GEOACTA, vol.12, n.1 (1984) pag.109 a 120

RELACIONES REFLECTIVIDAD-INTENSIDAD DE PRECIPITACION (Z-R) RESULTANTES DE DIFERENTES CRITERIOS TEORICOS Y ESTADISTICOS DE DATOS EXPERIMENTALES

Ernesto H. Berbery *

Departamento de Meteorología, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, República Argentina

RESUMEN

La medición del espectro de tamaños de gotas de lluvia permite calcular la intensidad de precipitación (R) y la reflectividad (Z). Se estudiaron varias leyes potenciales que vinculan a estas variables. Se comprobó que tanto las relaciones Z-R teóricas como las obtenidas a partir de muestras en otras regiones (caso Marshall y Palmer) no son válidas al nivel de significancia del 5% para representar a R como una función de Z.

Al obtener relaciones a partir de una muestra en una región de estudio -en este caso Buenos Aires- se comprobó que una relación Z-R apta es, como era de esperar, la que surge de hacer una regresión por cuadrados mínimos entre los logaritmos de las variables. Sin embargo, hay situaciones en que son otros los criterios que deben ser tenidos en cuenta. De los analizados, se destaca el que hace mínima la diferencia de los promedios y de las desviaciones standard (simultáneamente) de las series medida y calculada. Con este criterio se obtuvo una relación Z-R que produce una serie de intensidad de precipitación calculada cuyas características estadísticas son semejantes a las de la serie medida.

ABSTRACT

Rainfall Rate (R) and Radar reflectivity (Z) can be calculated from the measurement of drop size spectra. Several potential laws which relate those variables were studied. Both theoretical Z-R relationships and other regions relationships (Marshall and Palmer for instance) fail to represent R as a function of Z at the 5% level of significance. When Z-R relationships were obtained with a sample in the study region, in this case Buenos Aires, it was confirmed that a suitable Z-R relationship is, as it was expected, the one obtained from a least squares regression line between the logarithms of the variables. However, there are situations in which other criteria must be taken into account. Among those analyzed, the one which minimizes the difference between the means and the standard deviations of the measured and calculated series, stands out. By this criterium a Z-R relationship which produces a rainfall rate calculated series with similar statistical characteristics to the measured series was obtained.

---

* Perteneciente al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

1. INTRODUCCION

La teoría concerniente al uso del radar vincula la potencia recibida por éste con el factor de reflectividad (o simplemente reflectividad), que es una propiedad intrínseca de la porción de hidrometeoro observada, ya que :

$$Z = \sum_{vol} D_i^6 = \sum_j n_j D_j^6 = \int_0^\infty N(D)\, D^6\, dD \qquad (1)$$

donde N(D) es el número de gotas por unidad de diámetro (D) y por unidad de volumen ; n_j es el número de gotas por unidad de volumen en el intervalo $(D_j - 1/2\, \Delta D,\ D_j + 1/2\, \Delta D)$.

Por otra parte, la intensidad de precipitación (R) es el flujo de agua a través de una superficie horizontal unitaria por unidad de tiempo, o sea :

$$R = \int_0^\infty N(D)\ \rho \frac{\pi}{6}\ D^3\ v(D)\, dD \qquad (2)$$

en la que v (D) es la velocidad de caída de una gota de diámetro D y ρ la densidad del agua.

Al comparar las ecuaciones (1) y (2) es natural pensar que ha de existir alguna relación entre la reflectividad y la intensidad de precipitación. Todos los autores aceptan que la forma de la relación entre Z y R obedece a una ley potencial, a la que se suele escribir como :

$$Z = A\, R^B \qquad (3)$$

donde A y B son constantes por determinar.

Uno de los métodos para determinar los valores de A y B es el "indirecto". En él se obtiene primero la distribución de tamaños de gotas de lluvia, aplicando alguna de las técnicas, tal como la de filtros de papel o bolitas de engrudo coloreadas. Luego, aplicando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene un par de valores Z y R (suponiendo conocida la velocidad de caída de las gotas y reemplazando las integrales por sumatorias). Medidos suficientes espectros de gotas de lluvia y formados los correspondientes pares de variables Z y R, es posible hacer una regresión entre los logaritmos de ambas variables. Sin embargo, se dan situaciones (Berbery, 1982) en que no es posible obtener A y B de esta forma, y hay que adoptar otros criterios.

En este trabajo se evalúan varios criterios considerados y se comparan las distintas relaciones Z-R obtenidas a partir de cada uno de ellos.

2. SOLUCIONES ANALITICAS DEL PROBLEMA

Marshall y Palmer (1948) hicieron un estudio con muestras de espectros de gotas para distintos tipos de lluvia y llegaron a que :

$$N(D) = N_o \exp(-\lambda D) \qquad (4)$$

donde

$$N_o = 0{,}08\ cm^{-4} \qquad (5)$$

$$\lambda = 41\ R^{-0,21}\ cm^{-1} \qquad \text{(con R en mm/h)} \qquad (6)$$

Estos resultados, junto con la relación Z-R que obtuvieron (A = 220, B = 1,6), son empleados frecuentemente y aceptados (con sus limitaciones) en la bibliografía.

Supuesta la validez de las ecuaciones hasta aquí citadas, es natural intentar el cálculo de la relación Z-R por la vía analítica.

Atlas (1963) integró la ecuación (1) suponiendo válida la ecuación (4) para un λ fijo. Obtuvo así $Z = Z(\lambda)$, y luego reemplazó λ conforme a la ecuación (6). Así llegó a:

$$Z = 296\ R^{1,47} \qquad (7)$$

$([Z] = mm^6/m^3;\ [R] = mm/h)$

Kessler (1966) realizó más tarde la misma integración pero, en lugar de emplear la ecuación (6) para obtener $\lambda = \lambda(R)$, integró la ecuación (2), dando por válida la fórmula de Spilhaus (1948) para la velocidad de caída de las gotas ($v = 130\ D^{0,5}$). Esta elección no fue casual, pues únicamente una ley potencial para la velocidad permite la integración directa de esa ecuación.

Kessler llegó a la ecuación:

$$Z = 210\ R^{1,55} \qquad (8)$$

En el presente trabajo las ecuaciones se resolvieron en forma analítico-numérica. El primer paso consistió en calcular $\lambda = \lambda(Z)$, como lo hicieron Atlas y Kessler. La ecuación obtenida fue:

$$\lambda\ (cm^{-1}) = 92,87\ Z^{-0,144} \qquad (Z \text{ en } mm^6/m^3) \qquad (9)$$

Luego se integró la ecuación (2) por el método de Simpson para distintos valores de λ, tomando para la velocidad de caída de gotas en aire calmo el polinomio de grado 9, dado por Foote y Du Toit (1969). El ajuste a una ley potencial entre λ y R dio:

$$\lambda\ (cm^{-1}) = 43,3\ R^{-0,22} \qquad (R \text{ en } mm/h) \qquad (10)$$

Al igualar las ecuaciones (9) y (10) se llega a:

$$Z = 206\ R^{1,53} \qquad (11)$$

Para estimar una relación Z-R para la región septentrional de la provincia de Mendoza se siguió el mismo proceso, pero tomando la velocidad de caída a 930 mb y una distribución de las gotas típica de chaparrones ($N_o = 0,02\ cm^{-4}$). Así se llegó a:

$$Z = 425\ R^{1,55} \qquad (12)$$

Si bien todos estos resultados guardan similitud con la ecuación de Marshall y Palmer, las variaciones en las características de una población de gotas, así como el hecho de que las relaciones Z-R muestran una dependencia con la región y el tipo de lluvia, hacen recomendable determinar esa relación a partir de datos medidos.

3. SOLUCIONES CON DATOS EXPERIMENTALES

La serie de reflectividad puede ser transformada en una serie de intensidad de precipitación calculada si en la ecuación (3) se asignan valores arbitrarios a A y B. La diferencia entre las series de intensidad de precipitación medida y calculada será llamada función de criterio; la base del método aplicado (Smith et al., 1975) consiste en variar los parámetros A y B hasta que la función de criterio sea mínima. Para ello se empleó un método numérico de búsqueda del mínimo de una función, desarrollado por Hooke y Jeeves (1961) y que tiene por condición que el mínimo sea único. Para esta experiencia se contó con una muestra de 244 pares de datos de intensidad de precipitación-reflectividad obtenidos por el método indirecto de las bolitas de engrudo ya mencionado, gentilmente cedida por el Lic. E. A. Caimi y la Lic. C. Y. Quinteros de Menzies. Para los pormenores de la técnica de muestreo y un análisis de su calidad, véase a Caimi y Menzies (1978).

Con estos 244 pares de datos, en lugar de aplicar el método de búsqueda, se tomaron puntos discretos de una región del plano (A, B) y en cada punto se convirtió la reflectividad en intensidad de precipitación de acuerdo con la ecuación (3). Así, en cada punto del retículo se pudo calcular el valor de la función de criterio considerada.

He aquí una descripción de cada una de las funciones de criterio ensayadas.

a) Diferencia de promedios.

Esta función de criterio (CRI) es la diferencia entre el promedio de la intensidad medida ($\overline{R}$) y el de la intensidad calculada de la reflectividad ($\overline{Rz}$), esto es :

$$CRI = \left| \overline{R} - \overline{Rz} \right|$$

La figura 1 muestra el campo de esta función. En ella se observa que hay toda una región mínima (con forma de valle curvo) que, por tener mínimos secundarios, torna inconveniente el empleo del método de búsqueda.

Cabe destacar que la forma de valle curvo se repite en casi todas las funciones de criterio consideradas, y es el resultado de una compensación entre el coeficiente y la potencia de la relación Z-R.

b) Valor absoluto de la t de student.

En este caso la función de criterio está dada por :

$$CRI = \frac{\left| \overline{R} - \overline{Rz} \right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_R^2 + \sigma_{Rz}^2}{n}}}$$

donde : σ_R = desviación standard de la serie de intensidad de precipitación medida.

σ_{Rz} = desviación standard de la serie de intensidad de precipitación calculada.

n = número de pares de datos.

Esta función fue considerada como un medio de introducir la desviación standard de las series y no como un método de evaluar estadísticamente los resultados, ya que las series en estudio no tienen distribución normal.

Como muestra la figura 2, si bien disminuye la intensidad de los mínimos secundarios, estos subsisten, manteniéndose así la dificultad para aplicar el método de búsqueda.

c) Diferencia de promedios más diferencia de desviaciones standard.

La función de criterio es :

$$C\,R\,I = \left| \overline{R} - \overline{Rz} \right| + \left| \sigma_R - \sigma_{Rz} \right|$$

Si bien el campo de diferencias de desviaciones standard también presenta mínimos secundarios, al ser superpuesto al campo de diferencias de promedios, queda un mínimo único (Fig. 3). Por lo tanto fue esta una de las funciones de criterio empleadas, y así las series resultantes tienen sus dos primeros momentos iguales.

d) Sumatoria de los residuos al cuadrado.

$$C\,R\,I = \sum_{i=1}^{n} (R_i - Rz_i)^2$$

Esta función (Fig. 4) tiene la particularidad de asignar mayor peso a unos pocos valores elevados de intensidad de precipitación y menor a los muchos valores pequeños, a los que prácticamente ignora (hay que tener en cuenta que las series estudiadas presentan una distribución exponencial decreciente). Esto hará que los resultados no sean obtenidos a partir de 244 pares de valores sino de una cantidad mucho menor y que por lo tanto no sean representativos de la muestra.

Un punto interesante a tener en cuenta es el que surge de separar los datos por intervalos de intensidad de precipitación, o sea, intensidad de precipitación menor o mayor o igual a 12 mm/h. Este límite equivale aproximadamente a 40 dBz en la reflectividad, valor más fácil de manejar en el trabajo operativo.

Las notables diferencias entre ambas muestras quedan evidenciadas en las regresiones obtenidas :

$$R_i < 12 \text{ mm/h} : \quad A = 253;\ B = 1{,}8$$

$$R_i \geq 12 \text{ mm/h} : \quad A = 13;\ B = 2{,}51,$$

es decir, que se podrían obtener diferentes relaciones Z-R (dos o más) si se separaran las series por intervalos.

Miller (1972) también separó las series por intervalos y obtuvo algo similar a las regresiones mostradas, pero hay que tener en cuenta que de esta forma es necesaria una cantidad mayor de datos para que los intervalos de clase no se vean afectados por la escasez de datos.

e) Test χ^2.

Al aplicar el test χ^2 como función de criterio (Fig. 5), si bien se observa que la zona del mínimo está dentro de la región de estudio, también se observa que el campo es muy irregular, presentando pequeñas variaciones que dificultan el empleo del método de búsqueda. Por tal motivo, el campo que muestra la figura 5 ha de ser tomado como tentativo.

f) Residuos al cuadrado relativos.

Sobre la base de lo obtenido en d) y e) se pensó en aplicar la función de criterio :

$$CRI = \sum_{i=1}^{r} \frac{(R_i - Rz_i)^2}{R_i}$$

El campo de esta función (Fig. 6) tiene un único mínimo en la región de estudio, y por sus características fue uno de los criterios aplicados.

4. RESULTADOS Y SU DISCUSION

En la Tabla se presenta una evaluación de las relaciones Z - R teóricas, de las obtenidas de muestras en otras regiones y de las que resultaron de aplicar el método de búsqueda del mínimo de distintas funciones de criterio.

Para la evaluación se hicieron las siguientes hipótesis :

a) Los promedios de la serie medida y de la calculada deben coincidir al nivel de significancia de 5%.
b) Las desviaciones standard de la serie medida y de la calculada deben coincidir al nivel de significancia de 5%.
c) Las series medida y calculada deben presentar distribuciones semejantes al nivel de significancia de 5% al aplicar el test χ^2.
d) Control de la magnitud de los residuos al cuadrado y de los residuos al cuadrado relativos.
e) Control del grado de asimetría de las series calculadas respecto de la serie medida.

Se observa que las intensidades de precipitación determinadas con la ecuación de Marshall y Palmer (A = 220, B = 1,6) presentan diferencias significativas (al nivel de 5%) con la serie medida, en lo que se refiere a la desviación standard.
Los residuos, comparados con los que resultan de emplear la ecuación obtenida por regresión, son elevados.

La relación obtenida por Smith et al. (1975), si bien mejora los resultados de Marshall y Palmer, fracasa con la desviación standard y el test χ^2.

Tanto las relaciones analíticas de Atlas y Kessler como la analítico-numérica obtenida en este trabajo fallan en todos los puntos evaluados para representar la serie medida. Esto indica que los procesos que llevan a relacionar a Z y R no pueden ser explicados con las teorías simples supuestas sobre los espectros de gotas. Es probable que esto se deba principalmente a la falta de validez de dos suposiciones contenidas en las deducciones : que el espectro de gotas es exponencial decreciente y que ellas caen en aire calmo. Al no cumplirse estas, la distribución de la masa de agua en el espectro se modifica de manera tal que las deducciones hechas pierden validez.

La relación Z - R obtenida por regresión (A = 250, B = 1,7) es evidentemente la que mejor se comporta (se tomó R como variable dependiente). Pero se recuerda que el objeto de este trabajo es buscar otros criterios diferentes a los considerados en una regresión.

La aplicación del método de búsqueda a las funciones de criterio descriptas llevó a obtener varias relaciones Z - R, cuya evaluación también está incluida en la Tabla.

Al emplear los residuos al cuadrado como función de criterio, el método de búsqueda condujo a dos mínimos diferentes que dependían del punto arbitrario inicial. Esto se debe, aunque no aparece en el campo, a la existencia de irregularidades cuando los pasos son pequeños.

Para ambas relaciones Z - R existe por lo menos una condición que es rechazada al nivel de significancia de 5%.

Para la función de criterio residuos al cuadrado relativos se obtuvo una única relación Z - R, la cual tiene un valor rechazado para la desviación standard.

En la función diferencia de promedios, como ya mostraba la figura 1, se obtuvieron dos relaciones Z - R, de las cuales una (A = 305, B = 1,6) respondió muy bien, en tanto que la otra (A = 590, B = 1,4) falló en varias de las hipótesis hechas.

Para la función de criterio diferencia de promedios más diferencia de desviaciones standard, que tiene un mínimo único, se llega a una relación (A = 143, B = 1,8) que cumple con todas las condiciones.

Se observa también que la separación de las series en dos intervalos reduce los residuos, pero no mejora los demás parámetros evaluados.

Por último, a efectos de controlar otra característica de las series, la columna K1/K2 muestra el cociente entre las asimetrías de la serie medida y la calculada. En general, el valor se aproxima a uno.

De todo este análisis surge que si bien son varias las relaciones Z - R aceptables, no ocurre lo mismo con las funciones de criterio consideradas.

Todo indica que, a los fines de este trabajo, la más útil es la que hace mínimos los promedios y las desviaciones standard.

5. CONCLUSIONES

a) Se comprobó que las relaciones Z - R analíticas no son aconsejables para medir con radar la intensidad de precipitación.

b) Tampoco las relaciones empíricas obtenidas en otras regiones (caso Marshall y Palmer) lo son, pese a que mejoran los resultados respecto de las analíticas.

c) Se analizaron las características de varias funciones de criterio encontrándose que, a los fines de este trabajo, la mejor es la que hace mínima la diferencia entre los promedios y simultáneamente hace mínima la diferencia entre las desviaciones standard de las series medida y calculada.

d) Se presentan varias relaciones Z - R alternativas de la obtenida por regresión, válidas para la medición de la intensidad de precipitación con radar (véase la Tabla).

6. BIBLIOGRAFIA

Atlas, D., 1963 : Radar analysis of severe storms. Severe local storms; Met. Mon. N° 27, Am. Met. Soc., Boston, 177-220.

Berbery, E.H., 1982 : Cálculo de la relación Reflectividad - Intensidad de precipitación (Z - R) con una variante del método directo. Trabajo presentado en el 4to. Congreso de Meteorología (CONGREMET IV).

Caimi, E.A. y Menzies, Y.Q. de, 1978 : Some aspects of raindrop size spectra in Buenos Aires; J. Rech. Atmos., 12, N° 1.

Foote, G.B. y Du Toit, P.S., 1969 : Terminal velocity of raindrops aloft ; J. Appl. Meteor, 8, 249 - 253.

Hooke, R. y Jeeves, T., 1961 : Direct search solution of numerical and statistical problems ; J. Assoc. Comp. Mach. 8, 2, 212-219.

Kessler, E., 1966 : Radar measurements for the assessment of areal rainfall : Review and Outlook; Water Resources Research, NSSL, 2, N° 3.

Marshall, J. M. y Palmer, W. M., 1948 : The distribution of raindrops with size ; J. Meteor., 5, 165-166.

Miller, J. R., 1972 : A climatological Z - R relationship for convective storms in the northern Great Plains; Preprints 15th Radar Meteor. Conf. Champaign - Urbana Ill., Amer. Meteor. Soc., 153-154,

Smith, P. L. Jr., Cain, D. E., Dennis, A. S. y Miller, J. R., 1975 : Determination of R - Z relationships for weather radar using computer optimization techniques; Report 75-3, Institute of Atmospheric Sciences, South Dakota School of Mines and Technology.

Spilhaus, A. F., 1948 : Raindrop size, shape and falling speed; J. Meteor., 5, 108-110.

TABLA : EVALUACION DE Z - R PARA BUENOS AIRES

$\bar{R}$ = 8,01 ± 1,91
σ = 15,24 ± 1,35 (intervalos dados por el nivel de significancia 5%)
$\chi^2(5\%)$ = 18,6 (ν = 10)

	Coef	Pot	$\Delta\bar{R}$	$\Delta\sigma$	r	χ^2	P(%)	Resi-duos	Resid. relat.	K_1/K_2	Orígen o método
1	220	1,6	1,81	4,30	0,88	13	22	22320	773	0,959	Marshall y Palmer
2	155	1,88	0,71	3,00	0,89	25,3	<1	11995	379	1,083	Paul Smith et al.
3	210	1,55	3,29	8,00	0,88	29,8	<1	38916	1271	0,936	Kessler - analítica
4	296	1,47	2,88	8,38	0,87	14,6	14	41126	1235	0,90	Atlas - analítica
5	206	1,53	3,98	9,75	0,87	26,0	<1	49509	1571	0,927	Analítico-numérica, caso general
6	250	1,7	0,51	1,23	0,88	9,57	48	12079	375	1,004	Regresión R - Z
7	175	1,8	0,26	1,61	0,89	17,8	5,8	11626	395	1,048	Residuos al cuadrado mínimos (RCM)
8	90	1,975	0,37	1,90	0,89	46,3	<1	11283	528	1,123	RCM y RCM + diferencia de promedios mín.
9	270	1,75	1,42	3,30	0,89	12,4	25,9	12921	343	1,026	Residuos al cuadrado relativos mínimos
10	590	1,4	0,01	2,90	0,86	35,1	<1	19785	599	0,867	Diferencia de promedios mínima
11	305	1,6	0	0,70	0,88	7,14	71	13941	447	0,959	Diferencia de promedios mínima
12	143	1,8	0,65	0	0,89	17,59	6,2	12377	505	1,048	Dif. de promedios y dif. de desv. stand. mín.
13	$\frac{253}{13}$	$\frac{1,8}{2,51}$	0,49	2,29	0,90	22,37	1,4	10387	312	1,3	Combinación de 2 Z-R, $R_i < y \geqslant 12$

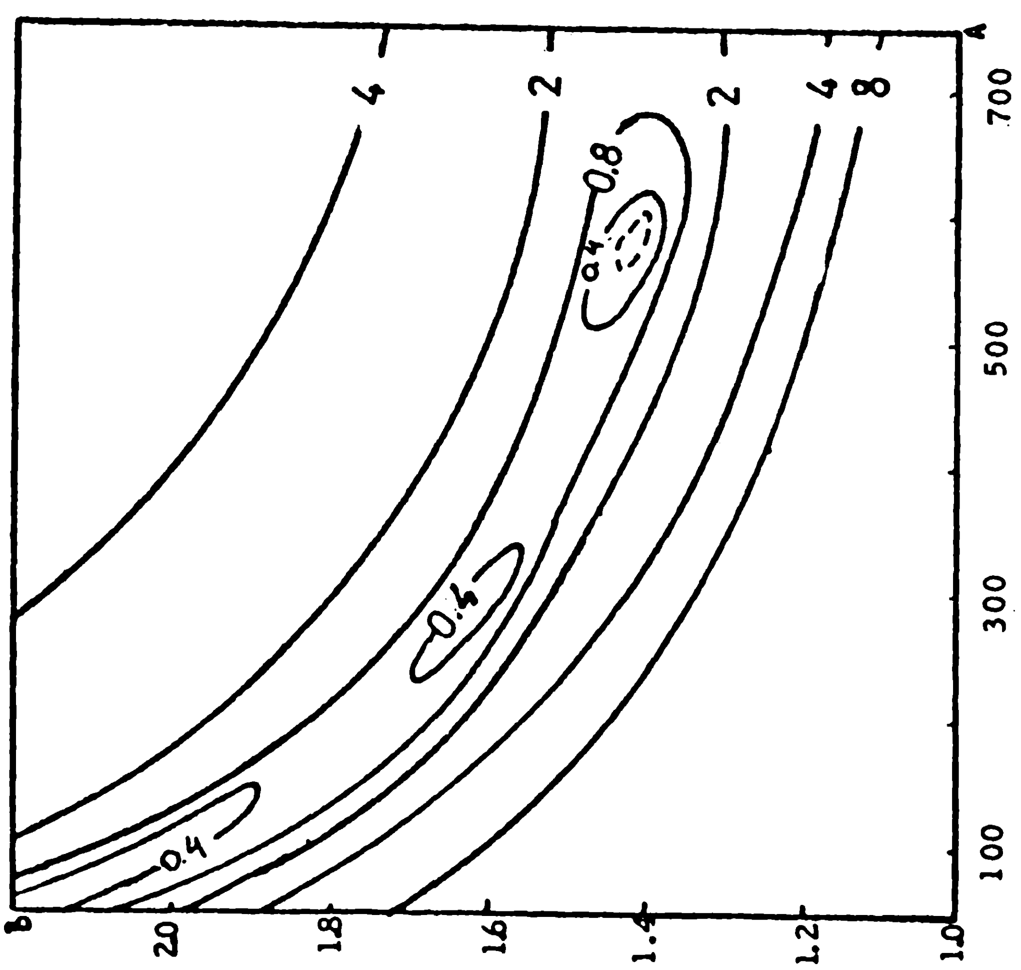

Fig.1. Diferencia de promedios
Datos de Buenos Aires

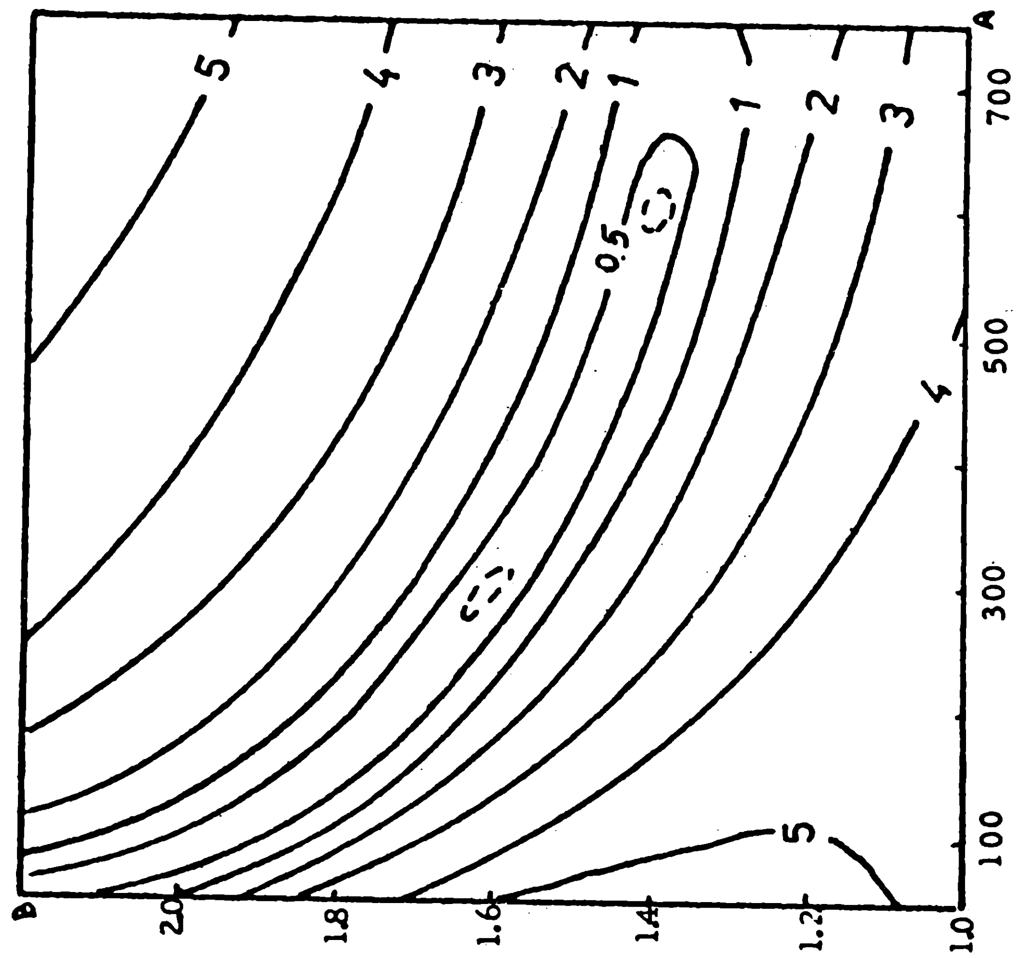

Fig.2. Valor absoluto de la t de student
Datos de Buenos Aires

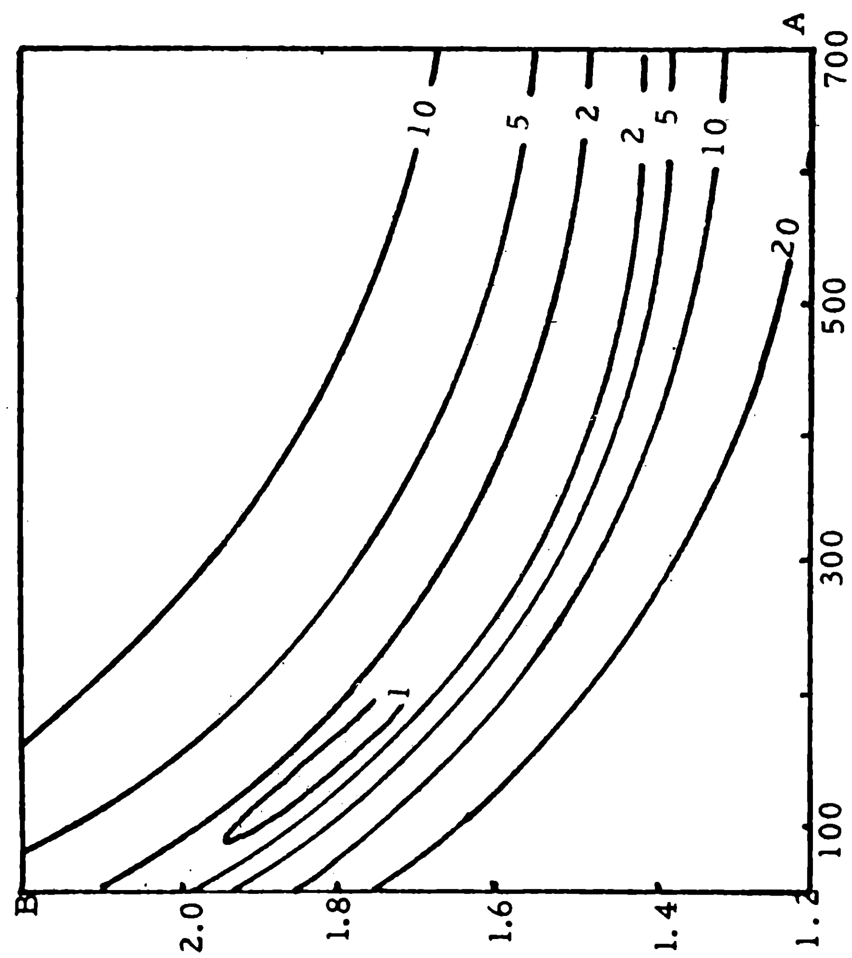

Fig. 3. Diferencia de promedios más diferencia de desviaciones standard. Datos de Buenos Aires

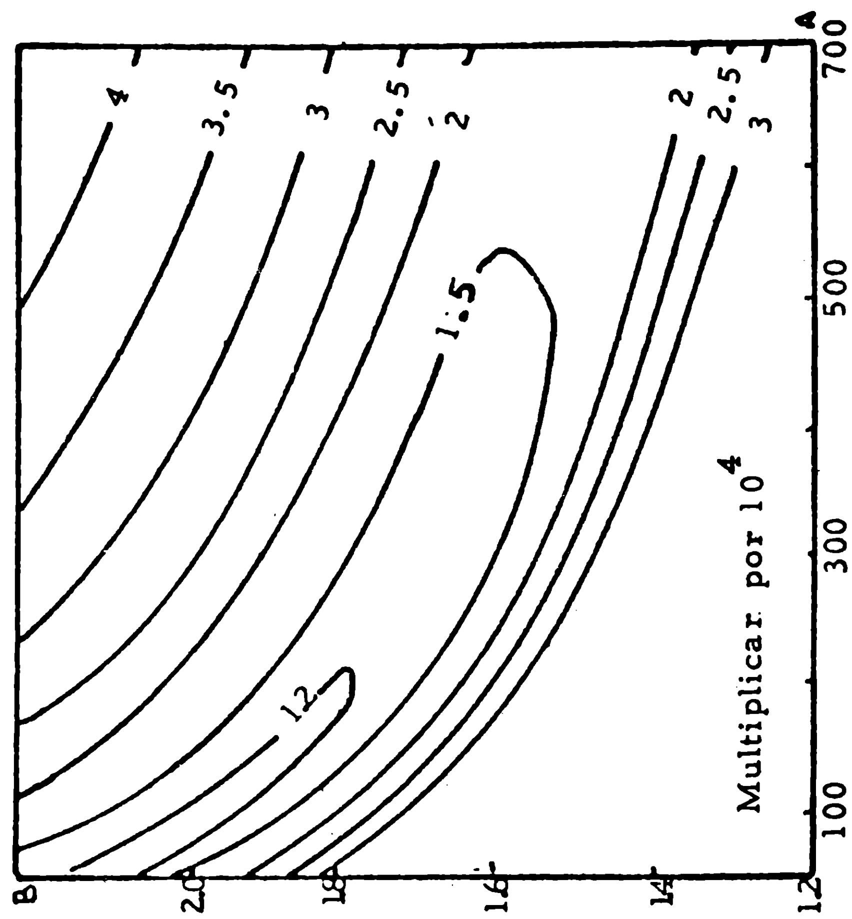

Fig.4. Sumatoria de residuos al cuadrado Datos de Buenos Aires

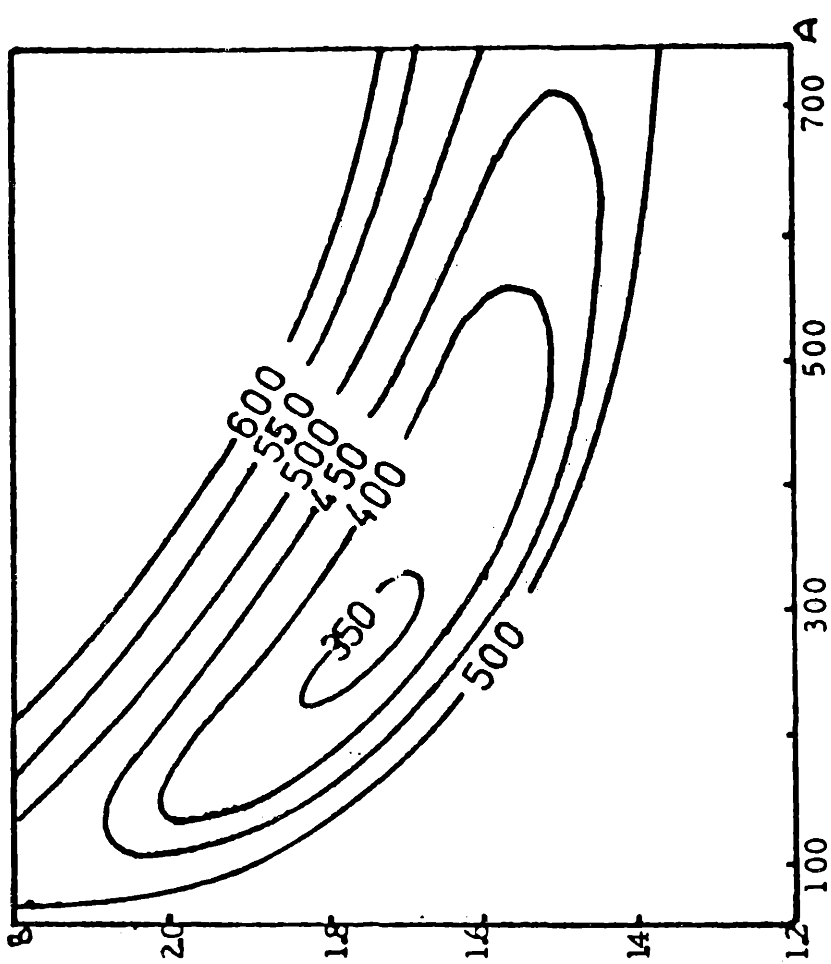

Fig.6. Sumatoria de residuos al cuadrado relativos

Datos de Buenos Aires

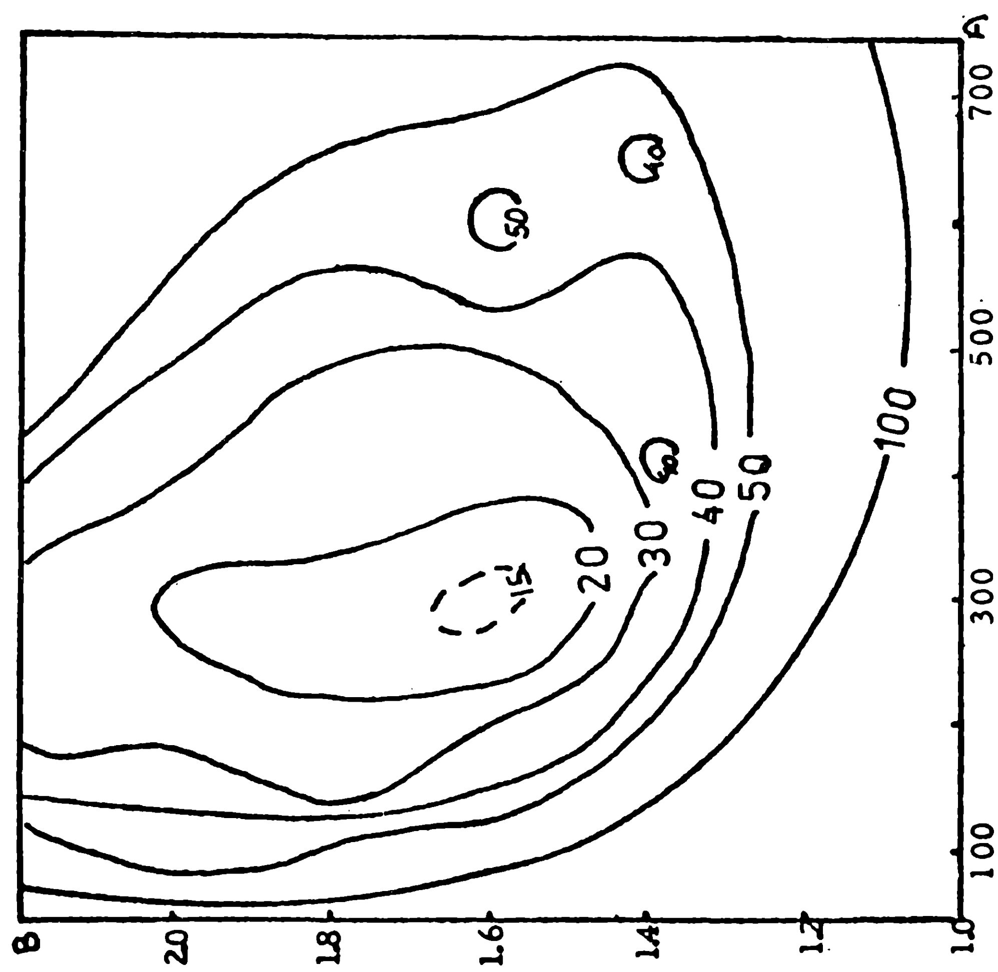

Fig.5. Test Chi cuadrado

Datos de Buenos Aires