

VARIANTE EN LA OBTENCION DEL TENSOR  
REPRESENTATIVO DE UNA POBLACION DE FALLAS

Simón Gershanik y Carlota Gershanik de Vacchino  
Observatorio Astronómico  
Universidad Nacional de La Plata  
La Plata, República Argentina

RESUMEN

Se revisa el problema de determinar el tensor de tensiones en una región en base de estrías existentes en una población de fallas. El mismo implica extraer una solución plausible de un sistema de ecuaciones homogéneas. Se indica como encararlo para que éstas resulten lineales y se da un método para compensar los datos básicos para el cálculo que se obtiene en el terreno.

ABSTRACT

The problem of determining the stress tensor representing a population of faults is revised. The same implies the search of a solution to a set of homogeneous equations. We show how to proceed in order for these equations to be linear and a least square method to compensate the basic field data is given.

## 1.- INTRODUCCION

En un trabajo relativamente reciente, considera E. Carev (1976) el problema de hallar un tensor representativo de las tensiones existentes en una región y se basa para ello en las estrías que pueden encontrarse en un conjunto de fallas de dicha región.

La citada autora asume que la componente tangencial  $\vec{\tau}$  de la tensión  $\vec{\sigma}$  que actúa sobre una falla cuya normal es  $\vec{\nu}$  (fig. 1) coincide en dirección y sentido con la estría. Por lo tanto siendo  $\vec{s}$  un vector unitario coincidente con la estría, que podemos definir en base de sus componentes por la igualdad

$$\vec{s} = \bar{i}s_1 + \bar{j}s_2 + \bar{k}s_3 \quad (1)$$

será

$$\frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|} = \vec{s}.$$

Si ponemos

$$\vec{\nu} = \bar{i}\nu_1 + \bar{j}\nu_2 + \bar{k}\nu_3,$$

se tiene para la tensión  $\vec{\sigma}$  la siguiente expresión matricial:

$$\vec{\sigma} = [\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}] \left[ \sum \right] \{ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \} \quad (2)$$

en la cual las llaves sirven para indicar una matriz columna, y

$$\left[ \sum \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Como  $\vec{\tau}$  yace en el plano de falla resulta para ese vector la expresión siguiente:

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu} \quad (3)$$

y si se define un vector  $\vec{u}$  unitario perpendicular a  $\vec{s}$  y  $\vec{v}$ , ó sea que

$$\vec{u} = \vec{s} \times \vec{v} = \bar{i}(s_2 v_3 - s_3 v_2) + \bar{j}(s_3 v_1 - s_1 v_3) + \bar{k}(s_1 v_2 - s_2 v_1) \quad (4)$$

se tendrá evidentemente

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \quad (5)$$

Como esta última ecuación incluye las componentes  $\sigma_{ij}$  del tensor  $\Sigma$ , la autora propone obtener de ella elementos con los que consigue definir las direcciones de los autovectores de  $\Sigma$ , y para simplificar el problema sugiere la conveniencia de considerar que  $\Sigma$  es puramente deviatorico o lo que es igual que su traza  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  es nula.

El problema fué considerado también por Armijo y Cisternas (1978) quienes indicaron cómo se puede obtener la dirección de los autovectores, así como un grandor  $R$  que da la relación entre las diferencias entre los módulos de los autovectores, en base de los datos  $v_1, v_2, v_3$  y  $s_1, s_2, s_3$  sin pasar por la previa obtención de las componentes  $\sigma_{ij}$ .

Para definir la dirección de los autovectores acuden esos autores a los ángulos de Euler, los cuales resultan vinculados con  $R$  y con los datos, por ecuaciones no lineales.

Como la solución de Carey usa solo parte de los datos de que se dispone, y la de Armijo y Cisternas, por ser no lineales sus ecuaciones, exige operar por sucesivas iteraciones que pueden a veces resultar de difícil convergencia, queremos revisar el problema y proponer otra forma de resolverlo. Se verá que si bien en la formación de los datos básicos el mismo es inevitablemente no lineal, no vale lo mismo en otros aspectos, y merced a ello el hallazgo de su solución se facilita considerablemente.

## 2.- LOS DATOS

En primer término deseamos clarificar de qué datos se dispone en realidad y cómo conviene tratarlos antes de su introducción en el problema.

Si bien los autores mencionados se manejan con las componentes de  $\vec{s}$  y de  $\vec{v}$ , es de notar que esos datos no se obtienen directamente en el terreno. Lo que en este último se mide en realidad es el buzamiento  $\theta_v$  de la falla, el azimut  $A_v$  de su máxima pendiente, el ángulo cenital  $\theta_s$  de la estría y su azimut  $A_s$ ; y datos estos de los que se puede deducir  $s_1, s_2, s_3$  y  $v_1, v_2, v_3$  que no son entre sí independientes.

En la figura 2,  $\Pi$  representa el plano de falla  $v$ , es su normal y  $s$  una estría; y en el triángulo esférico ABC de la misma puede verse que en efecto vale la siguiente relación:

$$\cos \theta_v \cos \theta_s + \sin \theta_v \sin \theta_s \cos (A_s - A_v) = 0$$

y por lo tanto, esta otra mas conveniente para nuestro objeto:

$$\cot \theta_v \cot \theta_s + \cos (A_s - A_v) = 0 \quad (6)$$

Antes de utilizar los datos medidos conviene entonces ajustarlos de modo que satisfagan a la (6), lo que puede hacerse sin mucha dificultad por el método de mínimos cuadrados, usando el recurso de los factores indeterminados de Lagrange (1957), del modo que explicamos a continuación.

Si designamos  $\theta_1, \theta_2, A_1, A_2$ , respectivamente a los valores de  $\theta_v, \theta_s, A_v, A_s$  medidos en una falla y hacemos

$$\epsilon_1 = \theta_1 - \theta_v; \quad \epsilon_2 = \theta_2 - \theta_s; \quad \epsilon_3 = A_1 - A_v; \quad \epsilon_4 = A_2 - A_s$$

se puede formar la siguiente función en la cual  $\lambda$  es un factor constante indeterminado de Lagrange:

$$F = \sum \epsilon_i^2 + \lambda f(\theta_v, \theta_s, A_s, A_v) \quad (i=1 \dots 4) \quad (7)$$

expresión en la cual ponemos  $f(\theta_v, \theta_s, A_s, A_v)$  en vez del primer miembro de (6).

La función  $F$  goza de la propiedad de que su mínimo coincide con el de  $\sum \epsilon_i^2$  si  $f$  satisface a la (6).

Formando las ecuaciones que minimizan a  $F$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_v - \kappa \frac{\cot \theta_s}{2 \operatorname{sen}^2 \theta_v} &= \theta_1 \\ \theta_s - \kappa \frac{\cot \theta_v}{2 \operatorname{sen}^2 \theta_s} &= \theta_2 \\ A_v + \frac{\kappa}{2} \operatorname{sen} (A_s - A_v) &= A_1 \\ A_s - \frac{\kappa}{2} \operatorname{sen} (A_s - A_v) &= A_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Las ecuaciones (8) y la (6) constituyen un sistema de cinco ecuaciones en las incógnitas  $\theta_v, \theta_s, A_v, A_s$  cuyo valor interesa, y en el coeficiente  $\kappa$  que interviene en (7) cuyo valor no se conoce de antemano.

Ese sistema constituye la parte inevitablemente no lineal del problema, y para resolverlo habrá que acudir a un procedimiento de aproximaciones sucesivas, como el de Newton Raphsón. Para facilitar su solución conviene reducirlo primero a uno mas sencillo de solo dos incógnitas.

Para lograr esto último restemos miembro a miembro las dos últimas de (8), y pongamos

$$A_s - A_v = \alpha; \quad A_2 - A_1 = \delta \quad (9)$$

Con ello se obtiene

$$-\kappa = \frac{\delta - \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (10)$$

Multiplicando el 2º término de la primera de (8) por  $\cot \theta_v$  en el numerador y en el denominador y el 2º término de la 2a por  $\cot \theta_s$  y teniendo presente la (6) y la (10) resulta:

$$\begin{aligned} \theta_v - (\delta - \alpha) \frac{\cot \alpha}{\operatorname{sen} 2\theta_v} &= \theta_1 \\ \theta_s - (\varepsilon - \alpha) \frac{\cot \alpha}{\operatorname{sen} 2\theta_s} &= \theta_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Como  $\alpha$  se puede despejar de la ecuación (6) en base de  $\theta_s$  y de  $\theta_v$ , el conjunto indicado en (11) constituye un sistema de dos ecuaciones en  $\theta_s$  y  $\theta_v$ . Dicho sistema se puede linealizar en primera aproximación, para su tratamiento por el método de Newton, desarrollando los primeros miembros en serie de Taylor a partir de  $\theta_v = \theta_v^0$  y  $\theta_s = \theta_s^0$ . Con ello, y llamando  $f_1$  al 2º término de la 1a ecuación de (11) y  $f_2$  al de la 2a ecuación resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_s} \Delta \theta_s + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \theta_v} + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_v} - 1 \right) \Delta \theta_v &= -(\theta_1 - \theta_1^0 + f_1) \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \theta_s} + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_s} - 1 \right) \Delta \theta_s + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_v} \Delta \theta_v &= -(\theta_2 - \theta_2^0 + f_2) \end{aligned}$$

expresiones en las que las derivadas de  $\alpha$  se sacan de la ecuación (6) para  $\theta_v = \theta_v^0$  y  $\theta_s = \theta_s^0$ .

Una vez hallados  $\theta_v$  y  $\theta_s$ , las ecuaciones (8), (10) y las dos últimas de (8) permiten hallar  $\kappa$ ,  $A_v$  y  $A_s$ .

### 3.- ECUACIONES PARA OBTENER EL TENSOR

Si establecemos que

$$\vec{r} = i r_x + j r_y + k r_z$$

se podrá escribir para cada plano de falla las siguientes dos ecuaciones independientes:

$$\tau_y - \tau_x \operatorname{tg} A_s = 0 \quad (12)$$

$$\sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2} - \tau_z \operatorname{tg} \theta_s = 0$$

Como la segunda de estas ecuaciones no es lineal es mejor usar en vez de ella la ecuación (5), la cual unida a la (12) deja definida la dirección de  $\vec{\tau}$ .

Como  $\vec{u}$  es perpendicular a  $\vec{\tau}$ , la (5) es equivalente a

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{u} = 0$$

En forma mas explícita se tiene entonces:

$$\begin{aligned} &(\sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3) u_1 + (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3) u_2 + \\ &+ (\sigma_{13} v_1 + \sigma_{23} v_2 + \sigma_{33} v_3) u_3 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

siendo, como se desprende de (4):

$$u_1 = v_3 s_2 - v_2 s_3$$

$$u_2 = v_1 s_3 - v_3 s_1$$

$$u_3 = v_2 s_1 - v_1 s_2$$

Por su parte  $v_1, v_2, v_3$  y  $s_1, s_2, s_3$  estan dados (fig.2) por:

$$v_1 = \operatorname{sen} \theta_v \cos A_v; \quad v_2 = \operatorname{sen} \theta_v \operatorname{sen} A_v; \quad v_3 = \operatorname{cosen} \theta_v$$

$$s_1 = \operatorname{sen} \theta_s \operatorname{cosen} A_s; \quad s_2 = \operatorname{sen} \theta_s \operatorname{sen} A_s; \quad s_3 = \operatorname{cosen} \theta_s$$

Para tener la ecuación (12) en detalle se precise las componentes de  $\vec{\tau}$ . Estas se pueden deducir de la expresión (3), y de la misma resulta:

$$\tau_x = \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 - q v_1$$

$$\tau_y = \sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 - q v_2$$

expresiones en las que obviamente

$$q = \sigma \cdot v$$

o mas detalladamente:

$$q = \sigma_{11} v_1^2 + \sigma_{22} v_2^2 + \sigma_{33} v_3^2 + 2 \sigma_{12} v_1 v_2 + 2 \sigma_{13} v_1 v_3 + 2 \sigma_{23} v_2 v_3$$

Escribiendo las ecuaciones (12) y (13) en base de lo precedente y factorizando en el resultado por las componentes de  $\Sigma$  resultan las siguientes dos ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned} a \sigma_{11} + b \sigma_{22} + c \sigma_{33} + d \sigma_{12} + e \sigma_{13} + f \sigma_{23} &= 0 \\ a' \sigma_{11} + b' \sigma_{22} + c' \sigma_{33} + d' \sigma_{12} + e' \sigma_{13} + f' \sigma_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

en las cuales

$$a = -(v_2 v_1^2 + (v_1 - v_1^3) \operatorname{tg} A_s)$$

$$b = v_2 - v_2^3 + v_1 v_2^2 \operatorname{tg} A_s$$

$$c = -v_3^2 v_2 + v_1 v_3^2 \operatorname{tg} A_s$$

$$d = v_1 - 2 v_1 v_2^2 + (2 v_1^2 v_2 - v_2) \operatorname{tg} A_s$$

$$e = -2 v_1 v_2 v_3 - (v_3 - 2 v_1^2 v_3) \operatorname{tg} A_s$$

$$f = v_3 - 2 v_2^2 v_3 + 2 v_1 v_2 v_3 \operatorname{tg} A_s$$

$$a' = v_1 u_1; \quad b' = v_2 u_2; \quad c' = v_3 u_3$$

$$d' = v_2 u_1 + v_1 u_2; \quad e' = v_3 u_1 + v_1 u_3; \quad f' = v_3 u_2 + v_2 u_3$$



Por cada plano de falla se podrá formar una pareja de ecuaciones como la (14) en las seis componentes de  $\Sigma$  como incógnitas.

Para lograr información respecto de estas últimas se necesitará por lo tanto datos de al menos tres planos de falla con los que se podrá formar seis ecuaciones. Como esas ecuaciones son homogéneas solo se podrá obtener cinco incógnitas en función de una que se elija como básica. Dividiendo por ella resulta un sistema lineal de seis ecuaciones con cinco incógnitas que se puede resolver por el método de mínimos cuadrados. Igual procedimiento puede seguirse si se dispone de datos de más de tres planos de falla.

Como cada una de las incógnitas puede ser tomada como divisor se podrá formar seis grupos distintos de ecuaciones y elegir de las soluciones que les correspondan, la que produzca la menor suma de los cuadrados de los errores.

#### 4.- OBTENCION DE LOS AUTOVECTORES

Para lograr información acerca de los autovectores, se debe formar, como es sabido, primero la ecuación de 3er grado en los autovalores  $\lambda$  :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Esa ecuación expresa la compatibilidad del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \lambda)x + \sigma_{12}y + \sigma_{13}z &= 0 \\ \sigma_{12}x + (\sigma_{22} - \lambda)y + \sigma_{23}z &= 0 \\ \sigma_{13}x + \sigma_{23}y + (\sigma_{33} - \lambda)z &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

En el mismo  $x$  y  $z$  representan las coordenadas de un punto de uno cualquiera de los autovectores.

De la (15) se puede obtener tres raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Cada una de esas raíces introducida en el sistema (16) permite obtener relaciones entre las coordenadas  $x$  y  $z$  que podemos escribir abreviadamente así:

$$y = b_i x ; \quad z = c_i x ; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

los coeficientes  $b_i, c_i$  correspondiendo a la raíz  $\lambda_i$ .

Los cosenos directores de los autovectores están dados por

$$l_i = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \quad m_i = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \quad n_i = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

resulta por lo tanto para ellos en base de (17)

$$l_i = \frac{1}{\sqrt{1 + b_i^2 + c_i^2}} ; \quad m_i = \frac{b_i}{\sqrt{1 + b_i^2 + c_i^2}} ; \quad n_i = \frac{c_i}{\sqrt{1 + b_i^2 + c_i^2}} \quad (18)$$

Si en vez de  $\sigma_{ij}$ , se pone en (15) grandores  $\frac{\sigma_{ij}}{a}$ , siendo un divisor constante, las raíces resultarán iguales a  $\frac{\lambda_i}{a}$ . Consecuentemente de las ecuaciones (16) escritas en base de  $\frac{\sigma_{ij}}{a}$  y de esas raíces, resultarán para  $z$  y las relaciones (17) sin cambio, y sin cambio resultarán también los cosenos directores  $l_i, m_i, n_i$ . Para hallar su valor, se podrá poner entonces en (15), la unidad en vez de la componente del tensor que se usara como divisor, y el valor de las raíces de las ecuaciones normales en vez de los restantes grandores  $\sigma_{ij}$ .

Una vez obtenidos los cosenos directores  $l_i, m_i, n_i$  se podrá calcular las componentes que en base de las referidas raíces cabe asignar a los tres autovectores. Para ello solo habrá que aplicar la fórmula (2), poniendo  $l_i, m_i, n_i$  en vez

de  $v_1, v_2, v_3$ . Dichas componentes no son absolutas sino que su valor está referido a la hipótesis de que uno de los  $\sigma_j$  es igual a la unidad.

## BIBLIOGRAFIA

- Armijo R. Y Cisternas A. (1978): Un problème inverse en micro-tectonique cassante, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, T. 287. Serie D. p. 595-598.
- Carey E. (1976): Analyse numerique de un modèle applie a l' etude d' une population des Failles, Thèse, 3<sup>e</sup> cycle, Centre d' Orsay, Juin 1976.
- Key Pastor J., Pi Calleja F., Trejo C.A. (1957): Análisis Matemático T.II p. 219.

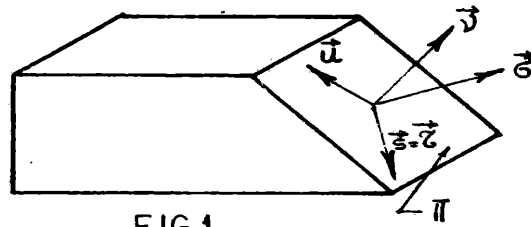


FIG.1

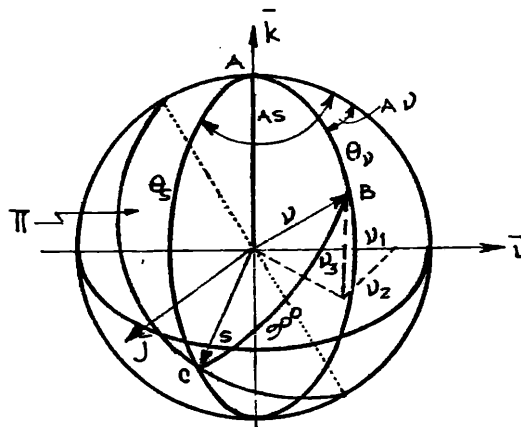


FIG.2