzca que $F(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}\coth\dfrac{\pi s}{2k}$.



Rectificación de onda completa de sin kt

⋆ ⋆ ⋆

La pregunta que surge naturalmente es la siguiente: ***se puede determinar unívocamente a $f(t)$ si se conoce su transformada de Laplace?*** Esto es equivalente a preguntarse si

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = g(t)\,?$$

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes en la teoría de la transformada de Laplace.

Teorema de Lerch. Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones admisibles con transfromadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente. Asuma que existe un número real s_0 tal que $F(s) = G(s)$ para todo $s > s_0$. Entonces, excepto por posibles puntos de discontinuidad, $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$.

Ahora bien, dos funciones admisibles que difieren únicamente en puntos de discontinuidad son consideradas esencialmente iguales. En este contexto,

$$\text{la ecuación } \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ tiene una única solución } f(t).$$

Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ se dice que $f(t)$ representa a la transformada de Laplace inversa (o antitransformada) de $F(s)$ y se escribe $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

La transformada de Laplace inversa es también una operación lineal; es decir, para cualquier par de constantes c_1 y c_2,

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F(s) + c_2G(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Ejemplo 7.

▶ Hallar $f(t)$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{s+1}{s^2-4s}$.

Re-escribiendo la función de s, se tiene

$$\frac{s+1}{s^2-4s} = \underbrace{\frac{s+1}{s(s-4)} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{s} + \frac{5}{4}\,\frac{1}{s-4}}_{\text{por fracciones simples}} = -\frac{1}{4}\,\mathcal{L}[1] + \frac{5}{4}\,\mathcal{L}[e^{4t}] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t}\right] \quad \to \quad f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t}.$$

▶ Hallar $f(t)$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$.

Re-escribiendo la función de s, se tiene

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2s+3}{(s-2)^2+16} = \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16} = 2\underbrace{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}}_{\mathcal{L}[e^{2t}\cos 4t]} + \frac{7}{4}\underbrace{\frac{4}{(s-2)^2+16}}_{\mathcal{L}[e^{2t}\sin 4t]} = \mathcal{L}\left[2\,e^{2t}\cos 4t + \frac{7}{4}e^{2t}\sin 4t\right].$$

Luego, $f(t) = 2\,e^{2t}\cos 4t + \dfrac{7}{4}e^{2t}\sin 4t$.

▶ Hallar $f(t)$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{e^{-3s}}{s^2+6s+10}$.

Obsérvese primero que

$$\text{si } \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s^2+6s+10} \qquad \to \qquad \frac{e^{-3s}}{s^2+6s+10} = \mathcal{L}[g_3(t)] = \mathcal{L}[g(t-3)u(t-3)].$$

Ahora bien,

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s^2+6s+10} = \frac{1}{(s+3)^2+1} = \mathcal{L}[e^{-3t}\sin t] \qquad \to \qquad g(t) = e^{-3t}\sin t.$$

Finalmente, $f(t) = e^{3(t-3)}\sin(t-3)u(t-3)$.

▶ Hallar $f(t)$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{8s}{(s^2+1)^2}$.

Re-escribiendo la función de s, se tiene

$$\frac{8s}{(s^2+1)^2} = 8\,\frac{1}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1} = 8\,\mathcal{L}[\sin t]\,\mathcal{L}[\cos t] = 8\,\mathcal{L}[\sin t * \cos t].$$

Consecuentemente,

$$f(t) = 8\sin t * \cos t = 8\int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau\,d\tau = 8\Big(\sin t\int_0^t \cos^2\tau\,d\tau - \cos t\int_0^t \sin\tau\cos\tau\,d\tau\Big) = 4\,t\sin t.$$

▶ Usando el Teorema de convolución, calcular $h(t) = 1 * t(1-u(t-2))$.

Considérense las funciones

$$f(t) = 1 \quad \longrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s},$$

$$g(t) = t(1-u(t-2)) = t - (t-2)\,u(t-2) - 2\,u(t-2) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s}.$$

Luego, aplicando el Teorema de convolución, tendremos

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[(f*g)(t)] = F(s)G(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{e^{-2s}}{s^3} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

Ahora (ver Anexo 1),

$$\frac{1}{s^3} - \frac{e^{-2s}}{s^3} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2} = \mathcal{L}\Big[\underbrace{\frac{t^2}{2} - \frac{(t-2)^2}{2}\,u(t-2) - 2(t-2)\,u(t-2)}_{h(t)}\Big].$$

▶ Hallar $f(t)$ si $\mathcal{L}[f(t)] = \ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$.

Derivando con respecto a s, se tiene

$$-\mathcal{L}[tf(t)] = \frac{d}{ds}\,\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} = \mathcal{L}[e^{-at}] - \mathcal{L}[e^{-bt}].$$

Luego, se concluye que

$$-tf(t) = e^{-at} - e^{bt} \qquad \rightarrow \qquad f(t) = \frac{e^{-bt} - e^{at}}{t}.$$

⋆ ⋆ ⋆

16. Antitransformar

(a) $F(s) = \dfrac{4s}{4s^2+1}$

(b) $F(s) = \dfrac{2s-6}{s^2+9}$

(c) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s-3}$

(d) $F(s) = \dfrac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

(e) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)}$

(f) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{(s-1)^2}$

(g) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$

(h) $F(s) = \dfrac{se^{-s\pi/2}}{s^2+4}$

17. Probar que

(a) $\mathcal{L}\Big[\dfrac{\sin at}{t}\Big] = \arctan\Big(\dfrac{a}{s}\Big)$

(b) $\mathcal{L}\Big[\dfrac{1-\cosh kt}{t}\Big] = \dfrac{1}{2}\ln\Big(1-\dfrac{k^2}{s^2}\Big), \quad |k|<s, \quad s\in\mathbb{R}.$

18. Utilice el Teorema de convolución para calcular la antitransformada de:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

(c) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+2s-3)}$

(d) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

⋆ ⋆ ⋆

Transformada de la derivada primera de una función. Sea $f(t)$ continua en $(0,\infty)$ y supóngase que $f'(t)$ es una función admisible. Entonces,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Integrando por partes, se tiene

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Ahora, como $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t\to\infty$,

$$f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t\to 0^+} f(t)e^{-st} = -\lim_{t\to 0^+} f(t).$$

En general, se tiene el siguiente resultado (se puede probar de la misma manera que el teorema anterior, repitiendo la integración por partes n veces):

Teorema de la transformada de la derivada $n-$ésima de una función. Si $f(t)$, $f'(t)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t>0$ y $f^{(n)}(t)$ es una función admisible

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}\lim_{t\to 0^+} f(t) - s^{n-2}\lim_{t\to 0^+} f'(t) - \cdots - \lim_{t\to 0^+} f^{(n-1)}(t).$$

Valores asintóticos.

Existen dos propiedades de la transformada de Laplace que permiten determinar los valores límites de una función $f(t)$, cuando $t \to 0$ o cuando $t \to \infty$, aunque no se conozca a la función explícitamente. Esto se logra examinando el comportamiento de $\mathcal{L}[f(t)]$.

Teorema del valor inicial. Supóngase que $f(t)$ es una función admisible, que su derivada también es una función admisible y que existe el límite de $f(t)$ cuando $t \to 0^+$. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces,

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$$

Recordemos que, si $G(s)$ es la transformada de Laplace de una función admisible, $\lim_{s \to \infty} G(s) = 0$. Entonces, partiendo de la transformada de la derivada de $f(t)$, tendremos

$$\underbrace{\mathcal{L}[f'(t)]}_{G(s)} = s\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(s)} - f(0^+), \quad s > \alpha \quad \to \quad \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} sF(s) - \lim_{t \to 0^+} f(t) = 0.$$

Teorema del valor final. Supóngase que $f(t)$ es una función admisible, que su derivada también es una función admisible y que existe el límite de $f(t)$ cuando $t \to \infty$. Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces,

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$$

De acuerdo con las hipótesis, $f(t)$ es una función acotada; luego, será de orden exponencial $\alpha = 0$. Partiendo de la transformada de la derivada de $f(t)$, tendremos

$$\underbrace{\mathcal{L}[f'(t)]}_{G(s)} = s\underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(s)} - f(0^+), \quad s > 0 \quad \to \quad \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} sF(s) - f(0^+).$$

Dado que la transformada de Laplace de una función admisible es continua para todo s tal que $\text{Re}(s) > \alpha$ (ver Anexo 3),

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^\infty f'(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f'(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} f(b) - f(0^+).$$

Combinando los resultados, se completa la prueba.

Ejemplo 8.

▶ Hallar la solución del siguiente PVI: $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y & = 2t + 3e^{2t}\cos 3t \\ y(0) = 0, & y'(0) = -1 \end{cases}$

Supongamos que la solución que buscamos es una función $y(t)$ que satisface la condiciones del teorema anterior. Sea $Y(s)$ la transformada de Laplace de $y(t)$. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ED, se tiene

$$\underbrace{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}[y''(t)]} + 4(\underbrace{sY(s) - y(0)}_{\mathcal{L}[y'(t)]}) + 13Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9}}_{\mathcal{L}[2t+3e^{2t}\cos 3t]}.$$

Aplicando las condiciones iniciales, $Y(s)$ puede expresarse como

$$Y(s) = -\frac{1}{(s+2)^2+9} + \frac{2}{s^2}\frac{1}{(s+2)^2+9} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9}\frac{1}{(s+2)^2+9}$$

que es equivalente a

$$Y(s) = -\underbrace{\frac{3}{3((s+2)^2+9)}}_{\frac{1}{3}\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t]} + \underbrace{\frac{2}{3}\frac{1}{s^2}\frac{3}{(s+2)^2+9}}_{\frac{2}{3}\mathcal{L}[t]\,\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t]} + \underbrace{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9}\frac{3}{(s+2)^2+9}}_{\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 3t]\,\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t]}.$$

Usando el Teorema de convolución y la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, se tiene

$$Y(s) = \mathcal{L}\Big[-\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t + \frac{2}{3}\,t * e^{-2t}\sin 3t + e^{-2t}\cos 3t * e^{-2t}\sin 3t\Big].$$

Luego, la solución del PVI es

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t + \frac{2}{3}\int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}\sin 3\tau\,d\tau + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cos 3(t-\tau)e^{-2\tau}\sin 3\tau\,d\tau. \\ &= -\frac{8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t + \frac{8}{169}e^{-2t}\cos 3t - \frac{179}{507}e^{-2t}\sin 3t. \end{aligned}$$

Observación. El procedimiento utilizado en el ejemplo anterior para resolver el PVI, es una alternativa a los métodos conocidos. Sin embargo, no vale la pena estudiar un nuevo método a menos que ofrezca alguna ventaja sobre los ya existentes y bien establecidos. Como se verá en el siguiente ejemplo, el método de la transformada de Laplace ofrece considerable simplificación al resolver PVIs con términos fuentes discontinuos.

► Resolver el siguiente PVI: $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = u(t-1) \\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1. \end{cases}$.

Como en el ejemplo anterior, supondremos que la solución buscada y sus derivadas primeras son funciones admisibles. Sea $Y(s)$ la transformada de Laplace de $y(t)$. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ED se obtiene

$$\mathcal{L}[y''(t) - 5y'(t) + 6y(t)] = \mathcal{L}[u(t-1)].$$

Usando las propiedades de linealidad y de la transformada de las derivadas de la transformada de Laplace, la ecuación anterior puede expresarse como

$$\mathcal{L}[y''(t)] - 5\mathcal{L}[y'(t)] + 6\mathcal{L}[y(t)] = (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

Imponiendo las condiciones iniciales y agrupando,

$$Y(s)(s^2-5s-6) - 1 = \frac{e^{-s}}{s} \ \rightarrow\ Y(s)(s-3)(s-2) = \frac{e^{-s}}{s} + 1 \ \rightarrow\ Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}.$$

Para encontrar la transformación inversa de $Y(s)$ se puede proceder de varias maneras. Aquí, analizaremos las dos más simples.

a) *Descomponer por fracciones simples.*

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)} = \Big(\frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s-3)} - \frac{1}{2(s-2)}\Big)e^{-s} + \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}.$$

Luego,

$$y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \Big(\frac{1}{6} + \frac{e^{3(t-1)}}{3} - \frac{e^{2(t-1)}}{2}\Big)u(t-1) = \begin{cases} e^{3t} - e^{2t} & 0 \le t \le 1, \\ e^{3t} - e^{2t} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{e^{3(t-1)}}{3} - \dfrac{e^{2(t-1)}}{2} & 1 \le t < \infty. \end{cases}$$

b) *Utilizar el producto de convolución.*

$$\frac{1}{(s-3)(s-2)} = \mathcal{L}[e^{3t}]\cdot\mathcal{L}[e^{2t}] = \mathcal{L}[e^{3t} * e^{2t}] = \mathcal{L}\Big[\int_0^t e^{3(t-\tau)}e^{2\tau}\,d\tau\Big] = \mathcal{L}[e^{3t}(1-e^{-t})] = \mathcal{L}[e^{3t} - e^{2t}].$$

$$\frac{e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{(s-3)(s-2)} = \mathcal{L}[u(t-1)]\cdot\mathcal{L}[e^{3t}-e^{2t}] = \mathcal{L}[u(t-1)*(e^{3t}-e^{2t})] = \mathcal{L}\Big[\int_0^t u(\tau-1)(e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)})\,d\tau\Big].$$

De donde, por linealidad de la transformada inversa, se tiene

$$y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \int_0^t u(\tau-1)(e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)})\,d\tau = \begin{cases} e^{3t} - e^{2t} & 0 \le t \le 1, \\ e^{3t} - e^{2t} + \displaystyle\int_1^t (e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)})\,d\tau & 1 \le t < \infty. \end{cases}$$

Completando los cálculos, se llega a la solución anterior.

⋆ ⋆ ⋆

19. Resolver los siguientes PVI:

    (a) $y' + y = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases}$; $\quad y(0) = 0$

    (b) $y'' + 4y' + 4y = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2 \\ e^{-(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

    (c) $y'' - 2y' = te^t \sin t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

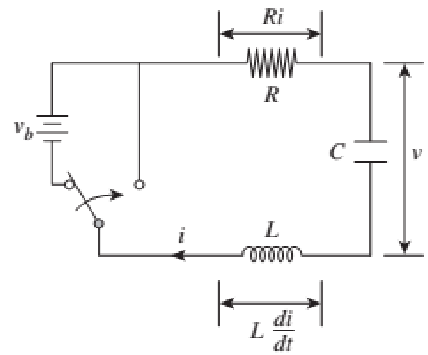
    (d) $2y'' + y' + 2y = u(t-5) - u(t-20); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

    (e) $y'' - ty' + 2y = 0; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

    (f) $y'' + 3ty' - 6y = 1; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

    (g) $ty'' - y' = t^2; \quad y(0) = 0$

20. Considere un circuito RLC con inductancia $L = 1$ (henrio), capacitancia $C = 0.002$ (faradio) y resistencia $R = 60$ (ohmios), como se muestra en la figura. Inicialmente, no hay carga en el capacitor ni fluye corriente en el circuito. Cuando se cierra el switch, se conecta al circuito una batería que suministra un voltaje $V_b = 10$ (voltios) durante 0.2 segundos; después de este tiempo, se vuelve a abrir el switch. Obtenga la expresión para el voltaje del capacitor $v(t)$.



La ley de Kirchhoff requiere que la suma de las caídas de voltaje a través de los componentes de un circuito sea igual al voltaje aplicado. Luego, el PVI a resolver será:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_b(t) = V_b(u(t) - u(t-0.2)), \qquad v(0) = 0, \;\; v'(0) = 0.$$

21. Sin determinar $f(t)$, calcular $f(0^+)$ sabiendo que $\mathcal{L}[f(t)] = \ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$, $a \neq b$, y suponiendo que $f(t)$ satisface las hipótesis del Teorema de valor inicial.

22. Sin determinar $f(t)$, calcular $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ sabiendo que $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s} + \arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$ y suponiendo que $f(t)$ satisface las hipótesis del Teorema de valor final.

23. Mostrar que

$$\mathcal{L}[t\,\sin at] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}; \qquad \lim_{s\to 0} s\,\frac{2as}{(s^2+a^2)^2} = 0; \qquad \lim_{t\to\infty} t\,\sin at \;\nexists.$$

Contradice esto algún resultado?

Observación. La técnica de la transformada de Laplace proporciona una simplificación considerable en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales dadas. El procedimiento es similar al utilizado para una sola ecuación diferencial. Esquemáticamente,

- ***Paso 1.*** Aplique la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones diferenciales que constituyen el sistema. Esto dará como resultado un sistema lineal de ecuaciones algebraicas en las transformadas de las funciones incógnitas.

- ***Paso 2.*** Resuelva el sistema lineal de ecuaciones algebraicas para obtener expresiones explícitas para cada transformada.

- ***Paso 3.*** Determine las funciones incógnitas obteniendo la inversa de las transformadas encontradas.

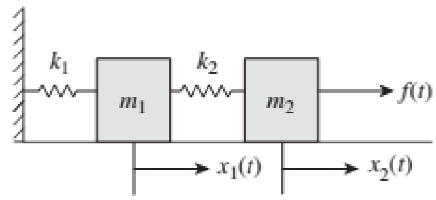
⋆ ⋆ ⋆

24. Resolver

(a) $\begin{cases} y' + z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{cases}$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad z(0) = 0$

(b) $\begin{cases} y' - z' - 2y = 1 \\ -y' + z = t \end{cases}$; $\quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1$

25. Dos masas m_1 y m_2 y dos resortes lineales con constantes elásticas k_1 y k_2 están conectados en serie, como se muestra en la figura. Inicialmente, ambas masas están sin movimiento y en sus posiciones de equilibrio. En consecuencia, los resortes no están ni estirados ni comprimidos en $t = 0$. Se aplica a m_2 una fuerza externa de onda cuadrada $f(t)$ con una amplitud igual a A y un período p, haciendo que ambas masas se pongan en movimiento. Si hacemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representen las posiciones de las dos masas en relación con sus posiciones de equilibrio, los movimientos de m_1 y m_2 estarán regidos por el siguiente sistema de EDs

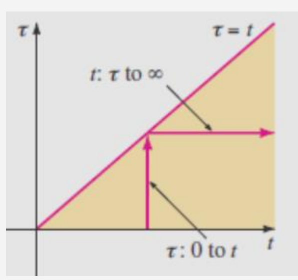


$$\begin{cases} m_1 x_1'' + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) & = 0 \\ m_2 x_2'' + k_2(x_2 - x_1) & = f(t) \end{cases}$$

Si $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$ en unidades compatibles, determine los movimientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ resolviendo este PVI usando la transformada de Laplace.

⋆ ⋆ ⋆

Sea $I = [0, T]$; con $T > 0$, un intervalo y consideremos el triángulo $S = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$.



La ecuación integral lineal de Volterra es de la forma

$$y(t) = g(t) + \int_0^t y(\tau) K(t - \tau)\, d\tau;$$

las funciones $g(t) : I \to \mathbb{R}$ y $K(t, \tau) : S \to \mathbb{R}$ son datos del problema. A la función K se la denomina núcleo de la ecuación.

Teorema. Si K y g son continuas en S e I, respectivamente; entonces la ecuación integral de Volterra posee una única solución continua en I.

Ejemplo 9.

▶ Hallar la solución de la ecuación $y(t) = 3t^2 - e^{-t} + \displaystyle\int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)}\, d\tau$.

Observemos primero que la ecuación tendrá solución única en $[0,\infty)$. Supongamos que la solución $y(t)$ sea una función admisible (por el teorema anterior sabemos que será continua en $[0,\infty)$) con transformada de Laplace $Y(s)$. Entonces, transformando ambos lados de la ecuación integral, se tiene

$$Y(s) = 3\,\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+1} - Y(s)\,\frac{1}{s-1} \qquad \to \qquad Y(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)} = \underbrace{\frac{6}{s^3}}_{3\,\mathcal{L}[t^2]} - \underbrace{\frac{6}{s^4}}_{\mathcal{L}[t^3]} + \underbrace{\frac{1}{s}}_{\mathcal{L}[1]} - \underbrace{\frac{2}{s+1}}_{2\mathcal{L}[e^{-t}]}$$

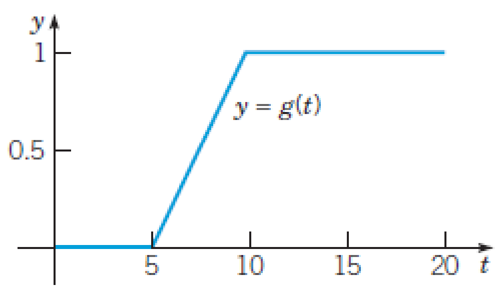
Luego, por la propiedad de linealidad,

$$Y(s) = \mathcal{L}[3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}] \qquad \to \qquad y(t) = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

▶ Utilizar la transformación de Laplace para resolver el siguiente problema integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\mu)d\mu = \underbrace{\begin{cases} 0 & 0 \le t < 5 \\ t-5 & 5 \le t < 10 \\ 5 & 10 \le t \end{cases}}_{g(t)} ; \qquad y(0) = 1.$$

Asumiremos que este problema tiene una solución $y(t)$ que es una función admisible y que su derivada, $y'(t)$, también es una función admisible. A partir de la gráfica de $g(t)$ se observa que $g(t)$ es de orden exponencial $\alpha > 0$.



Luego, usando la definición, se tiene

$$G(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt = \int_5^{10} (t-5)e^{-st}\,dt + \int_{10}^\infty 5e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}(e^{-5s} - e^{-10s}).$$

Importante: la función $g(t)$ es continua en $(0,\infty)$. Como está definida a trozos, puede expresarse como una combinación de funciones escalón unitario. En efecto, es claro que

$$g(t) = (t-5)u(t-5) - (t-10)u(t-10).$$

Entonces, tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\mathcal{L}\Big[y' + 2y + \int_0^t y(\mu)d\mu\Big] = \mathcal{L}[g(t)],$$

y, como la transformada de Laplace es una operación lineal, se puede escribir

$$\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[1 * y(t)] = G(s).$$

Ahora, llamando $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ y usando propiedades de la transformada de Laplace, se obtiene

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) + \frac{Y(s)}{s} = G(s) \quad \to \quad Y(s)\frac{s^2+2s+1}{s} = y(0) + G(s) \quad \to \quad Y(s) = y(0)\frac{s}{(s+1)^2} + \frac{sG(s)}{(s+1)^2}.$$

Reemplazando $y(0)$ por la condición inicial y la expresión de $G(s)$, la transformada de la solución queda

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{sG(s)}{(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{e^{-5s}}{s(s+1)^2} - \frac{e^{-10s}}{s(s+1)^2}$$

Expandiendo en fracciones simples,

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + e^{-5s}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\Big) - e^{-10s}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\Big)$$

Con ayuda de la tabla de transformadas y usando propiedades de la transformación de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}, \qquad \mathcal{L}[te^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2}, \qquad \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}L[f(t)].$$

Reemplazando,

$$Y(s) = \mathcal{L}[e^{-t}] - \mathcal{L}[te^{-t}] + \mathcal{L}[(1 - e^{-(t-5)} - (t-5)e^{-(t-5)})u(t-5)] - \mathcal{L}[(1 - e^{(t-10)} - (t-10)e^{-(t-10)})u(t-10)].$$

Luego, por linealidad, podemos escribir

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[(1-t)e^{-t} + (1 - (t-4)e^{-(t-5)})u(t-5) + (1 - (t-9)e^{-(t-10)})u(t-10)].$$

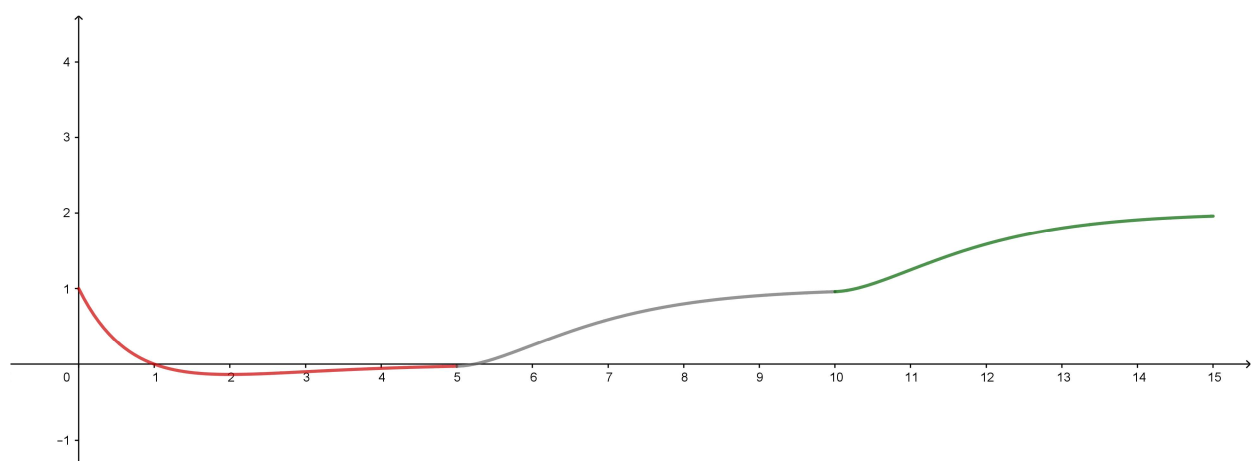
Finalmente, por el Teorema de Lerch, obtenemos la solución buscada

$$y(t) = (1-t)e^{-t} + (1 - (t-4)e^{-(t-5)})u(t-5) + (1 - (t-9)e^{-(t-10)})u(t-10).$$

Utilizando la definición de la función escalón unitario, la solución también puede escribirse como

$$y(t) = \begin{cases} (1-t)e^{-t} & 0 \le t \le 5 \\ 1 + (1-t)e^{-t} - (t-4)e^{-(t-5)} & 5 \le t \le 10 \\ 2 + (1-t)e^{-t} - (t-4)e^{-(t-5)} - (t-9)e^{-(t-10)} & 10 \le t \le \infty \end{cases}$$

Obsérvese que la solución hallada es continua y derivable para todo $t > 0$. En la siguiente figura se muestra la gráfica de $y(t)$ para $0 \le t \le 15$. Nótese que los cambios en el comportamiento de la solución se corresponden con los cambios de la inhomogeneidad $g(t)$.



⋆ ⋆ ⋆

26. Resolver

(a) $t - 2y(t) = \displaystyle\int_0^t (e^{\mu} - e^{-\mu})\, y(t-\mu)d\mu$

(b) $y(t) = 1 + t - \dfrac{8}{3}\displaystyle\int_0^t (\mu - t)^3\, y(\mu) d\mu$

(c) $y'(t) + 6y(t) + 9\displaystyle\int_0^t y(\mu) d\mu = 1 + t; \qquad y(0) = 0$

(d) $y'(t) - \displaystyle\int_0^t y(\mu)\, \cos(t - \mu) d\mu = \cos t; \qquad y(0) = 1$

Observación. La transformación de Laplace también puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones integrales de Volterra. El procedimiento es similar al que se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

27. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones integrales

(a) $$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} + \displaystyle\int_0^t y_2(\mu)\, d\mu \\[2ex] y_2(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t e^{2(t-\mu)}\, y_1(\mu)\, d\mu \end{cases}$$

Solución: $y_1(t) = 3e^t - 2,\ y_2(t) = 3e^t - 2e^{2t}$

(b) $$\begin{cases} y_1(t) = 1 - 2\displaystyle\int_0^t e^{2(t-\mu)}\, y_1(\mu)\, d\mu + \int_0^t y_2(\mu)\, d\mu \\[2ex] y_2(t) = 4t - \displaystyle\int_0^t y_1(\mu)\, d\mu + 4\int_0^t (t-\mu)\, y_2(\mu)\, d\mu \end{cases}$$

Solución: $y_1(t) = e^{-t} - te^{-t},\ y_2(t) = \frac{8}{9}e^{2t} + \frac{1}{9}te^{-t} - \frac{8}{9}e^{-t}$

(c) $$\begin{cases} y_1(t) = t + \displaystyle\int_0^t y_2(\mu)\, d\mu \\[2ex] y_2(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t y_1(\mu)\, d\mu \\[2ex] y_3(t) = \sin t + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (t-\mu)\, y_1(\mu)\, d\mu \end{cases}$$

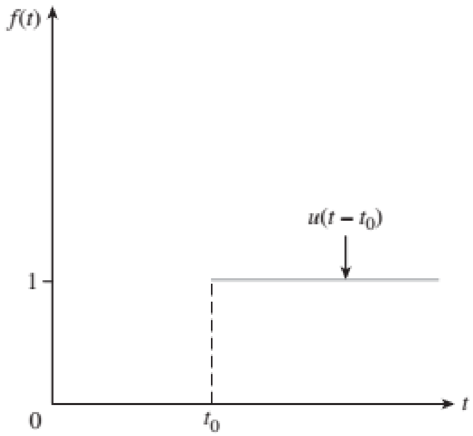
Solución: $y_1(t) = 2\sin t,\ y_2(t) = -1 + 2\cos t,\ y_3(t) = t$

⋆ ⋆ ⋆

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. t	$\frac{1}{s^2}$
3. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, n un entero positivo
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7. $\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9. $\operatorname{sen}^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
12. $\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
14. $\operatorname{senh}^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\frac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
17. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, n un entero positivo

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
18. $e^{at}\operatorname{sen}kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
19. $e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
20. $e^{at}\operatorname{senh}kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$
21. $e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$
22. $t\operatorname{sen}kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$
23. $t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
24. $\operatorname{sen}kt + kt\cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
25. $\operatorname{sen}kt - kt\cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$
26. $t\operatorname{senh}kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
27. $t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
28. $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
29. $\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
30. $1-\cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$
31. $kt-\operatorname{sen}kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
32. $\dfrac{a\operatorname{sen}bt - b\operatorname{sen}at}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
33. $\dfrac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
34. $\operatorname{sen}kt\operatorname{senh}kt$	$\dfrac{2k^2s}{s^4+4k^4}$
35. $\operatorname{sen}kt\cosh kt$	$\dfrac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4}$
36. $\cos kt\operatorname{senh}kt$	$\dfrac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4}$
37. $\cos kt\cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4+4k^4}$

Probablemente la función más sencilla que incluye una discontinuidad de salto es la función *escalón unitario*, también conocida como *función de Heaviside*, que se define como



$$u(t-t_0)=\begin{cases} 0 & 0\le t<t_0,\\ 1 & t\ge t_0,\end{cases}$$

donde t_0 es la ubicación del salto, como se muestra en la figura. Para el caso especial de $t_0=0$, la función de escalón unitario se vuelve simplemente $u(t)=1$ para $t\ge 0$, y su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}[u(t)]=\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}.$$

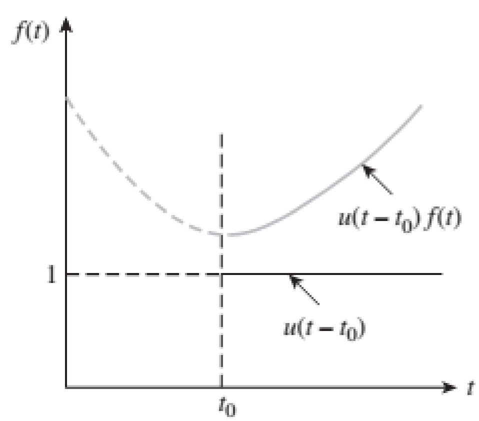
La función escalón unitario $u(t-t_0)$ es simplemente la translación de $u(t)$ en la cantidad t_0. Su transformada de Laplace es, por definición,

$$\mathcal{L}[u(t-t_0)]=\int_0^\infty u(t-t_0)e^{-st}\,dt=\underbrace{\int_{t_0}^\infty e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{-s(x+t_0)}\,dx}_{x=t-t_0}=e^{-st_0}\mathcal{L}[1]=\frac{e^{-st_0}}{s}.$$

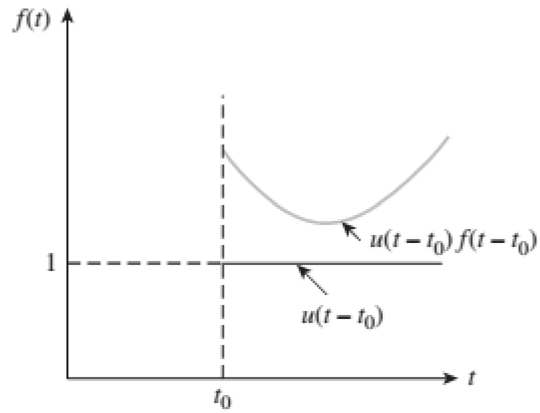
Veamos lo que sucede cuando se multiplica una función dada $f(t)$ por la función de escalón unitario. Cuando $t_0\neq 0$,

$$u(t-t_0)f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<t_0,\\ f(t) & t\ge t_0.\end{cases}$$

Es decir, multiplicando una función $f(t)$ por la función de escalón unitario $u(t-t_0)$ hace que desaparezca la parte de $f(t)$ en el intervalo $[0,t_0]$; pero no tiene efecto en la parte restante de $f(t)$ como se muestra en la figura.



Ahora, supongamos que se quiere posponer el inicio de $f(t)$ a $t = t_0$; como se ve en la siguiente figura.



Esto se logra corriendo a la derecha $f(t)$ en t_0 unidades y multiplicándola por $u(t - t_0)$ para suprimirla cuando $t < t_0$, Entonces,

$$u(t - t_0)f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0, \\ f(t - t_0) & t \geq t_0. \end{cases}$$

La función de escalón unitario $u(t - t_0)$ puede considerarse como un *switch* que *apaga* la función acompañante hasta que $t < t_0$ y la *enciende* después.

ANEXO 3
Continuidad y derivación de integrales paramétricas impropias.

Definición. Sea Λ es un conjunto arbitrario. Una integral impropia paramétrica en $\mathbb{R}$ es una integral de la forma $\displaystyle\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx$; donde $\lambda\in\Lambda$, $a\in\mathbb{R}$ y $f:\Lambda\times[a,\infty)\to\mathbb{R}$.

Lema 1. Sean Λ un conjunto arbitrario, $a\in\mathbb{R}$ y $f:\Lambda\times[a,\infty)\to\mathbb{R}$. Se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx$ es uniformemente convergente en Λ si, y solo si, es convergente para todo $\lambda\in\Lambda$ y si, para todo $\epsilon>0$, existe u_ϵ, $c\le u_\epsilon<\infty$, de modo que se verifica

$$\Big|\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx-\int_a^u f(\lambda,x)\,dx\Big|=\Big|\int_u^\infty f(\lambda,x)\,dx\Big|<\epsilon$$

para todo $\lambda\in\Lambda$ y todo u, $u_\epsilon\le u<\infty$.

Lema 2. Sean $a\in\mathbb{R}$ y $f:\Lambda\times[a,\infty)\to\mathbb{R}$ una función continua a trozos tales que $\displaystyle\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx$ es una integral impropia paramétrica uniformemente convergente hacia

$$F(\lambda)=\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx\quad\text{para todo}\quad\lambda\in\Lambda.$$

Entonces $F:\Lambda\to\mathbb{R}$ es una función continua con dominio Λ.

Ejemplo. Sea $f(t)$ una función admisible; su transformada de Laplace $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es continua para todo s tal que $\operatorname{Re}s>\alpha$.

Teorema 1 (Criterio de Weierstrass). Sea $g:I\to\mathbb{R}$ una función positiva tal que

- $|f(\lambda,x)|\le g(x)$ para todo $\lambda\in\Lambda$ y $x\in I$
- $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

Entonces, $\displaystyle\int_a^\infty f(\lambda,x)\,dx$ converge uniformemente en Λ.

Teorema 2. Sea $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^\infty f(\lambda,x)\,dx$. Supóngase que, para cada x, $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,x)$ es continua a trozos en el intervalo $a\le\lambda\le b$ y que tanto $F(\lambda)$ como $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}f(\lambda,x)\,dx$ convergen uniformemente en $a\le\lambda\le b$. Entonces, F es derivable y se verifica

$$F'(\lambda)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,x)\,dx;\qquad a<\lambda<b.$$

9. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes analíticos

Parte 1 - Soluciones alrededor de un punto ordinario

La siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

se encuentra entre las más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones.

La característica central de este tipo de ecuaciones es que el comportamiento de las soluciones en un entorno del punto x_0 dependerá del comportamiento de los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ en ese entorno.

Definición. El punto x_0 es un ***punto ordinario*** de la ecuación (1) si $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0. Si al menos una de estas funciones no es analítica en x_0, entonces x_0 es un ***punto singular*** de (1).

Teorema 1. Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial (1). Entonces, existe una única solución $y(x)$, que también es analítica en x_0, y satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

Más aún, si los desarrollos en series de Taylor de $p(x)$ y $q(x)$ son convergentes en $|x - x_0| < R$, entonces, el desarrollo en series de Taylor de $y(x)$ también será convergente en el mismo intervalo.

Ejemplo 1. Considerar la ecuación diferencial $(1+x^2)y'' - 2xy' + 4x^2y = 0$. Determinar el radio de convergencia de la serie solución en un entorno de $x_0 = -1/2$.

En este caso,

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \qquad \text{y} \qquad q(x) = \frac{4x^2}{x^2+1} \qquad \rightarrow \qquad x_0 = -1/2 \quad \text{es un punto ordinario.}$$

Razonando en el plano complejo, ambos coeficientes tienen polos simples en $z = \pm i$. La distancia desde $z_0 = -1/2$ a $z = \pm i$ es $\sqrt{1 + 1/4} = \sqrt{5}/2$. Luego, los desarrollos en series de Taylor correspondientes a $p(z)$ y $q(z)$, centrados en $z_0 = -1/2$, convergen en $|z + 1/2| < \sqrt{5}/2$. Entonces (ver Teorema 1), el desarrollo en series de Taylor de la solución $y(x)$ será convergente en (al menos) $|x + 1/2| < \sqrt{5}/2$.

Observación. Supongamos ahora que estamos interesados en la solución del PVI

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' - 2xy' + 4x^2y = 0, \\ y(-1/2) = y_0; \; y'(-1/2) = y_0'. \end{cases}$$

Como $1 + x^2 \neq 0$ para todo x, el Teorema de existencia y unicidad segura que el PVI tiene solución única con dominio en $-\infty < x < \infty$. Por otro lado, el Teorema 1, garantiza una solución del PVI de la forma

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x + 1/2)^k; \qquad (a_0 = y_0, \; a_1 = y_0')$$

que converge en $-\sqrt{5}/2 < x + 1/2 < \sqrt{5}/2$. Concluimos, entonces, que la única solución con dominio en $-\infty < x < \infty$ no puede tener un desarrollo en series de potencias de $x + 1/2$ convergente para todo x.

Ejemplo 2. Encontrar la solución general de la ecuación $y'' - xy' + 2y = 0$ en una vecindad del punto $x_0 = 0$.

En este caso, $p(x) = -x$ y $q(x) = 2$. Ambas funciones son polinomiales y, por lo tanto, analíticas en todo punto. Consecuentemente, todo punto x (en particular, $x_0 = 0$) es un punto ordinario para esta ecuación. Luego, existirá una solución de la forma $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ que converge en $|x| < \infty$.

Para encontrar la solución $y(x)$ es necesario determinar los coeficientes a_k para todo k. Para ello, seguiremos el siguiente procedimiento conocido como ***método de series de potencias o método de los coeficientes indeterminados***. Consta de cinco pasos.

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}$$

en la ecuación diferencial

$$y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2} - x \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1} + 2 \sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0.$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\underbrace{\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}} \underbrace{-a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\, a_k x^k}_{-x\sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}} + \underbrace{2\, a_0 + 2\, a_1 x + 2 \sum_{k\geq 2} a_k x^k}_{2\sum_{k\geq 0} a_k x^k} = 0$$

$$\underbrace{2\cdot 1\, a_2 + 3\cdot 2\, a_3 x + \sum_{k\geq 2}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k} -a_1 x - \sum_{k\geq 2} k\, a_k x^k + 2\, a_0 + 2\, a_1 x + 2 \sum_{k\geq 2} a_k x^k = 0$$

$$(2a_0 + 2\cdot 1\, a_2) + (2\, a_1 - a_1 + 3\cdot 2\, a_3)x + \sum_{k\geq 2}(2\, a_k - k\, a_k + (k+2)(k+1)\, a_{k+2})x^k = 0$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo x; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$a_0 + a_2 = 0; \qquad a_1 + 6a_3 = 0; \qquad (2-k)\, a_k + (k+2)(k+1)\, a_{k+2} = 0; \;\; k = 2, 3, 4, \cdots$$

El resultado anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$a_2 = -a_0; \qquad a_3 = -\frac{a_1}{6}; \qquad \underbrace{a_{k+2} = \frac{k-2}{(k+1)(k+2)}\, a_k; \;\; k = 2, 3, 4, \cdots}_{\text{relación de recurrencia}}$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los coeficientes a_k para $k \geq 2$; es decir,

$$k = 2 \;\; \rightarrow \;\; a_4 = 0,$$

$$k = 3 \;\; \rightarrow \;\; a_5 = \frac{1}{4\cdot 5}\, a_3,$$

$$k = 4 \;\; \rightarrow \;\; a_6 = \frac{2}{5\cdot 6}\, a_4 = 0,$$

$$k = 5 \;\; \rightarrow \;\; a_7 = \frac{3}{6\cdot 7}\, a_5,$$

$$k = 6 \;\; \rightarrow \;\; a_8 = \frac{4}{7\cdot 8}\, a_6 = 0,$$

$.$

$.$

$.$

$$k = 2n-2 \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad a_{2n} = 0, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$k = 2n-1 \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n(2n+1)}\, a_{2n-1}, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Claramente, todos los coeficientes impares dependen (por recurrencia) del coeficiente a_1. Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos

$$a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 \cdots a_{2n-1} \cdot a_{2n+1} = -\frac{1}{2 \cdot 3}\, a_1 \frac{1}{4 \cdot 5}\, a_3 \frac{3}{6 \cdot 7}\, a_5 \cdots \frac{2n-3}{2n(2n+1)}\, a_{2n-1} \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad a_{2n+1} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!} a_1.$$

Entonces, los coeficientes serán

$$a_2 = -a_0; \qquad a_{2n} = 0; \; n \geq 2, \qquad a_{2n+1} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!} a_1; \; n \geq 1.$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y(x)$; es decir,

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{3!}\, a_1 x^3 + 0x^4 - \frac{1}{5!}\, a_1\, x^5 + \cdots = a_0(1 - x^2) + a_1 \Big(x - \sum_{k \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!}\, x^{2k+1} \Big).$$

Entonces, haciendo

$$y_0(x) = 1 - x^2; \qquad y_1(x) = x - \sum_{k \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{(2n+1)!}\, x^{2k+1} \qquad \textcolor{red}{\rightarrow} \qquad y(x) = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x);$$

se concluye que $y(x)$ es solución de la ED para cualquier elección de los coeficientes a_0 y a_1. En particular, eligiendo $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, se tiene que $y_0(x)$ satisface la ED. De la misma manera, eligiendo $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, se tiene que $y_1(x)$ también satisface la ED. Además,

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \textcolor{red}{\rightarrow} \quad \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ es linealmente independiente.}$$

Ejemplo 3. Resolver el problema de valores iniciales

$$(t^2 - 2t - 3)\, \frac{d^2 y}{dt^2} + 3(t-1)\, \frac{dy}{dt} + y = 0; \quad y(1) = 4, \; y'(1) = -1.$$

Como las condiciones iniciales se especifican en $t_0 = 1$, se buscará una solución general de la forma $\sum_{k \geq 0} a_k (t-1)^k$.

Los cálculos se simplifican mucho si, en lugar de reemplazar esta serie en la ecuación diferencial para determinar los coeficientes, primero se hace la sustitución $x = t - 1$. Para transformar la ecuación original en una con la variable independiente x, se observa que

$$t^2 - 2t - 3 = (x+1)^2 - 2(x+1) - 3 = x^2 - 4; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\, \frac{dx}{dt} = y'; \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \Big(\frac{dy}{dx} \Big)\, \frac{dx}{dt} = y''.$$

De esta manera, el problema de valores iniciales transformado será

$$(x^2 - 4)\, y'' + 3x\, y' + y = 0; \quad y(0) = 4, \; y'(0) = -1.$$

Los únicos puntos singulares de esta ecuación son ± 2; luego, la serie solución será convergente en (al menos) $|x| < 2$. Para hallarla, procederemos como en el ejemplo anterior.

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}$$

en la ecuación diferencial

$$(x^2-4)\, y'' + 3x\, y' + y = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^k - 4 \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2} + 3 \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^k + \sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0.$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\underbrace{a_0 + a_1 x + \sum_{k\geq 2} a_k x^k}_{\sum_{k\geq 0} a_k x^k} + \underbrace{3\, a_1 x + 3 \sum_{k\geq 2} k\, a_k x^k}_{3 \sum_{k\geq 1} k\, a_k x^k} + \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^k - \underbrace{4 \sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{4 \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, a_k x^{k-2}}$$

$$a_0 + 4a_1 x + \sum_{k\geq 2} (1 + 3k + k(k-1)) a_k x^k \underbrace{-4\cdot 2\cdot 1\, a_2 - 4\cdot 3\cdot 2\, a_3 x - 4 \sum_{k\geq 2} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k}_{-4 \sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k} = 0$$

$$(a_0 - 4\cdot 2\cdot 1\, a_2) + (4a_1 - 4\cdot 3\cdot 2\, a_3) x + \sum_{k\geq 2} [(k+1)^2\, a_k - 4(k+2)(k+1)\, a_{k+2}] x^k = 0$$

Tercer paso: se busca la fórmula de recurrencia; por el principio de identidad resulta

$$a_0 - 4\cdot 2\cdot 1\, a_2 = 0; \qquad 4a_1 - 4\cdot 3\cdot 2\, a_3 = 0; \qquad (k+1)\, a_k - 4(k+2)\, a_{k+2} = 0;\ \ k = 2, 3, 4, \cdots$$

Por lo tanto, tendremos

$$a_2 = \frac{1}{4\cdot 2}\, a_0; \qquad a_3 = \frac{2}{4\cdot 3}\, a_1; \qquad a_{k+2} = \frac{k+1}{4(k+2)}\, a_k;\ \ k = 2, 3, 4, \cdots$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los coeficientes a_k para $k \geq 2$; es decir,

$k = 2 \ \rightarrow\ a_4 = \frac{3}{4\cdot 4}\, a_2,$

$k = 3 \ \rightarrow\ a_5 = \frac{4}{4\cdot 5}\, a_3,$

$k = 4 \ \rightarrow\ a_6 = \frac{5}{4\cdot 6}\, a_4,$

$k = 5 \ \rightarrow\ a_7 = \frac{6}{4\cdot 7}\, a_5,$

$k = 6 \ \rightarrow\ a_8 = \frac{7}{4\cdot 8}\, a_6,$

.

.

.

$k = 2n-2 \ \rightarrow\ a_{2n} = \frac{2n-1}{4\cdot 2n}\, a_{2n-2}, \ \ n = 1, 2, 3, \cdots$

$k = 2n-1 \ \rightarrow\ a_{2n+1} = \frac{2n}{4\cdot (2n+1)}\, a_{2n-1}, \ \ n = 1, 2, 3, \cdots.$

Por recurrencia, todos los coeficientes pares dependen del coeficiente a_0 y los impares de a_1. Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos lo siguiente

$$a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdots a_{2n-2} \cdot a_{2n} = \frac{1}{4\cdot 2}\, a_0\, \frac{3}{4\cdot 4}\, a_2\, \frac{5}{4\cdot 6}\, a_4 \cdots \frac{2n-1}{4\cdot 2n}\, a_{2n-2} \quad \rightarrow \quad a_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4^n 2^n n!}\, a_0,$$

$$a_3{\cdot}a_5{\cdot}a_{67} \cdots a_{2n-1}{\cdot}a_{2n+1} = \frac{2}{4\cdot 3}\, a_1\, \frac{4}{4\cdot 5}\, a_3\, \frac{6}{4\cdot 7}\, a_5 \cdots \frac{2n}{4\cdot(2n+1)}\, a_{2n-1} \quad \rightarrow \quad a_{2n+1} = \frac{2^n n!}{4^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} a_1.$$

Usando la siguiente notación factorial

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1),$$

los coeficientes pueden escribirse más compactamente

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} n!}\, a_0; \qquad a_{2n+1} = \frac{n!}{2^n(2n+1)!!}\, a_1; \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y(x)$;

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4\cdot 2}\, a_0 x^2 + \frac{2}{4\cdot 3}\, a_1 x^3 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} n!}\, a_0 x^{2n} + \frac{n!}{2^n(2n+1)!!}\, a_1 x^{2n+1} + \cdots$$

Después de agrupar por separado los términos de grado par e impar, se obtiene la solución general

$$y(x) = a_0 \underbrace{\Big(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} n!} x^{2n}\Big)}_{y_0(x)} + a_1 \underbrace{\Big(x + \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^n(2n+1)!!} x^{2n+1}\Big)}_{y_1(x)}.$$

Obsérvese que

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ es linealmente independiente en } |x| < 2.$$

Sexto paso: se determina la solución del PVI; dado a que $y(0) = a_0$; $y'(0) = a_1$, las condiciones iniciales dadas implican $a_0 = 4$ y $a_1 = 1$. Al reemplazar estos valores en la solución general, la solución del PVI será

$$y(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{32}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots \qquad |x| < 2.$$

En su variable original,

$$y(t) = 4 + (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3 + \frac{3}{32}(t-1)^4 + \frac{1}{30}(t-1)^5 + \cdots \qquad |t-1| < 2.$$

Una serie como ésta puede utilizarse para estimar los valores numéricos de la solución. Por ejemplo, evaluando en $t = 1/2$ se obtiene una serie alternada; luego, el error cometido al truncarla será menor que el valor absoluto del primer término descartado. Entonces,

$$y\Big(\frac{1}{2}\Big) \approx 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{16} = \frac{5609}{1536} \approx 3.652; \text{ con un error menor a } \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{32} \approx 0.001$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Para las siguientes ecuaciones diferenciales, responder las preguntas: se pueden determinar soluciones en series de potencias centradas en los puntos x_0 que se indican?; si fuera posible, cuál sería el radio de convergencia?

(a) $(x^2-2x-3)y''+xy'+4y=0;\quad x_0=-1;\ x_0=0;\ x_0=4$

(b) $(x^3+1)y''+4xy'+y=0;\quad x_0=0;\ x_0=2$

2. Considere el PVI $\begin{cases} y''-x^2y'-2xy=0 \\ y(0)=1,\quad y'(0)=0 \end{cases}$. Primero, probar que este problema posee una única solución analítica en $x_0=0$. Luego, mostrar que la solución está dada por $y(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^{3k}}{3^k k!}$. Por último, determinar el intervalo de convergencia.

3. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados para expresar la solución general de la ecuación diferencial como una serie de potencias alrededor del punto $x_0=0$ y especificar un intervalo en el que la solución es válida.

   (a) $(x^2+3)y''-7xy'+16y=0$

   Soluciones:

$$y_1(x)=1-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{27}x^4;\qquad y_2(x)=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{120}x^5+9\sum_{k\geq 3}(-1)^k\frac{((2n-5)!!)^2}{3^k(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

   (b) $y''-x^2y'-3xy=0$

   Soluciones:

$$y_1(x)=1+\sum_{k\geq 1}\frac{x^{3k}}{2\cdot 5\cdots(3k-1)};\qquad y_2(x)=x+\sum_{k\geq 1}\frac{x^{3k+1}}{3^k k!}.$$

   (c) $5y''-2xy'+10y=0$

   Soluciones:

$$y_1(x)=1-x^2+\frac{x^4}{10}+\frac{x^6}{750}+15\sum_{k\geq 4}\frac{2^k}{5^k}\frac{(2k-7)!!}{(2k)!}x^{2k};\qquad y_2(x)=x-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{375}x^5.$$

4. Considerar la siguiente ecuación diferencial

$$(1+\alpha(x-x_0)^2)\,y''+\beta(x-x_0)\,y'+\gamma\,y=0\quad (\alpha,\beta,\gamma \text{ son números reales distintos de cero}).$$

   (a) Probar que los coeficientes a_n de cualquier solución de la forma $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ satisfacen la relación de recurrencia.

$$a_{n+2}=-\frac{\alpha n^2+(\beta-\alpha)n+\gamma}{(n+2)(n+1)}\,a_n,\quad n\geq 0.$$

   (b) Aplicar este resultado para encontrar dos soluciones linealmente independientes en un entorno de $x_0=-2$ de la siguiente ecuación diferencial

$$-(2x^2+8x+7)\,y''-3(x+2)\,y'+y=0.$$

   (c) Hallar el radio de convergencia de la solución general.

5. Las soluciones de la ecuación $y''-xy=0$ se denominan funciones de ***Airy***.

   (a) Probar que toda función de Airy no trivial tiene infinitos ceros negativos.

(b) Encontrar las funciones de Airy, en forma de series de potencias de x y verificar, directamente, que convergen para todo x.

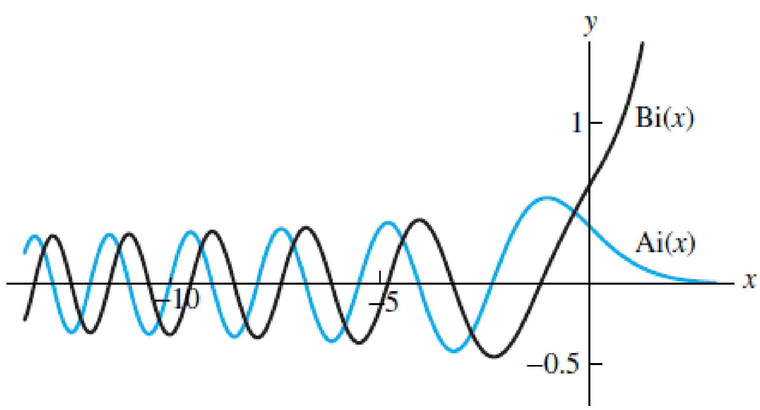
Solución y comentarios.

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1\cdot 4\cdots(3k-2)}{(3k)!}\, x^{3k}; \qquad y_2(x) = x + \sum_{k\geq 1} \frac{2\cdot 5\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}\, x^{3k+1}.$$

Las combinaciones especiales

$$Ai(x) = \frac{y_1(x)}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} - \frac{y_2(x)}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}; \qquad Bi(x) = \frac{y_1(x)}{3^{1/6}\Gamma(2/3)} - \frac{y_2(x)}{3^{-1/6}\Gamma(1/3)}$$

definen las funciones de Airy standar que aparecen en tablas matemáticas. Sus gráficas, expuestas en la siguiente figura, muestran un comportamiento oscilatorio como funciones trigonométricas para $x < 0$, *mientras que, conforme* $x \to +\infty$, $Ai(x)$ *decrece exponencialmente y* $Bi(x)$ *se incrementa de la misma manera. Esta propiedad las vuelve muy interesantes, en particular, para las aplicaciones en óptica. Además, la ecuación de Airy se encuentra en el estudio de la difracción de ondas de radio alrededor de la superficie de la Tierra, problemas de la aerodinámica y la deflexión de vigas bajo su propio peso.*



6. La ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$, donde λ es una constante no negativa, se conoce como la ***ecuación de Hermite*** de orden λ.

(a) Usar el método de los coeficientes indeterminados para hallar un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación de Hermite.

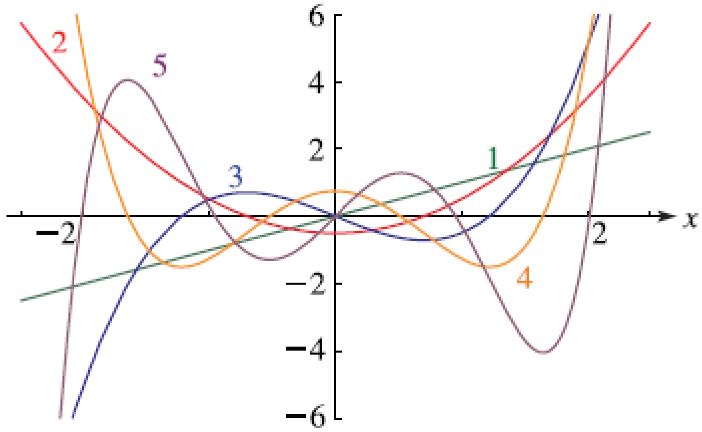
(b) Mostrar que la ecuación de Hermite tiene una solución polinómial de grado n si $\lambda = n$.

Solución y comentarios.

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k\leq 1} (-1)^k 2^k\, \frac{\lambda\cdot(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k+2)}{(2k)!}\, x^{2k};$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k\leq 1} (-1)^k 2^k\, \frac{(\lambda-1)\cdot(\lambda-3)\cdots(\lambda-2k+1)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}.$$

Se definen los polinomios de Hermite como las soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite multiplicadas por una constante adecuada, de tal manera que el coeficiente de x^n *es* 2^n. *La aplicación más conocida de los polinomios de Hermite está relacionada con la teoría del oscilador lineal armónico en mecánica cuántica.*



7. La ecuación diferencial $(1-x^2)y''-xy'+\lambda^2 y=0$, donde λ es una constante, se conoce como la ***ecuación de Tchebycheff*** y se presenta en muchas áreas de la matemática y la física.

   (a) Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Tchebycheff válidas para $|x|<1$.

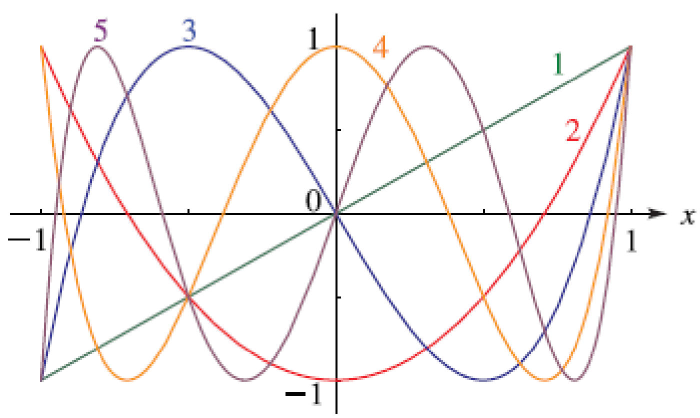
   (b) Mostrar que la ecuación de Tchebycheff tiene una solución polinomial de grado n si $\lambda = n$.

   Solución y comentarios.

$$y_1(x) = 1-\frac{\lambda^2}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda^2)\lambda^2}{4!}x^4-\frac{(16-\lambda^2)(4-\lambda^2)\lambda^2}{6!}x^6-\cdots-\frac{((2k-2)^2-\lambda^2)-\cdots-(4-\lambda^2)\lambda^2}{(2k)!}x^{2k}-\cdots$$

$$y_2(x) = x+\frac{1-\lambda^2}{3!}x^3+\frac{(9-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{5!}x^5+\cdots+\frac{((2k-1)^2-\lambda^2)+\cdots+(9-\lambda^2)(1-\lambda^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots$$

   Las soluciones polinómicas de esta ecuación, adecuadamente normalizadas, se denominan polinomios de Tchebycheff. Son muy útiles in problemas que requieren una aproximación polinomial de funciones definidas en el intervalo $-1 \le x \le 1$.

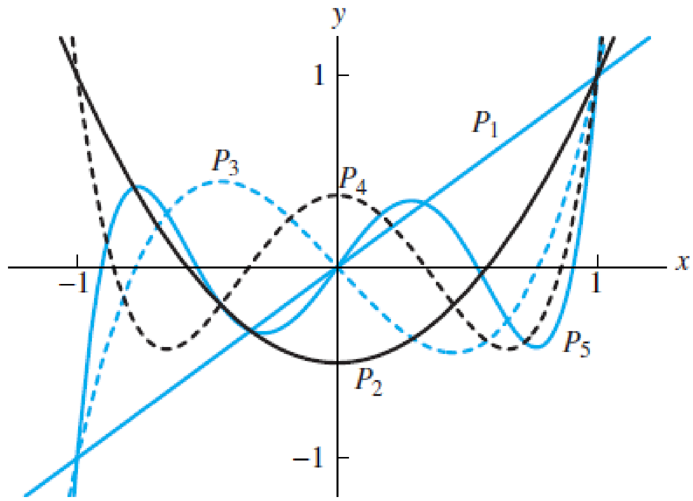


8. La ecuación diferencial $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\lambda(\lambda+1)y(x)=0$ donde λ es una constante, se conoce como ***ecuación de Legendre.***

   (a) Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Legendre válidas para $|x|<1$.

(b) Mostrar que la ecuación de Legendre tiene una solución polinomial de grado n si $\lambda = n$.

Solución y comentarios.
Las soluciones en serie de la ecuación de Legendre pueden encontrarse en cualquier texto relacionado con este tema.



Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ se definen como las soluciones polinomiales de la ecuación de Legendre para $\lambda = n$ que satisfacen la condición de normalización $P_n(1) = 1$ para todo n. Los polinomios de Legendre juegan un rol importante en la física matemática; por ejemplo, al resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

9. La ecuación diferencial de Legendre con $\lambda = 0$ tiene el polinomio solución $\Phi_1(x) = 1$ y una solución $\Phi_2(x)$ dada por una serie de potencias. Demostrar que la suma de la serie $\Phi_2(x)$ viene dada por la función

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad |x| < 1.$$

Comprobar directamente que la función $\Phi_2(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre cuando $\lambda = 0$.

10. La ecuación de Legendre puede escribirse en la forma: $((x^2-1)y')' - l(l+1)y = 0$.

(a) Si a, b, c son constantes, siendo $a > b$ y $4c + 1 > 0$, demostrar que una ecuación diferencial del tipo $((x-a)(x-b)y')' - cy = 0$ puede transformarse en una ecuación de Legendre por un cambio de variable de la forma $x = At + B$, siendo $A > 0$. Determinar A y B en función de a y b.

(b) Aplicar el método sugerido en en inciso anterior para transformar $(x^2 - x)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$ en una ecuación de Legendre y resolver.

11. ⋆ La función en el lado izquierdo de la siguiente expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \cdots + P_n(x)t^n + \cdots \qquad 0 < t < 1.$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre. Utilice esta relación para demostrar que

(a) $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$

(b) $P_{2n+1}(0) = 0$

12. Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de recurrencia (se puede demostrar usando la función generatriz)
$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$
   (a) Sabiendo que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, calcular $P_2(x), P_3(x)$ y $P_4(x)$.
   (b) Exprese el polinomio $f(x) = 1 - 3x + x^4$ como combinación lineal de los polinomios de Legendre hallados.

13. ⋆ La fórmula de Rodrigues permite calcular los polinomios de Legendre por diferenciación;
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n.$$
Probar las siguientes relaciones de recurrencia:
   (a) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$
   (b) $(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x)$

14. Mostrar que la ecuación de Legendre también puede escribirse de la siguiente forma
$$((1-x^2)y'(x))' + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0.$$
Concluir, entonces, que son válidas las expresiones
$$((1-x^2)P'_n(x))' = -n(n+1)P_n(x) \quad \text{y} \quad ((1-x^2)P'_l(x))' = -l(l+1)P_l(x).$$
Multiplicando la primera ecuación por $P_l(x)$ y la segunda por $P_n(x)$, integrando por partes y, después, restando una ecuación de la otra, probar que
$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_l(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq l, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } n = l. \end{cases}.$$
Este resultado se conoce como ***propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre***.

⋆ ⋆ ⋆

Teorema 2. Suponer que $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ y $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ son convergentes en $|x| < R$, $R > 0$. Entonces, la serie
$$\sum_{k\geq 0} c_k x^k; \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}$$
converge en $|x| < R$ y se verifica
$$\sum_{k\geq 0} c_k x^k = \Big(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k\geq 0} b_k x^k\Big) \quad \text{para todo } x : |x| < R.$$

⋆ ⋆ ⋆

15. (a) Sea $y(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ una solución de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ en el intervalo $|x| < r$; $r > 0$. Supóngase que $p(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$ y que $q(x) = \sum_{k\geq 0} q_k x^k$ en ese mismo intervalo. Demostrar que:

$$c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^{k} [(j+1)p_{k-j}c_{j+1} \ + \ q_{k-j}c_j]$$

(b) Encontrar los primeros tres términos de las soluciones en series de potencias de x de la ecuación diferencial

$$xy''(x) + (\sin x)y(x) = 0.$$

Determinar el radio de convergencia de cada una de las soluciones y mostrar que son linealmente independientes en el intervalo de convergencia.

Soluciones.

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^4 + \cdots; \qquad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \cdots$$

16. Expresar la solución general de la siguiente ecuación diferencial no homogénea $3y'' - xy' + y = x^2 + 2x + 1$ como una serie de potencias alrededor del punto $x_0 = 0$.

Solución general.

$$y(x) = a_0\Big(1 - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{6^k}\frac{x^{2k}}{k!(2k-1)}\Big) + a_1 x + \frac{x^2}{6} + 7\sum_{k\geq 1} \frac{1}{6^k}\frac{x^{2k}}{k!(2k-1)} + \sum_{k\geq 1} \frac{2^k}{3^k}\frac{(k-1)!}{(2k+1)}x^{2k+1}; \quad -\infty < x < \infty.$$

⋆ ⋆ ⋆

Comentario final. En los ejemplos tratados, nos hemos encontrado con lo que se denomina ***fórmulas de recurrencia de dos términos*** para la determinación de los coeficientes de las series solución. La simplicidad de estas fórmulas permite encontrar una expresión general para los coeficientes. Sin embargo, esta simplicidad no debe esperarse en todos los casos. Por ejemplo, para la ecuación diferencial

$$y''(x) + (p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)y(x) = 0; \ p \text{ constante, al reemplazar la serie } y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k \text{ se obtiene}$$

$$\underbrace{(k+1)(k+2)a_{k+2} + (p + \frac{1}{2})a_k - \frac{1}{4}a_{k-2} = 0}_{\text{fórmula de recurrencia de tres términos}}.$$

En general, cuando la relación de recurrencia tiene más de dos términos, encontrar una fórmula cerrada para la determinación de los coeficientes a_n en términos de a_0 y a_1 puede llegar a ser una tarea muy complicada; incluso imposible. Sin embargo, enfatizamos que esto no es particularmente importante; lo que es esencial es que podamos determinar tantos coeficientes como queramos.

⋆ ⋆ ⋆

Parte 2 - Soluciones alrededor de un punto singular regular

Consideremos ahora que x_0 es un punto singular de la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

Definición. Se dice que x_0 es un ***punto singular regular*** de la ecuación (2) si las funciones

$$P(x) = (x - x_0)p(x) \qquad (y) \qquad Q(x) = (x - x_0)^2 q(x)$$

son analíticas en x_0. Si al menos una de estas funciones resulta no analítica en x_0, entonces se dice que x_0 es un ***punto singular irregular*** de la ecuación (2).

Obsérvese que, si x_0 es un punto singular regular, la ecuación (2) puede escribirse de la forma

$$\underbrace{(x - x_0)^2\, y''(x) + (x - x_0)\, P(x)\, y'(x) + Q(x)\, y(x) = 0}_{P(x),\, Q(x) \to \text{funciones analíticas en } x_0}.$$

No se excluye la posibilidad que $x_0 = \infty$. Para estudiar el comportamineto de la ED en un entorno del infinito se aplica el cambio de variable $\zeta = 1/x$ y el estudio se lleva a cabo sobre la ecuación transformada en el punto $\zeta_0 = 0$.

Ejemplo 4. Hallar y clasificar los puntos singulares (finitos) de la ecuación $x^2(x^2-1)y''+5(x+1)y'+(x^2-x)y = 0$.

Comencemos escribiendo la ED en la forma normal; es decir,

$$y'' + 5\,\frac{x+1}{x^2(x^2-1)}\,y' + \frac{x^2-x}{x^2(x^2-1)}\,y = 0 \quad \to \quad \left\{\begin{array}{lcl} p(x) & = & \dfrac{5}{x^2(x-1)} \\ q(x) & = & \dfrac{1}{x(x+1)} \end{array}\right. \quad \to \quad \text{puntos singulares} \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Para $x_0 = 1$, se tiene

$$\underbrace{P(x) = (x-1)p(x) = \frac{5}{x^2} \qquad\qquad Q(x) = (x-1)^2 q(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}}_{\text{analíticas en } x_0=1 \quad \to \quad x_0=1 \quad \text{es singular regular}}.$$

Para $x_0 = 0$, se tiene

$$\underbrace{P(x) = xp(x) = \frac{5}{x(x-1)}}_{\text{no es analítica en } x_0=0 \quad \to \quad x_0=0 \quad \text{es singular irregular}}$$

Para $x_0 = -1$, se tiene

$$\underbrace{P(x) = (x+1)p(x) = 5\,\frac{x+1}{x^2(x-1)} \qquad\qquad Q(x) = (x+1)^2 q(x) = \frac{x+1}{x}}_{\text{analíticas en } x_0=-1 \quad \to \quad x_0=-1 \quad \text{es singular regular}}.$$

Consideremos la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0. \tag{3}$$

Asumamos, que tiene un punto singular regular en el origen (esto no implica pérdida de generalidad ya que el cambio de variable $u = x - x_0$ desplaza el punto singular x_0 al origen).

Por hipótesis, los desarrollos en series

$$P(x) = x\, p(x) = \sum_{k\geq 0} p_n x^n = p_0 + \sum_{k\geq 1} p_n x^n \qquad \text{y} \qquad Q(x) = x^2 q(x) = \sum_{k\geq 0} q_n x^n = q_0 + \sum_{k\geq 1} q_n x^n$$

serán válidos en $|x| < R$, para algún $R > 0$. Obsérvese que

$$p_0 = P(0) = \lim_{x\to 0} xp(x) \qquad \text{y} \qquad q_0 = Q(0) = \lim_{x\to 0} x^2 q(x).$$

Definición. $I(\nu) = \nu(\nu - 1) + p_0\nu + q_0$ se denomina ***polinomio indicial*** asociado a la ecuación (3). Las raíces de la ***ecuación indicial*** $I(\nu) = 0$ se conocen como ***los exponentes de la singularidad*** en el punto singular $x_0 = 0$. Los exponentes de la singularidad determinan cualitativamente el comportamiento de la solución de la ecuación (3) en cualquier vecindad del punto singular $x_0 = 0$.

Teorema de Frobenius. Sean ν_1 y ν_2 las raíces de la ecuación indicial $I(\nu) = 0$; donde $\operatorname{Re}\nu_2 \leq \operatorname{Re}\nu_1$. Entonces, la ecuación (3) tiene al menos una solución de la forma

$$y_1(x) = |x|^{\nu_1} \sum_{k\geq 0} c_k x^k; \qquad c_0 \neq 0; \quad \text{convergente en } 0 < |x| < R.$$

Más aún, se puede determinar otra solución de (3), linealmente independiente de $y_1(x)$, también válida en $0 < |x| < R$, cuya forma dependerá fuertemente de la diferencia $\nu_1 - \nu_2$;

- si $\nu_1 - \nu_2$ no es un entero; $y_2(x) = |x|^{\nu_2} \sum_{k\geq 0} d_k x^k; \quad d_0 \neq 0,$
- si $\nu_1 - \nu_2 = 0$; $y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{\nu_1} \sum_{k\geq 1} d_k x^k,$
- si $\nu_1 - \nu_2$ es un entero; $y_2(x) = D\, y_1(x) \ln|x| + |x|^{\nu_2} \sum_{k\geq 0} d_k x^k; \quad d_0 \neq 0$; el coeficiente D puede ser cero o diferente de cero, de manera que el término logarítmico puede o no estar presente en este caso.

Observación. Los exponentes ν_1 y ν_2 podrían ser complejos. En tal caso, deben aparecer como par de complejos conjugados; es decir, $\nu_1 = \alpha + i\beta$ y $\nu_2 = \alpha - i\beta$. Recordando que

$$x^{\alpha\pm i\beta} = x^\alpha e^{\pm i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)),$$

se obtienen las siguientes dos soluciones reales en términos de series de Frobenius

$$y_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ln x) \sum_{k\geq 0} c_k x^k; \qquad y_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ln x) \sum_{k\geq 0} c_k x^k; \qquad c_0 \neq 0.$$

Es claro que son linealmente independientes. Aquí, nos restringiremos al caso en el cual ν_1 y ν_2 son reales. También se buscarán soluciones únicamente para $x > 0$. Una vez que se encuentra una solución en este intervalo, sólo se necesita reemplazar x^ν por $|x|^\nu$ para obtener la solución para $x < 0$.

Comentario. Una vez que se conocen los exponentes ν_1 y ν_2, los coeficientes de una solución en series de Frobenius se determinan sustituyendo

$$y(x) = |x|^{\nu} \sum_{k\geq 0} c_k x^k$$

directamente en la ecuación diferencial

$$x^2 y''(x) + \underbrace{x^2 p(x)}_{xP(x)}\, y'(x) + \underbrace{x^2 q(x)}_{Q(x)}\, y(x) = 0 \qquad (4)$$

y utilizando el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo 5. Investigar la naturaleza del punto $x_0 = 0$ para la ecuación $x^4\, y'' + x^2 \sin x\, y' - (1 - \cos x)\, y = 0$.

Escribiendo la ecuación en la forma normal, encontramos

$$y'' + \frac{\sin x}{x^2}\, y' - \frac{1-\cos x}{x^4}\, y = 0.$$

Entonces,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Puesto que ambos límites no son cero, se concluye que $x_0 = 0$ es un punto singular. Como los límites son finitos, el punto singular $x_0 = 0$ es regular.

Un procedimiento alternativo consiste en escribir

$$xp(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$x^2 q(x) = -\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\Big(1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\Big)\Big) = -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \cdots$$

Esta series de potencias (convergentes) muestran explícitamente que $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas por lo que se verifica directamente que $x_0 = 0$ es un punto singular regular. Además, se corrobora que $p_0 = 1$ y $q_0 = -1/2$.

En este caso, las raíces del polinomio indicial serán

$$I(\nu) = \nu(\nu-1) + p_0\nu + q_0 = \nu(\nu-1) + \nu - \frac{1}{2} = \nu^2 - \frac{1}{2} = 0 \;\to\; \begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \nu_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \;\to\; \nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{Z}.$$

Luego, por Teorema de Frobenius, podemos asegurar que existen soluciones de la forma

$$y_1(x) = |x|^{1/\sqrt{2}} \sum_{k\geq 0} c_k x^k;\, c_0 \neq 0, \quad \text{e} \quad y_2(x) = |x|^{-1/\sqrt{2}} \sum_{k\geq 0} d_k x^k;\, d_0 \neq 0,$$

que son linealmente independientes y válidas en $0 < |x| < \infty$.

Ejemplo 6. Hallar la solución general de la ecuación $x^2 y''(x) + x(x - \frac{1}{2})y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = 0$. Determinar el dominio de validez de la solución.

Comparando la ED a resolver con la expresión (4), es evidente que

$$P(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{2};$$

ambas funciones son analíticas en $x_0 = 0$ y sus desarrollos en series de potencias de x convergen en $|x| < \infty$. En este caso, las raíces del polinomio indicial serán

$$I(\nu) = \nu(\nu-1) + P(0)\nu + Q(0) = \nu(\nu-1) - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} = 0 \;\to\; \begin{cases} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \;\to\; \nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{Z}.$$

Luego, por Teorema de Frobenius, podemos asegurar que existen soluciones de la forma

$$y_1(x) = x\sum_{k\geq 0} c_k x^k \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sqrt{|x|}\sum_{k\geq 0} d_k x^k,$$

que son linealmente independientes y válidas en $0 < |x| < \infty$.

Determinaremos primero $y_1(x)$ aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Procederemos por pasos.

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1}, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^k, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 0}(k+1)k\, c_k x^{k-1}$$

en la ecuación diferencial para obtener

$$x^2\sum_{k\geq 0}(k+1)k\, c_k x^{k-1} + x(x-\frac{1}{2})\sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^k + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1} = 0$$

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)k\, c_k x^{k+1} + \underbrace{\sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^{k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^{k+1}}_{x(x-\frac{1}{2})\sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^k} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1} = 0$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero, se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\sum_{k\geq 0}\underbrace{((k+1)k - \frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{2})}_{k(k+\frac{1}{2})} c_k x^{k+1} + \sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^{k+2} = \sum_{k\geq 1} k(k+\frac{1}{2})\, c_k x^{k+1} + \sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^{k+2} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{k\geq 0}(k+1)(k+\frac{3}{2})\, c_{k+1} x^{k+2}}_{\sum_{k\geq 1} k(k+\frac{1}{2})\, c_k x^{k+1}} + \sum_{k\geq 0}(k+1)\, c_k x^{k+2} = \sum_{k\geq 0}(k+1)((k+\frac{3}{2})c_{k+1} + c_k)x^{k+2} = 0$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo $x \neq 0$; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$(k+\frac{3}{2})c_{k+1} + c_k = 0;\ k \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{c_{k+1} = -\frac{2}{2k+3}\, c_k}_{\text{relación de recurrencia}} \ ;\ k \geq 0$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los corficientes c_k para $k \geq 1$; es decir,

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{2}{3}\, c_0,$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{2}{5}\, c_1,$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad c_3 = -\frac{2}{7}\, c_2,$$

$$k = 3 \quad \rightarrow \quad c_4 = -\frac{2}{9}\, c_3,$$

.

.

.

$$k = n-1 \quad \rightarrow \quad c_n = -\frac{2}{2n+1}\, c_{n-1}, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Todos los coeficientes dependerán (por recurrencia) del coeficiente c_0; recordemos que $c_0 \neq 0$. Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_{n-1} \cdot c_n = -\frac{2}{3} c_0 \cdot -\frac{2}{5} c_1 \cdot -\frac{2}{7} c_2 \cdots -\frac{2}{2n+1} c_{n-1} \qquad \rightarrow \quad c_n = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!}\, c_0; \;\; n \geq 1$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y_1(x)$; es decir,

$$y_1(x) = x \sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!} x^n \quad \leftarrow c_0 = 1.$$

Procediendo de la misma manera, se llega a

$$y_2(x) = \sqrt{x} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad \leftarrow d_0 = 1.$$

Es fácil comprobar que ambas series convergen en $(0, \infty)$ (por ejemplo, usando el criterio del cociente). También es evidente, de la forma de estas soluciones, que ninguna serie es un múltiplo constante de la otra; de hecho,

$$y_1(x) \sim x; \quad x \in (0, \epsilon); \quad \epsilon \lll 1 \qquad\qquad y_2(x) \sim \sqrt{x}; \quad x \in (0, \epsilon); \quad \epsilon \lll 1.$$

Por lo tanto, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes para todo $x > 0$. Así, por el principio de superposición,

$$y(x) = \alpha\, |x| \sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!} x^n + \beta \sqrt{|x|} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

representa la solución general de la ED, con dominio de validez en $0 < |x| < \infty$.

Ejemplo 7. Hallar la solución general de la ecuación $xy''(x) + x\, y'(x) + y(x) = 0$. Determinar el dominio de validez de la solución.

Primero, escribamos la ED en forma normal

$$y''(x) + y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad p(x) = 1; \quad q(x) = \frac{1}{x}.$$

Entonces, tendremos

$$P(x) = xp(x) = x \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 q(x) = x;$$

ambas funciones son analíticas en $x_0 = 0$ y sus desarrollos en series de potencias de x convergen en $|x| < \infty$. Concluimos que el origen es un punto singular regular. En este caso, las raíces del polinomio indicial serán

$$I(\nu) = \nu(\nu - 1) + P(0)\nu + Q(0) = \nu(\nu - 1) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{Z}.$$

Por el Teorema de Frobenius, podemos asegurar que existe una solución de la forma

$$y_1(x) = x \sum_{k \geq 0} c_k\, x^k.$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, pueden determinarse los coeficientes c_k. Haciendo esto, se llega a

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k+1}\, c_k; \; k \geq 0 \quad \rightarrow \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n!}\, c_0; \; n \geq 1 \underbrace{\;\rightarrow\;}_{c_0 = 1} y_1(x) = x \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = xe^{-x}$$

Para hallar otra solución, linealmente independiente de $y_1(x)$ en $(0,\infty)$ podemos usar el método de reducción del orden. Haciendo esto, se tiene

$$e^{-\int^x p(\eta)\,d\eta} = e^{-x} \quad \rightarrow \quad y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\,d\eta.$$

Obsérvese que, si $x>0$,

$$\int^x \frac{e^\eta}{\eta^2}\,d\eta \underbrace{=}_{e^\eta = \sum_{k\geq 0}\frac{\eta^k}{k!}} \sum_{k\geq 0}\int^x \frac{\eta^{k-2}}{k!} = \ln x - \frac{1}{x} + \sum_{k\geq 2}\frac{x^{k-1}}{k!(k-1)}.$$

Luego,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) - \underbrace{\Big(1-\sum_{k\geq 2}\frac{x^k}{k!(k-1)}\Big)e^{-x}}_{\text{función analítica en } x_0=0} \quad \rightarrow \quad y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n\geq 0} d_n\, x^n;\ d_0\neq 0.$$

Obsérvese que $y_2(x)$ tiene la forma indicada por el Teorema de Frobenius para el caso $\nu_1-\nu_2\in\mathbb{Z}$. Finalmente, el dominio de validez de la solución general (combinación lineal de $y_1(x)$ e $y_2(x)$) es $0<x<\infty$.

Comentario. En el ejemplo anterior, la solución $y_1(x)$ pudo expresarse como el producto de funciones conocidas, pero esto no siempre es posible.

Ejemplo 8. Hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x^2\,y''(x) - x\,y'(x) + (1-x)\,y(x) = 0$.

Comparando la ED a resolver con la expresión (4), es evidente que

$$P(x) = 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = 1-x;$$

ambas funciones son analíticas en $x_0=0$ y sus desarrollos en series de potencias de x convergen en $|x|<\infty$. En este caso, las raíces del polinomio indicial serán

$$I(\nu) = \nu(\nu-1) + P(0)\nu + Q(0) = \nu(\nu-1) - \nu + 1 = (\nu-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \nu = 1 \quad \text{es raíz doble.}$$

Luego, por Teorema de Frobenius, podemos asegurar que existe una solución de la forma

$$y_1(x) = x\sum_{k\geq 0} c_k x^k, \quad c_0\neq 0.$$

Determinaremos $y_1(x)$ aplicando el método de los coeficientes indeterminados como se hizo en el ejemplo anterior.

Primer paso: se sustituyen

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1}, \qquad y'(x) = \sum_{k\geq 0}(k+1)\,c_k x^k, \qquad y''(x) = \sum_{k\geq 0}(k+1)k\,c_k x^{k-1}$$

en la ecuación diferencial para obtener

$$x^2\sum_{k\geq 0}(k+1)k\,c_k x^{k-1} - x\sum_{k\geq 0}(k+1)\,c_k x^k + (1-x)\sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1} = 0$$

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)k\,c_k x^{k+1} - \sum_{k\geq 0}(k+1)\,c_k x^{k+1} + \sum_{k\geq 0} c_k x^{k+1} - \sum_{k\geq 0} c_k x^{k+2} = 0$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero, se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$\sum_{k\geq 0}((k+1)k-(k+1)+1)\, c_k x^{k+1} - \sum_{k\geq 0} c_k x^{k+2} = \sum_{k\geq 1} k^2\; c_k x^{k+1} - \underbrace{\sum_{k\geq 1} c_{k-1} x^{k+1}}_{\sum_{k\geq 0} c_k x^{k+2}} = 0$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo $x > 0$; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$k^2\, c_k - c_{k-1} = 0;\;\; k \geq 1 \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{c_k = \frac{1}{k^2}\, c_{k-1}}_{\text{relación de recurrencia}} \quad ;\;\; k \geq 1.$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los corficientes c_k para $k \geq 1$; es decir,

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = c_0,$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{4}\, c_1,$$

$$k = 3 \quad \rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{9}\, c_2,$$

$$k = 4 \quad \rightarrow \quad c_4 = \frac{1}{16}\, c_3,$$

.

.

.

$$k = n \quad \rightarrow \quad c_n = \frac{1}{n^2}\, c_{n-1},\;\; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Todos los coeficientes dependerán (por recurrencia) del coeficiente c_0 (recordemos que $c_0 \neq 0$). Para establecer esta dependencia explícitamente, hagamos

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_{n-1} \cdot c_n = c_0 \cdot \frac{1}{4} c_1 \cdot \frac{1}{9} c_2 \cdots \frac{1}{n^2} c_{n-1} \qquad \rightarrow \quad c_n = \frac{1}{(n!)^2}\, c_0;\;\; n \geq 1$$

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y_1(x)$; es decir,

$$y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2}\, x^{n+1} \quad \leftarrow c_0 = 1.$$

Como $\nu_1 = \nu_2$, el Teorema de Frobenius asegura que existe una segunda solución, linealmente independiente de $y_1(x)$, de la forma

$$y_2(x) = y_1(x)\, \ln(x) + \sum_{k\geq 1} d_k x^{k+1}$$

y que converge en $0 < x < \infty$. Para determinar $y_2(x)$ procedemos de manera similar.

Primer paso: se sustituyen las expresiones

$$y(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{k\geq 1} d_k x^{k+1}, \qquad y'(x) = y_1'(x)\ln(x) + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{k\geq 1} (k+1)\, d_k x^k,$$

$$y''(x) = y_1''(x)\ln(x) + 2\frac{y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{k\geq 1} k(k+1)\, d_k x^{k-1},$$

en la ecuación diferencial para obtener

$$x^2\Big(y_1''(x)\ln(x)+2\frac{y_1'(x)}{x}-\frac{y_1(x)}{x^2}+\sum_{k\geq 1}k(k+1)\,d_kx^{k-1}\Big)-x\Big(y_1'(x)\ln(x)+\frac{y_1(x)}{x}+\sum_{k\geq 1}(k+1)\,d_kx^k\Big)$$

$$+(1-x)\Big(y_1(x)\ln(x)+\sum_{k\geq 1}d_kx^{k+1}\Big)=0.$$

Teniendo en cuenta que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial, se llega a

$$2x\,y_1'(x)-2\,y_1(x)+\sum_{k\geq 1}k(k+1)\,d_kx^{k+1}-\sum_{k\geq 1}(k+1)\,d_kx^{k+1}+\sum_{k\geq 1}d_kx^{k+1}-\sum_{k\geq 1}d_kx^{k+2}=0 \qquad (5)$$

Ahora, dado que

$$y_1(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k!)^2}\,x^{k+1},\quad y_1'(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{k+1}{(k!)^2}\,x^k$$

y los dos primeros términos de la ecuación anterior pueden escribirse de la siguiente manera

$$2x\,y_1'(x)-2\,y_1(x)=2x\sum_{k\geq 0}\frac{k+1}{(k!)^2}\,x^k-2\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k!)^2}\,x^{k+1}=2\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(k!)^2}\,x^{k+1}.$$

Reemplazando esta expresión en (5), se obtiene

$$2\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(k!)^2}\,x^{k+1}+\sum_{k\geq 1}\underbrace{\Big(k(k+1)-(k+1)+1\Big)}_{k^2}d_kx^{k+1}-\sum_{k\geq 1}d_kx^{k+2}=0.$$

Segundo paso: se suman las series; para ello, primero, se agrupan los términos con iguales potencias de x

$$2\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(k!)^2}\,x^{k+1}+\sum_{k\geq 1}k^2\,d_kx^{k+1}-\underbrace{\sum_{k\geq 2}d_{k-1}x^{k+1}}_{\sum_{k\geq 1}d_kx^{k+2}}=2x^2+d_1x^2+\sum_{k\geq 2}\Big(\frac{2k}{(k!)^2}+k^2\,d_k-d_{k-1}\Big)x^{k+1}=0.$$

Tercer paso: la expresión anterior debe ser idénticamente cero para todo $x>0$; esto implica que el coeficiente de cada potencia de x debe ser igual a cero; es decir,

$$d_1=-2,\qquad \underbrace{d_k=-\frac{2}{k(k!)^2}+\frac{1}{k^2}\,d_{k-1};\ k\geq 2}_{\text{relación de recurrencia}}$$

Cuarto paso: se usa la fórmula de recurrencia para determinar los corficientes d_k para $k\geq 1$; es decir,

$$k=1\ \rightarrow\ d_1=-2,$$

$$k=2\ \rightarrow\ d_2=-\frac{2}{2(2!)^2}+\frac{1}{2^2}d_1\ \rightarrow\ d_2=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

$$k=3\ \rightarrow\ d_3=-\frac{2}{3(3!)^2}+\frac{1}{3^2}d_2\ \rightarrow\ d_3=\frac{2}{3(3!)^2}+\frac{1}{3^2}d_2=-\frac{1}{54}-\frac{1}{12}=-\frac{11}{108}$$

$$k=4\ \rightarrow\ d_4=-\frac{2}{4(4!)^2}+\frac{1}{4^2}d_3\ \rightarrow\ d_4=\frac{2}{4(4!)^2}+\frac{1}{4^2}d_3=-\frac{1}{54}-\frac{1}{12}=-\frac{25}{3456}$$

.

.

.

Quinto paso: se sustituyen los coeficientes hallados en la serie que define a $y_1(x)$; es decir,

$$y_2(x) = y_1(x)\,\ln(x) - \Big(2x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{108}x^4 + \frac{25}{3456}x^5 + \cdots\Big).$$

⋆ ⋆ ⋆

17. Hallar y clasificar todos los puntos singulares (finitos) de las ecuaciones diferenciales que se indican a continuación.
    (a) $x^3(x^2-1)y'' - x(x+1)y' - (x-1)y = 0$
    (b) $(x+1)^2xy'' + xy' - y = 0$
    (c) $(x^3-4x)^2y'' + 2(x+2)y' + 6y = 0$
    (d) $(e^x-1)y'' - (x+1)y' + (x-1)y = 0$
    (e) $x^3y'' + (\sin x)\,y = 0$

18. Probar que, haciendo el cambio de variable $\zeta = 1/x$, la ecuación $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ se convierte en

$$y''(\zeta) + \frac{2\zeta - p(\zeta)}{\zeta^2}\,y'(\zeta) + \frac{q(\zeta)}{\zeta^4}\,y(\zeta) = 0.$$

    Usar este resultado para chequear que la ecuación $x(1-x)\,y''(x) + (1-2x)\,y'(x) + y(x) = 0$ tiene un punto singular regular en $x_0 = \infty$.

19. Encontrar el polinomio indicial asociado con el punto singular regular en $x_0 = 0$ para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales
    (a) $4x^2y''(x) + x(2x^3-5)y'(x) + (3x^2+2)y(x) = 0$,
    (b) $x^2y''(x) + (\frac{5}{3} + x)xy'(x) - \frac{1}{3}y(x) = 0$,
    (c) $x^3y''(x) + (\cos 2x - 1)y'(x) + 2xy(x) = 0$,
    (d) $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, $\quad\lambda$ una constante,
    (e) $x^2y'' - xy' + (x^2-\lambda^2)y = 0$, $\quad\lambda$ una constante.

    Aplicando el Teorema de Frobenius y sin resolver, indicar la forma de las soluciones que esperaría encontrar.

20. La ecuación diferencial $x^2y'' + axy' + by = 0$; a y b constantes reales, se denomina ***ecuación de Euler***. Es el ejemplo más simple de una ecuación de segundo orden con un punto singular regular en el origen.
    (a) Comprobar que la ecuación de Euler puede ser reducida a una ecuación diferencial con coeficientes constantes por medio de la sustitución $|x| = e^t$.
    (b) El conjunto fundamental de soluciones dependerá de las raíces del polinomio característico $p(r)$ correspondiente a la ecuación transformada. Si r_1 y r_2 son las raíces de $p(r)$; comprobar que
        - si $r_1 \neq r_2$; $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\quad\rightarrow\quad \{|x|^{r_1}, |x|^{r_2}\}$,
        - si $r_1 = \overline{r_2} = \alpha + i\beta$, $\quad\rightarrow\quad \{|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|), |x|^\alpha\sin(\beta\ln|x|)\}$,
        - si $r_1 = r_2 = r$ $\quad\rightarrow\quad \{|x|^r, |x|^r\ln|x|\}$.
    (c) Cuál es la ecuación indicial asociada al punto singular regular $x_0 = 0$?

21. Encontrar todos los valores de α de manera tal que las soluciones de la ecuación $x^2y'' + \alpha xy' + \frac{5}{2}y = 0$ tiendan a cero cuando $x \to 0$.

22. Encontrar todos los valores de α de manera tal que la solución del PVI $2x^2y'' + 3xy' - y = 0;\;\; y(1) = 1$, $y'(1) = \alpha$, se mantenga acotada cuando $x \to 0^+$.

23. Considere la ecuación diferencial $2xy''(x) + (1 + x)y'(x) + y(x) = 0$.

    (a) Comprobar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular.

    (b) Comprobar que las raíces del polinomio indicial son diferentes y su diferencia no es un número entero.

    (c) Hallar dos soluciones linealmente independientes válidas en $(0, \infty)$.

    Soluciones:

$$y_1(x) = x^{1/2}\Big(1 + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{x^k}{2^k k!}\Big); \qquad y_2(x) = \Big(1 + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{x^k}{(2k-1)!!}\Big).$$

24. Considere la ecuación diferencial $2x^2y''(x) + xy'(x) + (2x^2 - 3)y(x) = 0$.

    (a) Comprobar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular.

    (b) Comprobar que las raíces del polinomio indicial son diferentes y su diferencia no es un número entero.

    (c) Hallar dos soluciones linealmente independientes válidas en $(0, \infty)$.

    Soluciones:

$$y_1(x) = x^{3/2}\Big(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k}}{9 \cdot 13 \cdots (4k+5)}\Big); \qquad y_2(x) = x^{-1}\Big(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k}}{3 \cdot 7 \cdots (4k-5)}\Big).$$

25. Considere la ecuación diferencial $x^2y'' + x(x - 3)y' + 3y = 0$.

    (a) Demuestre que $\nu = 1$ y $\nu = 3$ son dos raíces de la ecuación indicial asociada.

    (b) Encuentre una solución en series de potencias de la forma $y_1(x) = x^3 \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_0 = 1$.

    (c) Compruebe que $y_1(x)$ puede escribirse como x^3e^{-x}.

    (d) Halle una segunda solución usando el método de reducción del orden.

26. Considere la ecuación diferencial $x^2\, y'' + x(x - 1)\, y' - (x - 1)\, y = 0$. Encontrar dos soluciones linealmente en $(0, \infty)$.

    Soluciones:

$$y_1(x) = x; \qquad y_2(x) = x\ln(x) + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k!k}.$$

27. La ecuación diferencial $x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$; con α, β y γ constantes, se denomina ***ecuación de Gauss o ecuación hipergeométrica***. Esta ecuación permite resolver cualquier ecuación diferencial con tres puntos singulares.

    (a) Compruebe que $x = 0$ es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son 0 y $1 - \gamma$.

    (b) Compruebe que $x = 1$ también es un punto singular regular y que las raíces de la ecuación indicial son, en este caso, 0 y $\gamma - \alpha - \beta$.

    (c) Compruebe que $x = \infty$ es un punto singular regular.

(d) Suponga que $1-\gamma$ no es un entero o cero. Encuentre dos soluciones de la ecuación hipergeométrica válidas en $0<|x|<R$; cuál es el valor de R?

Soluciones:

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots +$$

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\Big(1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1!(2-\gamma)}x+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2!(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2+\cdots+\Big).$$

(e) La serie $y_1(x)$ se conoce como la serie hipergeométrica y se representa normalmente por $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Muestre que:

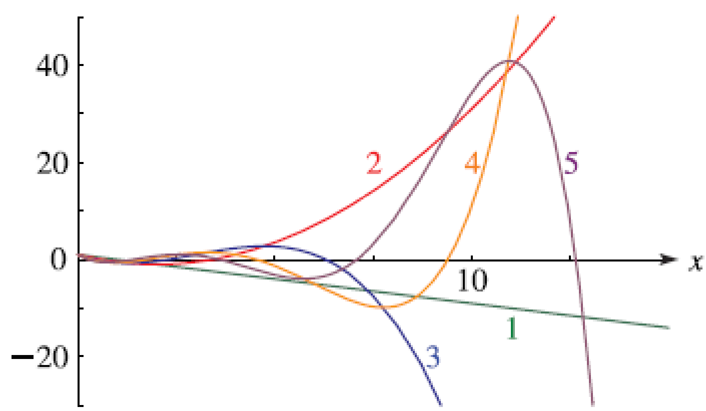
i. $F(1,1,1,x) = \dfrac{1}{1-x}$

ii. $F(1,1,2,-x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

iii. $F(-1,1,1,-x) = (1+x)$

28. La ecuación diferencial $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ se denomina ***ecuación de Laguerre de orden*** λ.

(a) Probar que tiene una solución que es analítica para todo x y que se reduce a un polinomio cuando λ es un entero no negativo.



(b) Mostrar que si $\lambda = -1$, la solución general de la ecuación de Laguerre en cualquier dominio que no contenga al origen está dada por

$$y = c_1e^x + c_2\Big(\ln|x| + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}\frac{x^k}{k!}\Big)e^x; \quad c_1, c_2 \quad \text{son constantes arbitrarias.}$$

29. $\star$ La ecuación diferencial $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-\nu^2)y(x) = 0$ se denomina ***ecuación de Bessel de orden*** ν. Una solución de esta ecuación es

$$J_\nu(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu};$$

se denomina función de Bessel de primera clase. Obsérvese que, si $\nu \geq 0$, converge en $[0,\infty)$.

(a) Discutir el comportamiento de $J_\nu(x)$ cuando $x \to 0$.

(b) Demostrar que las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes en $(0, \infty)$ para todos los valores no enteros de ν.

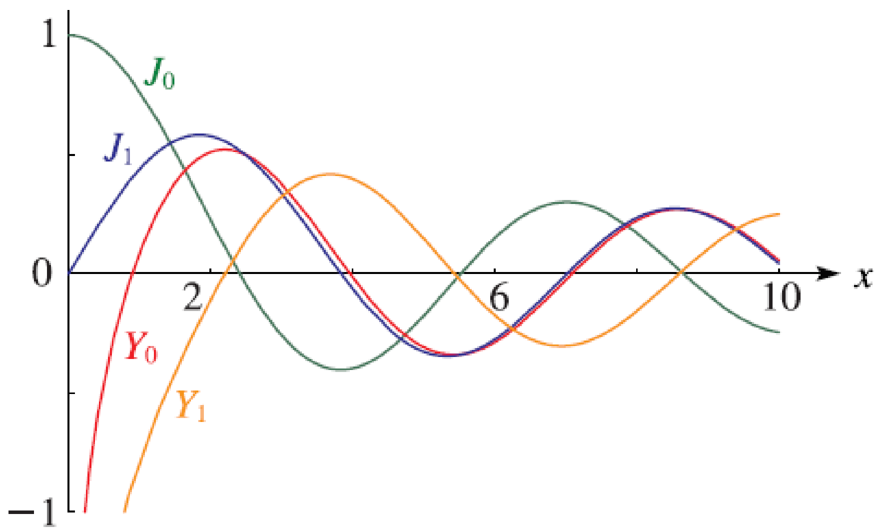
(c) Demostrar que, para todo entero p, $J_p(x) = (-1)^p J_p(x)$.

30. ⋆ La función de Neumann (o función de Bessel de segunda clase) se define por la fórmula

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Si ν no es entero positivo sabemos que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes por lo que $Y_\nu(x)$ resulta linealmente independiente de $J_\nu(x)$. Para un valor entero de $\nu = n$, la función de Neumann se puede determinar mediante el paso al límite cuando $\nu \to n$. Demostrar que

$$\lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\Big|_{\nu=n} \Big).$$



Para $n > 1$, las gráficas de $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son similares a las de $J_1(x)$ y $Y_1(x)$. En particular, $J_n(0) = 0$ mientras que $Y_n(x) \to -\infty$ conforme $x \to +0$; ambas funciones tienen oscilaciones amortiguadas a medida que $x \to +\infty$.

31. (a) Sea $f_\alpha(x)$ una solución cualquiera de la ecuación de Bessel de orden α y sea $g(x) = \sqrt{x} f_\alpha(x), x > 0$. Demostrar que $g(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y'' + \Big(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\Big) y = 0.$$

(b) Cuando $4\alpha^2 = 1$, la ecuación diferencial del inciso anterior se reduce a $y'' + y = 0$, cuya solución general es $y = A\cos x + B\sin x$. Utilizar esta información para demostrar que, para $x > 0$,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

32. La siguiente ecuación diferencial $x^2 y'' + xy' + (m^2x^2 - n^2)y = 0$ aparece en numerosas aplicaciones. Demuestre que puede reducirse a una ecuación de Bessel mediante el cambio de variable $z = mx$.

33. Utilizando el método propuesto en el ejercicio anterior,

   (a) compruebe que la solución general de $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right)y = 0$ es $y = c_1 J_{3/5}(2x) + c_2 J_{-3/5}(2x)$,

   (b) compruebe que la solución general de $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)y = 0$ es $y = c_1 J_2(\sqrt{3}x) + c_2 Y_2(\sqrt{3}x)$,

   (c) encuentre la solución de $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$ que sea continua en $x = 0$ y tal que $y(0.3) = 2$.

34. ⋆ A partir de la definición de $J_\alpha(x)$ probar que:

   (a) $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$,

   (b) $\dfrac{d}{dx}(x^{-\alpha} J_\alpha(x)) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x), \quad \alpha \geq 0$,

   (c) $xJ'_\alpha(x) = \alpha J_\alpha(x) - xJ_{\alpha+1}(x)$,

   (d) $xJ'_\alpha(x) = -\alpha J_\alpha(x) + xJ_{\alpha-1}(x)$,

   (e) $J_{3/2}(x)\sin x - J_{-3/2}(x)\cos x = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x^3}}$.

35. ⋆ Supóngase $x > 0$. A partir de las fórmulas de derivación, probar que

   (a) $\displaystyle\int_0^x t^\alpha\, J_{\alpha-1}(t)\, dt = x^\alpha J_\alpha(x)$

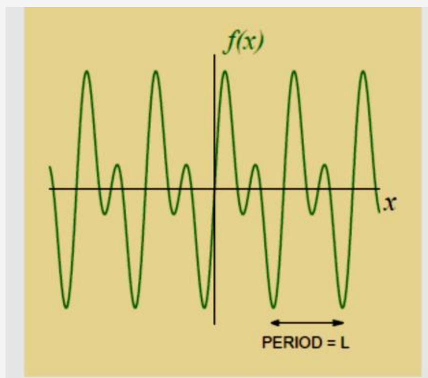
   (b) $\displaystyle\int_0^x t^{-\alpha}\, J_{\alpha+1}(t)\, dt = -x^{-\alpha} J\alpha(x) + \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$

   (c) $\displaystyle\int J_0(x)\sin x\, dx = xJ_0(x)\sin x - xJ_1(x)\cos x + c$

10. Series de Fourier

Cualquier función periódica $f(x)$, razonablemente comportada, tiene una representación en series infinitas de términos trigonométricos. Estas series trigonométricas se conocen como ***series de Fourier***; son análogas a las ***series de Taylor*** en el siguiente sentido: ambos tipos de series proven una manera de expresar funciones complicadas en términos de ciertas funciones elementales.

▶ Definición. Una función $f(x)$ se dice ***periódica*** si existe un número $L \neq 0$ (llamado ***período***) tal que $f(x+L) = f(x)$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$.



▶ Propiedades.

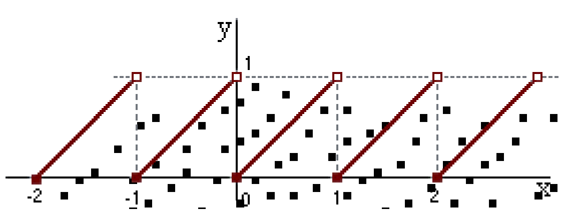
- Si $f(x)$ es una función periódica con período L y $n \in \mathbb{Z}$; entonces $f(x)$ también tiene período nL.
- Una función constante puede ser considerada una función periódica con período arbitrario; es decir, cualquier número real es un período posible.
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones periódicas con período L y $a, b \in \mathbb{R}$; entonces la combinación lineal $af(x) + bg(x)$ y el producto $f(x)g(x)$ también son funciones periódicas con período L.

Ejemplo 1.

a) La función $f(x) = 3 + \cos x - \sin x + 5\cos 2x + 17\sin 3x$ tiene período $L = 2\pi$, ya que es una combinación lineal de senos y cosenos de múltiplos enteros de x; todas son funciones periódicas con período $L = 2\pi$.

b) Si p es un número fijo, las funciones $\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi x}{p}\right)$ son periódicas con período $L = 2p$.

c) La función $M(x) = x - [x]$ (llamada función mantisa) es periódica con período $L = 1$.



$\star \quad \star \quad \star$

1. Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones periódicas con períodos L_1 y L_2, respectivamente. Mostrar que si, L_1 y L_2 son conmensurables, entonces existe un número positivo L tal que $(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(x + L)$. Determinar L.

   Ayuda: dos números reales se dicen conmensurables cuando su cociente es igual a un número racional.

2. Sea $f(x)$ una función integrable y períodica con período L. Probar que:

   (a) $\displaystyle\int_0^L f(x)dx = \int_a^{L+a} f(x)dx, \quad 0 < a < L.$

   Ayuda: mostrar primero que $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_L^{L+a} f(x)dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^L f(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx$

   (c) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx, \quad (b-a) = L$

3. Sea $f(x)$ una función suave a trozos y periódica con período L. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se definen

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = F(x) - f_0 x;$$

   siendo f_0 el valor promedio de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$. Probar que la función $G(x)$ también es periódica con período L.

4. Sea $f(x)$ una función diferenciable y periódica con período L. Mostrar que $f'(x)$ también es periódica con período L.

$\star \quad \star \quad \star$

► Definición. Sea $f(x)$ una función seccionalmente continua en $[-p, p]$. La serie

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),$$

donde los coeficientes a_0, a_n y b_n están definidos por

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx; \qquad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right);$$

es la ***serie de Fourier asociada a*** $f(x)$. Los coeficientes se denominan ***coeficientes de Fourier de*** $f(x)$ ***con respecto al sistema trigonométrico***

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{p},\ \sin\frac{\pi x}{p},\ \cos\frac{2\pi x}{p},\ \sin\frac{2\pi x}{p}, \cdots \cos\frac{n\pi x}{p},\ \sin\frac{n\pi x}{p}, \cdots\right\}.$$

El sistema trigonométrico tiene la siguiente ***propiedad de ortogonalidad***: si $\varphi_n(x)$ y $\varphi_m(x)$ representan dos funciones cualesquiera de la familia,

$$\int_{-p}^{p} \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ p & m = n \neq 0 \\ \dfrac{p}{2} & m = n = 0 \end{cases}$$

► Observaciones.

- A diferencia de las series de Taylor, definidas solamente cuando la función es indefinidamente derivable, la única condición para que las series de Fourier estén definidas es que la función sea integrable sobre un intervalo. Recordemos que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de series de Fourier es mucho menos restrictivo que el de series de Taylor. Esta es una de las grandes ventajas de la teoría de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.

- Si se cambiara el valor de una función en un número finito de puntos, esto no afectaría para nada a los coeficientes de Fourier de esa función porque estos se calculan por medio de integrales. Tampoco es importante que una función no esté definida en un conjunto finito de puntos aislados porque esto no afecta su integrabilidad ni el valor de su integral.

- De acuerdo a su definición, el término constante $a_0/2$ en la serie de Fourier de $f(x)$ representa el valor promedio de $f(x)$ en el intervalo $[-p, p]$.

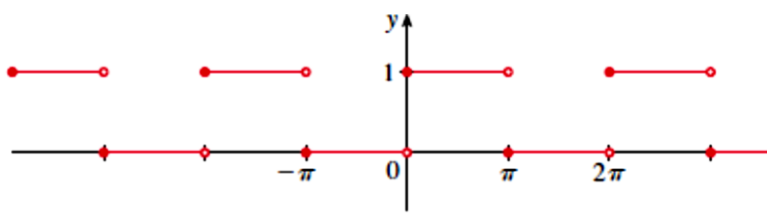
- Como veremos más adelante, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de Fourier.

Ejemplo 2.

Encontrar la serie de Fourier asociada a la ***función onda cuadrada*** definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad ; \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

De acuerdo a la definición, $f(x)$ es periódica con período $L = 2\pi$.



Usando las fórmulas para calcular los coeficientes, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n\pi}\right|_0^{\pi} = 0$$

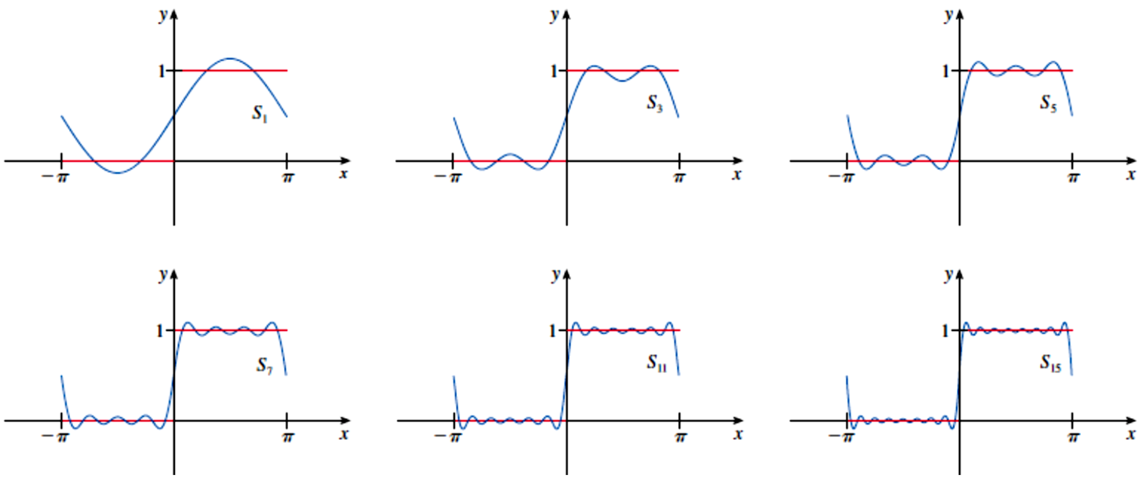
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n\,\text{par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & n\,\text{impar} \end{cases}$$

Como un número impar puede escribirse de la forma $2k + 1$; con k número entero, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ será

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1}\,\sin(2k+1)x.$$

Cuál es la relación entre la función $f(x)$ y su serie de Fourier $S(x)$?. La serie de Fourier asociada a $f(x)$, es una serie convergente? Si es convergente, a qué función converge?

Antes de pasar a los resultados teóricos, comencemos por investigar el comportamiento de $S(x)$ gráficamente. En la siguiente figura, se muestran las gráficas correspondientes a distintas sumas parciales.



Se observa que, a medida que k crece, las $k-$ésimas sumas parciales se vuelven mejores aproximaciones de la función onda cuadrada. Aparentemente, la gráfica de $S_k(x)$ se acerca cada vez más a la gráfica de $f(x)$ excepto en los puntos de discontinuidad.

Teorema (convergencia puntual de las series de Fourier). Sea $f(x)$ una función continua a trozos en $[-p,p]$, cuya derivada existe y es continua a trozos. Entonces, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ converge en cada punto $x \in [-p,p]$ y su suma,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),$$

verifica las siguientes relaciones:

- $S(x_0) = f(x_0)$ si $x_0 \in (-p,p)$ y $f(x)$ es continua en el punto x_0,
- $S(x_0) = \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ si $x_0 \in (-p,p)$ y $f(x)$ es dicontinua en el punto x_0,
- $S(-p) = S(p) = \dfrac{f(-p^+) + f(p^-)}{2}$.

Fuera del intervalo $[-p,p]$, la serie converge a la extensión periódica de la función $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

► Observaciones.

- Las condiciones dadas en este teorema solo son suficientes para la convergencia de la serie de Fourier; de ninguna manera son necesarias. A fin de obtener una mejor comprensión del contenido del teorema, es útil considerar algunas clases de funciones que no satisfacen las condiciones asumidas. Entre las funciones que no son incluidas en el teorema están, principalmente, aquellas con discontinuidades infinitas en el intervalo $[-L,L]$, tales como $1/x^2$ cuando $x \to 0$ o $\ln|x-L|$ cuando $x \to L$. También están excluidas las funciones que tienen un número infinito de discontinuidades en este intervalo acotado; sin embargo, tales funciones se encuentran raramente en las aplicaciones.

- A pesar de que cada término en la serie $S(x)$ es diferenciable infinita veces, una serie de Fourier puede converger en una suma que no es diferenciable o incluso que no es continua.

Ejemplo 3.

Volvamos a la serie de Fourier asociada a la función onda cuadrada. Del Teorema de convergencia puntual, se tiene

a) en un punto donde $f(x)$ es continua; por ejemplo, $x_0 = \pi/2$,

$$S(\pi/2) = f(\pi/2) = 1$$

b) en $x_0 = 0$, donde $f(x)$ tiene una discontinuidad tipo salto,

$$S(0) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)\Big) = \frac{1}{2},$$

c) en los puntos extremos $x_0 = \pm\pi$,

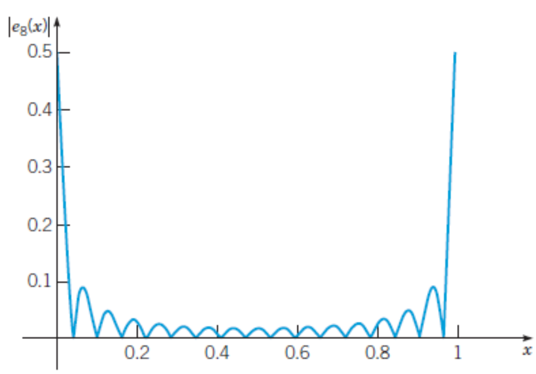
$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to -\pi^+} f(x) + \lim_{x\to \pi^-} f(x)\Big) = \frac{1}{2}.$$

Como una aplicación curiosa, el Teorema de convergencia permite calcular sumas de series numéricas. En efecto, del resultado a) se deduce

$$S(\pi/2) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2k+1}\underbrace{\sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2}\Big)}_{(-1)^k} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

▶ Fenómeno de Gibbs. Volvamos a la representación en series de Fourier de la función onda cuadrada. En la vecindad de los puntos de discontinuidad, las sumas parciales no convergen suavemente al valor medio que predice el Teorema de convergencia (ver gráficos del Ejemplo 2.). En lugar de esto, tienden a sobrepasar el valor de la función en cada extremo del salto, como si las sumas parciales no pudieran acomodarse a la curva cerrada requerida en este punto. Este comportamiento es típico de las series de Fourier en puntos de discontinuidad y se conoce como ***fenómeno de Gibbs***.

Para obtener más información sobre este fenómeno, es conveniente considerar el error $e_k(x) = f(x) - S_k(x)$. En la siguiente figura se muestra la gráfica de $|e_k(x)|$ en función de x para $k = 8$ y $L = 1$.



La cota superior mínima de $|e_8(x)|$ es 0.5 y se alcanza cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 1$. A medida que k aumenta, el error disminuye en el interior de intervalo (donde $f(x)$ es continua), pero la cota superior mínima no disminuye. Por lo tanto, no podemos ***reducir uniformemente el error*** en todo el intervalo aumentando el número de términos.

Supongáse que $f(x)$ y $f'(x)$ son funciones seccionalmente continuas en $[-p,p]$.

► Series de Cosenos. Si $f(x)$ es par, entonces

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right),\quad -p\leq x\leq p.$$

En efecto, por la definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$f(x) \text{ es par } \to \begin{cases} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es par} \\ f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es impar}\end{cases} \to \begin{cases} a_0 & = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx, \\ a_n & = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx, \\ b_n & = 0; \end{cases}$$

► Series de Senos. Si $f(x)$ es impar, entonces

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\sum_{n\geq 1}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right),\quad -p\leq x\leq p.$$

Nuevamente, por la definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$f(x) \text{ es impar } \to \begin{cases} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es impar} \\ f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) & \text{es par}\end{cases} \to \begin{cases} a_0 & = 0, \\ a_n & = 0, \\ b_n & = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx. \end{cases}$$

Ejemplo 4.

Encontrar la serie de Fourier de la ***función diente de sierra*** definida por $f(x)=x$, para $-L<x<L$, y $f(x+2L)=f(x)$.

Dado que $f(x)$ es una función impar, los coeficientes de Fourier serán

$$a_n=0;\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L=(-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi}.$$

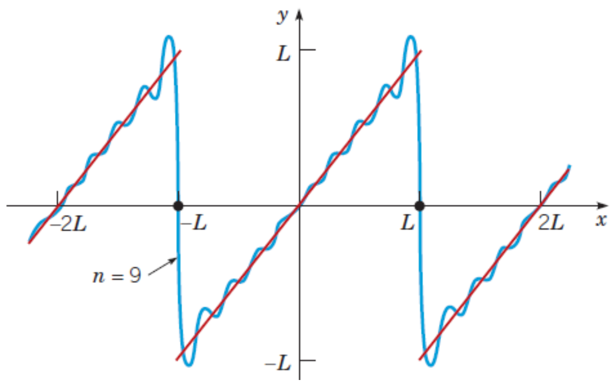
Luego, la serie de Fourier para $f(x)$ es

$$S(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\qquad -\infty<x<\infty.$$

Observemos que la función $f(x)$ es discontinua en los puntos $\pm L,\pm 3L,\cdots$ En esos puntos, se comprueba fácilmente que $S(x)$ converge a la semisuma de los valores laterales de $f(x)$; es decir, a cero, como lo determina el Teorema de convergencia puntual. Finalmente, se tiene

$$S(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},\qquad -\infty<x<\infty.$$

En la siguiente figura, se muestra la suma parcial correspondiente a $n=9$. El fenómeno de Gibbs también está presente cerca de los puntos de discontinuidad.



⋆ ⋆ ⋆

5. Cada una de las siguientes funciones se asume extendida de manera periódica fuera de su intervalo de origen. En cada caso, encuentre la serie de Fourier para la función extendida y trace la gráfica de la función a la que converge la serie indicando el valor en cada discontinuidad.

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

      i. A partir de la serie hallada en el inciso anterior, probar que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

      Solución: $S(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

      i. A partir de la serie hallada en el inciso anterior, probar que $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

      Solución: $S(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{\sin(kx)}{k}$.

   (c) $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$.

      i. A partir de la serie hallada en el inciso anterior, probar que $\dfrac{\pi^2}{12} = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

      Solución: $S(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}$.

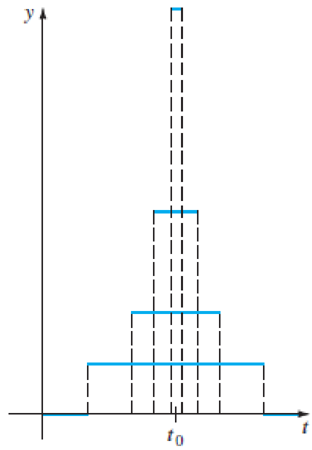
   (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

      i. A partir de la serie hallada en el inciso anterior, probar que $\dfrac{\pi - 2}{4} = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}$.

      Solución: $S(x) = \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{2}\sin x$.

6. $\star$ Sea $\delta > 0$. La función ***impulso unitario con centro en*** t_0 está definida por

$$I(t-t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 - \delta \\ \dfrac{1}{2\delta}, & t_0 - \delta \le t < t_0 + \delta \\ 0, & t_0 + \delta < t \le 2\pi \end{cases}$$



Obtener los coeficientes de Fourier de $I(t-t_0)$. Luego, calcular $\lim_{\delta \to 0} a_0$, $\lim_{\delta \to 0} a_k$ y $\lim_{\delta \to 0} b_k$.

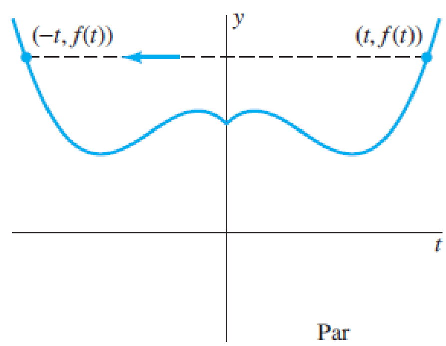
$\star \quad \star \quad \star$

Al resolver problemas con ecuaciones diferenciales, es muy útil expandir una función $f(x)$, originalmente definida sobre el intervalo $[0, L]$, en series de Fourier de período $2L$. Existen varias maneras de lograr este objetivo. En particular, se puede

a) definir una función $f^P(x)$, con período $2L$, tal que

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ f(-x), & -L \le x < 0. \end{cases}$$

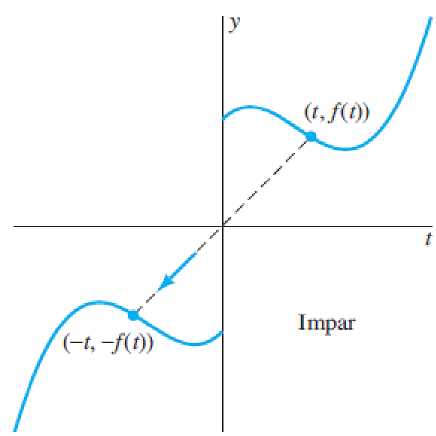
La función $f^P(x)$ es una extensión par de la función $f(x)$. La serie de Fourier de $f^P(x)$ será, entonces, una serie de cosenos que representa a $f(x)$ en $[0, L]$ únicamente.



b) definir una función $f^I(x)$, con período $2L$, tal que

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, x = L, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

La función $f^I(x)$ es una extensión impar de la función $f(x)$. La serie de Fourier de $f^I(x)$ será, entonces, una serie de senos que representa a $f(x)$ en $(0, L)$ únicamente.



► Series de Fourier de medio rango.

Sea $f(x)$ una función suave a trozos definida en un intervalo $[0,p]$. Supóngase que $f(x)$ es extendida al intervalo $[-p,0]$. Entonces, si

- ***la extensión es par***, la serie de Fourier asociada a $f^P(x)$ tendrá la forma

$$S^P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\frac{n\pi x}{p},$$

donde los coeficientes de Fourier de $f^P(x)$ quedan determinados por

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

- ***la extensión es impar*** , la serie de Fourier asociada a $f^I(x)$ tendrá la forma

$$S^I(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{n\pi x}{p},$$

donde los coeficientes de Fourier de $f^I(x)$ quedan determinados por

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

Cada serie converge

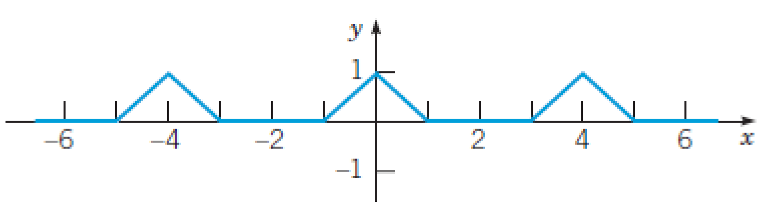
- a $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ para todo $x\in(0,p)$,
- a $\dfrac{f^P(x^+)+f^P(x^-)}{2}$ para todo $x\in(-p,0)$ si la extensión fue par,
- a $\dfrac{f^I(x^+)+f^I(x^-)}{2}$ para todo $x\in(-p,0)$ si la extensión fue impar.

De esta manera, toda función $f(x)$, suave a trozos, definida en un intervalo $[0,p]$ puede ser expresada como una serie de cosenos o como una serie de senos.

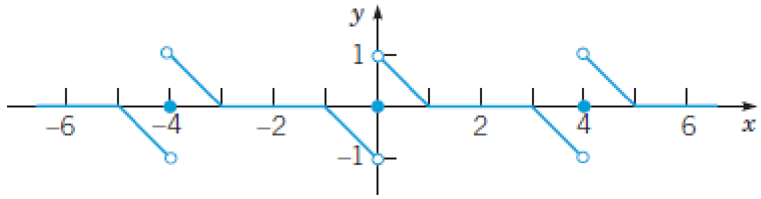
Ejemplo 5.

Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0<x\leq 1, \\ 0, & 1<x\leq 2. \end{cases}$ Se puede representar a $f(x)$ como una serie de cosenos o como una serie de senos. Graficar la función suma correspondientes a cada una de estas series en el intervalo $-6\leq x\leq 6$.

En este caso, $p=2$, por lo tanto la serie de cosenos de $f(x)$ converge a la extensión periódica par de $f(x)$ con período $2p=4$.



Similarmente, la serie de senos de $f(x)$ converge a la extensión periódica impar de $f(x)$ con período $2p = 4$.



▶ Observación. En muchos casos de interés no son relevantes los valores de $f(x)$ fuera del intervalo original $(0, L)$; por esto, la elección entre una serie coseno o por una serie seno se determina por la forma en que se prefiera representar $f(x)$ en el intervalo $(0, L)$.

⋆ ⋆ ⋆

7. En cada caso, se proporciona una función $f(x)$ definida en un intervalo $0 < x < L$. Encuentre las series coseno y seno de Fourier de $f(x)$ y trace las gráficas de las dos extensiones de $f(x)$ a las cuales estas series convergen.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \\ 0, & 2 \le x < 3. \end{cases}$

Solución:

$$f^P(x) = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{3} - \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi x}{3} + \frac{1}{8}\cos\frac{8\pi x}{3} - \frac{1}{10}\cos\frac{10\pi x}{3} + \cdots\Big),$$
$$f^I(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\sin\frac{\pi x}{3} - \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{3} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{3} - \frac{2}{9}\sin\frac{9\pi x}{3} + \cdots\Big).$$

(b) $f(x) = L - x$ en $(0, L)$.

Solución:

$$f^P(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{k\ge 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}, \qquad f^I(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k}\cdot\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

(c) $f(x) = x(\pi - x)$ en $(0, \pi)$.

Solución:

$$f^P(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k\ge 1}\frac{\cos 2kx}{k^2};, \qquad f^I(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k\ge 0}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}.$$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi. \end{cases}$

Solución:

$$f^P(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi}\Big(-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{6}\cos\frac{4x}{2} + \frac{1}{21}\cos\frac{5x}{2} + \frac{1}{45}\cos\frac{7x}{2} + \cdots\Big),$$
$$f^I(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{3x}{2} - \frac{1}{21}\sin\frac{5x}{2} + \frac{1}{45}\sin\frac{7x}{2} - \frac{1}{77}\sin\frac{9x}{2} + \cdots\Big).$$

8. $\star$

(a) Sea $\widehat{f}(x)$ la extensión periódica a $\mathbb{R}$ de la extensión impar de la función definida por

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Encontrar la serie de Fourier asociada a $\widehat{f}(x)$. Graficar a $f(x)$ y a la función límite de la serie hallada.

(b) Sea $\widehat{g}(x)$ la extensión periódica a $\mathbb{R}$ de la extensión impar de la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi - 1)}{2} & 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{x - \pi}{2} & 1 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Encontrar la serie de Fourier asociada a $\widehat{g}(x)$. Graficar a $g(x)$ y a la función límite de la serie hallada.

(c) Usando los resultados anteriores, deducir la igualdad

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{\sin n}{n}\Big)^2 = \frac{\pi - 1}{2}.$$

$\star \quad \star \quad \star$

Teorema (integración término a término de las series de Fourier). Sea $f(x)$ una función continua a trozos en $[-p, p]$. La serie de Fourier asociada a $f(x)$ puede integrarse término a término, desde a hasta x, y la serie resultante converge uniformemente a $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$; siempre que a y x estén en $(-p, p)$.

Teorema (convergencia uniforme de las series de Fourier). Sea $f(x)$ una función continua en $[-p, p]$, cuya derivada existe y es continua por tramos en $(-p, p)$. Si $f(x)$ asume valores iguales en los extremos del intervalo; es decir, $f(-p) = f(p)$, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ converge uniformemente en el intervalo $[-p, p]$.

Teorema (derivación término a término de las series de Fourier). Sea $f(x)$ una función continua en $[-p, p]$, cuya derivada existe y es continua por tramos en $(-p, p)$. Si $f(x)$ asume valores iguales en los extremos del intervalo; es decir, $f(-p) = f(p)$, la serie de Fourier asociada a $f(x)$ puede derivarse término a término y la serie resultante converge a $f'(x)$.

► Observación. A partir de los teoremas antes enunciados, se deduce que una función continua y derivable a trozos está determinada de manera única por su serie de Fourier.

Ejemplo 6.

En el Ejemplo 4, se encontró la serie de Fourier asociada a la función $f(x) = x$, $-L < x < L$, y $f(x+2L) = f(x)$. Haciendo $L = 1$, podemos escribir

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x), \quad -1 < x < 1.$$

Esperamos que la integración término a término de esta serie converja a la integral de x. Entonces, si $x \in (-1, 1)$,

$$\int_0^x t\,dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^x \sin(n\pi t)\,dt = 2\pi \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Big(-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi t)\Big)\Big|_0^x.$$

De donde se obtiene

$$\frac{x^2}{2} = \underbrace{\frac{2}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{12}} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos(n\pi x), \quad -1 < x < 1.$$

que es precisamente la serie de Fourier asociada a la función $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $-1 < x < 1$ (ver ejercicio 5c)).

⋆ ⋆ ⋆

9. ⋆ Suponga que la serie de Fourier asociada a $f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $(-p, p)$. Probar la ***identidad de Parseval***

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}(f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k\geq 1}(a_k^2 + b_k^2).$$

10. ⋆ Considere la función $2-$periódica definida por $f(x) = |x|$ en $(-1, 1)$.

    (a) Hallar la serie de Fourier asociada a $f(x)$.

    (b) Usar el criterio de Weierstrass para probar que la serie converge uniformemente a $f(x)$ para todo x.

    (c) Comprobar que la serie que resulta de derivar término a término la serie hallada en el inciso (a) converge a $f'(x)$.

11. Integral de Fourier

▶ Definición. Una función $f(x)$ es (absolutamente) integrable en $\mathbb{R}$ si $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx}_{\|f(x)\|_1} < \infty$.

▶ Definición. Sea $f(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}$. Se denomina ***transformada de Fourier de*** $f(x)$ a la función compleja

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

La transformada de Fourier se puede interpretar como un operador, es decir, una aplicación que transforma funciones en funciones. Desde este punto de vista, una primera propiedad importantísima de este operador es su linealidad.

Proposición. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $\mathbb{R}$ y a, b constantes en $\mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)].$$

▶ Observación. La transformación de Fourier se basa en el núcleo $e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x$. Debido a que las funciones trigonométricas son las que se utilizan para describir fenómenos ondulatorios, las transformadas de Fourier aparecen con frecuencia en los estudios de ondas y en el análisis de señales. La salida de un interferómetro estelar, por ejemplo, implica una transformación de Fourier del brillo a través de un disco estelar. La distribución de electrones en un átomo se puede obtener de una transformada de Fourier de la amplitud de los rayos X dispersados en una colisión. En mecánica cuántica, la naturaleza ondulatoria de la materia y la descripción de la materia en términos de ondas se apoyan en las propiedades de la transformada de Fourier.

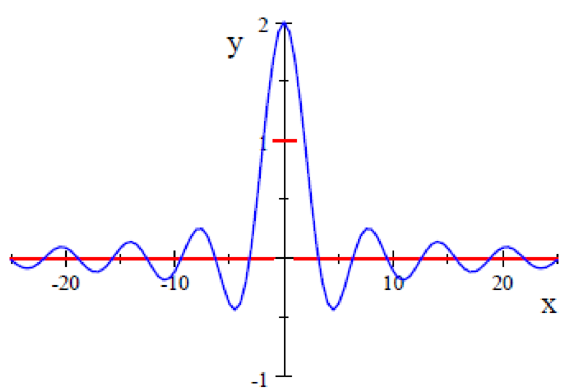
Ejemplo 1.

a) Encontrar la transformada de Fourier de la función ***impulso rectangular*** definido por $f_a(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$.

Su transformada de Fourier se puede calcular por integración directa. En efecto,

$$\mathcal{F}[f_a(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-i\omega)}\,e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a} = \frac{a}{\pi}\,\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

En la siguiente figura, se muestran las gráficas de la función $f_1(x)$ (en rojo) y de $2\pi\mathcal{F}[f_1(x)]$ (en azul).

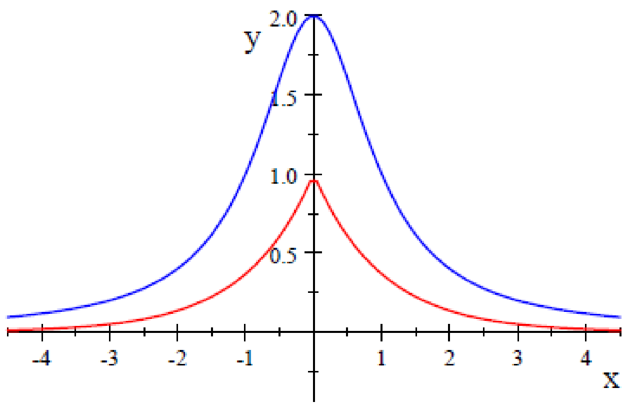


b) Encontrar la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$.

Por definición,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}\,dx\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}\,dx\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi(1-i\omega)} + \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}.
\end{aligned}$$

En la siguiente figura, se muestran las gráficas de la función $f(x)$ (en rojo) y de $2\pi\mathcal{F}[f(x)]$ (en azul).

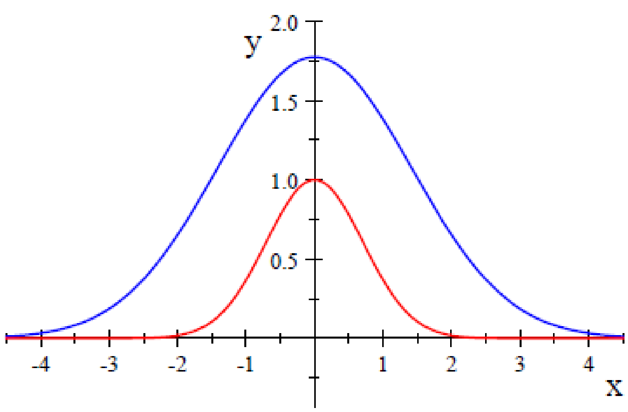


c) Encontrar la transformada de Fourier de la función ***campana de Gauss*** $f(x) = e^{-x^2}$.

Por definición,

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx = \frac{e^{-\omega^2/4}}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\omega/2)^2}\,dx}_{\sqrt{\pi}} = \frac{e^{-\omega^2/4}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Se concluye, entonces, que la tansformada de Fourier de una función de Gauss es otra función de Gauss. En la siguiente figura, se muestran las gráficas de la función $f(x)$ (en rojo) y de $2\pi\mathcal{F}[f(x)]$ (en azul).



$\star \quad \star \quad \star$

11. Sea a un número real positivo. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 - a|x|, & |x| \leq 1/a \\ 0, & |x| > 1/a \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \sin ax, & |x| \leq \pi/a \\ 0, & |x| > 1/a \end{cases}$

   (c) $f(x) = (u(x + 1/2) - u(x - 1/2)) \cos ax$.

12. Sea $f(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}$ con transformada de Fourier $F(\omega)$. Probar las siguientes ***propiedades algebraicas*** de la transformación de Fourier.

   (a) Conjugación: $\mathcal{F}\Big[\overline{f(x)}\Big] = \overline{F}(-\omega)$,

   (b) Dilatación: $\mathcal{F}[f(ax)] = \dfrac{1}{|a|} F\Big(\dfrac{\omega}{a}\Big), \quad a \in \mathbb{R}$,

   (c) Traslación: $\mathcal{F}[f(x - x_0)] = F(\omega)e^{-i\omega x_0}$,

   (d) Modulación: $\mathcal{F}[f(x)e^{i\omega_0 x}] = F(\omega - \omega_0)$,

   (e) Dualidad: $2\pi\mathcal{F}[F(-x)] = f(\omega)$.

   Prueba. Como la variable de integración es muda, se puede cambiar $x \to \mu$ en la definición de la transformada de Fourier de $f(x)$. Haciendo esto,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-i\omega\mu}\,d\mu$$

   Cambiando el parámetro de la transformación $\omega \to x$, se tiene

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{-ix\mu}\,d\mu.$$

   De nuevo, como la variable de integración es muda, se puede cambiar $\mu \to \omega$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-ix\omega}\,d\omega \qquad \to \qquad 2\pi F(-x) = \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} f(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega;$$

   de donde se deduce que $f(\omega)$ es la transformada de Fourier de $2\pi F(-x)$ (ver Teorema de inversión).

$\star \quad \star \quad \star$

Ejemplo 2.

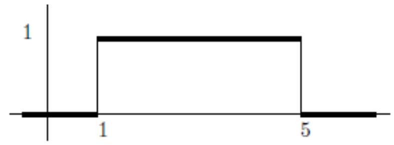
a) Determinar la transformada de Fourier de la función $g(x) = e^{-b|x|}$; $b > 0$.

Usando el resultado del Ejemplo 1b) y la propiedad de dilatación, tendremos

$$\mathcal{F}[g(x)] = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\pi\Big(1 + (\frac{\omega}{b})^2\Big)} = \frac{b}{\pi(\omega^2 + b^2)}.$$

b) Determinar la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & 1 < x < 5, \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$



Sea $f_2(x)$ la función impulso rectangular del Ejemplo 1a) con $a = 2$. Claramente, $g(x) = f_2(x-3)$. Usando la propiedad de traslación, tendremos

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f_2(x-3)] = e^{-3i\omega}\mathcal{F}[f_2(x)] = e^{-3i\omega}\frac{\sin 2\omega}{\pi\omega} = i\,\frac{e^{-5i\omega} - e^{-i\omega}}{2\pi\omega}.$$

c) Determinar la transformada de Fourier de la función $g(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$.

Sea $f_\pi(x)$ la función impulso rectangular del Ejemplo 1a) con $a = \pi$. Entonces, $F(\omega) = \dfrac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}$. Usando la propiedad de linealidad y de modulación, tendremos

$$\mathcal{F}[f_\pi(x)\cos x] = \mathcal{F}\Big[f_\pi(x)\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big] = \frac{\mathcal{F}[f_\pi(x)e^{ix}] + \mathcal{F}[f_\pi(x)e^{-ix}]}{2} = \frac{F(\omega-1) + F(\omega+1)}{2} = \frac{\sin(\omega-1)}{2\pi(\omega-1)} + \frac{\sin(\omega+1)}{2\pi(\omega+1)}.$$

d) Determinar la transformada de Fourier de la función $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Sea $f_1(x)$ la función impulso rectangular del Ejemplo 1a) con $a = 1$. Entonces, $F(\omega) = \dfrac{\sin\omega}{\pi\omega}$. Usando la propiedad de dualidad, tendremos

$$2\pi\,\mathcal{F}[F(-x)] = 2\,\mathcal{F}\Big[\frac{\sin x}{x}\Big] = \begin{cases} 1 & |\omega| \le 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases} = f(\omega) \qquad \rightarrow \qquad G(\omega) = \mathcal{F}\Big[\frac{\sin x}{x}\Big] = \frac{1}{2}\begin{cases} 1 & |\omega| \le 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

⋆ ⋆ ⋆

13. Comprobar que $f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$. Luego, calcular la transformada de Fourier de $f(x)$ usando la definición.
    (a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$,
    (b) $f(x) = e^{-ax}u(x)$; $a > 0$.

14. Comprobar que $f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$. Luego, calcular la transformada de Fourier de $f(x)$ usando propiedades de la transformada.
    (a) $f(x) = e^{x-x^2}$,
    (b) $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$; $\quad a > 0 \qquad$ (función Lorentziana).

15. Sea $f(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}$ con transformada de Fourier $F(\omega)$. Determinar $\mathcal{F}[f(x)\sin(\omega_0 x)]$ en función de $F(\omega)$.

16. Considere las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 + x, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ x - 2, & 2 < x < 3 \\ x - 3, & 3 < x < 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}.$$

(a) Cómo se relacionan $f_1(x)$ y $f_2(x)$?

(b) Hallar $\mathcal{F}[f_1(x)]$ y $\mathcal{F}[f_2(x)]$ aplicando la definición.

(c) Hallar $\mathcal{F}[f_2(x)]$ a partir de $\mathcal{F}[f_1(x)]$.

(d) Hallar $\mathcal{F}[f_1(x)+f_2(x)]$.

17. Considere la función $f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$. Encontar:

(a) $\mathcal{F}[f(2x)]$,

(b) $\mathcal{F}[f(x-2)]$,

(c) $\mathcal{F}\Big[\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\Big]$.

⋆ ⋆ ⋆

▶ Propiedades analíticas de la transformación de Fourier.

En lo que sigue, se asume que $f(x)$ es una función integrable en $\mathbb{R}$ con transformada de Fourier $F(\omega)$.

1. $F(\omega)$ es uniformemente continua y $|F(\omega)|\leq \dfrac{1}{2\pi}\,\|f(x)\|_1$.

Prueba. Se ve inmediatamente que $F(\omega)$ está acotada; en efecto,

$$|F(\omega)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right|\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx.$$

Para probar la continuidad, se analizará el límite cuando $h\to 0$ de la siguiente expresión

$$|F(\omega+h)-F(\omega)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+h)x}\,dx-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right|\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-ihx}-1|\,dx.$$

Para ello, tengamos en cuenta que

$|e^{-ihx}-1|\to 0$ cuando $h\to 0$,

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-ihx}-1|\,dx\leq \frac{1}{\pi}\|f(x)\|_1.$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0}|F(\omega+h)-F(\omega)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\lim_{h\to 0}|e^{-ihx}-1|\,dx=0$$

Luego, $F(\omega)$ es continua. La uniformidad se deduce porque la cota no depende de ω.

2. Si $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ y $f'(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{F}[f'(x)]=i\omega F(\omega)$.

Prueba. Integrando por partes,

$$\mathcal{F}[f'(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx=i\omega F(\omega).$$

Este resultado se puede aplicar sucesivamente si $f(x)$ tiene más derivadas continuas que tiendan a cero cuando $x\to\pm\infty$. En este caso,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(i\omega)^n F(\omega).$$

3. Si $xf(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$, entonces $F(\omega)$ es derivable y $F'(\omega) = \mathcal{F}[-ixf(x)]$.

Prueba. Se puede derivar bajo el signo integral usando el Teorema I (ver Anexo 3); la integrabilidad de $xf(x)$ es suficiente para ello.

4. $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0$.

Prueba. Como $e^{i\pi} = -1$, podemos escribir

$$F(\omega) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x-\frac{\pi}{\omega})}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta+\frac{\pi}{\omega})e^{-i\omega\zeta}\,d\zeta}_{x\to\zeta+\frac{\pi}{\omega}}.$$

Entonces,

$$2F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)e^{-i\omega\zeta})\,d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta+\frac{\pi}{\omega})e^{-i\omega\zeta}\,d\zeta\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(\zeta) - f(\zeta+\frac{\pi}{\omega})\Big)e^{-i\omega\zeta}\,d\zeta$$

que tiende a cero cuando ω tiende a ∞ por la continuidad de la integral.

⋆ ⋆ ⋆

18. Considere la función $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, con $\alpha > 0$. Hallar $\mathcal{F}[f'(x)]$. Podría calcularse a partir de $\mathcal{F}[f(x)]$?

19. Determinar la transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

20. Supóngase que $f(x)$ es una función integrable en $\mathbb{R}$. Probar que, si $f(x)$ es par, la transformada de Fourier de $f(x)$ será una función real y par de ω; en cambio, si $f(x)$ es impar, la transformada de Fourier de $f(x)$ será una función imaginaria pura e impar de ω.

⋆ ⋆ ⋆

Junto con la transformada de Fourier, se introduce la ***antitransformada de Fourier***. Se trata de otro operador, inverso de la transformación de Fourier en el siguiente sentido.

Teorema de inversión (convergencia puntual). Sea $f(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}$ con transformada de Fourier $F(\omega)$. Si $f(x)$ tiene derivada seccionalmente continua en cada intervalo finito del eje real, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \underbrace{\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega}_{\text{Integral de Fourier}} = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

Por tratarse de una fórmula integral, la transformación inversa de Fourier es una operación lineal.

El teorema de inversión tiene una consecuencia importante: permite probar que la transformada de Fourier es (bajo ciertas condiciones) un operador inyectivo.

Proposición. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables en $\mathbb{R}$, con transformadas de Fourier $F(\omega)$ y $G(\omega)$, respectivamente. Supongamos que ambas funciones son continuas con derivadas seccionalmente continuas. Si se cumple que $F(\omega) = G(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.

Usar el resultado del Ejemplo 1a) para evaluar la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)\cos(\omega x)}{\omega}\,d\omega$.

A partir del Teorema de inversión,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \quad \to \quad \lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

Entonces, usando el resultado del Ejemplo 1a), tendremos

$$\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}e^{i\omega x}\,d\omega = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 1/2, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$$

De donde,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)\cos(\omega x)}{\omega}\,d\omega = \pi\begin{cases} 1, & |x|<a \\ 1/2, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)\sin(\omega x)}{\omega}\,d\omega = 0.$$

En particular, si $x=0$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,d\omega = 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,d\omega = \pi.$$

⋆ ⋆ ⋆

21. Hallar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x|\le \pi/2 \\ 0, & |x|>\pi/2 \end{cases}$

   A qué valor converge la integral de Fourier en los puntos $x=\pm 0$ y $x=\pm\pi/2$?

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<-2 \\ x+1, & -2\le x<0 \\ x-1, & 0\le x<2 \\ 0, & x\ge 2 \end{cases}$

   A qué valor converge la integral de Fourier en los puntos $x=0$ y $x=\pm 2$?

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

   Aplicando el resultado anterior, mostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,dx = -\frac{3\pi}{16}$.

22. Usando el Teorema de inversión para la función $f(x)=e^{-x}u(x)$, probar que

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x+\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} 0 & x<0, \\ \dfrac{\pi}{2} & x=0, \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

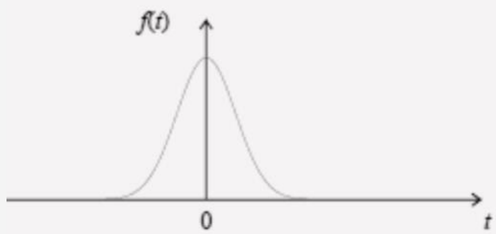
⋆ ⋆ ⋆

▶ Definición. Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones integrables en $\mathbb{R}$. El producto de convolución de f con g está definido por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx.$$

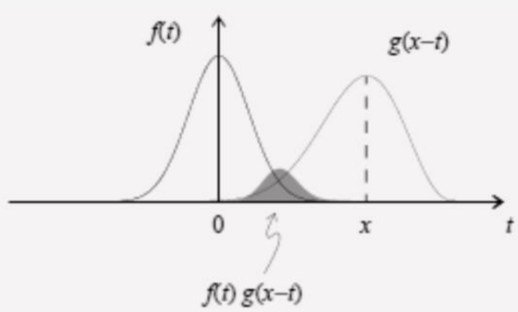
▶ Observación. El producto de convolución obedece las leyes conmutativa, asociativa y distributiva del álgebra.

▶ Interpretación. Consideremos las funciones $f(t)$ y $g(t)$ que se grafican a continuación:



El gráfico de $g(-t)$ es:

Luego,



Entonces $f(t)g(x-t)$ mide el grado de *solapamiento* entre $f(t)$ y $g(-t)$, luego de trasladar esta última función una distancia x. Si $f(t)$ y $g(t)$ decaen rápidamente cuando $t \to \pm\infty$, el *solapamiento* tenderá rápidamente a cero si $x \to \pm\infty$.

Teorema de convolución. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables en $\mathbb{R}$ con transformadas de Fourier $F(\omega)$ y $G(\omega)$, respectivamente. Entonces,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt \quad \to \quad \mathcal{F}[(f * g)(x)] = 2\pi F(\omega)G(\omega).$$

Ejemplo 4.

a) Determinar la transformada inversa de $G(\omega) = \mathcal{F}[g(x)] = \dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

De acuerdo al Ejemplo 1b),

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-|x|}] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \qquad \rightarrow \qquad \pi F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

Luego, aplicando el Teorema de convolución,

$$G(\omega) = \pi F(\omega)\cdot \pi F(\omega) = \frac{\pi}{2}\,\mathcal{F}[e^{-|x|} * e^{-|x|}] \quad \rightarrow \quad g(x) = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\tau|}e^{-|\tau|}\,d\tau.$$

Ahora, usando la definición

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\tau|}e^{-|\tau|}\,d\tau = \begin{cases} x<0, & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\tau}e^{\tau-x}\,d\tau + \int_{x}^{0} e^{\tau}e^{x-\tau}\,d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}e^{x-\tau}\,d\tau = (1-x)e^{x}, \\[2ex] x>0, & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}e^{\tau-x}\,d\tau + \int_{0}^{x} e^{-\tau}e^{\tau-x}\,d\tau + \int_{x}^{\infty} e^{-\tau}e^{x-\tau}\,d\tau = (1+x)e^{-x}. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g(x) = \frac{\pi}{2}(1+|x|)e^{-|x|}.$$

b) Resolver la ecuación integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)y(x-\tau)\,d\tau = e^{-x^2}$.

Supongamos que $y(x)$ es una función que admite transformada de Fourier. Haciendo $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(x)]$ y tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación integral, se obtiene

$$\mathcal{F}[y(x) * y(x)] = \mathcal{F}[e^{-x^2}] \quad \rightarrow \quad 2\pi(Y(\omega))^2 = \frac{e^{-\omega^2/4}}{2\sqrt{\pi}} \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = \frac{e^{-\omega^2/8}}{2\pi^{3/4}}.$$

Observemos que $Y(\omega)$ *se parece bastante* a la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-x^2}$. En efecto, comparando con el resultado del Ejemplo 1c), podemos escribir

$$\frac{e^{-\omega^2/8}}{2\pi^{3/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{-(\omega/\sqrt{2})^2/4}}{2\sqrt{\pi}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot F\Big(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\cdot\mathcal{F}[e^{-(\sqrt{2}x)^2}]}_{\text{Propiedad de dilatación}}.$$

Luego, por el Teorema de inversión, la solución buscada será

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{e^{-\omega^2/8}}{2\pi^{3/4}}\Big] = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}e^{-2x^2}.$$

c) Resolver la ecuación diferencial $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = xe^{-x}u(x)$.

Supongamos que $y(x)$ y sus derivadas son funciones que admiten transformada de Fourier. Tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial, se obtiene

$$\mathcal{F}[y''(x)] + 2\mathcal{F}[y'(x)] + \mathcal{F}[y(x)] = \mathcal{F}[xe^{-x}u(x)] = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)^2}.$$

Asumiremos que $y(x)$ y su derivada primera son funciones continuas y que ambas tienden a cero cuando $x \to \pm\infty$. Bajo estas hipótesis,

$$\mathcal{F}[y'(x)] = i\omega\mathcal{F}[y(x)]; \quad \mathcal{F}[y''(x)] = -\omega^2\mathcal{F}[y(x)].$$

Denotando $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(x)]$, tendremos

$$-\omega^2 Y(\omega) + 2i\omega Y(\omega) + Y(\omega) = (1+i\omega)^2 Y(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)^2} \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \cdot \frac{1}{2\pi(1+i\omega)^2}$$

Luego, usando el Teorema de convolución,

$$Y(\omega) = 2\pi \mathcal{F}[xe^{-x}u(x)] \cdot \mathcal{F}[xe^{-x}u(x)] = \mathcal{F}[xe^{-x}u(x) * xe^{-x}u(x)]$$

Finalmente, usando el Teorema de inversión,

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-\tau} u(\tau)(x-\tau)e^{-(x-\tau)}u(x-\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x} \displaystyle\int_0^x \tau(x-\tau)\, d\tau, & x > 0 \end{cases} = \frac{x^3}{6} e^{-x}\, u(x).$$

⋆ ⋆ ⋆

23. Calcular $(f * f)(x)$ siendo $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

24. Calcular la transformada de Fourier inversa de la función
    (a) $F(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2 + 4\omega + 13}$,
    (b) $F(\omega) = \dfrac{e^{-\omega^2}}{\omega^2 + 1}$,
    (c) $F(\omega) = \dfrac{\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}$, $a > 0$.

25. Utilizar la transformación de Fourier para hallar una solución de
    (a) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-\alpha x}u(x)$.
    (b) $y''(x) + 6y'(x) + 8y(x) = \text{sgn}\,(x)e^{-|x|}$.

    Qué características tiene la solución hallada?

⋆ ⋆ ⋆

Dada una función $f(x)$ en $(0, \infty)$ se define su transformada de Fourier en cosenos como

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x\, dx \qquad \leftarrow \qquad \text{función par de } \omega.$$

Se comprueba fácilmente que coincide con la transformada de Fourier usual de la extensión par de $f(x)$ a todo $\mathbb{R}$. En este caso,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 2 \int_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega x\, d\omega \qquad x \geq 0.$$

Análogamente, se define la transformada de Fourier en senos como

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x\, dx \qquad \leftarrow \qquad \text{función impar de } \omega;$$

que coincide con la transformada de Fourier usual de la extensión impar de $f(x)$ a todo $\mathbb{R}$ (multiplicada por i). Además,

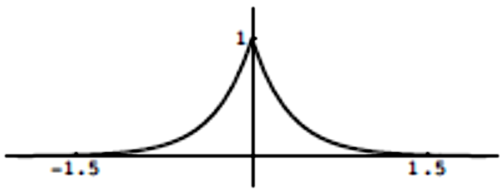
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 2 \int_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega x\, d\omega \qquad x \geq 0.$$

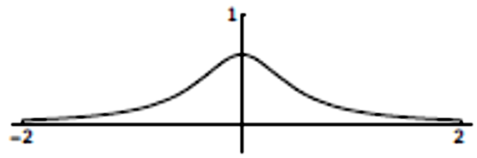
Ejemplo 5.

Encontrar la transformada de Fourier en cosenos de la función $f(x) = e^{-ax}$; $a > 0$, $x \geq 0$.

Integrando por partes, se tiene

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos\omega x\, dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$





$f^P(x)$ $\qquad$ $F_C(\omega)$

En este caso, como $f(x)$ es continua en $[0, \infty)$, la aplicación del teorema de inversión conduce a

$$f(x) = 2\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad \rightarrow \quad e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\, d\omega, \quad x \geq 0.$$

En particular, si $x = 1$,

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega}{a^2+\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2a}e^{-a}.$$

⋆ ⋆ ⋆

26. Resolver la ecuación integral

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx = \begin{cases} 1, & 0 < \omega < \pi \\ 0, & \omega > \pi \end{cases}$

Solución: $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(1-\cos\pi x)}{x}$, $x > 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx = \begin{cases} 1-\omega, & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$

Solución: $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}$, $x > 0$.

ANEXO 1
Tabla de transformadas de Fourier - funciones clásicas.

$f(x)$	$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$
1. $\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\dfrac{\sin a\omega}{\pi\omega}$
2. $\begin{cases} 1 - \lvert x\rvert/a & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\dfrac{(\sin a\omega/2)^2}{a\pi^2\omega^2}$
3. $e^{-a\lvert x\rvert},\ a > 0$	$\dfrac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}$
4. $e^{-ax^2},\ a > 0$	$\dfrac{e^{-\omega^2/4a}}{2\sqrt{\pi a}}$
5. $e^{-ax}u(x),\ a > 0$	$\dfrac{1}{2\pi(a+i\omega)}$
6. $xe^{-ax}u(x),\ a > 0$	$\dfrac{1}{2\pi\,(a+i\omega)^2}$
7. $x^n e^{-ax}u(x),\ a > 0$	$\dfrac{n!}{2\pi\,(a+i\omega)^{n+1}}$
8. $sgn(x)e^{-a\lvert x\rvert},\ a > 0$	$-\dfrac{i\omega}{\pi(a^2+\omega^2)}$
9. $e^{-ax}\sin bx\, u(x),\quad a > 0$	$\dfrac{b}{2\pi\,(a+i\omega)^2+b^2}$
10. $e^{-ax}\cos bx\, u(x),\quad a > 0$	$\dfrac{a+i\omega}{2\pi\,(a+i\omega)^2+b^2}$
11. $\dfrac{1}{x^2+a^2}\ ,\ a > 0$	$\dfrac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{2a}$

ANEXO 2
Relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

► La transformada de Laplace está fuertemente relacionada con la transformada de Fourier. Para analizar esta relación, consideremos la transformada de Laplace de una función $f(t)$,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \quad \operatorname{Re} s > \alpha, \tag{1}$$

donde α es un número real que depende de $f(t)$ y establece una restricción sobre $\operatorname{Re} s$ necesaria para que la integral converja. Si escribimos $s = s_1 + is_2$; con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, la integral (1) puede escribirse como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s_1+is_2)t} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-s_1 t} f(t) e^{-is_2 t}\, dt \quad s_1 > \alpha.$$

Entonces, si se define

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t)e^{-s_1 t} & t \geq 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}[f(t)] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is_2 t} g(t)\, dt}_{F(s)}.$$

La integral $F(s)$ tiene la forma de la transformada de Fourier de $g(t)$. Luego, si $g(t)$ satisface las condiciones suficientes para que exista la integral de Fourier asociada, se tiene que, para $s = \gamma + is_2$ y $\gamma > \alpha$,

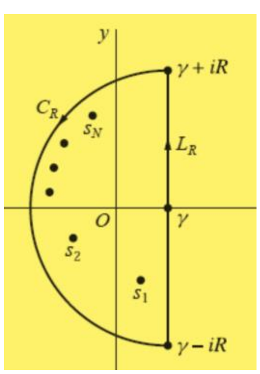
$$g(t) = f(t)e^{-\gamma t} = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(c + is_2) e^{is_2 t}\, ds_2, \qquad t > 0. \tag{2}$$

Finalmente,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} F(s) e^{st}\, ds, \quad t > 0 \qquad \leftarrow \quad \text{Integral de inversión compleja.}$$

La integral de Inversión compleja se puede calcular utilizando la Teoría de los residuos.

Sean s_n $(n = 1, 2, \cdots, N)$ las singularidades de $F(s)$.



Sean

$$R_0 = \max_n |s_n|,$$

$$R > R_0 + \gamma.$$

Consideremos el semi-círculo

$$s = \gamma + Re^{i\theta}, \quad \tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{3\pi}{2}.$$

Entonces,

$$|s_n - \gamma| < |s_n| + \gamma \leq R_0 + \gamma < R;$$

es decir, todas las singularidades de $F(s)$ están en el interior de la curva $L_R \cup C_R$.

Aplicando la Teoría de los residuos,

$$\int_{L_R} e^{st} F(s)\, ds = 2\pi i \sum_{1\leq n\leq N} Res(e^{st}F(s), s_n) - \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds.$$

Luego, bastará con probar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds = 0.$$

Obviamente, esto no será cierto para cualquier $F(s)$. Haremos la siguiente hipótesis: ***para todos los puntos*** s ***sobre*** C_R***, existe una constante positiva*** M_R ***tal que*** $|F(s)| < M_R$ ***y, además,*** $M_R \to 0$ ***a medida que*** $R \to \infty$***.*** En estas condiciones, usando la representación paramétrica de la curva C_R y el Lema de Jordan,

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds \right| \le \overbrace{\sup_{s\in C_R} |F(s)| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{(\gamma+R\cos\theta)t} R\, d\theta = \sup_{s\in C_R} |F(s)| R e^{\gamma t} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\phi}\, d\phi}_{< \frac{\pi}{Rt}}}^{\phi = \theta - \frac{\pi}{2}} < \frac{\pi e^{\gamma t}}{t} M_R.$$

⋆ ⋆ ⋆

27. ⋆ Calcular la transformación inversa de Laplace de las siguientes funciones utilizando el Teorema de inversión compleja:

    (a) $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2-4)(s+2)}$

    (b) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$

    (c) $F(s) = \dfrac{se^{-3s}}{(s^2+4)^2}$

    (d) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+2s-8}$

ANEXO 3
Continuidad y derivabilidad de integrales paramétricas

► ***Teorema I***. Sea $f(x,t)$ una función definida en $I\times(a,b)$ (donde I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$). Supongamos que, para cada t, la función $f(\cdot,t)$ es integrable en I y definimos

$$F(t)=\int_I f(x,t)\,dx.$$

- Si la función $t\mapsto f(x,t)$ es continua en t_0 para cada $x\in I$ y existe g_1, función integrable en I, tal que $|f(x,t)|\leq g_1(x)$ en casi todo punto de I para t en un entorno de t_0, entonces F es continua en t_0.
- Si la función $t\mapsto f(x,t)$ es derivable en un entorno de t_0 y existe g_2, función integrable en I, tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leq g_2(x)$$

en casi todo punto de I para t en un entorno de t_0, entonces F es derivable en t_0 y

$$F'(t_0)=\int_I \frac{\partial}{\partial t}f(x,t_0)\,dx.$$

Cuando decimos en casi *todo punto* estamos aceptando que la hipótesis no se cumpla en un conjunto de puntos aislados; hay que entender que ese conjunto es independiente de t.

12. Problema de Sturm-Liouville

▶ Definición. Un ***problema con valores en la frontera (PVF)*** para una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la siguiente forma:

encontrar $y(x)$ *solución de* $a_2(x)\,y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = f(x)$ *para* $x \in (a,b)$*;*

sujeto a la condiciones de frontera (o de contorno)

$$\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \tag{1}$$

Aquí, α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 y γ_2 son constantes. Nótese que estas condiciones de contorno están ***separadas***; es decir, cada condición involucra los valores de $y(x)$ e $y'(x)$ pero en extremos distintos del intervalo $[a,b]$. Se asume, además, que los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en (a,b) y que $a_0(x) \neq 0$ en (a,b).

▶ Definición. Las condiciones de borde (1) se dicen homogéneas si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

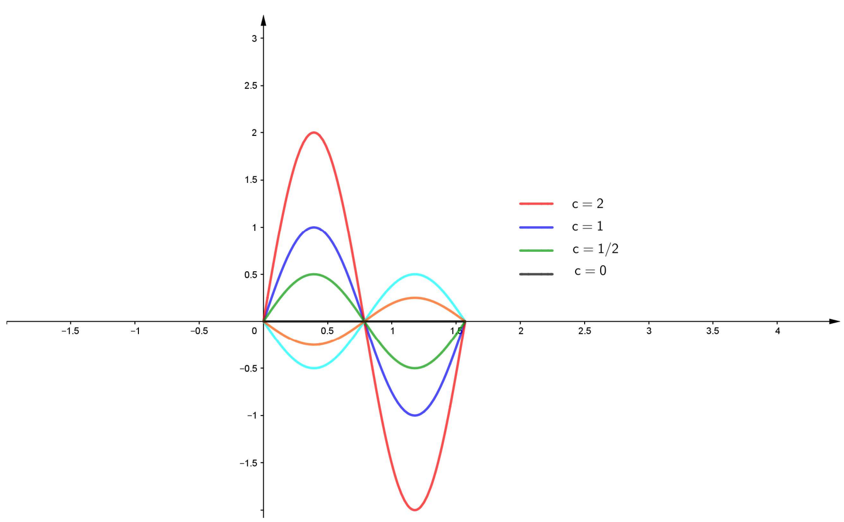
Principio de superposición Cualquier combinación lineal de soluciones de un PVF con condiciones de borde homogéneas es también una solución del mismo PVF que satisface (obviamente) condiciones de borde homogéneas.

A diferencia de los problemas de valores iniciales, un problema con valores en la frontera puede tener varias soluciones, una solución única o no tener ninguna solución.

Ejemplo 1.

La ecuación diferencial $y''(x)+16y(x) = 0$ tiene como solución general a $y(x) = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$, con dominio de validez $(-\infty, \infty)$. Se desea determinar la solución que satisface las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lllll} y(0) = 0 & \rightarrow & c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 & \rightarrow & c_1 = 0 \\ y(\pi/2) = 0 & \rightarrow & c_2 \sin 2\pi = 0 & \rightarrow & c_2 \ \text{arbitrario} \end{array} \right\} \rightarrow \quad y(x) = c_2 \sin 4x;\ x \in [0, \pi/2]$$



(b) $\left\{ \begin{array}{lllll} y(0)=0 & \to & c_1\cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 & \to & c_1 = 0 \\ y'(\pi/2)=0 & \to & 4c_2\cos 2\pi = 0 & \to & c_2 = 0 \end{array} \right\} \to \; y(x)=0;\; x\in[0,\pi/2]$

(c) $\left\{ \begin{array}{lllll} y(0)=0 & \to & c_1\cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 & \to & c_1 = 0 \\ y(\pi/2)=1 & \to & c_2\sin 2\pi = 1 & \to & c_2 \text{ no puede determinarse} \end{array} \right\} \to$ el PVC no tiene solución.

⋆ ⋆ ⋆

1. Comprobar que la familia de dos parámetros $y(x) = c_1\cosh x + c_2 \sinh x$ es una solución general de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ en $(-\infty, \infty)$. Usar esta familia para encontrar una solución que satisfaga las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\ln 2) = 1$.

2. Comprobar que la familia de dos parámetros $y(x) = c_1e^x\cos x + c_2e^x \sin x$ es una solución general de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$ en $(-\infty, \infty)$. Determinar si es posible encontrar un miembro de esta familia que satisfaga las siguientes condiciones de contorno:
   (a) $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
   (b) $y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$
   (c) $y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
   (d) $y(0) - y'(0) = 1, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0$

3. Determinar las soluciones, si es que existen, de los siguientes PVFs.
   (a) $y'' + 2y' + 26y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{-\pi}$
   (b) $x^2y'' + xy' + y = 0, \qquad y'(1) = 0, \quad y(e^\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$
   (c) $y'' - y = 0, \qquad y(0) = 3, \quad y'(1) = 2e$
   (d) $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad |y(0)| < \infty, \qquad y(1) = 2$

⋆ ⋆ ⋆

Otras condiciones de borde posibles para un PVF, planteado en el intervalo (a, b), están dadas por:

$$y(a) = y(b) \quad \text{o} \quad y'(a) = y'(b). \tag{2}$$

En la práctica, es usual que estas dos condiciones de frontera se presenten juntas. Aparecen naturalmente cuando la variable x es, en realidad, la componente angular en un sistema de coordenadas polares (ver Guía 11). Las ecuaciones (2) se denominan ***condiciones de frontera periódicas***. Observar que las condiciones periódicas están ***acopladas***, no separadas.

⋆ ⋆ ⋆

4. Asumir que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, definidas en el intervalo $[a, b]$, satisfacen condiciones periódicas de borde
$$y_i(a) = y_i(b), \quad i = 1, 2.$$
   Probar que la combinación lineal
$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$
   también satisface la misma condición de borde, independientemente de los valores de C_1 y C_2.

5. Asumir que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, definidas en el intervalo $[a,b]$, satisfacen condiciones periódicas de borde
$$y_i'(a) = y_i'(b), \quad i = 1, 2.$$
Probar que la combinación lineal
$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
también satisface la misma condición de borde, independientemente de los valores de C_1 y C_2.

$\star \quad \star \quad \star$

Se denota por $\mathcal{C}^k([a,b])$ el conjunto de las funciones definidas en $[a,b]$ con k-derivadas continuas en (a,b).

Sea $\mathbf{D} : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ el operador diferencial definido por
$$\mathbf{D}[y(x)] := a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x); \quad a_0(x), a_1(x), a_2(x) \text{ elementos de } \mathcal{C}^0([a,b]).$$

▶ Definición. el problema de autovalores asociado al operador $\mathbf{D}$ se define de la siguiente manera:

encontrar un número λ y una función $y(x) \neq 0$ tal que $\mathbf{D}[y(x)] = \lambda\, y(x)$, para $x \in (a,b)$, y tal que verifique las siguientes condiciones de contorno $\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0. \end{cases}$

Es obvio que, si $y(x)$ es una autofunción correspondiente al autovalor λ, $A\, y(x)$, con A una constante no nula, también será autofunción correspondiente a λ; por consiguiente, las autofunciones quedarán definidas a menos de una constante multiplicativa.

Ejemplo 2.

Resolver el problema de autovalores $\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$

Como la ED es lineal y sus coeficientes son constantes, las soluciones tendrán dominio de validez en $(-\infty, \infty)$. Los valores admisibles del parámetro λ (es decir, aquellos valores de λ que se correspondan con soluciones no triviales de la ED), serán los autovalores del operador diferencial $\mathbf{D} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$. Dado que las soluciones de la ED dependerán del signo de λ, se considerará cada posibilidad por separado.

Sea $\lambda < 0$; se puede escribir $\lambda = -\alpha^2$ con $\alpha > 0$. La solución general será entonces $y(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$. Al imponer las condiciones de contorno, se tiene
$$\begin{cases} y(0) = 0 & \to \quad c_1 \cosh 0 + c_2 \sinh 0 = 0 \quad \to \quad c_1 = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 & \to \quad c_2(\sinh \alpha l + \alpha \cosh \alpha l) = 0 \quad \to \quad \alpha = 0 \quad \text{pues } l \neq 0 \end{cases}$$

Existe una única solución de este problema y es $y(x) = 0$ en $(0,l)$; pero la solución trivial no es admisible como autofunción. Luego, tendrá que ser $\lambda \geq 0$.

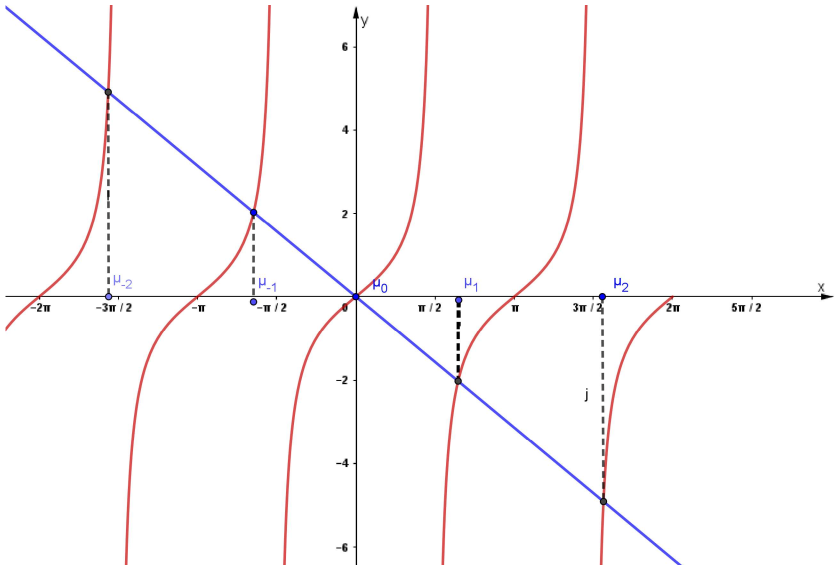
Supongamos que $\lambda = 0$. En este caso, la solución general será $y(x) = c_1 x + c_2$. Imponiendo las condiciones de contorno, se tiene
$$\begin{cases} y(0) = 0 & \to \quad c_1 0 + c_2 = 0 \quad \to \quad c_2 = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 & \to \quad c_1 l + c_1 = 0 \quad \to \quad c_1 = 0 \end{cases}$$

Entonces, $y(x) = 0$ en $(0,l)$. Luego, $\lambda \neq 0$ pues $y(x) \equiv 0$ no es admisible como autofunción.

Sea entonces $\lambda > 0$; se puede escribir $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha > 0$. La solución general será $y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$. La imposición de las condiciones de contorno conduce a

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \rightarrow \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 & \rightarrow \quad c_2(\sin \alpha l + \alpha \cos \alpha l) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\tan \alpha l \quad \text{pues } c_2 \neq 0 \end{cases}$$

Aunque es imposible encontrar una expresión explícita para α, se puede obtener una idea de los valores que toma α analizando los puntos donde se intersecan las gráficas de las curvas $y = -\mu$ e $y = \tan \mu$; con $\mu = \alpha l$.



Se observa que existen infinitos puntos de intersección y que estos puntos se ubican simétricamente con respecto al origen. Ordenando los valores de μ en sentido creciente,

$$\cdots \mu_{-2},\ \mu_{-1},\ \mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cdots;$$

concluimos que el problema diferencial tiene infinitos autovalores de la forma

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{\mu_n^2}{l^2}; \ \ n = 1, 2, \cdots$$

Las autofunciones correspondientes serán

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{\alpha_n x}{l}\right); \ \ n = 1, 2, \cdots$$

⋆ ⋆ ⋆

6. Resolver el problema de autovalores $y'' + \lambda y = 0$ en el intervalo $(0, l)$ con los datos de contorno que se indican.
   (a) $y(0) = y(l) = 0$
   (b) $y'(0) = y(l) = 0$
   (c) $y(0) = y'(l) = 0$

7. Considere el problema de autovalores $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$.
   (a) Mostrar que $\lambda = 1$ no es un autovalor.
   (b) Mostrar que no hay ningún autovalor λ tal que $\lambda < 1$.
   (c) Mostrar que el n-ésimo autovalor positivo es $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, con autofunción $y_n(x) = e^{-x} \sin(n\pi x)$.

8. Considere el problema de autovalores $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ en el intervalo $(0, e)$ sujeto a las condiciones de contorno $y(1) = y(e) = 0$.

   (a) Mostrar que los autovalores están dados por $\lambda_n = n^2\pi^2$; $n = 1, 2, \cdots$

   (b) Mostrar que las autofunciones correspondientes son $y_n(x) = \sin(n\pi \ln x)$; $n = 1, 2, \cdots$.

⋆ ⋆ ⋆

Se denota por $\mathcal{V}([a,b]) \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ el conjunto de las funciones que son dos veces derivables en (a,b) y satisfacen las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

▶ Definición. Sean $p(x) \neq 0$ un elemento de $\mathcal{C}^1([a,b])$ y $q(x)$ un elemento de $\mathcal{C}^0([a,b])$. El operador lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V}([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$, definido por

$$\mathbf{L}[y(x)] := -\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + q(x)y(x) \tag{4}$$

se denomina ***de Sturm-Liouville***. Todos los operadores diferenciales de la forma

$$\mathbf{D}[y(x)] := y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x),$$

con $a(x)$ y $b(x)$ elementos de $\mathcal{C}^0([a,b])$, pueden llevarse a la forma (4). En efecto; haciendo

$$p(x) = e^{\int^x a(\eta)\, d\eta} \neq 0 \quad \text{y} \quad q(x) = -b(x)e^{\int^x a(\eta)\, d\eta} \quad \to \quad \mathbf{L}[y(x)] = -p(x)\mathbf{D}[y(x)].$$

Luego, como $p(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene

$$\mathbf{D}[y(x)] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{L}[y(x)] = 0,$$

$$\mathbf{D}[y(x)] = f(x) \Leftrightarrow \mathbf{L}[y(x)] = -p(x)f(x).$$

El siguiente teorema pone de manifiesto una propiedad fundamental del operador $\mathbf{L}$.

Teorema 1. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos elementos arbitrarios de $\mathcal{V}([a,b])$. Entonces,

$$\int_a^b u(x)\mathbf{L}[v(x)]\, dx = \int_a^b \mathbf{L}[u(x)]v(x)\, dx.$$

Un operador lineal que satisface la condición del ***Teorema 1*** se denomina ***autoadjunto en*** $\mathcal{V}([a,b])$. Los operadores autoadjuntos son similares a las matrices simétricas, en el siguiente sentido: todos sus valores propios son reales.

Ejemplo 3.

Comprobar que el operador diferencial $\mathbf{D}[y(x)] = xy''(x) + y'(x)$, con dominio en $\mathcal{V}([a,b])$, es autoadjunto en $\mathcal{V}([a,b])$.

Sean $y(x)$ y $z(x)$ elementos arbitrarios de $\mathcal{V}([a,b])$. Integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^b z(x)\,\mathbf{D}[y(x)]\,dx &= \int_a^b z(x)\,(xy''(x)+y'(x))\,dx = x\,z(x)\,y'(x)\big|_a^b - \int_a^b x\,z'(x)\,y'(x)\,dx \\ &= \Big(x\,z(x)\,y'(x) - x\,y(x)\,z'(x)\Big)\Big|_a^b + \underbrace{\int_a^b (xz''(x)+z'(x))\,y(x)\,dx}_{\int_a^b \mathbf{D}[z(x)]\,y(x)\,dx}\,.\end{aligned}$$

Luego, para que $\mathbf{D}$ sea auto-adjunto, los términos integrados tienen que ser nulos. Puede probarse que esto es cierto siempre que las funciones en $\mathcal{V}([a,b])$ satisfagan condiciones de borde separadas (3). En efecto, el resultado es inmediato si β_1 y β_2 fueran ambas nulas con α_1 y α_2 distintas de cero (en ese caso, todas las funciones en $\mathcal{V}([a,b])$ se anularán en los extremos del intervalo). Lo mismo sucede si α_1 y α_2 fueran ambas nulas con β_1 y β_2 distintas de cero (en ese caso, todas las funciones en $\mathcal{V}([a,b])$ tendrán derivadas que se anulan en a y b). Supongamos, entonces, que todas las αs y las βs son distintas de cero. Usando las condiciones de borde, los términos integrados pueden escribirse de la forma:

$$b\Big(z(b)\,y'(b) - y(b)\,z'(b)\Big) - a\Big(z(a)\,y'(a) - y(a)\,z'(a)\Big) = -b\,y(b)\Big(z(b)\frac{\alpha_2}{\beta_2} + z'(b)\Big) + a\,y(a)\Big(z(a)\frac{\alpha_1}{\beta_1} + z'(a)\Big) = 0.$$

Los casos mixtos pueden derivarse de la expresión anterior y conducen al mismo resultado.

Ejemplo 4.

Escribir la ecuación diferencial $(1+x)y''(x) - y'(x) + 2xy(x) = 0$ en forma auto-adjunta.

Comencemos por llevar la ecuación diferencial a la forma normal; es decir,

$$y''(x) - \frac{1}{1+x}\,y'(x) + \frac{2x}{1+x}\,y(x) \;\rightarrow\; a(x) = -\frac{1}{1+x} \;\text{ y }\; b(x) = \frac{2x}{1+x} \;\rightarrow\; \text{continuas en } (-\infty,-1)\cup(-1,\infty).$$

Entonces, si $x \in (-1,\infty)$,

$$\int^x a(\eta)\,d\eta = -\int^x \frac{1}{1+\eta}\,d\eta = -\ln(1+x) \;\rightarrow\; p(x) = e^{\int^x a(\eta)\,d\eta} = \frac{1}{1+x} \;\rightarrow\; q(x) = -b(x)p(x) = -\frac{2x}{(1+x)^2}.$$

Luego; la forma auto-adjunta de la ED original será

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\,\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - \frac{2x}{(1+x)^2}\,y(x) = 0.$$

Cómo serían los cálculos si $x \in (-\infty,-1)$***?***

⋆ ⋆ ⋆

9. Sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua: Considere el operador lineal $\mathbf{D}[y(x)] := -y''(x) + h(x)y(x)$ junto con las condiciones de contorno:

   (a) $\begin{cases} y(a) - y'(a) = 0, \\ y(b) - y'(b) = 0; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y(a) + y'(b) = 0, \\ y(b) + y'(a) = 0. \end{cases}$

   En cada caso, determine si $\mathbf{D}$ es auto-adjunto en $\mathcal{V}[(a,b)]$.

10. Escribir cada una de las siguientes ecuaciones en forma auto-adjunta.

   (a) $(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + 6\,y(x) = 0$

   (b) $x^2\,y''(x) - 2x^3\,y'(x) + (x^2-4)\,y(x) = 0$

   (c) $y''(x) - y'(x) + e^x(1-x)\,y(x) = f(x)$

▶ Definición. El problema de autovalores asociado al operador de Sturm-Liouville se define de la siguiente manera:

encontrar λ (un número real); $y(x) \neq 0$ (una función real) tal que

$$\mathbf{L}[y(x)] = -\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + q(x)y(x) = \lambda\, r(x)\, y(x) \;\; \textit{para } x \in (a,b) \tag{5}$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Aquí, $r(x)$ es una función positiva en (a,b) denominada ***función de peso***. Cuando $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a,b]$, el sistema (5-6) se denomina ***problema regular de Sturm-Liouville***.

▶ Propiedades espectrales del operador de Sturm-Liouville.

Teorema 2. Supóngase que las funciones $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en el intervalo $[a,b]$ y que $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en cada punto de $[a,b]$. Entonces, para el problema de Sturm-Liouville (5-6)

1. existe un conjunto infinito (numerable) de autovalores reales que verifican $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, a los que les corresponden las autofunciones $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x), \cdots$;
2. todos los autovalores son simples;
3. si $q(x) \geq 0$, los autovalores son todos no negativos;
4. las autofunciones $v_n(x)$ y $v_m(x)$, correspondientes a distintos autovalores λ_n y λ_m, son ortogonales entre sí en (a,b) con peso $r(x)$; es decir,

$$\int_a^b r(x)\, v_n(x)\, v_m(x)\, dx = 0.$$

Teorema del desarrollo. Sea $\{v_n(x)\}_{n\geq 1}$ el conjunto de autofunciones del problema de Sturm-Liouville (5-6). Consideremos la serie

$$S_f(x) = \sum_{n\geq 1} c_n\, v_n(x); \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b r(x)\, f(x)\, v_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b r(x)\, (v_n(x))^2\, dx}. \tag{7}$$

Entonces, si

- $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a trozos en $[a,b]$, la suma $S_f(x)$ converge a $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ en (a,b),
- $f(x)$ es continua en $[a,b]$, con derivada continua a trozos en (a,b), y satisface las condiciones de contorno (6), la suma $S_f(x)$ converge absoluta y uniformemente a $f(x)$ en $[a,b]$.

Ejemplo 5.

La ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$ puede escribirse (obviamente) de la forma $-y'' = \lambda y$. Observar que se pueden identificar $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $r(x) = 1$. Como $p(x) \neq 0$ para todo x, con adecuadas condiciones de borde, define un problema regular de Sturm-Liouville en cualquier intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 6.

Representar la función $f(x) = \begin{cases} 2x/\pi, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ por medio de una serie en términos de autofunciones correspondientes al problema de Sturm-Liouville $\begin{cases} y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$

Según el ***Teorema 2***; todos los autovalores de un problema regular de Sturm-Liouville son simples y las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con función de peso $r(x)$. Luego, simplemente, normalizando (cambiando la escala) a cada autofunción $\phi_n(x)$ de modo que

$$\int_a^b r(x)\phi_n^2(x)\, dx = 1 \qquad \to \qquad \text{condición de normalización},$$

podemos construir un sistema ortonormal de funciones en $[a, b]$. Sea $\{\widehat{\phi}_n(x)\}_{n\geq 1}$ el sistema de autofunciones normalizado con respecto a la función de peso $r(x)$. Podemos aplicar el ***Teorema del desarrollo*** para obtener una representación de la función $f(x)$ en términos de $\widehat{\phi}(x)$; es decir,

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 1} c_n \widehat{\phi}_n(x), \qquad c_n = \int_a^b r(x) f(x) \widehat{\phi}_n(x)\, dx.$$

Determinemos, entonces, los autovalores y las autofunciones correspondientes a este ejemplo. Procediendo como en el Ejemplo 2., se concluye que los valores de λ deben ser estrictamente positivos para que haya soluciones no triviales. Escribiendo $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha > 0$, tendremos

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \quad \to \quad y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x.$$

Al imponer las condiciones de contorno, encontramos

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \to \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \to \quad c_1 = 0 \\ y'(\pi) = 0 & \to \quad c_2 \cos \alpha\pi = 0 \quad \to \quad \alpha\pi = \dfrac{2n-1}{2}\,\pi \quad \to \quad \alpha_n = \dfrac{2n-1}{2}; n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

En conclusión, los autovalores son $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2}{4}$ y sus autofunciones asociadas son $\phi_n(x) = \sin \dfrac{(2n-1)x}{2}$; $n = 1, 2, \cdots$. Como en este caso, $r(x) = 1$, tendremos

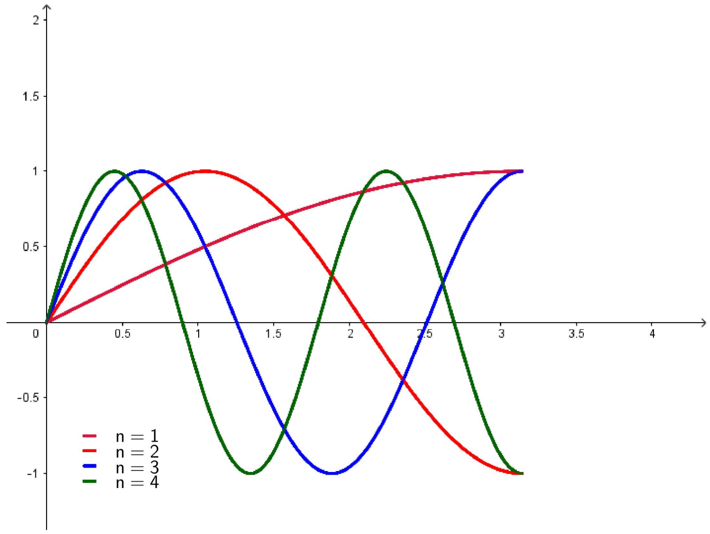
$$\int_0^\pi r(x)\phi_n^2(x)\, dx = \int_0^\pi \sin^2 \frac{(2n-1)x}{2}\, dx = \int_0^\pi \frac{(1 - \cos(2n-1)x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, el factor de normalización es $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Consideraremos, entonces, el conjunto

$$\Big\{ \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{(2n-1)x}{2}}_{\widehat{\phi}_n(x)} \Big\}_{n\geq 1} \qquad \to \qquad \text{sistema ortonormal de funciones en } [0, \pi].$$

Para obtener el desarrollo de $f(x)$ en series de funciones $\widehat{\phi}_n(x)$, calculemos los coeficientes

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2}\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\pi/2} x \sin \frac{(2n-1)x}{2}\, dx + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \frac{(2n-1)x}{2}\, dx \\ &= \frac{2^{7/2}}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}. \end{aligned}$$



Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua, con derivada continua a trozos, en $[0, \pi]$, el ***Teorema del desarrollo*** asegura que

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{1/2} \sin \frac{(2n-1)x}{2} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} \sin \frac{(2n-1)x}{2} \quad x \in (0, \pi).$$

Además, dado que $f(0) = 0$ y $f'(\pi) = 0$, $f(x)$ satisface las condiciones de contorno que determinan el problema de Sturm-Liouville. Luego, según el ***Teorema del desarrollo***, la convergencia a $f(x)$ es uniforme en $[0, \pi]$.

⋆ ⋆ ⋆

11. Para cada una de las funciones que se listan, encontrar los coeficientes del desarrollo en series de $f(x)$ usando las autofunciones normalizadas del Problema $6(b)$. Analizar la convergencia.

   (a) $f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$

   (d) $f(x) = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$

12. Comprobar que los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

   están dados por

$$\lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = 1; \qquad \lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2, \quad y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1.$$

13. Comprobar que los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

   están dados por

$$\lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = x - 1; \qquad \lambda_n = b_n^2, \quad y_n(x) = b_n \cos b_n x - \sin b_n x, \quad n \geq 1,$$

   donde $\{b_n\}_{n \geq 1}$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = x$.

14. Comprobar que los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

están dados por

$$\lambda_0 = 0, \quad y_0(x) = 1; \qquad \lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = A\cos nx + B\sin nx, \quad n \geq 1,$$

donde A y B son constantes arbitrarias (esto significa que el autoespacio asociado al autovalor $\lambda_n = n^2$ es un subespacio bidimensional de $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ generado por las funciones $\cos nx$ y $\sin nx$).

15. Considere el problema de autovalores de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(0) = 0, \quad ay(1) - y'(1) = 0; \quad a > 0.$$

Comprobar que:

(a) $\lambda_0 = 0$ es un autovalor si, y sólo si, $a = 1$, en cuyo caso la autofunción asociada es $y_0(x) = x$.

(b) si $a > 1$, existe un solo autovalor negativo $\lambda_0 = -b_0^2$, con autofunción asociada $y_0(x) = \sinh b_0 x$, donde b_0 es la raíz positiva de la ecuación $a\tanh x = x$.

(c) si $a > 1$, existen autovalores positivos $\lambda_n = b_n^2$, $n \geq 1$, con autofunción asociada $y_n(x) = \sin b_n x$, donde $\{b_n\}_{n\geq 1}$ son las raíces positivas de la ecuación $a\tan x = x$.

⋆ ⋆ ⋆

Consideremos la ecuación de autovalores

$$\mathbf{L}[y(x)] = -((p(x)\,y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda\, r(x)\, y(x) \text{ para } x \in (a,b). \tag{8}$$

Supondremos que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en el abierto (a,b) y, además, que $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en (a,b). La ecuación (8) se denomina una ***ecuación singular de Sturm-Liouville*** si ocurren una o más de las siguientes situaciones:

- $\lim_{x\to a^+} p(x) = 0$ o $\lim_{x\to b^-} p(x) = 0$,
- $p(x)$, $q(x)$ o $r(x)$ no están acotadas cuando $x \to a^+$ o $x \to b^-$,
- el intervalo (a,b) no está acotado.

Para obtener soluciones bien comportadas en el intervalo (a,b) deben definirse condiciones de contorno apropiadas para ***dominar la singularidad que aparece en cada cero de*** $p(x)$. Puede probarse que las condiciones adecuadas (naturales) son:

- si $p(a) = 0$, una condición de acotación en ese extremo: $\rightarrow$ $|y(a)| < \infty$,
- si $p(a) = p(b) = 0$, condiciones de acotación en ambos extremos: $\rightarrow$ $|y(a)| < \infty$, $|y(b)| < \infty$,

Si el intervalo (a,b) es infinito, el comportamiento controlado anterior se sustituye por una imposición más débil $\rightarrow$ la solución no debe crecer más rápidamente que una potencia finita de x.

Con estas condiciones, el problema singular de Sturm-Liouville tiene las mismas propiedades espectrales que el problema regular.

Escritas en forma auto-adjunta, las siguientes ecuaciones diferenciales

de Bessel de orden n $\rightarrow$ $(xy'(x))' + \Big(\lambda\, x - \dfrac{n^2}{x}\Big) y(x) = 0;$

de Legendre $\rightarrow$ $((1-x^2)y'(x))' + \lambda\, y(x) = 0;$

de Hermite $\rightarrow$ $(e^{-x^2} y'(x))' + \lambda\, e^{-x^2}\, y(x) = 0;$

de Laguerre $\rightarrow$ $(xe^{-x} y'(x))' + \lambda\, e^{-x}\, y(x) = 0;$

son ejemplos importantes de ***ecuaciones singulares de Sturm-Liouville***, basta con hacer las siguientes identificaciones

de Bessel de orden n $\rightarrow$ $p(x) = -x, \quad q(x) = \dfrac{n^2}{x}, \quad r(x) = x, \quad a = 0;$

de Legendre $\rightarrow$ $p(x) = -(1-x^2), \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1, \quad a = -1, \quad b = 1;$

de Hermite $\rightarrow$ $p(x) = -e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = e^{-x^2}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty;$

de Laguerre $\rightarrow$ $p(x) = -xe^{-x}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$

Estas ecuaciones, cuyas soluciones se conocen como ***funciones especiales***, surgen naturalmente en el estudio de PVFs que involucran derivadas parciales; por esta razón, son de extrema importancia en física y matemática aplicada.

Ejemplo 7.

Consideremos la ecuación diferencial $xy'' + (1+2n)y' + xy = -\lambda xy$; donde n es un número fijo, λ es un parámetro y la función $y(x)$ satisface las condiciones de borde

$$\begin{cases} y \quad \text{acotada cuando} \quad x \to 0, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$

Estamos interesados en:

a) llevar la ecuación a la forma de Sturm-Liouville; identificar los coeficientes y la función de peso,

b) llevar la ecuación diferencial a una ecuación de Bessel utilizando el cambio de variable $y = x^{-n} v(x)$,

c) encontrar los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales del problema de valores de contorno,

d) comprobar que las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

a) Procediendo como en el Ejemplo 4., llevemos la ED a la forma normal

$$y'' + \frac{1+2n}{x}\, y' + y = -\lambda\, y \quad \rightarrow \quad a(x) = \frac{1+2n}{x} \quad \text{y} \quad b(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{continuas en } (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Entonces, si $x \in (0, \infty)$,

$$\int^x a(\eta)\, d\eta = \int^x \frac{1+2n}{\eta}\, d\eta = (1+2n) \ln x \quad \rightarrow \quad p(x) = e^{\int^x a(\eta)\, d\eta} = x^{1+2n} \quad \rightarrow \quad q(x) = -p(x) b(x) = -x^{1+2n}$$

Luego, la ED puede escribirse de la siguiente manera

$$-\frac{d}{dx}\Big(x^{1+2n} \frac{d}{dx}\, y(x) \Big) - x^{1+2n}\, y(x) = \lambda\, x^{1+2n}\, y(x).$$

Comparando con la expresión (5), se identifican

$$p(x) = x^{1+2n}, \qquad q(x) = -x^{1+2n}, \qquad r(x) = x^{1+2n}.$$

b) Asumiendo que $y(x) = x^{-n}v(x)$, se calculan las primeras derivadas

$$y'(x) = -nx^{-n-1}v(x) + x^{-n}v'(x), \qquad y''(x) = n(n+1)x^{-n-2}v(x) - 2nx^{-n-1}v'(x) + x^{-n}v''(x),$$

y se reemplazan en la ED para obtener

$$x(n(n+1)x^{-n-2}v(x) - 2nx^{-n-1}v'(x) + x^{-n}v''(x)) + (1+2n)(-nx^{-n-1}v(x) + x^{-n}v'(x)) + (1+\lambda)x^{-n+1}v(x) = 0.$$

Agrupando términos

$$x^{-n+1}v''(x) + x^{-n}v'(x) + \Big(n(n+1) - (1+2n)n\Big)x^{-n-1} + (1+\lambda)x^{-n+1}]v(x) = 0$$

y dividiendo por x^{-n+1} se llega a

$$v''(x) + \frac{v'(x)}{x} + \Big((1+\lambda) - \frac{n^2}{x^2}\Big)v(x) = 0.$$

Ahora, si la variable independiente se cambia a $u = \sqrt{\lambda+1}x$, se obtiene

$$v''(u) + \frac{v'(u)}{u} + \Big(1 - \frac{n^2}{u^2}\Big)v(u) = 0.$$

Es decir, $v(u)$ satisface la ED de Bessel de orden n. La solución general, para esta ecuación, es

$$v(u) = c_1 J_n(u) + c_2 Y_n(u).$$

Entonces,

$$y(u) = u^{-n}(c_1 J_n(u) + c_2 Y_n(u)).$$

c) Cuando $u \to 0^+$, los comportamientos de las funciones de Bessel son (asintóticamente) iguales a

$$J_0(u) \sim 1, \quad J_n(u) \sim \frac{u^n}{2^n n!}; \qquad Y_0(u) \sim \frac{2}{\pi}\ln x, \quad Y_n(u) \sim -\frac{2^n(n-1)!}{\pi u^n}.$$

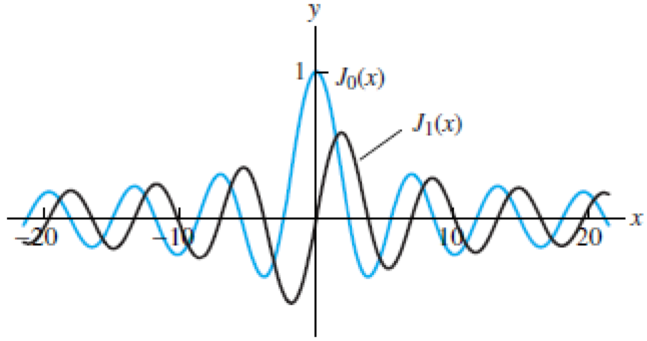
Luego, para asegurar soluciones acotadas para todo n se elige $c_2 = 0$. Así,

$$y_n(x) = x^{-n}J_n\Big(\sqrt{\lambda+1}\,x\Big), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Para determinar los valores de λ, se impone la condición en el borde $x = a$. Haciendo esto,

$$a^{-n}J_n\Big(\sqrt{\lambda+1}\,a\Big) = 0 \qquad \to \qquad \sqrt{\lambda+1}\,a = \omega_{n,p} \qquad \to \qquad \lambda_{n,p} = \Big(\frac{\omega_{n,p}}{a}\Big)^2 - 1, \quad p = 1, 2, \cdots$$

donde los números $\omega_{n,p}$ son los ceros positivos de la función $J_n(x)$. En la siguiente figura, se muestran las gráficas de las funciones de Bessel de orden $n = 0$ y $n = 1$.



Como lo sugiere la figura, entre cualesquiera dos raíces consecutivas de $J_0(x)$ existe precisamente una raíz de $J_1(x)$ y viceversa. Las primeras cuatro raíces (estrictamente positivas) de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se presentan en la siguiente tabla.

n	n-ésima raíz de $J_0(x)$	$\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi$	n-ésima raíz de $J_1(x)$	$\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$
1	2.4048	2.3562	3.8317	3.9270
2	5.5201	5.4978	7.0156	7.0686
3	8.6537	8.6394	10.1735	10.2102
4	11.7915	11.7810	13.3237	13.3518
5	14.9309	14.9226	16.4706	16.4934

Para n grande, la n-ésima raíz de $J_0(x)$ es, aproximadamente, $(n-\frac{1}{4})\pi$; la n-ésima raíz de $J_1(x)$ es, también aproximadamente, $(n+\frac{1}{4})\pi$. De este modo, el intervalo entre las raíces consecutivas de $J_0(x)$ o $J_1(x)$ es aproximadamente π. Se puede observar que la exactitud de estas aproximaciones aumenta en la medida en que n se incrementa.

d) Fijando n, el conjunto de autofunciones está dado por $\left\{x^{-n}J_n\left(\frac{\omega_{n,p}x}{a}\right)\right\}_{p\geq 0}$. Teniendo en cuenta que la función de peso es $r(x)=x^{1+2n}$,

$$\int_0^a x^{1+2n}\left(x^{-n}J_n\left(\frac{\omega_{n,p_1}x}{a}\right)\right)\left(x^{-n}J_n\left(\frac{\omega_{n,p_2}x}{a}\right)\right)dx=\int_0^a x\,J_n\left(\frac{\omega_{n,p_1}x}{a}\right)J_n\left(\frac{\omega_{n,p_2}x}{a}\right)dx=\begin{cases}0, & p_1\neq p_2\\ \dfrac{a^2}{2}\,J_n\left(\omega_{n,p_2}\right)^2 & p_1=p_2\end{cases}$$

La última igualdad se obtiene, directamente, usando la propiedad de ortogoganlidad de las funciones de Bessel.

$\star\quad\star\quad\star$

16. Considere la ecuación diferencial $-(xy')'=\lambda xy$ donde λ es un parámetro y la función $y(x)$ satisface las condiciones de borde
$$\begin{cases} y(0) \quad \text{acotada cuando} \quad x\to 0^+,\\ y'(1)=0\end{cases}$$
   (a) Comprobar que $\lambda_0=0$ es un autovalor de este problema correspondiente a la autofunción $y_0(x)=1$.
   (b) Si $\lambda>0$, mostrar que las autofunciones están dadas por las funciones de Bessel $y_n(x)=J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$, donde $\sqrt{\lambda_n}$ es el $n-$énismo cero positivo (enumerados en orden creciente) de la ecuación $J_0'(w)=0$.
   (c) Mostrar que
$$\int_0^1 x\,y_n(x)\,y_m(x)\,dx=0, \qquad m\neq n.$$

17. Considere la ecuación diferencial $(1-x^2)y''-xy'+\lambda y=0$, donde λ es un parámetro y la función $y(x)$ satisface las condiciones de borde
$$\begin{cases} y(0)=0,\\ y' \quad \text{acotada cuando} \quad x\to 1.\end{cases}$$
   (a) Llevar la ecuación a la forma de Sturm-Liouville, identificar los coeficientes y la función de peso.
   (b) Utilizar el cambio de variable $x=\cos\theta$; $0\leq\theta\leq\pi/2$, para llevar el problema a una ecuación diferencial a coeficientes constantes.

(c) Encontrar los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales del problema de valores de contorno.

(d) Supóngase que λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos del problema y que φ_1, φ_2 son las funciones propias correspondientes. Mostrar que

$$\int_0^1 \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0.$$

18. Considere el siguiente problema diferencial de autovalores:

encontrar $y(x) \neq 0$ tal que

$$y'' + \Big(\frac{1}{x} - 2\alpha\Big)y' + \Big(\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha}{x} - \frac{p^2}{x^2}\Big)y = -\lambda y; \quad \alpha > 0, \quad \lambda \textit{ es un parámetro},$$

y satisfaga las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y \quad \textit{acotada cuando} \quad x \to 0^+ \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

(a) Llevar la ecuación a la forma de Sturm-Liouville, identificar los coeficientes y la función de peso.

(b) Utilizar la sustitución $y = e^{\alpha x}v(x)$ para llevar el problema a una ecuación diferencial de Bessel.

(c) Encontrar los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales del problema de valores de contorno.

(d) Comprobar que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

⋆ ⋆ ⋆

▶ Problemas con valores en la frontera no homogéneos.

Consideremos el PVF consistente en la ED no homogénea

$$Ł[y](x) = -(p(x)y')' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x); \tag{9}$$

donde μ es una constante y $f(x)$ es una función definida en $[a,b]$, junto con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0, \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

En lo que sigue, asumiremos que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son continuas en $[a,b]$ y que $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$.

El objetivo es resolver el problema diferencial (9)-(10) usando autofunciones del operador Ł; más precisamente, las soluciones no triviales del problema

$$Ł[y](x) = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y \tag{11}$$

con las condiciones de frontera (10).

Sean $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ los autovalores del problema (11)-(10) y sean $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x), \cdots$ las correspondientes autofunciones normalizadas. Supongamos que la solución del problema $y(x) = \psi(x)$ del problema (9)-(10) puede ser expresada como una serie de la forma

$$\psi(x) = \sum_{n\geq 1} b_n\phi_n(x). \tag{12}$$

Observemos que, así construida, $\psi(x)$ satisface las condiciones de contorno (10).

Para determinar los coeficientes b_n, se sustituye la serie (12) en la ecuación diferencial (9). Si admitimos que pueden intercambiarse las operaciones de suma y diferenciación, el término del lado izquierdo de la ecuación (9) se convierte en

$$Ł[\psi](x) = Ł\Big[\sum_{n\geq 1} b_n\phi_n\Big](x) = \sum_{n\geq 1} b_n Ł[\phi_n](x) = \sum_{n\geq 1} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x). \tag{13}$$

Por otro lado, si $f(x)$ satisface las hipótesis del ***Teorema del desarrollo***, podemos escribir

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{f(x)}{r(x)}\,r(x)\phi_n(x)\,dx = c_n; \quad n = 1, 2, \cdots \quad \rightarrow \quad \frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n\geq 1} c_n\phi_n(x). \tag{14}$$

Reemplazando (12), (13) y (14) en (9), se obtiene

$$\sum_{n\geq 1} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x) = \mu r(x)\sum_{n\geq 1} b_n\phi_n(x) + r(x)\sum_{n\geq 1} c_n\phi_n(x).$$

Agrupando términos y cancelando el factor común $r(x)$, se llega a

$$\sum_{n\geq 1}((\lambda_n - \mu)b_n - c_n)\phi_n(x) = 0. \tag{15}$$

Si la ecuación (15) debe ser válida para todo $x \in [a, b]$, el coeficiente que multiplica a $\phi_n(x)$ debe ser cero para cada n. Entonces,

$$(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0; \quad n = 1, 2, \cdots \tag{16}$$

Pueden darse los siguientes casos:

Caso I. $\mu \neq \lambda_n$ para todo n. Entonces,

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}; \quad n = 1, 2, \cdots$$

En este caso, se tiene

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x). \tag{17}$$

La expresión (17), con los coeficientes c_n dados por (14), es una solución formal del problema no homogéneo (9-10). Los argumentos expuestos no prueban la convergencia de la serie.

Caso II. $\mu = \lambda_k$. En este caso, cuando $n = k$, la ecuación (16) adquiere la forma $0 \cdot b_k = c_k$. Tienen lugar las siguientes situaciones:

a) $c_k \neq 0$, entonces, ningún valor de b_k satisfacerá la ecuación (16) y, por lo tanto, el problema no homogéneo no tiene solución.

b) $c_k = 0$, entonces, cualquier valor de b_k satisface la ecuación (16); por lo tanto, el problema homogéneo tendrá solución, pero no será única. En este caso, se tiene

$$y(x) = \psi(x) = C\,\phi_k(x) + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq k}} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x); \quad C \text{ es una constante arbitraria.} \tag{18}$$

Observemos que la condición $c_k = 0$ implica

$$\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx = 0 \qquad \rightarrow \qquad f(x) \text{ debe ser ortogonal a la autofunción } \phi_k(x).$$

Los resultados que hemos obtenidos formalmente se resumen en el siguiente teorema.

Teorema Alternativa de Fredholm. Para una valor de μ fijo, el problema no homogéneo (9-10) tiene solución única para cada $f(x)$ continua en $[a, b]$ o el problema homogéneo asociado tiene solución no trivial.

▶ Observación. El cálculo anterior tiene sentido si es legítimo intercambiar la operación de suma con la aplicación del operador. Puede probarse que una condición suficiente para que esto sea válido es que la serie que representa a $y(x)$ fuera uniformemente convergente (esto, a su vez, depende de la suavidad de la función $f(x)$ de la cual derivan los coeficientes c_n), pero también es legítimo para otras formas más débiles de convergencia.

Ejemplo 8.

Resolver el siguiente problema diferencial $\quad y''(x) + y = x(a - x), \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad 0 < a < \pi.$

Este problema, en particular, puede resolverse por métodos más elementales; su solución es

$$y(x) = \frac{2(\sin(x - a) - \sin x)}{\sin a} - x^2 + ax + 2. \tag{19}$$

Sin embargo, buscaremos la solución procediendo de otra manera para ilustrar el ***método de expansión en series de autofunciones del operador diferencial***. Este método es imprescindible para aquellas ED cuyas soluciones no pueden obtenerse mediante procedimientos elementales.

Observemos primero que la ED a resolver se puede escribir en la forma de la ED (9), en efecto,

$$-y''(x) = y - x(x - a) \qquad \rightarrow \qquad p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1, \quad \mu = 1, \quad f(x) = -x(x - a).$$

Buscamos entonces los autovalores y autofunciones del problema espectral asociado

$$\mathbf{L}[y(x)] = \underbrace{-y''(x) = \lambda\, y(x)}_{p(x)=1, q(x)=0, r(x)=1} \qquad x \in (0, a); \quad \text{con las condiciones de contorno} \quad y(0) = y(a) = 0.$$

Procediendo como en el Ejemplo 2., se concluye que los valores de λ deben ser estrictamente positivos para que haya soluciones no triviales. Escribiendo $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha > 0$, tendremos

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x.$$

Al imponer las condiciones de contorno, encontramos

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \rightarrow \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \\ y(a) = 0 & \rightarrow \quad c_2 \sin \alpha a = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha a = n\pi \quad \rightarrow \quad \alpha_n = \dfrac{n\pi}{a}; n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Luego,

- los autovalores forman un conjunto infinito (numerable) $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 < \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 < \cdots < \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 < \cdots$

- las correspondientes autofunciones $\sin \frac{\pi x}{a}, \sin \frac{2\pi x}{a}, \cdots, \sin \frac{n\pi x}{a} \cdots$ forman un conjunto ortogonal en $\mathcal{C}^0([a, b])$ con el producto interno usual; es decir,

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \, \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \dfrac{a}{2} & n = m. \end{cases}$$

Observemos que, como $0 < a < \pi$, $\lambda_n \neq 1$ para todo n. Luego, $\lambda_n \neq \mu$ para todo n. Supongamos, entonces, que la solución buscada puede representarse por

$$y(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \text{con} \quad b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - 1},$$

siendo c_n los coeficientes que corresponden al desarrollo

$$f(x) = -x(a-x) = \sum_{n \geq 1} c_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

y están dados por

$$c_n = -\frac{\displaystyle\int_0^a x(a-x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx}{\displaystyle\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a}\, dx} = -\frac{2}{a} \int_0^a x(a-x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\dfrac{8a^2}{\pi^3 n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

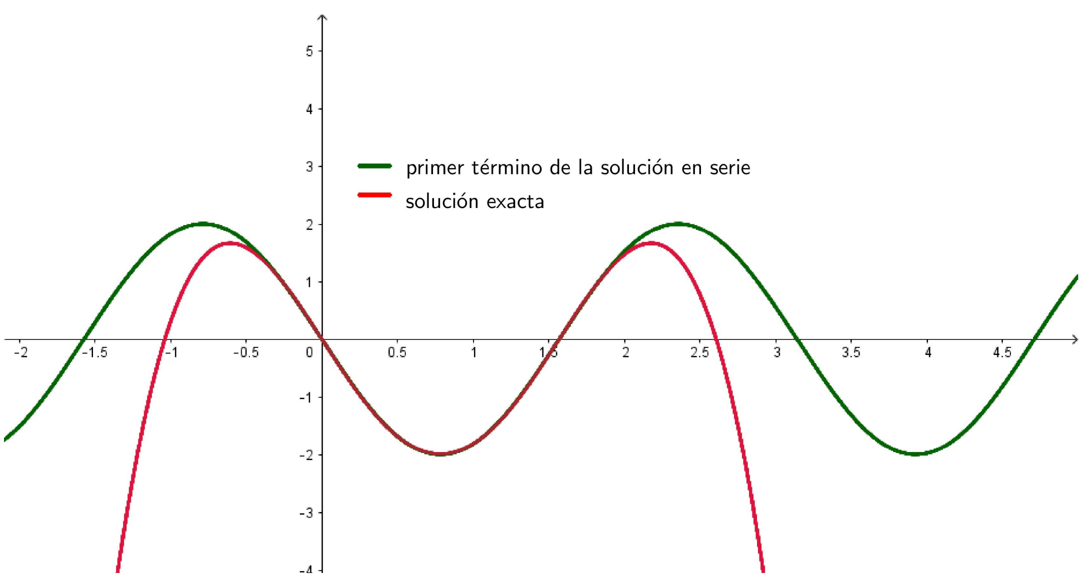
Aquí, la inhomogeneidad o término fuente $f(x)$ se representa por un desarrollo de Fourier de medio rango ($f(x)$ se supone extendida en forma impar al intervalo $(-a, 0)$). En este caso, el desarrollo converge uniformemente a $f(x)$ en $[0, a]$.

Finalmente,

$$y(x) = -\frac{8a^4}{\pi^3} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k-1)^3((2k-1)^2\pi^2 - a^2)} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{a}. \tag{20}$$

Aunque las expresiones (19) y (20) se ven muy diferentes, en realidad, son dos representaciones diferentes de la misma función. Esto se deduce de la aplicación de la ***Alternativa de Fredholm*** a este problema.

La serie (20) converge rápidamente a la solución exacta. En la siguiente figura se muestran las gráficas de la solución exacta y el primer término de la serie (20) para $a = \pi/2$. Se observa que las curvas son prácticamente indistinglibles sobre el intervalo de definición del problema diferencial; en este caso, $[0, \pi/2]$ (de hecho, fue necesario extender el intervalo de graficación para poder detectar alguna diferencia entre las curvas).



⋆ ⋆ ⋆

19. Muestre que el siguiente problema con valores en la frontera no homogéneo

$$y'' + y = h(x); \qquad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

tiene solución para cada $h(x)$ que sea continua en $[0, \pi]$ y satisfaga $\displaystyle\int_0^\pi h(x)\cos(x)\,dx = 0$.

20. Encontrar la solución (formal) de los siguientes PVFs no homogéneos en términos de desarrollos en series de autofunciones del operador de Sturm-Liouville $\mathbf{L} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$.

   (a) $y'' = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}; \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

   (b) $y'' = x(x - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

21. Determinar un desarrollo en series de funciones propias del operador $\mathbf{L} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ para la solución del PVF no homogéneo.

   (a) $y'' + 2y = x^2 - 2\pi x; \qquad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

   (b) $y'' + y = \cos 4x + \cos 7x; \qquad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

22. Determinar si hay algún valor de la constante a para el cual el siguiente problema tiene solución. Encuentre la solución para cada uno de estos valores.

   (a) $y'' + \pi^2 y = a - \cos(x); \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

   (b) $y'' + 4\pi^2 y = 2a - x; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

   (c) $y'' + \pi^2 y = a + x; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

23. Encontrar la solución (formal) del siguiente PVF

$$-(xy')' = \mu\, xy + f(x), \quad y \ \textit{acotada cuando} \quad x \to 0^+, \quad y'(1) = 0,$$

$f(x)$ es una función continua en $[0, 1]$ y μ no es un autovalor del operador diferencial $\mathbf{L} = -\dfrac{d}{dx}\Big(x\dfrac{d}{dx}\Big)$.

Sugerencia: usar los resultados del Problema 16.

13. Ecuaciones diferenciales parciales

▶ Definición. Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es de la forma

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \cdots\right) = 0. \tag{1}$$

F es una función prefijada de sus argumentos (establece una relación entre las variables independientes $x_1, \cdots, x_n$, la función incógnita $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y sus derivadas parciales) y $m = k_1 + \cdots + k_n$.

▶ Definición. El orden m de una EDP es el orden de derivación más alto que aparece en su expresión.

▶ Definición. Una solución de (1) en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier función $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ tal que al sustituir u y sus derivadas parciales en dicha ecuación se obtiene una identidad respecto a las variables $x_i, \cdots, x_n$ en la región Ω.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente EDP de primer orden: $u_x = x + y$.

Como la EDP es de primer orden y solo incluye a la primera derivada de la función incógnita respecto de x, buscaremos una función u que sea de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ por integración respecto de la variable x. Así,

$$u(x, y) = \int (x + y)\, dx = \frac{x^2}{2} + yx + \xi(y).$$

La función $\xi(y)$ es una constante respecto a x que aparece al integrar de forma indefinida la función $x + y$.

Ejemplo 2. Resolver la siguiente EDP de segundo orden: $u_{xy} = 0$.

Buscaremos una función u que sea de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \xi(y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int \xi(y)\, dy + f(x).$$

Como $\xi(y)$ es una función arbitraria, la integral indefinida de $\xi(y)$ con respecto a y también es una función arbitraria. Llamémosla $g(y)$. Por lo tanto, la solución de la EDP viene dada por

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \tag{2}$$

donde $f(x)$ y $g(y)$ son funciones arbirtrarias de una variable, dos veces derivables. Por ejemplo, las siguientes funciones podrían ser solución de esta EDP

$$u(x, y) = x + y$$

$$u(x, y) = e^x + \cos(y)$$

$$u(x, y) = x^3 + ye^y$$

Ejemplo 3. Resolver la siguiente EDP de segundo orden: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

De acuerdo con la teoría de variable compleja, las soluciones de esta EDP son funciones armónicas, es decir, la parte real o imaginaria de funciones holomorfas $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Por ejemplo, tendremos como posibles soluciones:

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$u(x,y) = 2xy$$
$$u(x,y) = e^x \cos(y)$$

Ejemplo 4. Resolver la siguiente EDP de segundo orden: $u_{yy} - u_y = 1$.

En este caso la ecuación diferencial no es homogénea. Integrando con respecto a la variable y, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - u\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - u = \int dy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - u = y + \xi(x).$$

Observar que la última expresión define una ecuación lineal de primer orden cuyo factor integrante es e^{-y}. Luego,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(ue^{-y}\right) = (y + \xi(x))e^{-y} \quad \Rightarrow \quad ue^{-y} = -(1 + y + \xi(x))e^{-y} + \eta(x).$$

Finalmente,

$$u(x,y) = -(1 + y + \xi(x)) + \eta(x)e^y.$$

Observación. Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que las EDP's pueden tener familias infinitas de soluciones. Dada una EDP de orden m, una solución que contenga m funciones arbitrarias se llama ***solución general***. Cualquier solución obtenida de esta solución general por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se llama una ***solución particular***.

Ejemplo 5. Resolver la siguiente EDP de segundo orden $u_{xy} = e^x + y$ sujeta a las condiciones $u(0,y) = 2y^2 - 4y$, $u(x,1) = x - 2$.

Razonando como en los ejemplos anteriores,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = e^x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \int (e^x + y)\, dy = ye^x + \frac{y^2}{2} + \xi(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \int \left(ye^x + \frac{y^2}{2} + \xi(x)\right) dx = ye^x + x\,\frac{y^2}{2} + \int \xi(x)\, dx + g(y).$$

De aquí, se obtiene la solución general

$$u(x,y) = ye^x + x\,\frac{y^2}{2} + f(x) + g(y).$$

Haciendo $x = 0$,

$$u(0,y) = y + f(0) + g(y) = 2y^2 - 4y \quad \Rightarrow \quad g(y) = 2y^2 - 5y - f(0).$$

Reemplazando la expresión encontrada para $g(y)$ en la solución general, se tiene

$$u(x,y) = ye^x + x\,\frac{y^2}{2} + f(x) + 2y^2 - 5y - f(0).$$

Ahora, haciendo $y = 1$,

$$u(x,1) = e^x + \frac{x}{2} + f(x) - 3 - f(0) = x - 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(0) = 1 + \frac{x}{2} - e^x.$$

Este resultado conduce a la solución particular

$$u(x,y) = (y-1)e^x + \frac{x(y^2+1)}{2} + 2y^2 - 5y + 1.$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Obtener la solución general de las siguientes EDPs:

   (a) $u_{xy} = 3x + 8y^2$

   (b) $u_{xy} = 2y\, u_x$

   (c) $u_{xy} + u_x = 1$

   (d) $u_{yy} = e^{x+y}$

2. Resolver los siguientes problemas diferenciales

   (a) $u_x = \sin(y), \qquad u(0, y) = -y$

   (b) $u_{yy} = x^2 \cos(y), \qquad u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$

3. Sea $u(x, y) = \xi\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + x\eta\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

   (a) Demostrar que $u(x, y)$ es solución de la EDP: $\;x^2\, u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2\, u_{yy} = 0$.

   (b) Encontrar una solución particular que satisfaga las condiciones $u(1, y) = \cos(y)$, $u(1/2, y) = e^{-2y}$.

⋆ ⋆ ⋆

▶ Ecuaciones en derivadas parciales lineales.

Si en la ecuación diferencial (1) la función F es lineal en u y en las derivadas de u, la ecuación se dice lineal. En ese caso, haciendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, la ecuación puede escribirse de la siguiente forma

$$a_0(x)u(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \partial_{x_i} u(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} u(x) + \cdots = f(x). \tag{3}$$

Asumiremos que los coeficientes $a_i(x)$; $i = 0, 1, \cdots, n$, $a_{ij}(x)$; $i, j = 1, \cdots, n$, y $f(x)$ son funciones de $\mathcal{C}^0(\Omega)$, con Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. En estas condiciones, se define el operador lineal

$$L[u] = a_0(x)u(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \partial_{x_i} u(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} u(x) + \cdots$$

▶ Teorema (Propiedades de las soluciones de las EDP lineales).

- Si $u(x, y)$ es la solución de la ecuación homogénea $L[u] = 0$, entonces $c\, u(x, y)$ es también solución de la homogénea para todo $c \in \mathbb{R}$,

- Si $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ son soluciones de la ecuación homogénea $L[u] = 0$, entonces $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ es también solución de la homogénea.

- Si $u(x, y)$ es solución de la ecuación $L[u] = f$ y $v(x, y)$ es solución de la homogénea $L[v] = 0$, entonces $w(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$ es la solución de $L[w] = f$.

- Si $u_1(x, y)$ es solución de $L[u] = f_1$ y $u_2(x, y)$ es solución de $L[u] = f_2$, entonces $w(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ es solución de la ecuación $L[w] = f_1 + f_2$ (***Principio de Superposición***).

▶ EDP lineales de segundo orden relevantes en la Física.

Ecuación de Poisson:
$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z);$$
si $f(x, y, z) \equiv 0$, la ecuación se dice de Laplace,

Ecuación de ondas:
$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz});$$
$c > 0$, representa la velocidad de propagación de la onda,

Ecuación de difusión:
$$u_t = \kappa(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz});$$
$\kappa > 0$, representa la difusividad del medio,

Ecuación de Euler-Bernoulli
$$\mu\, u_{tt} + EI\, u_{xxxx} = q;$$
$EI > 0$, representa la rigidez a la flexión de una viga con densidad μ sometida a una carga q,

Ecuación de Schrödinger:
$$u_t = \frac{i\hbar}{2m}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + q(x, y, z)\, u;$$
$q(x, y, z)$ representa el potencial con el que interactúa una partícula de masa m.

▶ Problemas diferenciales bien planteados.

Para determinar la solución de una EDP se requiere de ciertos datos adicionales:

- datos en la frontera (representan la interacción del sistema con el exterior),
- datos iniciales (representan el estado inicial del sistema).

Uno de los objetivos fundamentales de la teoría de EDP es determinar bajo que condiciones un problema diferencial ***tiene solución, la solución es única y depende de manera continua con los datos del problema***. Un problema que posea estas propiedades se dice que está ***bien planteado.***

▶ Condiciones de contorno.

Consideremos un problema diferencial definido sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Al borde de Ω lo denotaremos Γ ($\Gamma := \partial\Omega$). Las condiciones de contorno más simples que pueden imponerse sobre Γ son

de Dirichlet: $u|_\Gamma = g$

de Neumann: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Gamma = \mathbf{n} \cdot \nabla u\Big|_\Gamma = g$

de Robin (o mixta): $\alpha u + \beta \left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Gamma = g$, α y β son constantes.

Combinaciones de estas condiciones también son posibles; por ejemplo, si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, los datos en el borde podría ser $\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = g, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases}$

Ejemplo 6.

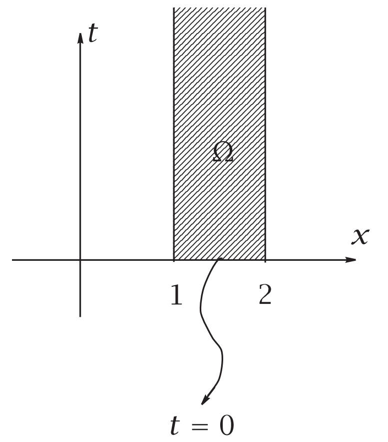
a) Ecuación del calor en una dimensión espacial.

$u_t = u_{xx}$ sobre Ω,

$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2;\ t > 0\}$.

Condición inicial: $u(x,0) = (x-1)(x-2)$.

Condiciones de contorno: $u(1,t) = u(2,t) = 0$ (compatibles con la condición inicial).



b) Ecuación de Laplace en un dominio no acotado

$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ sobre Ω,

$\Omega = \{(r,\theta) : 0 < r < \infty;\ 0 < \theta < \pi\}$.

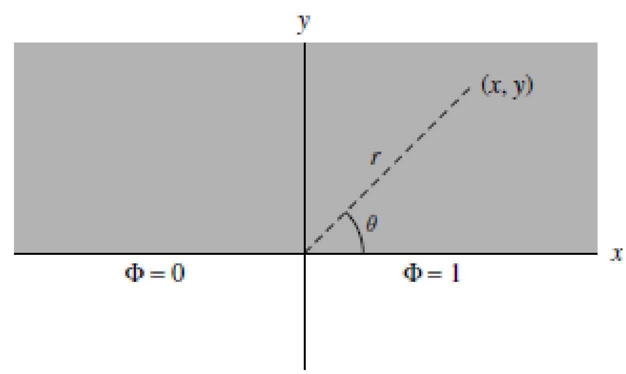
Condiciones de contorno:

$u(r,0) = 1$ para $0 < r < \infty$,

$u(r,\pi) = 0$ para $0 < r < \infty$.

Comportamiento en el infinito:

$\lim\limits_{r\to\infty} |u(r,\theta)| < \infty$.



c) Ecuación de Helmholtz en tres dimensiones.

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + k^2 u = 0$ sobre Ω,

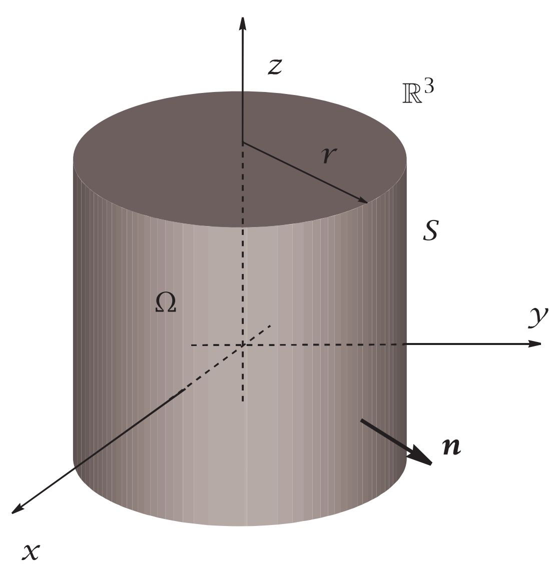
$\Omega = \{(r,\theta,z) : 0 < r < a;\ 0 < \theta < 2\pi;\ 0 < z < L\}$.

Condiciones de contorno:

$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{(a,\theta,z)} = 0$ para $0 < \theta < 2\pi;\ 0 < z < L$,

$u(r,\theta,0) = 0$ para $0 < \theta < 2\pi$,

$u(r,\theta,L) = 0$ para $0 < \theta < 2\pi$.



▶ Clasificación de las EDP de segundo orden.

Consideremos la ecuación diferencial

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + cu_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = 0. \tag{4}$$

Es una ecuación lineal homogénea de segundo orden en dos variables que denotaremos x e y. En el caso más general, los coeficientes a, b, c, d, e, f serán funciones de x e y en algún dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La ecuación (4) puede llevarse a una forma simplificada, denominada ***canónica***, por medio de una transformación lineal. Mostraremos el procedimiento restringiéndonos al caso de coeficientes constantes.

Nos planteamos entonces encontrar un cambio de las variables independientes de la forma

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad \text{con la condición } \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

que reduzca la ecuación (4) a una forma más sencilla. Es simple comprobar (usando la regla de la cadena) que la ecuación diferencial adopta la siguiente expresión en las nuevas variables

$$(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2)u_{\xi\xi} + 2(a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta)u_{\xi\eta} + (a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2)u_{\eta\eta} + \cdots,$$

donde se han explicitado solamente los términos en las derivadas segundas. ***La idea es elegir*** α, β, δ ***y*** γ ***de manera que se anulen tantos términos en derivadas de segundo orden como sea posible.*** Para simplificar, hagamos $\beta = 1$ y $\delta = 1$,

$$(\underbrace{a\alpha^2 + 2b\alpha + c}_{A})\,u_{\xi\xi} + 2(\underbrace{a\alpha\gamma + b(\alpha+\gamma) + c}_{B})\,u_{\xi\eta} + (\underbrace{a\gamma^2 + 2b\gamma + c}_{C})\,u_{\eta\eta} + \cdots \tag{5}$$

Los coeficientes de la ecuación original y los de la ecuación transformada verifican la siguiente relación

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)(\alpha - \gamma)^2. \tag{6}$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de la ecuación

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0; \ \text{ con } \ a \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ecuación característica de la EDP}.$$

Se pueden distinguir tres casos, de acuerdo con el signo del discriminante $D = b^2 - ac$.

Caso 1: $D > 0$. Las raíces λ_1 y λ_2 son reales y distintas. Eligiendo $\alpha = \lambda_1$ y $\gamma = \lambda_2$, los coeficientes A y C se anulan; por (6), $B \neq 0$. La ecuación (5) se reduce a

$$u_{\xi\eta} + \cdots = 0$$

Cuando solo aparecen derivadas segundas en la ecuación (4), se llega a

$$\underbrace{u_{\xi\eta} = 0}_{\text{forma canónica}} \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)}_{\text{integral general}}$$

o, en términos de x e y,

$$u(x, y) = f(y + \lambda_1 x) + g(y + \lambda_2 x) \qquad \rightarrow \qquad \text{la ecuación es hiperbólica.}$$

Caso 2: $D = 0$. Las raíces λ_1 y λ_2 son reales e iguales. En este caso, si se elige $\alpha = \lambda_1$, el coeficiente A se anula; por (6), el coeficiente B se anula también. Luego, es necesario elegir $\gamma \neq \lambda_2$. Cambiando la transformación a

$$\begin{cases} \xi = \lambda_1 x + y \\ \eta = \gamma x \end{cases} \quad \text{con la condición } \ \gamma \neq 0$$

puede probarse que los coeficiente A y B se anulan y que $C = a\gamma^2$.

Suponiendo que $a \neq 0$, se obtiene

$$\underbrace{u_{\eta\eta} = 0}_{\text{forma canónica}} \qquad \rightarrow \qquad \underbrace{u(\xi,\eta) = f(\xi) + \eta g(\xi)}_{\text{integral general}}$$

o, en términos de x e y,

$$u(x,y) = \widetilde{f}(y + \lambda_1 x) + x\widetilde{g}(y + \lambda_1 x) \qquad \rightarrow \qquad \text{la ecuación es parabólica.}$$

Caso 3: $D < 0$. Las raíces λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas. Eligiendo $\alpha = \lambda_1$ y $\gamma = \lambda_2$, los coeficientes A y C se anulan; por (6), $B \neq 0$. En este caso, la transformación es de la forma

$$\rho, \sigma \in \mathbb{R} \quad : \quad \lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = \rho + i\sigma \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \xi = y + (\rho + i\sigma)x \\ \eta = y + (\rho - i\sigma)x \end{cases} .$$

Para no tratar con variables complejas, se introduce un cambio de variable adicional:

$$r = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad s = \frac{\xi - \eta}{2i} \quad \rightarrow \quad \xi = r + is, \quad \eta = r - is;$$

por medio del cual,

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{u_{rr} + u_{ss} = 0}_{\text{forma canónica}} \qquad \rightarrow \qquad \text{la ecuación es elíptica.}$$

Observaciones.

- En coordenadas cartesianas, la expresión

$$(x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  representa geométricamente una hipérbola si $ac - b^2 < 0$, una elipse si $ac - b^2 > 0$ y una parábola si $ac - b^2 = 0$. Ello justifica la terminología empleada.

- Para EDPs con coeficientes constantes, las ecuaciones

$$y + \lambda_1 x = c_1, \quad y + \lambda_2 x = c_2$$

  se denominan ***rectas características de la ED***. Si la ecuación es de tipo hiperbólico, por cada punto del dominio Ω pasan dos rectas características reales y distintas. Si la ecuación es de tipo parabólico, por cada punto de Ω pasa una recta característica real. Las ecuaciones de tipo elíptico no tienen curvas características reales.

Ejemplo 7.

a) Clasifiquemos algunas de las ecuaciones de la Física:

- ecuación de ondas en una dimensión: $u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x,t) \rightarrow b^2 - ac = v^2 > 0 \rightarrow$ la ecuación es hiperbólica,

- ecuación de difusión en una dimensión: $u_t - k\, u_{xx} = f(x,t) \rightarrow b^2 - ac = 0 \rightarrow$ ecuación es parabólica,

- ecuación de Poisson: $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \rightarrow b^2 - ac = -1 < 0 \rightarrow$ la ecuación es elíptica.

b) La ecuación $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = x + y$ es de tipo parabólico ya que $b^2 - ac = 1 - 1 = 0$. En este caso, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \xi & = x + y \\ \eta & = x/2 \end{cases}$$

Luego, la forma canónica será

$$u_{\eta\eta} + 12u = 4\xi.$$

c) La ecuación $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = x^2 y$ es de tipo elíptico ya que $b^2 - ac = 4 - 5 < 0$. En este caso, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 + i \\ \lambda_2 = 2 - i \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \xi & = y + (2+i)x \\ \eta & = y + (2-i)x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r & = y + 2x \\ s & = x \end{cases}$$

Luego, la forma canónica será

$$u_{rr} + u_{ss} = s^2(r - 2s).$$

d) En qué regiones del plano xy la ecuación $yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$ será elíptica, hiperbólica o parabólica?

Calculando el discriminante $b^2 - ac = (-1)^2 - yx = 1 - xy$. Luego, la ecuación es parabólica sobre la curva $xy = 1$, elíptica en las dos regiones convexas $xy > 1$ e hiperbólica en la región conexa $xy < 1$.

⋆ ⋆ ⋆

4. Mostrar que otra forma canónica para la ecuación hiperbólica es $u_{rr} - u_{ss} + \cdots = 0$

   Sugerencia: utilizar el cambio de variables $\begin{cases} \xi & = r + s \\ \eta & = r - s \end{cases}$.

5. Determinar el tipo (elíptico, parabólico, hiperbólico) de cada una de las siguientes ecuaciones y llevarlas a la forma canónica.
   (a) $u_{yy} - 3u_{yx} + 2u_{xx} = 0$
   (b) $4u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$
   (c) $u_{yy} - 2cu_{yx} + c^2 u_{xx} = 0$
   (d) $3u_{xx} + 5u_{xy} - u_x = e^x$

6. De qué tipo es la ecuación $4u_{yy} - 4u_{yx} + u_{xx} = 0$? Comprobar, por sustitución directa que, para f y g funciones arbitrarias suficientemente regulares, $u(x, y) = f(y + 2x) + xg(y + 2x)$ es una solución de la ED.

7. Clasificar las siguientes ecuaciones
   (a) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$
   (b) $(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$

⋆ ⋆ ⋆

▶ El método de separación de variables.

El método de separación de variables es una técnica clásica y eficaz para resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales. La idea, a grandes rasgos, es la siguiente: pensamos a la solución $u(\mathbf{x},t)$ de una ecuación diferencial parcial como una combinación lineal infinita de funciones componente sencillas $u_n(\mathbf{x},t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, que satisfacen la ecuación y ciertas condiciones en la frontera. Esta hipótesis es razonable si la ecuación diferencial parcial y las condiciones en la frontera son lineales y homogéneas. Para determinar una solución componente $u_n(\mathbf{x},t)$, se supone que puede escribirse con sus variables separadas; es decir,

$$u_n(\mathbf{x},t) = X_n(\mathbf{x})T_n(t).$$

Al sustituir esta forma de solución en la ecuación diferencial parcial y usar las condiciones en la frontera se obtiene, en muchos casos, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de las funciones incógnitas $X_n(\mathbf{x})$ y $T_n(t)$. De esta forma, se reduce el problema de resolver una ecuación diferencial parcial al problema (familiar) de resolver varias ecuaciones diferenciales que sólo implican una variable.

El método de separación de variables (MSV) fue desarrollado por J. Fourier para su tesis doctoral ***Théorie analytique de la chaleur*** (1822). Desde entonces, se han elaborado varios métodos para resolver EDPs. Sin embargo, el MSV sigue siendo uno de los métodos más importantes y frecuentemente utilizado.

A continuación introduciremos el MSV aplicándolo en la resolución de varios PVFs.

Ejemplo 8. Ecuación de difusión en una dimensión.

Resolver el problema diferencial: *encontrar $u(x,t)$ tal que:*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = 0 \quad & \textit{en } (0,L)\times(0,\infty), && (7)\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad & \textit{en } (0,\infty), && (8)\\ u(x,0) = \zeta(x) \quad & \textit{en } (0,L). && (9)\end{aligned}$$

El MSV es un método sistemático que procede por pasos.

Primer paso. Se deja de lado la condición inicial (9) y se buscan soluciones particulares para las ecuaciones (7)-(8) de la forma

$$u(x,t) = w(x)v(t); \quad \text{donde} \begin{cases} w : (0,L) \to \mathbb{R}, & w(0) = w(L) = 0, \\ v : (0,\infty) \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{10}$$

Reemplazando en (7); se obtiene

$$v'(t)w(x) - v(t)w''(x) = 0 \quad \text{en} \quad (0,L)\times(0,\infty);$$

donde las primas indican diferenciación con respecto a las variables independientes, ya sea x o t. Suponiendo que $v \neq 0$ y $w \neq 0$,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Se observa que el lado izquierdo solo depende de $t > 0$ y el lado derecho solo depende de $x \in (0,L)$. Como x y t son variables independientes entre sí, se concluye que ambos cocientes deben ser constantes. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda \qquad \to \qquad \begin{array}{l} v'(t) + \lambda\, v(t) = 0 \quad t \in (0,\infty) \\[1em] \begin{cases} w''(x) + \lambda\, w(x) = 0 & x \in (0,L) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases} \end{array}$$

Observación. La suposición (10) conduce a reemplazar la EDP (7) por dos EDOs. Cada una de estas ecuaciones es lineal, homogénea y a coeficientes constantes; por lo tanto, pueden resolverse fácilmente para cualquier valor de λ. Sin embargo, sólo son de interés aquellas soluciones que también satisfacen las condiciones de borde (8). Como se verá a continuación, esto restringe severamente los valores posibles para λ.

Segundo paso. Se resuelve la ecuación que depende de las variables espaciales. En este caso,

$$\begin{cases} w''(x) + \lambda\, w(x) = 0 & x \in (0, L) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{problema de autovalores para el operador } -\dfrac{d^2}{dx^2} \\ \text{con condición de borde de Dirichlet}\end{array}$$

La solución general de esta ecuación viene dada por:

si $\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad w(x) = Ax + B$, con $A,\ B \in \mathbb{R}$,

si $\lambda < 0 \quad \rightarrow \quad w(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}$, con $A,\ B \in \mathbb{R}$,

si $\lambda > 0 \quad \rightarrow \quad w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, con $A,\ B \in \mathbb{R}$.

El único caso viable es $\lambda > 0$ ya que, al aplicar las condiciones de contorno, permite soluciones no triviales. Entonces, imponiendo las condiciones en la frontera del dominio, encontramos

$$w(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$w(L) = B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\lambda}L = k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2;\ \ k \in \mathbb{Z}}_{\text{autovalores}}$$

Luego,

$$w_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x) = \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right);\ \ k \in \mathbb{N}}_{\text{autofunciones}}$$

Tercer paso. Se resuelve la ecuación que depende de la variable temporal. En este caso,

$$v'(t) + \lambda_k\, v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad v(t) = c\, e^{-\lambda_k t};\ \ c \in \mathbb{R} \text{ es una constante.}$$

Cuarto paso. Se determina una solución particular. Combinando los resultados obtenidos, se llega a

$$u_k(x,t) = w_k(x)v_k(t) = e^{-\lambda_k t}\sin(\sqrt{\lambda_k}x); \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2;\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que el problema de difusión es lineal, es claro que cualquier combinación lineal de soluciones particulares $\{u_k(x,t)\}_{k\geq 1}$ será también solución de (7)-(8). Luego, resulta natural proponer como solución

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k u_k(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k e^{-\lambda_k t}\sin(\sqrt{\lambda_k}x); \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2. \tag{11}$$

Quinto paso. Se impone la condición inicial. Formalmente, si se reemplaza $t = 0$ en la serie (11) y se tiene en cuenta (9), se obtiene

$$\zeta(x) = u(x,0) = \sum_{k\geq 1} c_k u_k(x,0) = \sum_{k\geq 1} c_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x); \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2.$$

Si $\zeta(x)$ es una función integrable en $[0, L]$; podemos identificar los coeficientes c_k con los coeficientes de Fourier de la función $\zeta(x)$ (extendida en forma impar al intervalo $(-L, 0)$). Haciendo esto, tendremos

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L \zeta(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx; \quad k = 1, 2, \cdots$$

Dado que $\zeta(x)$ está acotada, se deduce que los coeficientes c_k también estarán acotados. En consecuencia, la presencia del factor exponencial negativo en cada término de la serie (11) garantiza que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

para todo x, independientemente de la condición inicial. Esto está de acuerdo con el resultado esperado para un proceso de difusión.

Justificación del procedimiento. Si los coeficientes c_k son tales que la convergencia de la serie (11) permite intercambiar la diferenciación con la suma, entonces $u(x,t)$ será solución de (7)-(8). El siguiente lema será de gran utilidad para probar esta convergencia.

Lema I. *Sea $M > 0$ tal que $|c_k| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la función $u(x,t)$ definida por la expresión (11) es $\mathcal{C}^\infty([0,\ell]\times[\epsilon,\infty))$ para todo $\epsilon > 0$ y sus derivadas se calculan derivando término a término la serie.*

Un razonamiento riguroso sería el siguiente: se define los coeficientes c_k como los coeficientes de Fourier de la función $\zeta(x)$ (extendida en forma impar al intervalo $(-L,0)$). Dado que

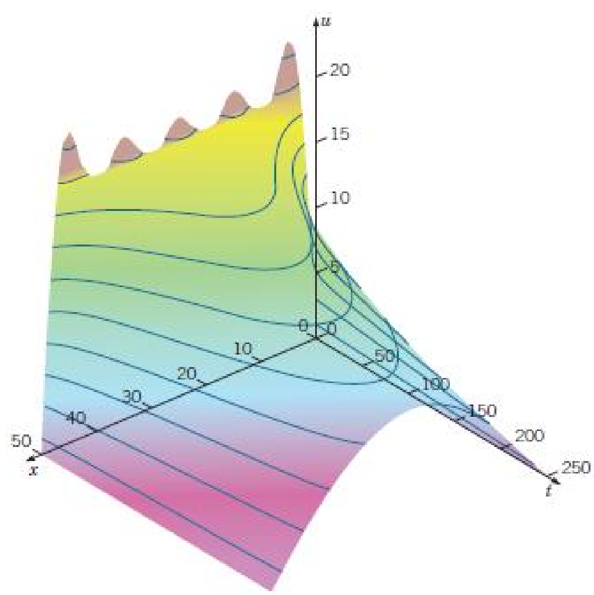
$$|c_k| < \frac{2}{L}\sup_{x\in[0,L]}|\zeta(x)||L| < \infty;$$

definiendo la función $u(x,t)$ por la expresión (11), las conclusiones del Lema I son válidas. Por lo tanto, $u(x,t)$ es una solución del problema (7)-(9).

En particular, si $L = 50$ y $f(x) = 20$, la solución (11) toma la forma

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{e^{-\lambda_k t}}{2k-1}\sin(\sqrt{\lambda_k}x); \qquad \lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{2500}.$$

Esta expresión para la solución resulta bastante complicada, pero el factor exponencial provoca que la serie converja rápidamente, excepto para valores pequeños de t. En la siguiente figura, se muestra la gráfica de $u(x,t)$ usando los diez primeros términos del desarrollo.



⋆ ⋆ ⋆

8. Encuentre la solución de los siguientes problemas diferenciales.

(a) $\begin{array}{l} 2u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(4,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ 4 - x, & 2 < x < 4 \end{cases} \end{array}$

(b) $\begin{array}{l} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\sin\left(\dfrac{5\pi x}{2L}\right) - 4\sin\left(\dfrac{9\pi x}{2L}\right), \quad 0 < x < L \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} 9u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ |u(x,t)| < M, \quad x \to \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases} \end{array}$

(d) $\begin{array}{l} 4u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ |u(x,t)| < M, \quad x \to \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \end{array}$

9. Considere el siguiente problema con valores en la frontera

$$u_t - \kappa\, u_{xx} = 0 \quad \text{en } (0,L) \times (0,\infty), \tag{12}$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad \text{en } (0,\infty), \tag{13}$$
$$u(x,0) = \zeta(x) \quad \text{en } (0,L). \tag{14}$$

Este problema modela la variación de temperatura $u(x,t)$ en una barra, de longitud L, que se extiende a lo largo del eje x. Se considera que la barra está hecha de un material homogéneo con coeficiente de conductividad térmica κ. Se asume que la sección transversal de la barra es tan pequeña que la temperatura es constante en cada sección transversal. Se asume también que la superficie lateral de la barra está aislada de tal manera que el calor no puede pasar a través de ella. De este modo, el calor fluye únicamente a lo largo de la barra en la dirección x. La temperatura inicial en la barra es $\zeta(x)$ y sus dos extremos están aislados.

(a) Usando el MSV, mostrar que las funciones producto que satisfacen (12)-(13) son

$$\lambda_0 = 0, \quad u_0(x,t) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad u_k(x,t) = e^{-\kappa\lambda_k t}\cos\sqrt{\lambda_k}x; \quad k = 1, 2, \cdots$$

(b) Mostrar que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \zeta(x)\,dx$. Interpretar físicamente el resultado.

10. Considere el problema con valores en la frontera

$$u_t - \kappa\, u_{xx} = 0 \quad \text{en } (0,L) \times (0,\infty), \tag{15}$$
$$u(0,t) = T_1 \quad \text{en } (0,\infty), \tag{16}$$
$$u(L,t) = T_2 \quad \text{en } (0,\infty), \tag{17}$$
$$u(x,0) = \zeta(x) \quad \text{en } (0,L). \tag{18}$$

(a) Se observa empíricamente que, conforme $t \to +\infty$, $u(x,t)$ tiende a la temperatura estacionaria $u_E(x)$ que corresponde a la solución del problema (15)-(17) haciendo $u_t(x,t) = 0$. De este modo, $u_E(x)$ es la solución del siguiente problema con valores en la frontera

$$\frac{d^2 u_E}{dx^2} = 0, \quad u_E(0) = T_1, \quad u_E(L) = T_2.$$

Encontrar $u_E(x)$.

(b) La temperatura transitoria $u_T(x,t)$ se define por medio de la diferencia

$$u_T(x,t) = u(x,t) - u_E(x).$$

Mostrar que $u_T(x)$ satisface el siguiente problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{en } (0,L) \times (0,\infty), \\ u_T(0,t) = u_T(L,t) &= 0 \qquad \text{en } (0,\infty), \\ u_T(x,0) = \zeta(x) - u_E(x) & \qquad \text{en } (0,L). \end{aligned}$$

(c) Usando el MSV, mostrar que

$$u_T(x,t) = \sum_{k \geq 1} c_k e^{-\kappa \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

donde

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad c_k = \frac{2}{L} \int_0^L (\zeta(x) - u_E(x)) \sin \sqrt{\lambda_k} x \, dx; \quad k = 1, 2, \cdots$$

⋆ ⋆ ⋆

Ejemplo 9. Ecuación de ondas en una dimensión.

Se considera una cuerda estirada e inicialmente en reposo. El extremo en $x = 0$ es parcialmente libre (lo que permite que la cuerda se deslice sin fricción a lo largo de la línea vertical $x = 0$) mientras que el extremo en $x = L$ se encuentra fijo. Las vibraciones de la cuerda bajo la influencia de la fuerza de gravedad $f(x) = -\rho g$ son soluciones del siguiente problema diferencial: *encontrar $u(x,t)$ tal que:*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = -g \quad (0,L) \times (0,\infty) \tag{19}$$

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t \in [0,\infty) \tag{20}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad x \in [0,L] \tag{21}$$

El problema es inhomogéneo; por consiguiente, no podremos separar las variables como en el Ejemplo 8. Cuando la ED es lineal, una manera de tratar con problemas inhomogéneos es pensar a la solución como la suma de dos partes

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t). \tag{22}$$

Para encontrar $v(x)$ y $w(x,t)$ impondremos que

- $v(x)$ $\rightarrow$ solución de una EDO no homogénea que satisfaga condiciones homogéneas de borde,
- $w(x,t)$ $\rightarrow$ solución de una EDP homogénea con condiciones de borde e iniciales a determinar.

Reemplazando (22) en la ecuación (19), se obtiene

$$w_{tt}(x,t) - a^2(v''(x) + w_{xx}(x,t)) = -g \quad \rightarrow \quad \underbrace{w_{tt}(x,t) - a^2 w_{xx}(x,t)}_{\text{se pide igual a cero}} - a^2 v''(x) = -g.$$

Por lo tanto, $v(x)$ queda determinada por

$$\left.\begin{array}{lll} -a^2 v''(x) = -g & \rightarrow & v(x) = \dfrac{g}{2a^2}\, x^2 + Ax + B; \quad A, B \in \mathbb{R} \\ v'(0) = 0 & \rightarrow & A = 0, \\ v(L) = 0 & \rightarrow & \dfrac{g}{2a^2}\, L^2 + B = 0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad v(x) = -\frac{g}{2a^2}(L^2 - x^2).$$

Para determinar $w(x,t)$ se deben especificar condiciones de borde y condiciones iniciales apropiadas; para hallarlas, se reemplaza (22) y la expresión de $v(x)$, recién encontrada, en las ecuaciones (20)-(21). Haciendo esto, se tiene

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_x(0,t) = 0 & \rightarrow & v'(0) + w_x(0,t) = 0 + w_x(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 & \rightarrow & v(L) + w(L,t) = 0 + w(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 & \rightarrow & v(x) + w(x,0) = -\dfrac{g}{2a^2}(L^2 - x^2) + w(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 & \rightarrow & 0 + w_t(x,0) = 0 \end{array}\right.$$

En consecuencia, $w(x,t)$ será solución del siguiente problema con valores en la frontera

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \quad (0,L) \times (0,\infty) \tag{23}$$

$$w_x(0,t) = w(L,t) = 0 \qquad t \in [0,\infty) \tag{24}$$

$$w_t(x,0) = 0 \qquad x \in [0,L] \tag{25}$$

$$w(x,0) = \frac{g}{2a^2}(L^2 - x^2) \qquad x \in [0,L] \tag{26}$$

Aplicaremos el MSV para hallar la solución del problema (23)-(26).

Primer paso. Se deja de lado la condición inicial (26) y se buscan soluciones particulares para las ecuaciones (23)-(25) de la forma

$$w(x,t) = \alpha(x)\beta(t); \quad \text{donde} \left\{\begin{array}{ll} \alpha : (0,L) \to \mathbb{R} & \text{verifica } \alpha'(0) = \alpha(L) = 0, \\ \beta : (0,\infty) \to \mathbb{R} & \text{verifica } \beta'(0) = 0. \end{array}\right.$$

Reemplazando en (23); se tiene

$$\alpha(x)\beta''(t) - a^2\alpha''(x)\beta(t) = 0 \quad \text{en} \quad (0,L) \times (0,\infty).$$

Suponiendo que $\alpha(x) \neq 0$ y $\beta(t) \neq 0$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)}.$$

Como el lado izquierdo solo depende de $t > 0$ y el lado derecho solo depende de $x \in (0,L)$, se concluye que ambos cocientes deben ser iguales a una constante. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{a^2}\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = -\lambda \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} \alpha''(x) + \lambda\,\alpha(x) = 0 & x \in (0,L) \\ \alpha'(0) = \alpha(L) = 0 \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{ll} \beta''(t) + a^2\lambda\,\beta(t) = 0 & t \in (0,\infty) \\ \beta'(0) = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Segundo paso. Se resuelve la ecuación que depende de la variable espacial. En este caso,

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha''(x) + \lambda\,\alpha(x) = 0 & x \in (0,L) \\ \alpha'(0) = \alpha(L) = 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{problema de autovalores para el operador } -\dfrac{d^2}{dx^2} \\ \text{con condición de borde mixta} \end{array}$$

Para $\lambda > 0$ la solución es de la forma

$$\alpha(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno, se tiene

$$\alpha'(0) = -A\sqrt{\lambda}\sin 0 + B\sqrt{\lambda}\cos 0 = 0 \quad \to \quad B = 0,$$

$$\alpha(L) = A\cos(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \to \quad \sqrt{\lambda}L = (k+\tfrac{1}{2})\pi;\ k \in \mathbb{Z} \quad \to \quad \underbrace{\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4L^2};\ k \in \mathbb{Z},}_{\text{autovalores}}$$

$$\alpha(x) = \alpha_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}x) = \underbrace{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L};\ k \in \mathbb{N}.}_{\text{autofunciones}}$$

Tercer paso. Se resuelve la ecuación que depende de la variable temporal. En este caso,

$$\begin{cases} \beta''(t) + a^2\lambda_k\,\beta(t) = 0 & t \in (0,\infty) \\ \beta'(0) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \beta_k(t) = C\,\cos(a\sqrt{\lambda_k}t); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L};\ k \in \mathbb{N}.$$

Cuarto paso. Se determina una solución particular. Combinando los resultados obtenidos, se llega a

$$w_k(x,t) = \alpha_k(x)\beta_k(t) = \cos(\sqrt{\lambda_k}x)\cos(a\sqrt{\lambda_k}t); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L};\ k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que el problema de ondas es lineal, es claro que cualquier combinación lineal de sus soluciones particulares $\{w_k(x,t)\}_{k\geq 0}$ será también solución de (23)-(25). Luego, resulta natural proponer como solución

$$w(x,t) = \sum_{k\geq 0} c_k w_k(x,t) = \sum_{k\geq 0} c_k\cos(\sqrt{\lambda_k}x)\cos(a\sqrt{\lambda_k}t); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L}. \tag{27}$$

Quinto paso. Se impone la condición inicial restante. Formalmente, si se reemplaza $t = 0$ en la serie (27) y se tiene en cuenta (26), se obtiene

$$\underbrace{\frac{g}{2a^2}(L^2 - x^2)}_{\zeta(x)} = w(x,0) = \sum_{k\geq 0} c_k w_k(x,0) = \sum_{k\geq 0} c_k\cos(\sqrt{\lambda_k}x); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L}.$$

Como $\zeta(x)$ es una función $\mathcal{C}^\infty([0,L])$ y $\zeta'(0) = \zeta(L) = 0$, el ***Teorema del desarrollo*** asegura que la serie (27), con los coeficientes dados por

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^L \zeta(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L (\cos\sqrt{\lambda_k}x)^2\,dx} = \frac{2}{L}\int_0^L \zeta(x)\cos(\sqrt{\lambda_k}x)\,dx = \frac{4}{L}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^{3/2}}; \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L}, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

será absoluta y uniformemente convergente a $\zeta(x)$ en $[0,L]$. Además,

$$|c_k| = \frac{4}{L}\left|\frac{(-1)^k}{\lambda_k^{3/2}}\right| = \frac{4}{L}\,\frac{8L^3}{(2k+1)^3\pi^3} \leq \underbrace{\frac{32L^2}{\pi^3}}_{M}; \quad k = 0,1,2,\cdots$$

y; por lo tanto, valen las conclusiones del Lema I. Finalmente, la solución buscada será

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) = -\frac{g}{2a^2}(L^2 - x^2) + \frac{4}{L}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^{3/2}}\cos(\sqrt{\lambda_k}x)\,\cos(a\sqrt{\lambda_k}t); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L}.$$

⋆ ⋆ ⋆

11. Resolver el siguiente problema diferencial.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0,\\
&u_x(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u_x(L,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = 2 + 4\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 6\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad 0 \le x \le L,\\
&u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L.
\end{aligned}
$$

12. El siguiente problema diferencial tiene condiciones homogéneas de borde y condiciones iniciales generales.

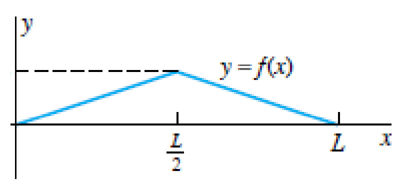
$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0,\\
&u(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi,\\
&u_t(x,0) = \sin 7\pi x, \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}
$$

Mostrar que la solución puede construirse como la suma $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ siendo $v(x,t)$ y $w(x,t)$, respectivamente, las soluciones de los siguientes PVFs.

$$
\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0, && w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0,\\
&v(0,t) = 0, \quad t > 0, && w(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&v(\pi,t) = 0, \quad t > 0, && w(\pi,t) = 0, \quad t > 0,\\
&v(x,0) = x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi, && w(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,\\
&v_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. && w_t(x,0) = \sin 7\pi x, \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}
$$

Aplicando esta metodología, encontrar $u(x,t)$. (***Este es otro uso del principio de superposición***).

13. En la figura se muestra la posición inicial $f(x)$ de una cuerda de longitud L que se encuentra en tensión y fija en sus extremos. Si la cuerda se libera a partir del reposo, encontrar el desplazamiento $u(x,t)$ de la cuerda para $t > 0$.



14. Usar el MSV para obtener una solución formal del ***problema del telégrafo***.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} + u_t + u = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0,\\
&u(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(L,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \zeta(x), \quad 0 \le x \le L,\\
&u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L.
\end{aligned}
$$

⋆ ⋆ ⋆

Al estudiar procesos estacionarios o independientes del tiempo de distinta naturaleza física se obtienen; por lo general, ecuaciones de tipo elíptico. La ecuación de este tipo más conocida es la ecuación de Laplace

$$\triangle u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace en una región Ω se denominan ***funciones armónicas*** en Ω.

La ecuación de Laplace se satisface (en un espacio vacío) por funciones potenciales gravitacionales y eléctricas. También se satisface por la función de potencial de velocidad para el flujo no rotacional en estado permanente de un fluido incompresible y no viscoso. En elasticidad, los desplazamientos que ocurren cuando una barra perfectamente elástica se tuerce se describen en términos de la llamada función de deformación, que también satisface la ecuación de Laplace.

Dado que no existe dependencia con el tiempo en ninguno de los problemas que acabamos de mencionar, no hay condiciones iniciales que se deban satisfacer. Para determinar la solución en cada caso sólo se deben especificar condiciones apropiadas en la frontera del dominio donde está defindo el problema diferencial.

Hay dos tipos básicos de condiciones en la frontera que usualmente se asocian con la ecuación de Laplace: condiciones de tipo ***Dirichlet*** y las condiciones de tipo ***Neumann***.

Ejemplo 10. Ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Resolver el siguiente problema diferencial: *encontrar* $u(x, y)$ *tal que:*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0, a) \times (0, b) \tag{28}$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0 \qquad x \in (0, a) \tag{29}$$

$$u(0, y) = 0 \qquad y \in (0, b) \tag{30}$$

$$u(a, y) = \zeta(y) \qquad y \in (0, b) \tag{31}$$

La solución de este problema podría describir la distribución estacionaria de la temperatura en una placa de dimensiones $a \times b$ con tres de sus lados a temperatuta cero y un lado en contacto con una fuente que se encuentra a temperatura $\zeta(y)$. Aplicaremos el MSV para resolver este problema.

Primer paso. Se deja de lado la condición de contorno no homogénea (31) y se buscan soluciones particulares para las ecuaciones (28)-(30) de la forma

$$u(x, y) = v(x)w(y) \quad \text{donde} \left\{ \begin{array}{ll} v : (0, a) \to \mathbb{R} & \text{verifica } v(0) = 0, \\ w : (0, b) \to \mathbb{R} & \text{verifica } w(0) = w(b) = 0. \end{array} \right.$$

Reemplazando en (28); se tiene

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0;$$

de donde, suponiendo que $v(x) \neq 0$ y $w(y) \neq 0$,

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Como el lado izquierdo solo depende de $x \in (0, a)$ y el lado derecho solo depende de $y \in (0, b)$, se concluye que ambos deben ser contantes. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} v''(x) - \lambda\, v(x) = 0 & x \in (0, a) \\ v(0) = 0 \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} w''(y) + \lambda\, w(y) = 0 & y \in (0, b) \\ w(0) = w(b) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Segundo paso. Se resuelve la ecuación que tiene especificadas todas las condiciones de frontera necesarias para su determinación. En este caso,

$$\left\{\begin{array}{l} w''(y) + \lambda\, w(y) = 0 \quad x \in (0,b) \\ w(0) = w(b) = 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{problema de autovalores para el operador } -\dfrac{d^2}{dy^2} \\ \text{con condición de Dirichlet}\end{array}$$

Para $\lambda > 0$ la solución es de la forma

$$w(y) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda} y) + B_1 \sin(\sqrt{\lambda} y), \ \text{ con } \ A_1, B_1 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno, se tiene

$$w(0) = A_1 \cos 0 + B_1 \sin 0 = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0,$$

$$w(b) = B_1 \sin(\sqrt{\lambda} b) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\lambda} b = k\pi; \ \ k = 1, 2, \cdots \quad \rightarrow \quad \underbrace{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2; \ \ k =, 1, 2, \cdots,}_{\text{autovalores}}$$

$$w(y) = w_k(y) = \sin(\sqrt{\lambda_k} y) = \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right); \ \ k = 1, 2, \cdots.}_{\text{autofunciones}}$$

Tercer paso. Se resuelve la ecuación diferencial restante. En este caso,

$$\left\{\begin{array}{l} v''(x) - \lambda_k\, v(x) = 0 \quad x \in (0,a) \\ v(0) = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$$

La solución general de esta ecuación es

$$v_k(x) = A_2 e^{\sqrt{\lambda_k} x} + B_2 e^{-\sqrt{\lambda_k} x}, \ \text{ con } \ A_2, B_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo la condición en el extremo $x = 0$, se tiene

$$A_2 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad B_2 = -A_2;$$

de donde

$$v_k(x) = A_2 \left(e^{\sqrt{\lambda_k} x} - e^{-\sqrt{\lambda_k} x}\right) = 2A_2 \sinh \sqrt{\lambda_k} x.$$

Cuarto paso. Se determina una solución particular. Combinando los resultados obtenidos, se llega a

$$u_k(x,t) = v_k(x) w_k(y) = \sinh(\sqrt{\lambda_k} x)\, \sin(\sqrt{\lambda_k} y); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{b}; \ \ k = 1, 2, \cdots$$

Teniendo en cuenta que el operador de Laplace es lineal, es claro que cualquier combinación lineal de sus soluciones particulares $\{u_k(x,y)\}_{k \geq 1}$ será también solución de (28)-(30). Luego, resulta natural proponer como solución

$$u(x,y) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k u_k(x,y) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k \ \sinh(\sqrt{\lambda_k} x)\, \sin(\sqrt{\lambda_k} y); \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{b}. \tag{32}$$

Quinto paso. Se impone la condición de frontera restante. Formalmente, si se reemplaza $x = a$ en la serie (32) y se tiene en cuenta (31), se obtiene

$$\zeta(y) = u(a,y) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k u_k(a,y) = \sum_{k \geq 1} \underbrace{\gamma_k \sinh\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}_{c_k} \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right).$$

Asumiendo que $\zeta(y)$ es una función suave a trozos en $[0, b]$, por el ***Teorema del desarrollo***, podemos identificar los coeficientes c_k con los coeficientes de Fourier de la función $\zeta(y)$ (extendida en forma impar al intervalo $(-b, 0)$). Haciendo esto, tendremos

$$c_k = \frac{2}{b}\int_0^b \zeta(y)\sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)dx; \quad k = 1, 2, \cdots$$

De esta manera, queda determinada una solución formal del problema de Laplace-Dirichlet (28)-(31).

En particular, si los datos fueran $a = 3$, $b = 2$ y $\zeta(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$, se tendría

$$c_k = \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}; \quad k = 1, 2, \cdots \qquad \rightarrow \qquad c_{2k} = 0, \quad c_{2k-1} = \frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}; \quad k = 1, 2, \cdots$$

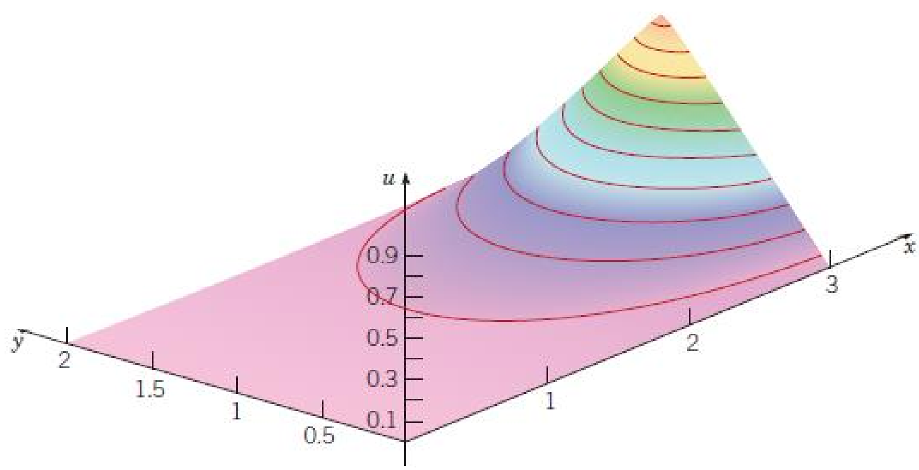
En este caso, la serie (32) adopta la forma

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\frac{\sinh\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]\sin\left[\frac{(2k-1)\pi y}{2}\right]}{\sinh\left[\frac{3(2k-1)\pi}{2}\right]}. \tag{33}$$

Observemos que el k-ésimo término de esta serie puede acotarse por

$$\left|\frac{\pi^2}{4}\frac{(-1)^k}{\lambda_k}\frac{\sinh(\sqrt{\lambda_k}x)\sin(\sqrt{\lambda_k}y)}{\sinh(3\sqrt{\lambda_k})}\right| \leq \pi\frac{e^{-\sqrt{\lambda_k}(3-x)}}{\lambda_k}, \qquad \sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k-1)\pi}{2}; \quad k = 1, 2, \cdots$$

Este comportamiento de exponencial negativo, hace que la serie (33) converja muy rápidamente. En la siguiente figura, se muestra la suma de los primeros 20 términos de esta serie.



El problema diferencial: *encontrar* $u(x)$ *tal que*

$$\begin{cases} \triangle u = f & en\ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{34}$$

se concoce como ***problema de Laplace-Neumann en*** Ω o, simplemente, ***problema de Neumann en*** Ω. Para que el problema de Neumann tenga solución, los datos deben ser ***compatibles*** en el sentido indicado por el siguiente lema.

Lema II. Sea Ω un dominio acotado con borde regular. Si el problema de Neumann (34) tiene una solución $u(x)$, entonces

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(s)\,ds.$$

Prueba. Para demostrar este resultado, usaremos la segunda identidad de Green

$$\int_\Omega (v\triangle u - u\triangle v)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right) ds \qquad u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega).$$

Supongamos que la solución del problema de Neumann en Ω sea una función en $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$. Eligiendo $v \equiv 1$, la fórmula de Green nos conduce directamente al resultado; en efecto, tendremos

$$\int_\Omega \underbrace{\triangle u}_{f(x)}\ dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}_{g(s)}\ ds$$

⋆ ⋆ ⋆

15. Encuentre la función armónica $u(x,y)$ en el rectángulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, sujeta a las condiciones de contorno:

(a) $$\begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(x,b) = g(x), & 0 \le x \le a. \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{ll} u_x(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u_x(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u_y(x,0) = 0, & 0 \le x \le a \\ u_y(x,b) = \xi(x), & 0 \le x \le a \end{array}$$

Por qué debe ser $\displaystyle\int_0^a \xi(x)dx = 0$?

16. ⋆ Hallar una función armónica en la región $0 < x+y < 1$, $0 < x-y < 1$ que satisfaga las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{array}{l} u(x,-x) = 0 \\ u(x,1-x) = 0 \\ u(x,x-1) = 0 \\ u(x,x) = x(1-2x) \end{array}$$

Ayuda: Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *la matriz de rotación en* $\mathbb{R}^2$. *Si* $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\widehat{\triangle} u(\widehat{x},\widehat{y}) = \triangle u(x,y)$. ***Esto significa que el operador de Laplace es invariante bajo rotaciones.***

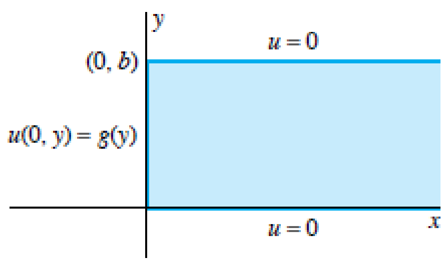
17. Sea Ω el dominio rectangular $(0,\pi)\times(0,2\pi)$. El borde de Ω se describe como la unión disjunta de los conjuntos frontera Γ_D y Γ_N; es decir, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ con $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Sobre Ω se define el problema diferencial: *encontrar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \neq 0$ *tal que*

$$\left\{\begin{array}{rl} -\triangle u + u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \lambda u & \text{en } \Gamma_N. \end{array}\right.$$

Este problema se conoce como ***problema de autovalores de Schrödinger-Steklov***; nótese que el parámetro que determina los autovalores aparece en la condición de borde. Encontrar las autofunciones y los autovalores del problema de Steklov cuando el borde Γ_N es el lado ubicado en $y = 2\pi$.

18. Sea R el dominio no acotado que se muestra en la figura. Resolver el siguiente PVF:

$$\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b \\ u(0,y) = g(y) = \left\{\begin{array}{ll} y, & 0 < y < b/2 \\ b - y, & b/2 < y < b \end{array}\right. \\ u(x,y) \to 0, \quad x \to \infty \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(x,b) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{array}$$



19. Resolver el siguiente PVF.

$$\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b \\ u(0,y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ |u(x,y)| < M, \quad x \to \infty, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(x,b) = g(x) = \left\{\begin{array}{ll} 10, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{array}\right. \end{array}$$

Indicación: mostrar que

$$u(x,y) = \int_0^\infty A(\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}x)\,\sinh(\sqrt{\lambda}y)\,d\lambda, \quad A(\lambda) = \frac{2G_s(\lambda)}{\sinh(\sqrt{\lambda}b)}$$

donde $G_s(\lambda) = \mathcal{F}_s[g(x)]$ *indica la transformada seno de Fourier de* $g(x)$.

⋆ ⋆ ⋆

▶ Armónicos circulares.

Para problemas que implican dominios circulares, por lo general, es más conveniente usar coordenadas polares. Puede probarse que, en coordenadas polares (r, θ), la ecuación de Laplace adopta la forma:

$$\triangle_{r\theta} u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0. \tag{35}$$

La solución general de esta ecuación se puede encontrar utilizando el MSV. Suponiendo $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y reemplazando en (35), se obtiene

$$\frac{r^2 R''(r) + rR(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

Debido a que (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ son las coordenadas polares de un mismo punto, se impone sobre $u(r, \theta)$ la condición de periodicidad

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \quad \text{para todo } \theta;$$

esto jugará el rol de una condición de frontera homogénea. Por lo tanto, eligiendo $\lambda = n^2$, con $n = 0, 1, 2, \cdots$, tendremos

$$\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \Theta(\theta) = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

La ecuación para $R(r)$ se convierte en

$$\underbrace{r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0}_{\text{ED de Euler}} \qquad \rightarrow \qquad R(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & n = 0 \\ c_n r^n + \dfrac{d_n}{r^n}, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Finalmente, la solución general será la combinación lineal de todas las soluciones parciales encontradas; esto es,

$$u(r, \theta) = (c_0 + d_0 \ln r) + \sum_{n \geq 1} (c_n r^n + \frac{d_n}{r^n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

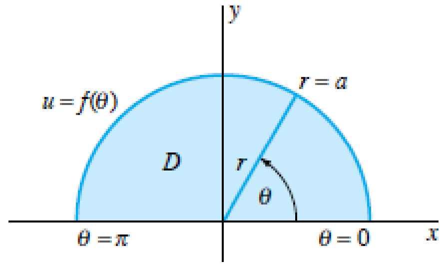
⋆ ⋆ ⋆

20. Encontrar la distribución de temperatura estacionaria en la placa semicircular de radio a que se muestra en la figura, sujeta a las condiciones de contorno que se indican

(a) $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$; *Indicación: mostrar que* $u(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} \gamma_n r^n \sin n\theta$,

(b) $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$; *Indicación: mostrar que* $u(r, \theta) = \gamma_0 + \sum_{n \geq 1} \gamma_n r^n \cos n\theta$,

(c) $u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$; *Indicación: mostrar que* $u(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} \gamma_n r^{(2n-1)/2} \sin \dfrac{(2n-1)\theta}{2}$.



21. Encontrar la función armónica $u(x,y)$ en la región exterior al círculo de radio a sujeta a las condiciones de contorno $\begin{cases} u(a,\theta) = g(\theta) \\ \lim\limits_{r\to\infty} |u(r,\theta)| < \infty \end{cases}$.

    Indicación: mostrar que $\quad u(r,\theta) = a_0 + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}{r^n}$.

22. Encontrar una solución del siguiente problema diferencial:

$$\begin{array}{ll} \triangle u = 0, & 1 < r < 3,\ 0 < \theta < 2\pi, \\ u(1,\theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi, \\ u(3,\theta) = \cos 3\theta + \sin 5\theta, & 0 < \theta < 2\pi. \end{array}$$

23. Un anillo conductor de radio a está cargado hasta el potencial

$$V(\theta) = \begin{cases} V_1 & \text{si} \quad 0 < \theta < \pi, \\ V_2 & \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

donde V_1 y V_2 son constantes. Hallar el campo eléctrico dentro y fuera del anillo.

Indicación: mostrar primero que el potencial electrostático está dado por

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{V_1 + V_2}{2} + \dfrac{2(V_1 - V_2)}{\pi} \sum\limits_{k\geq 0} \left(\dfrac{r}{a}\right)^{2k+1} \dfrac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} & \textit{para} \quad r < a, \\ \dfrac{V_1 + V_2}{2} + \dfrac{2(V_1 - V_2)}{\pi} \sum\limits_{k\geq 0} \left(\dfrac{a}{r}\right)^{2k+1} \dfrac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} & \textit{para} \quad r > a. \end{cases}$$

Luego, recordar que $\mathbf{E}(x,y) = -\boldsymbol{\nabla} V(x,y)$ *y tener en cuenta el siguiente resultado.*

Teorema. Supongamos que

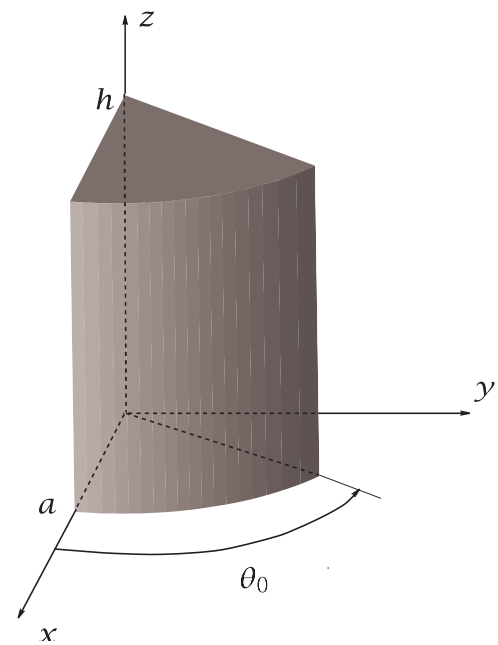
(a) $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x,y)$ converge uniformemente a $F(x,y)$ en un dominio R,

(b) $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ existen para todo n,

(c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ converge a $G(x,y)$ y $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\partial f_n}{\partial y}$ converge a $H(x,y)$, en ambos casos, uniformemente en R.

Entonces, las derivadas parciales de $F(x,y)$ con respectoa a x e y existen y son iguales a $G(x,y)$ y $H(x,y)$, respectivamente. Este teorema implica que las operaciones de sumar y derivar conmutan.

⋆ ⋆ ⋆



Ejemplo 11. Sea Ω la cuña cilíndrica que se muestra en la figura. Resolver el problema diferencial: *encontrar* $u(x,t)$ *tal que:*

$$
\begin{aligned}
u_t - \triangle u &= 0 \quad \Omega \times (0,\infty) \qquad (36)\\
u &= 0 \quad \partial\Omega \times [0,\infty) \qquad (37)\\
u = f(r,\theta,z) & \quad \Omega \times \{0\}; \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Usaremos el MSV.

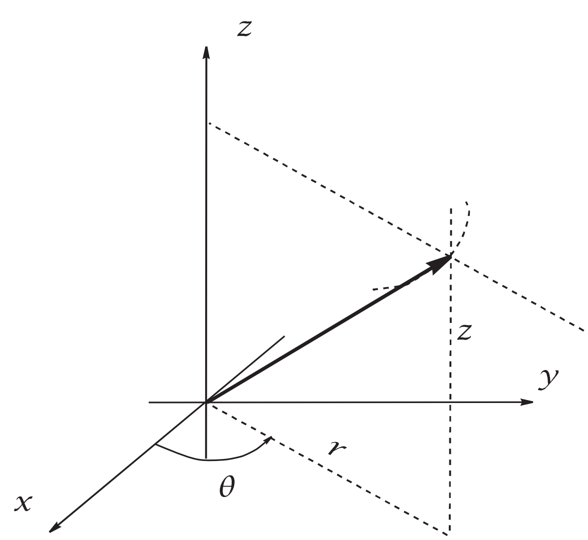
Primer paso. Se deja de lado la condición inicial (38) y se buscan soluciones particulares para las ecuaciones (36)-(37) de la forma

$$u(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x})v(t) \quad \text{donde} \begin{cases} w : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ verifica } \ w|_{\partial\Omega} = 0, \\ v : (0,\infty) \to \mathbb{R}. \end{cases}$$

Procediendo como en el Ejemplo 1., se tiene

$$v'(t) + \lambda\, v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad v(t) = c\, e^{-\lambda t}; \ c \in \mathbb{R} \text{ es una constante.}$$

$$\begin{cases} \triangle w(\mathbf{x}) + \lambda\, w(\mathbf{x}) = 0 \quad x \in \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{problema de autovalores para el operador } -\Delta \\ \text{con condición de Dirichlet}\end{array}$$



Segundo paso. Se resuelve la ecuación que depende de las variables espaciales. En este caso; es obvio que la geometría del dominio se describe mejor en coordenas cilíndricas;

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La ecuación de autovalores para el operador de Laplace, usando coordenadas cilíndricas, se escribe como sigue

$$w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta} + w_{zz} + \lambda\, w = 0.$$

Luego, el PVF a resolver será:

$$\begin{cases} w_{rr} + \dfrac{1}{r}w_r + \dfrac{1}{r^2}w_{\theta\theta} + w_{zz} + \lambda\ w = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Buscaremos soluciones de (39) de la forma

$$w(r,\theta,z) = V(r,\theta)Z(z) \quad \leftarrow \quad \text{se separan las variables } (r,\theta) \text{ de la variable } z.$$

Reemplazando en la ecuación (39), se obtiene

$$V_{rr}(r,\theta)Z(z) + \frac{1}{r}V_r(r,\theta)Z(z) + \frac{1}{r^2}V_{\theta\theta}(r,\theta)Z(z) + V(r,\theta)Z''(z) + \lambda\ V(r,\theta)Z(z) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Suponiendo que $V(r,\theta) \neq 0$ y $Z(z) \neq 0$,

$$\frac{V_{rr}(r,\theta)}{V(r,\theta)} + \frac{1}{r}\frac{V_r(r,\theta)}{V(r,\theta)} + \frac{1}{r^2}\frac{V_{\theta\theta}(r,\theta)}{V(r,\theta)} = -\lambda - \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad \text{en } \Omega.$$

Como el lado izquierdo depende de $(r,\theta) \in (0,a) \times (0,\theta_0)$ y el lado derecho solo depende de $z \in (0,h)$, se concluye que ambos deben ser constantes. Luego, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{V_{rr}(r,\theta)}{V(r,\theta)} + \frac{1}{r}\frac{V_r(r,\theta)}{V(r,\theta)} + \frac{1}{r^2}\frac{V_{\theta\theta}(r,\theta)}{V(r,\theta)} = -\lambda - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\alpha;$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} Z''(z) + (\lambda - \alpha)Z(z) = 0 \quad z \in (0,h) \\ Z(0) = Z(h) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 V_{rr}(r,\theta) + rV_r(r,\theta) + V_{\theta\theta}(r,\theta) = -r^2\alpha V(r,\theta)$$

Aplicaremos nuevamente el MSV para resolver la última ecuación. Proponemos

$$V(r,\theta) = R(r)\eta(\theta) \quad \leftarrow \quad \text{se separa la variable } r \text{ de la variable } \theta.$$

Reemplazando en la ecuación diferencial en las variables (r,θ), se llega a

$$r^2R''(r)\eta(\theta) + rR'(r)\eta(\theta) + R(r)\eta''(\theta) = -r^2\alpha R(r)\eta(\theta).$$

Suponiendo que $R(r) \neq 0$ y $\eta(\theta) \neq 0$,

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\alpha = \frac{\eta''(\theta)}{\eta(\theta)}$$

Como el lado izquierdo solo depende de $r \in (0,a)$ y el lado derecho solo depende de $\theta \in (0,\theta_0)$, se concluye que ambos deben ser constantes. Luego, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\alpha = -\frac{\eta''(\theta)}{\eta(\theta)} = \beta \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \begin{cases} \eta''(\theta) + \beta\eta(\theta) = 0 \quad \theta \in (0,\theta_0) \\ \eta(0) = \eta(\theta_0) = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\alpha r^2 - \beta)R(r) = 0 \quad r \in (0,a) \\ R(a) = 0 \end{cases} \end{array}$$

Analicemos las soluciones de la ecuación

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\alpha r^2 - \beta)R(r) = 0 \tag{40}$$

para distintos valores de los parámetros α y β. Observemos que si

- $\alpha = \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{r^2R''(r) + rR'(r) = 0}_{\text{ED de variables separables}} \quad \rightarrow \quad R_{00}(r) = c_1 + c_2 \ln r,$

- $\alpha = 0$ y $\beta > 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{r^2R''(r) + rR'(r) - \beta R(r) = 0}_{\text{ED de Euler}} \quad \rightarrow \quad R_{0\beta}(r) = c_3 r^{\sqrt{\beta}} + c_4 r^{-\sqrt{\beta}},$

- $\alpha, \beta > 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{r^2R''(r) + rR'(r) + (\alpha r^2 - \beta)R(r) = 0}_{\substack{\text{ED de Bessel de orden } \sqrt{\beta} \\ \text{y argumento } \sqrt{\alpha}r}} \quad \rightarrow \quad R_{\alpha\beta}(r) = c_5 J_{\sqrt{\beta}}(\sqrt{\alpha}r) + c_6 Y_{\sqrt{\beta}}(\sqrt{\alpha}r).$

La ecuación (40) se conoce como ***ecuación radial*** y aparece en múltiples aplicaciones. Observe que las soluciones son divergentes cuando $r \to 0$ o cuando $r \to \infty$. Esto implica que las condiciones de contorno apropiadas deberán incluir condiciones de regularidad en alguno de los extremos del intervalo dominio de la ecuación. Por ejemplo, si

$r \in (0, a) \quad \rightarrow$ se impone que la solución sea acotada cuando $r \to 0$; en este caso,

- $\alpha = \beta = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0,$
- $\alpha = 0$ y $\beta > 0 \quad \rightarrow \quad c_4 = 0,$
- $\alpha > 0$ y $\beta > 0 \quad \rightarrow \quad c_6 = 0,$

$r \in (a, \infty) \quad \rightarrow$ se impone que la solución sea acotada cuando $r \to \infty$; entonces,

- $\alpha = \beta = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0,$
- $\alpha = 0$ y $\beta > 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0,$
- $\alpha > 0$ y $\beta > 0 \quad \rightarrow$ ambas soluciones son acotadas cuando $r \to \infty$.

Volviendo al Ejemplo 11., el MSV transformó el problema espectral de Laplace-Dirichlet a tres problemas de valores de contorno en una dimensión.

$$\begin{cases} Z''(z) + (\lambda - \alpha)Z(z) = 0 & z \in (0, h) \\ Z(0) = Z(h) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r) + (\alpha - \dfrac{\beta}{r^2}) = 0 & r \in (0, a) \\ R(a) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \eta''(\theta) + \beta\eta(\theta) = 0 & \theta \in (0, \theta_0) \\ \eta(0) = \eta(\theta_0) = 0 \end{cases} \tag{43}$$

En primer lugar, resolveremos la ecuación (43), denominada ***ecuación angular***. Para $\beta > 0$, se tiene

$$\eta(\theta) = A_1 \cos\sqrt{\beta}\theta + B_1 \sin\sqrt{\beta}\theta, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno

$$\eta(0) = A_1 = 0; \qquad \eta(\theta_0) = B_1 \sin\sqrt{\beta}\theta_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\beta}\theta_0 = k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \beta_k = \left(\frac{k\pi}{\theta_0}\right)^2;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Luego,

$$\eta(\theta) = \eta_k(\theta) = \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right); \quad k = 1, 2, \cdots$$

En segundo lugar, resolveremos la ecuación (41). Para $(\lambda - \alpha) > 0$, se tiene

$$Z(z) = A_2 \cos\sqrt{\lambda - \alpha} z + B_2 \sin\sqrt{\lambda - \alpha} z, \quad A_2, B_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno,

$$Z(0) = A_2 = 0; \qquad Z(h) = B_2 \sin\sqrt{\lambda - \alpha}\, h = 0 \;\; \rightarrow \;\; \sqrt{\lambda - \alpha} h = m\pi;\ m \in \mathbb{Z} \;\; \rightarrow \;\; (\lambda - \alpha)_m = \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2;\ m \in \mathbb{Z}.$$

Entonces,

$$Z(z) = Z_m(z) = \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right); \quad m = 1, 2, \cdots$$

Por último, resolveremos la ecuación radial. Como $R(r)$ debe ser acotada cuando $r \to 0$, tendremos las siguientes posibilidades

$$R_{00}(r) = c_1, \qquad R_{0,\beta_k}(r) = c_3 r^{\sqrt{\beta_k}}, \qquad \text{y} \qquad R_{\alpha,\beta_k}(r) = c_5 J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha} r).$$

Al imponer la condición de contorno $R(a) = 0$, concluimos que habrá soluciones no triviales solo para $\alpha \neq 0$. Entonces, tendremos

$$R_{\alpha,\beta_k}(a) = 0 \;\; \rightarrow \;\; J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha} a) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \sqrt{\alpha} a = X_{\sqrt{\beta_k},l} \;\; \rightarrow \;\; \alpha_{k,l} = \left(\frac{X_{\sqrt{\beta_k},l}}{a}\right)^2; \quad k, l = 1, 2, \cdots$$

siendo

$$\{X_{\sqrt{\beta_k},l}\}_{l \geq 1} \quad \text{el conjunto de ceros positivos de la función} \quad J_{\sqrt{\beta_k}}(x).$$

Tercer paso. Se determina una solución particular. Combinando los resultados obtenidos, se concluye entonces que las autofunciones del operador de Laplace-Dirichlet, con dominio en la cuña cilíndrica Ω, serán

$$w_{k,l,m}(r, \theta, z) = J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}} r) \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right); \quad \sqrt{\beta_k} = \frac{k\pi}{\theta_0}; \quad \sqrt{\alpha_{k,l}} = \frac{X_{\sqrt{\beta_k},l}}{a};$$

y los autovalores estarán dados por

$$\lambda_{k,l,m} = \alpha_{k,l} + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 = \left(\frac{X_{\sqrt{\beta_k},l}}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2; \quad k, l, m = 1, 2, \cdots$$

Luego, una solución del problema (36)-(37), será

$$u_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = w_{k,l,m}(r, \theta, z) v_k(t) = J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}} r) \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) e^{-\lambda_{k,l,m} t}$$

Teniendo en cuenta que la ecuación de difusión es lineal, resulta natural proponer como solución

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m \geq 1} C_{klm}\, u_{k,l,m}(r, \theta, z, t) = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m \geq 1} C_{klm}\, J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}} r) \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) e^{-\lambda_{k,l,m} t}. \tag{44}$$

Cuarto paso. Se impone la condición inicial restante. Formalmente, si se reemplaza $t = 0$ en la serie (44) y se tiene en cuenta (38), se obtiene

$$f(r, \theta, z) = u(r, \theta, z, 0) = \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m \geq 1} C_{klm}\, J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}} r) \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right). \tag{45}$$

Podemos identificar la expresión anterior con el desarrollo de $f(r,\theta,z)$ en autofunciones del operador de Laplace-Dirichlet en Ω. Si $f(r,\theta,z)$ satisface las condiciones del ***Teorema del desarrollo***; la serie (45), con los coeficientes C_{klm} dados por

$$C_{klm} = \frac{\displaystyle\int_0^h \int_0^{\theta_0} \int_0^a f(r,\theta,z)\, J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\, \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right)\, \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) r dr\, d\theta\, dz}{\displaystyle\int_0^h \int_0^{\theta_0} \int_0^a \left(J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\, \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right)\right)^2 r dr\, d\theta\, dz},$$

será absoluta y uniformemente convergente a $f(r,\theta,z)$ en Ω.

Integrando sobre z y sobre θ, el denominador puede escribirse como

$$\int_0^h \int_0^{\theta_0} \int_0^a \left(J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\, \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right)\, \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right)\right)^2 r dr\, d\theta\, dz = \frac{h}{2}\,\frac{\theta_0}{2} \int_0^a \left(J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\right)^2 r dr.$$

Por último, integrando sobre r se tiene el siguiente resultado (ver Guía 10)

$$\int_0^a \left(J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\right)^2 r dr = \frac{a^2}{2}\left(J'_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}})\right)^2.$$

De esta manera, los coeficientes generalizados de Fourier de $f(r,\theta,z)$ con respecto al sistema de autofunciones $\{w(r,\theta,z)\}_{k,l,m\geq 1}$ serán

$$C_{klm} = \frac{8\pi}{a^2 h\theta_0}\, \frac{\displaystyle\int_0^h \int_0^{\theta_0} \int_0^a f(r,\theta,z)\, J_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}}r)\, \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_0}\right)\, \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) r dr\, d\theta\, dz}{\left(J'_{\sqrt{\beta_k}}(\sqrt{\alpha_{k,l}})\right)^2}.$$

⋆ ⋆ ⋆

24. ***Tambor vibrante.*** Supongamos que en el plano xy se halla una membrana circular de radio a fija en sus bordes. Si la membrana es perturbada obteniendo una desviación y una velocidad iniciales, su desplazamiento $u(\mathbf{x},t)$ con respecto a la posición de equilibrio queda determinado por el problema diferencial

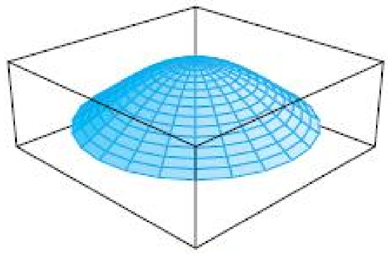
$$\begin{cases} c^2 \triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \Omega \times (0,\infty), \\ u(\mathbf{x},t)|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0 \\ u(\mathbf{x},t) \text{ acotada} & r \to 0^+, \\ u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_t(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Suponiendo que los datos f y g son funciones de la función $\sqrt{x^2+y^2}$, usar el MSV para encontrar una solución formal del problema del tambor vibrante.

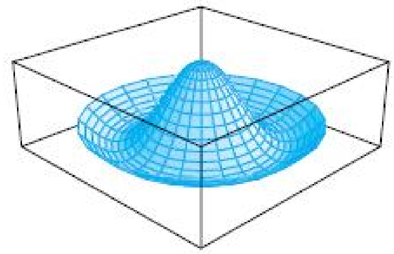
Indicación: mostrar que hay una familia de soluciones de la forma

$$u_n(r,t) = (A_n \cos c\,\omega_n t + B_n \sin c\,\omega_n t) J_0(\frac{\omega_n r}{a}); \quad n = 1,2,\cdots$$

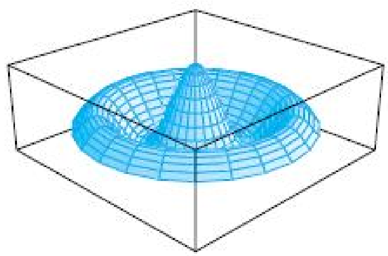
*donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de orden cero y los ω_n son los ceros positivos de $J_0(x)$. En la siguiente figura se muestra la superficie $z(r,\theta) = J_0(\frac{\omega_n r}{a})$ para los primeros valores de n. Obsérvese que, además de la frontera $r = a$, existen otros $n-1$ círculos fijos, llamados **círculos nodales**, con radios $r_i = \dfrac{\omega_i}{\omega_n}a$, $i = 1,2,\cdots,n-1$.*



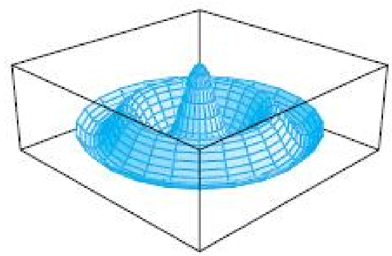
(a) $n = 1$



(b) $n = 2$



(c) $n = 3$



(d) $n = 4$

25. Hallar la función armónica con dominio en un cilindro circular recto, de radio a y altura h, si

    (a) en las bases del cilindro la función se anula y en la superficie lateral es $u|_{r=a} = g(z)$,

    (b) en la superficie lateral y en una de las bases del cilindro la función es cero y en la otra base es $u|_{z=h} = f(r)$.

26. Considérese un cilindro infinito de radio a en cuya superficie se ha enrollado una bobina conductora. El cilindro se halla en un campo magnético homogéneo de magnitud H_0 y paralelo al eje del cilindro. Si en el momento $t = 0$ el campo magnético se desconecta, el proceso de desmagnetización resultante puede conocerse a partir de la solución del problema:

$$\begin{aligned}
&\triangle H = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \alpha \text{ constante positiva,}\\
&\left(H + \beta\frac{\partial H}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = 0, \quad \beta \text{ constante positiva,}\\
&H\Big|_{z\to\pm\infty} \text{ acotado,}\\
&H\Big|_{t=0} = H_0;
\end{aligned}$$

Aquí, H representa la componente z del campo magnético en el cilindro. Mostrar que:

$$H(r,t) = \sum_{p\geq 1} \gamma_p\, J_0\left(\frac{\omega_p r}{a}\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{w_p}{a}\right)^2 t};$$

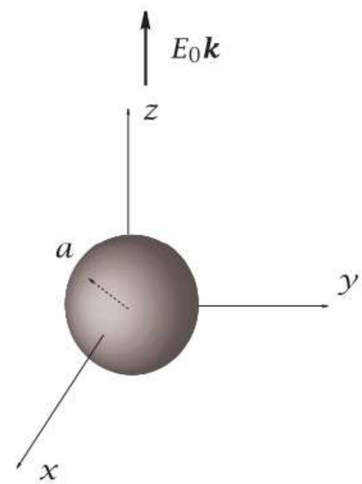
donde los números w_p son las raíces de la ecuación $J_0(\omega) + \dfrac{\beta}{a}\omega J_0'(\omega) = 0$ y los coeficientes γ_p están definidos por $\gamma_p = \dfrac{a^2 H_0 J_1(\omega_p)}{\omega_p \|J_0\left(\frac{\omega_p r}{a}\right)\|^2}$.

⋆ ⋆ ⋆

Ejemplo 12. Una esfera conductora de radio a se encuentra en equilibrio en el seno de un campo eléctrico homogéneo de magnitud E_0. Hallar

1. el campo eléctrico resultante en el exterior de la esfera,

2. la densidad de carga superficial sobre la esfera.



Introduzcamos un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la esfera y el eje polar z paralelo al campo exterior. Sin la presencia de la esfera, el potencial electrostático estaría dado por

$$u_0 = -E_0\, z \qquad \leftarrow \qquad \mathbf{E}_0 = -\nabla u_0$$

La presencia de la esfera introduce una perturbación en este campo. En consecuencia, el potencial del campo resultante podrá escribirse como la suma

$$u(x,y,z) = -E_0\, z + \underbrace{\widehat{u}(x,y,z)}_{\text{perturbación}} \; .$$

Claramente, la magnitud de esta perturbación disminuirá a medida que nos alejamos de la esfera. Denotando por r la distancia entre el origen de coordenadas y un punto cualquiera en $\mathbb{R}^3$, tendremos

$$u(x,y,z) \sim -E_0\, z \qquad r \to \infty.$$

Como la esfera es conductora, el equilibrio electrostático se alcanzará cuando el potencial sobre la esfera sea constante (las superficies de los conductores son equipotenciales). Luego, si consideramos que la esfera está conectada a tierra,

$$u(x,y,z) = 0 \qquad r \to a$$

Finalmente, como en la región exterior a la esfera no existen cargas, el potencial eléctrico será solución del siguiente problema de contorno:

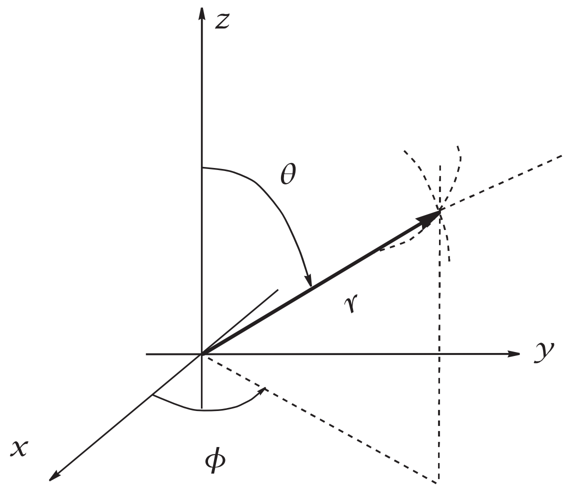
$$\begin{aligned} \triangle u = 0 &\quad r > a, \\ u = 0 &\quad r = a, \\ u \sim -E_0\, z &\quad r \to \infty. \end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\triangle \widehat{u} = 0 \quad r > a, \tag{46}$$
$$\widehat{u} = E_0\, a\, \cos\theta \quad r = a, \tag{47}$$
$$\widehat{u} \to 0 \quad r \to \infty. \tag{48}$$

Utilizaremos el MSV para determinar el potencial $\widehat{u}$. En este caso, es obvio que la geometría del dominio se describe mejor en coordenas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



En este sistema de coordenadas, la ecuación de Laplace se escribe como sigue

$$\triangle_{r\theta\phi} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

Primer paso. Se deja de lado la condiciones de bordes (47-48) y se buscan soluciones de (46) de la forma

$$\widehat{u}(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi) \quad \leftarrow \quad \text{se separan las variables } (\theta,\phi) \text{ de la variable } r.$$

Reemplazando en la ecuación (46), se obtiene

$$(r^2R''(r) + 2rR'(r))\,Y(\theta,\phi) + \frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\, Y_\theta(\theta,\phi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,Y_{\phi\phi}(\theta,\phi) = 0$$

Suponiendo que $R(r) \neq 0$ y $Y(\theta,\phi) \neq 0$,

$$\frac{r^2R''(r) + 2rR'(r)}{R(r)} = -\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\, Y_\theta(\theta,\phi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,Y_{\phi\phi}(\theta,\phi)\right).$$

Como el lado izquierdo solo depende de $r \in (a,\infty)$ y el lado derecho depende de $(\theta,\phi) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$, se concluye que ambos deben ser constantes. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - \lambda\, R(r) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{ecuación radial}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\, Y_\theta(\theta,\phi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,Y_{\phi\phi}(\theta,\phi) + \lambda\, Y(\theta,\phi) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{ecuación angular}$$

Segundo paso. Aplicamos el MSV para resolver la ecuación angular. Proponemos

$$Y(\theta,\phi) = Q(\theta)\,\Psi(\phi) \quad \leftarrow \quad \text{se separa la variable } \theta \text{ de la variable } \phi.$$

Reemplazando en la ecuación angular, obtendremos

$$\sin\theta\,(\sin\theta\, Q'(\theta))'\,\Psi(\phi) + \Psi''(\phi) + \lambda\,\sin^2\theta\, Q(\theta)\,\Psi(\phi) = 0.$$

Suponiendo que $Q(\theta) \neq 0$ y $\Psi(\phi) \neq 0$,

$$\frac{\sin\theta\,(\sin\theta\, Q'(\theta))'}{Q(\theta)} + \lambda\,\sin^2\theta = -\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)}.$$

Nuevamente, como el lado izquierdo solo depende de $\theta \in (0,\pi)$ y el lado derecho solo depende de $\phi \in (0,2\pi)$, se concluye que ambos deben ser constantes. Luego, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q''(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,Q'(\theta) + \left(\lambda - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)Q(\theta) = 0,$$

$$\Psi''(\phi) + \beta\,\Psi(\phi) = 0.$$

Resolvamos primero la última ecuación. Para asegurar que la solución sea continua sobre todo el plano xy, impondremos la condición $\beta = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$. En este caso, la solución general tendrá la forma

$$\Psi_m(\phi) = A\,\cos m\phi + B\,\sin m\phi.$$

Resolvamos ahora la ecuación diferencial que determina a $Q(\theta)$. Haciendo el cambio de variable $\xi = \cos\theta$ y denotando $\widehat{P}(\xi) = \widehat{P}(\cos\theta) = Q(\theta)$, tendremos

$$\frac{d}{d\xi}\Big[(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}\widehat{P}(\xi)\Big] + \Big(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\Big)\widehat{P}(\xi) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{ecuación adjunta de Legendre.}$$

Esta ecuación tiene soluciones acotadas cuando $\xi \to \pm 1$ si, y solo si, $\lambda = l(l+1)$; $l \in \mathbb{N}$. En este caso, las soluciones serán los polinomios adjuntos de Legendre definidos por

$$\widehat{P}_{lm}(\xi) := (1-\xi^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{d\xi^m}P_l(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}\,\frac{d^{m+l}}{d\xi^{m+l}}(\xi^2-1)^l; \qquad m \le l, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

Finalmente, la solución de la ecuación angular será:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{l}(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\widehat{P}_{lm}(\cos\theta) \qquad \rightarrow \qquad \text{armónico esférico.}$$

Tercer paso. Resolvemos la ecuación radial con $\lambda = l(l+1)$. Tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{r^2R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)\,R(r) = 0}_{\text{ecuación de Euler}}; \quad r \in (a,\infty) \\[2em] \lim\limits_{r\to\infty} R(r) = 0 \end{array}\right\} \qquad \rightarrow \qquad R_l(r) = \frac{1}{r^{l+1}}.$$

Cuarto paso. Se determina una solución particular. Combinando los resultados obtenidos, se llega a

$$\widehat{u}_{lm}(r,\theta,\phi) = \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \qquad \rightarrow \qquad \widehat{u}(r,\theta.\phi) = \sum_{l\ge 0}\sum_{m=0}^{l}\frac{(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)}{r^{l+1}}.$$

Quinto paso. Se impone la condición de borde restante. Formalmente, si se reemplaza $r = a$ en la serie que representa a $\widehat{u}$ y se tiene en cuenta (47), se obtiene

$$\widehat{u}(a,\theta,\phi) = \underbrace{E_0\,a\,\cos\theta}_{f(\theta,\phi)} = \sum_{l\ge 0}\sum_{m=0}^{l}\frac{(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)}{a^{l+1}}. \tag{49}$$

Podemos identificar la expresión anterior con el desarrollo de $f(\theta,\phi)$ en series de armónicos esféricos. Como $f(\theta,\phi)$ tiene derivadas segundas continuas, la serie (49), con los coeficientes dados por

$$\frac{A_{lm}}{a^{l+1}} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\,\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)\,cos\,m\phi\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)\,cos\,m\phi\Big)^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi},$$

$$\frac{B_{lm}}{a^{l+1}} = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\,\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)\,sin\,m\phi\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\widehat{P}_{lm}(\cos\theta)\,cos\,m\phi\Big)^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi},$$

será absoluta y uniformemente convergente a $f(\theta, \phi)$.

En este caso, $f(\theta, \phi) = E_0\, a \cos\theta = E_0\, a\, \widehat{P}_{10}(\cos\theta)$; luego, en virtud de la propiedad de ortogonalidad de las funciones esféricas, se tendrá

$$\frac{A_{10}}{a^2} = E_0\, a; \qquad A_{lm} = 0,\ \forall l \neq 1,\ \forall m \neq 0; \qquad B_{lm} = 0,\ \forall l,\ \forall m.$$

De esta manera, obtendremos

$$u(r, \theta) = -E_0\, r\, \cos\theta + E_0\, a^3\, \frac{\cos\theta}{r^2} = -E_0\, r\, \cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right); \quad r > a.$$

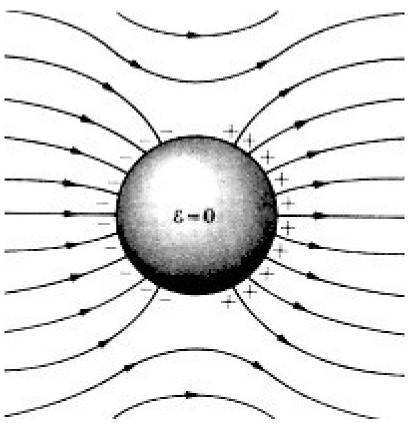
Finalmente, a partir del potencial eléctrico podemos calcular

- el campo eléctrico exterior a la esfera:

  $$\mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla u(r, \theta) = E_0 \left(1 + 2\frac{a^3}{r^3}\right) \cos\theta\, \mathbf{e}_r - E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta; \quad r > a.$$

- la densidad superficial de carga sobre la esfera:

  $\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{r=a} = 3\varepsilon_0\, E_0\, \cos\theta; \quad \theta \in (0, \pi) \quad$ (ε_0 es la permitividad o constante dieléctrica del vacío).



En la figura se muestran las líneas de fuerza del campo eléctrico $\mathbf{E}(r, \theta)$ (el eje z se hizo coincidir con la dirección horizontal). Observar que, como la esfera es conductora,

- el campo eléctrico es nulo si $r < a$,
- la dirección del campo eléctrico tiende a ser normal a la superficie de la esfera cuando $r \to a$,
- el campo eléctrico resultante tiende a ser paralelo a $\mathbf{E}_0$ cuando $r \to \infty$.

$\star \quad \star \quad \star$

Los armónicos esféricos son la parte angular de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para problemas sin simetría azimutal. Eligiendo el factor de normalización de manera que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_l^m(\theta, \phi)\, Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{m\, m'}\, \delta_{l\, l'},$$

los armónicos esféricos pueden escribirse de la siguiente manera:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}.$$

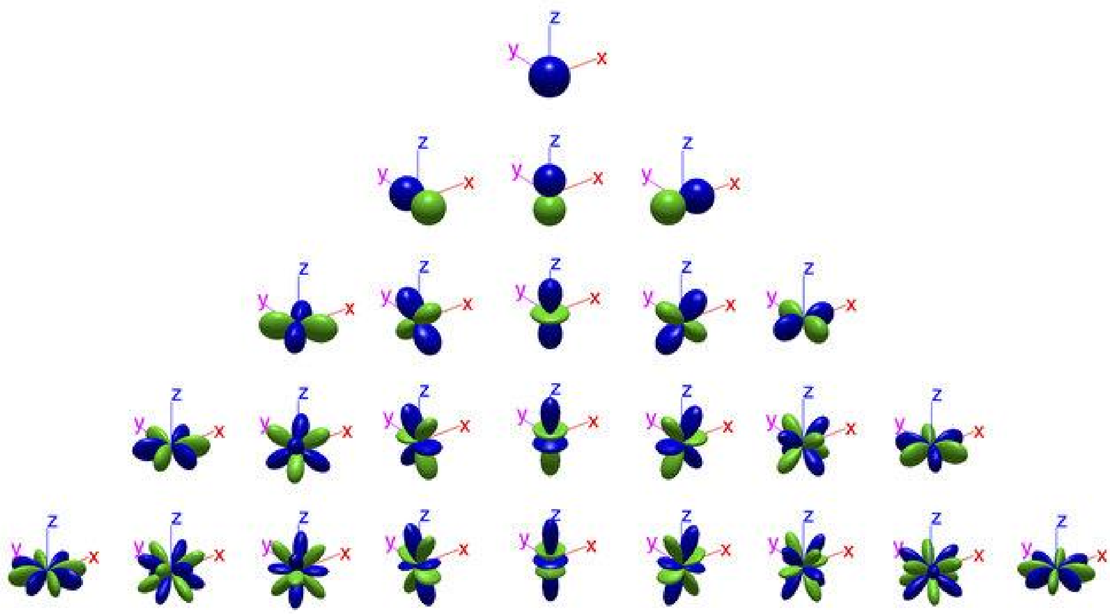
Separando las partes real e imaginaria, se tendrán las funciones esféricas

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, \sin m\phi; \qquad 0 < m \leq l,$$

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, \cos m\phi; \qquad 0 \leq m \leq l.$$

Claramente, para cada l fijo, se tiene un conjunto de $2l+1$ funciones linealmente independientes definidas en $[0,\pi] \times [0, 2\pi]$.

La siguiente figura es una representación visual de las primeras funciones esféricas; en el centro se ubican las que corresponden a $m = 0$ (observar los planos nodales de las funciones).



⋆ ⋆ ⋆

27. Hallar la distribución de la temperatura en un cuerpo esférico si su superficie se mantiene en contacto térmico con el medio, que se encuentra a temperatura T_0, y la temperatura inicial es U_0.

    Indicación: plantear el problema a resolver, escribiendo explícitamente las condiciones en el borde y las condiciones iniciales.

28. Dos esferas concéntricas de radios a y b, con $b > a$, se hallan divididas en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen a potencial V. Los otros hemisferios están a potencial cero. Determinar el potencial electrostático en la región $a < r < b$.

    Indicación: plantear el problema a resolver, escribiendo explícitamente las condiciones en los bordes.

29. Suponga que Ω es la esfera centrada en el origen de radio 1. Para qué valor de la constante a el siguiente problema diferencial

$$\begin{cases} \triangle u = 1 & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = a & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

    tendrá solución? Será única?

30. En la Mecánica cuántica el comportamiento de una partícula que se haya en un campo de fuerzas $V(x, y, z, t)$ se describe por medio de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle\Psi + V\Psi,$$

donde μ es la masa de la partícula, $\hbar$ la constante de Plack y Ψ la función de onda. Si las fuerzas no dependen del tiempo, son posibles estados estacionarios compatibles con un dado estado de la energía. Es decir, existen soluciones del tipo

$$\Psi(x, y, z, t) = \xi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$$

siendo E la energía total de la partícula.

(a) Obtenga la ecuación de Schrödinger en estado estacionario y muestre que es una ecuación de Sturm-Liouville donde E es el valor propio a determinar.

(b) Supóngase que la partícula se encuentra confinada por una cavidad esférica rígida de radio a con centro en el origen. Esta situación ideal se puede simular escribiendo que

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad r < a \\ \infty, & \text{si} \quad r \geq a \end{cases}.$$

Para la partícula esto implica la imposibilidad de existir fuera de la cavidad. Por lo tanto, la condición de contorno apropiada para la función de onda asociada a esta partícula será $\xi|_{r=a} = 0$, que junto con la condición de normalización

$$\int |\xi|^2 dxdydz = 1$$

permiten determinar ξ completamente. Resolver la ecuación de Schrödinger estacionaria, comprobar que los estados de energía posibles están dados por

$$E_{np} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{x_{np}}{a}\right)^2, \quad p = 1, 2, \cdots$$

donde x_{np} representa la p-ésima raíz de la ecuación $J_{n+1/2}(x) = 0$, y que a cada uno de estos estados le corresponden $2n + 1$ funciones propias. Hallar las función de onda de la partícula.

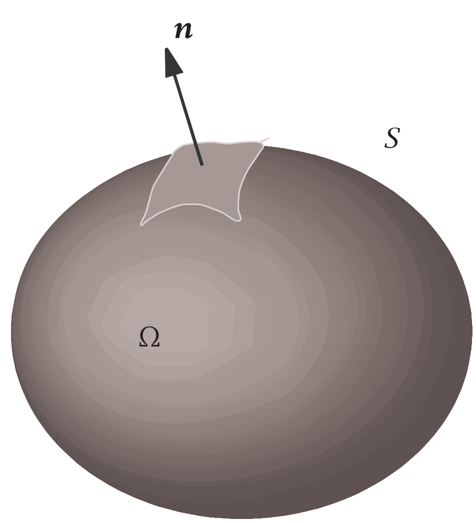
⋆ ⋆ ⋆

► Comentario final. Si en la ecuación de ondas $U_{tt} = \triangle U$, hacemos $U = ue^{ikt}$, o, si en la ecuación del calor $U_t = \triangle U$, hacemos $U = ue^{-k^2t}$, encontramos que el factor espacial $u = u(x, y, z)$ satisface la siguiente ecuación

$$\triangle u + k^2u = 0 \quad \leftarrow \quad \text{ecuación de Helmholtz}$$

Junto con esta ecuación, se establece una condición de borde que puede ser del tipo

- $u = 0$ (condición de Dirichlet),
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ (condición de Newmann),
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ (condición mixta).



La condición de borde se aplica sobre la superficie S, frontera del dominio Ω donde está definida la ecuación. ***La ecuación de Helmholtz, junto con una de las condiciones de borde listadas, define un problema de autovalores para el operador autoadjunto*** $-\triangle$.

Para regiones definidas por ***sistemas de coordenadas separables,*** es posible encontrar las autofunciones y los autovalores asociados utilizando el MSV. Para estas regiones, es suficiente analizar ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen en esta separación. En el curso hemos discutido con cierto detalle la teoría asociada a las ecuaciones de Bessel y de Legendre las cuales aparecen cuando los dominios presentan simetría cilíndrica o esférica.

Para dominios sin simetrías definidas, es necesario tratar con la ecuación de Helmholtz directamente. Para establecer resultados generales, consideremos la ecuación de Sturm-Lioville

$$\triangle u - q(P)u + \lambda\rho(P)u = 0 \quad \text{para todo } P \in \Omega,$$

donde $\rho = \rho(P)$ es una función positiva y $q(P)$ es una función acotada (también puede considerarse positiva).

Teorema. Los autovalores del operador autoadjunto $\triangle - q$ son reales y las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales en Ω con función de peso ρ.

Bibliografía

[1] W.E. Boyle, R.C. Diprima, D.B. Meadle, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley, 2017.

[2] Y.A. Çengel, W.J. Palm III, *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*, McGraw-Hill, 2013.

[3] E.A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1961.

[4] G.F.D. Duff, D. Naylor, *Differential equations of applied mathematics*, Wiley, 1966.

[5] J. Duoandikoetxea Zuazo, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[6] C.H. Edwards, D.E. Penney, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Pearson Educación, 2009.

[7] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, MIR - URSS, 1994.

[8] R. Haberman, *Elementary Applied Partial Defferential Equations with Fourier Series ans Boundary Value Problems*, Prentice Hall, 1987.

[9] D.L. Kreider, R.G. Kuller, D.R. Ostberg, F.W. Perkins, *An Introduction to Linear Analysis*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1966.

[10] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2000.

[11] J.L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 1999.

[12] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill, 1993.

[13] A.N. Tijonov, A.A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR - URSS, 1980.

[14] D.G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, Cengage Learning, 2009.