Método gráfico de elaboración de los resultados de las experiencias agricolas. (Método de la Hipotenusa)*.

POR EL PROF. I. L. POMORSKI
especialista del Instituto de Botánica Aplicada, Genética y Selección de Plantas de Leningrado

Traducido por el ING. AGR. E. CHORNY

I

Cuando se trata de resolver una serie de problemas especiales, relacionados con la apreciación de los rendimientos obtenidos de diversos cultivos, se aplica en la actualidad con todo éxito el llamado: « método estadístico de investigaciones ».

El sentido y la esencia de dicho método, en su aplicación dada, consiste, como es sabido, en el empleo de un criterio matemático especial que permite, en cada caso aislado, determinar las probabilidades de exactitud de los resultados finales del ensayo agrícola, es decir, aplicar un juicio enteramente objetivo sobre el grado de exactitud de las deducciones concretas que, del ensayo en cuestión, se debe considerar. La posibilidad de la aplicación de este criterio se basa en el cálculo de los llamados « errores medios » que determinan la exactitud de los cálculos obtenidos en los ensayos de rendimiento de distintas variedades de cultivo, métodos de preparación del suelo, épocas de siembra, etc.

Recordaré, brevemente, el método común de cálculo de estos « errores medios » y su empleo indicado en un caso particular de la apreciación de los resultados de un ensayo comparativo de rendimientos.

Tomemos, por ejemplo, los siguientes datos de un ensayo comparativo de rendimiento de avenas (Estación de Schatilow, año 1924,

(*) *Bulletin of Applied Botany of Genetics and Plant-Breeding.* Leningrado, T. XXI, N° 1, p. 597-639. 1928-29.

variedad Seleccionada-Moscú, B. 326, rendimiento en granos, expresado en « pud's » por « desyatina ») :

Rendimiento	obtenido	de	la	parcela	Nº 1	117,2	pud's
»	»	»	»	»	» 2	124,0	»
»	»	»	»	»	» 3	151,3	»
»	»	»	»	»	» 4	140,8	»

Vamos a calcular primero el rendimiento medio de las 4 parcelas sembradas con dicha variedad de avena (la media aritmética M). Para esto es necesario sumar las 4 cantidades (variantes V), que representan el rendimiento obtenido de cada parcela, y dividir la suma (caracterizada comunmente por el símbolo convenido de ΣV) por el número de parcelas n (en nuestro ejemplo corresponde, pues, dividir por 4). Tendremos:

$$M = \frac{\Sigma V}{n} = \frac{117{,}2 + 124{,}0 + 151{,}3 + 140{,}8}{4} = \frac{533{,}3}{4} = 133{,}3 \text{ pud's}$$

Ahora, para calcular el error medio (m), hay que determinar las « desviaciones » (X) de cada variante (V) de la media aritmética (M), es decir, determinar en cuanto es superior (o, por el contrario, inferior) el rendimiento obtenido de cada parcela al rendimiento medio total de la variedad dada. Para esto es necesario restar de cada variante V la misma cantidad M. Las operaciones son las siguientes:

Para	la	parcela	Nº 1 . . .	$x_1 = V_1 - M = 117{,}2 - 133{,}3 = -16{,}1$
»	»	»	» 2 . . .	$x_2 = V_2 - M = 124{,}0 - 133{,}3 = -\ 9{,}3$
»	»	»	» 3 . . .	$x_3 = V_3 - M = 151{,}3 - 133{,}3 = +18{,}0$
»	»	»	» 4 . . .	$x_4 = V_4 - M = 140{,}8 - 133{,}3 = +\ 7{,}5$

Luego se eleva cada desviación x al cuadrado y se suman todos estos cuadrados:

$$x_1^2 = (-16{,}1)^2 = 259{,}21$$
$$x_2^2 = (-\ 9{,}3)^2 = 86{,}49$$
$$x_3^2 = (+18{,}0)^2 = 324{,}00$$
$$x_4^2 = (+\ 7{,}5)^2 = 56{,}25$$

La suma de los $\Sigma x^2 = 725{,}95$

La suma de los cuadrados de las desviaciones de las 4 variantes (representada, generalmente, por el símbolo empírico $\Sigma\, x^2$), hay que dividir por la cantidad $n\,(n-1)$, es decir, por el número de parcelas n, multiplicado por la misma cantidad, menos uno. En nuestro ejemplo corresponde, pues, dividir $\Sigma\, x^2$ por 4×3, es decir, por 12. Tendremos entonces:

$$\frac{\Sigma\, x^2}{n\,(n-1)} = \frac{725{,}95}{12} = 60{,}5$$

Finalmente, hay que extraer la raíz cuadrada de esta cifra:

$$\sqrt{60{,}5} = \text{aproximadamente, a } \pm\ 7{,}78$$

Este número representará el error medio « m ». En esta forma, para calcular « m » se emplea la siguiente fórmula general:

$$m = \pm \sqrt{\frac{x^2}{n\,(n-1)}}\,.$$

Para nuestdos fines (en la aplicación del método gráfico) es útil recordar también que tiene el mismo valor que la anterior, diferenciándose, de la misma, sólo por un pequeño cambio del orden de las operaciones, como ser:

$$m = \pm \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{n\,(n-1)}}$$

Tenemos que observar, justamente, que el signo doble (más-menos) indica que el error medio « m » representa el grado de inexactitud de la media aritmética M, la que puede ser en más o en menos. El resultado final de la determinación del rendimiento medio M y su error $\pm$ « m », se anota, generalmente, en la siguiente forma:

$$M = 133{,}3 \ \pm\ 7{,}78 \text{ Pud's.}$$

Esto quiere decir que el rendimiento medio (M) de una variedad dada, obtenido por nosotros de 4 frecuencias (es decir con « n » $= 4$), que resultó ser de 133,3 Pud's, — en condiciones distintas podría resultar algo mayor, o por el contrario, menor de dicha cantidad, diferenciándose del rendimiento medio calculado por nosotros (133,3 P.), por la cantidad que representa este error « m » (es decir, por 7,78 Pud's.). En esta forma, los límites medios de las posibles oscilaciones del rendimiento de dicha variedad de avena están comprendidos entre los extremos de 133,3 — 7,78 y 133,3 + 7,78 (es decir, más o menos desde 125,5 hasta 140,1 Pud's). Ahora bien, estas son tan solo las oscilaciones medias, en cambio, las oscilaciones máximas de un rendimiento medio (M) basadas en la teoría de las probabilidades, se determinan tomando, aproximadamente, 3 « m » (es decir, 3 errores medios) y, en el caso presente están comprendidos, por tanto, entre los límites de 110.0 y 156,6 Pud's por desyatina.

Es en esta forma como se determina comunmente la exactitud del cálculo de las medias aritméticas por el método de la estadística de las variaciones (1).

Indicaremos ahora como es posible apreciar, por medio de los errores medios (m), la diferencia que resulta entre los rendimientos medios de dos distintas variedades.

Sea, por ejemplo, que además de la variedad « Moscú-Selecc. B. 326 », tomada por nosotros, tengamos otra como la « Est. Schatilow 056 », con la cual determinaremos M y m, obteniéndose, en el resultado final, los siguientes datos:

1) Variedad N° 1 (Moscú-Selecc. B. 326):

$$M_1 = 133{,}3 \text{ P. } m_1 = \pm\ 7{,}78 \text{ P.}$$

2) Variedad N° 2 (Schatilow 0.56):

$$M_2 = 109{,}9 \text{ P. } m_2 = \pm\ 4{,}95 \text{ P.}$$

La simple comparación de las dos medias aritméticas M_1 y M_2 entre sí, nos da, ya, ciertos fundamentos para considerar la primera variedad, en comparación con la segunda, como la de mayor rendimiento (puesto que 133,3 es más que 109,9). Pero aún es necesario comprobar esta conclusión desde el punto de vista del grado de su exactitud, puesto que cada una de las dos medias aritméticas representa, por sí, un número no del todo exacto. Para la comprobación definitiva del mayor rendimiento de la primera variedad, es necesario convencerse

(1) Ver mi « *Manual sobre la estadística de variaciones* », que trata de los métodos de cálculo de los errores medios. Leningrado, 1927.

de que todas las probables oscilaciones de dichas medias aritméticas dentro de los límites de sus triples errores (m), — el valor de M_1 siempre será superior a M_2.

Matemáticamente este requerimiento se reduce a la ejecución de una determinada relación numérica, en la cual la diferencia dada de las dos medias aritméticas (es decir $M_1 - M_2$) debe resultar, por lo menos, 3 veces mayor del error de esta diferencia (m), la cual se determina (de acuerdo con la teoría de la estadística matemática), extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores medios de ambas variedades. La fórmula es la siguiente:

$$m_{\triangle} = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$

La constatación de dicha diferencia entre dos medias aritméticas depende, pues, del grado de la relación:

$$\frac{M_1 - M_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}.$$

Si esta relación resultara igual a 3 (o más), la diferencia de las medias aritméticas, revelada, puede considerarse como constatada; en caso contrario, sólo habrá que considerar esa diferencia como casual.

Veremos qué resultado dará, desde este punto de vista, la comparación de las dos variedades, de nuestro último ejemplo, entre sí:

$$\frac{133,3 - 109,9}{\sqrt{7,78^2 + 4,95^2}} = \frac{23,4}{\sqrt{60,53 + 24,50}} = \frac{23,4}{\sqrt{85,03}} = \frac{83,4}{9,22} = 2,5.$$

Habiéndose obtenido, en el presente caso, una diferencia de las medias (23,4 P.) de sólo 2,5 veces mayor de su error (9,22 P.), — no es posible, por consiguiente, considerar aún como constatada dicha diferencia. Esto quiere decir que, en otras correlaciones, entre el suelo y demás condiciones, puede ocurrir el caso de que el rendimiento medio de la primera variedad resultare, por el contrario, inferior al rendimiento medio de la segunda variedad. Es por esta razón que el resultado de la experiencia obtenido en el caso particular presente no nos ofrece una seguridad completa.

Este es el método común de las operaciones numéricas — ligadas con la determinación de los errores medios y exactitud de las deducciones definitivas — que se aplica en los cultivos experimentales de variedades.

No es difícil observar que este método de calcular resulta sumamente engorroso, que exige gran pérdida de tiempo y que no garantiza contra los errores gruesos, accidentales, que siempre pueden producirse en un proceso de prolongados cálculos que no se prestan a comprobaciones en sus resultados definitivos. Este método resulta sobre todo engorroso cuando se trata de comparar entre sí una gran cantidad de variedades.

Es cierto que existe una serie de métodos más perfeccionados y fáciles para calcular M y m, que proporcionan además la posibilidad de un control intermediario, — pero todos estos métodos se refieren al cálculo de los errores medios de una gran cantidad de variantes, mientras que en un ensayo de cultivos la cantidad de parcelas, por razones técnicas, es generalmente limitada.

Tratando de encontrar un sistema racional para estos cálculos, en su aplicación a las condiciones especiales de las « experimentaciones de variedades », — he logrado obtener un método gráfico especial de la determinación de los errores medios y, habiéndolo ensayado sobre el material de la « Experimentación de Variedades » de la zona norte del país, me he convencido de la plena bondad de este método, tanto en lo que se refiere a la suficiente exactitud de las deducciones definitivas obtenidas por este medio, como también por la economía del tiempo introducida por dicho método.

La determinación de los errores medios por el método gráfico, puede llevarse a cabo fácilmente sobre una hoja de papel milimetrado, empleando un doble decímetro, un lápiz y un compás de dos puntas. Es conveniente proveerse de un compás de tamaño, más o menos, grande.

Para la mayor claridad de la descripción, vamos a analizar la aplicación de este método sobre un caso particular cualquiera con datos artificiales en números redondos. Sea, por ejemplo, que se requiera determinar el error medio « m » para las siguientes 4 variantes (en pud' por hectárea):

90, 110, 145 y 155.

Ante todo determinaremos por el método común de cálculo, la media aritmética de todas estas 4 variantes:

$$M = \frac{90 + 110 + 145 + 155}{4} = \frac{500}{4} = 125 \text{ Pud's}.$$

Ahora hay que trazar con lápiz sobre una hoja de papel milimetrado, una recta horizontal AB (ver fig. 1) y marcamos sobre la misma las divisiones de una escala elegida arbitrariamente. Es conveniente elegir la escala de tal modo que cada centímetro cúbico co-

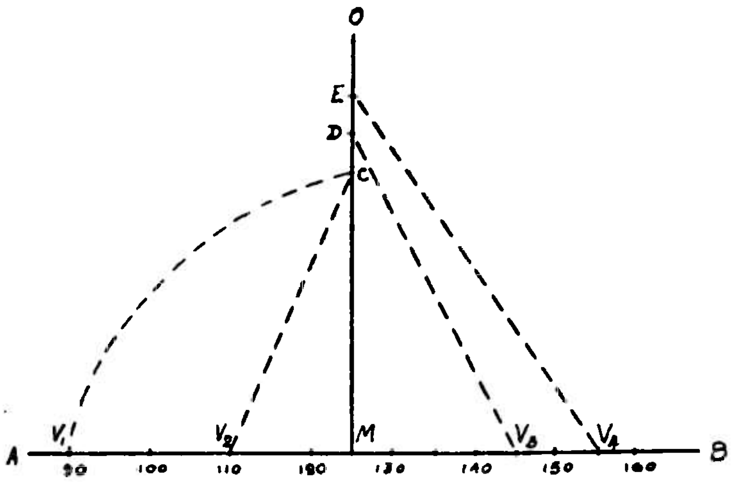

Fig. 1

rresponda a un número redondo de unidades de nuestra medida (en este caso de pud's), que podríamos llamar «números de escala»: 1, 2 ó 5 con la cantidad necesaria de ceros (por ejemplo: 10, 20 y 50 ó 100, 200 y 500 ó 0.1, 0.2 y 0,5; etc.). Esto se hace para mayor comodidad al hacer uso de esta escala en todos los cálculos sucesivos.

Tomando en cuenta la medida de nuestro dibujo, tomaremos en el caso presente la escala de 10 Pud's por cada centímetro. Por tanto, sobre la línea AB se puede trazar las divisiones, comenzando de 90 hasta 160 (puesto que la variante menor de nuestro caso es de 90 pud's y la mayor de 155 Pud's).

Ahora hallaremos sobre la línea AB el punto M, que corresponda, en nuestra escala, a la media aritmética $M = 125$ Pud's. Evidentemente, el punto M resultará justo en el medio entre las divisiones 120 y 130 de esta escala. Desde el punto M se traza con lápiz una línea vertical MO, guiándose por la dirección de las líneas del papel milimetrado.

Con esta construcción preliminar termina la preparación del esquema para las futuras determinaciones. Ahora bien, la determinación misma del error buscado (m) se efectúa en dos operaciones.

La primera consiste en la construcción de un segmento sobre dicho esquema, que sea igual a $\sqrt{\Sigma x^2}$, y la segunda operación — en la disminución de este segmento en una cantidad de veces igual a n $(n - 1)$, lo que se hace por medio de una medida de compás, preparada en escala, especialmente utilizada para este fin. Analicemos por separado estas dos operaciones.

Para la construcción de un segmento igual a $\sqrt{\Sigma x^2}$, procederemos de la siguiente manera.

1º Colocamos una de las puntas del compás en el punto M y con la otra punta buscaremos sobre la línea AB el punto V_1, que corresponde, en nuestra escala, a la primer variante (90 pud's) y, con la misma abertura de compás que marcó la distancia desde M hasta V_1, marcaremos sobre la vertical MO, hacia arriba, el punto C $(MV_1 = MC)$.

2º Luego mediremos con el compás la distancia desde el punto C hasta el punto V_2, que corresponde a la segunda variante (110 P.) y nuevamente marcaremos esa distancia sobre la línea MO. Obtendremos el punto D $(CV_2 = MD)$.

3º De la misma manera procedemos con la tercer variante (145 P.), es decir, medimos la distancia desde el punto D hasta el punto V_3, que corresponde a esta tercer variante y la proyectamos sobre la línea MO. Obtendremos el punto E $(DV_3 = ME)$.

4º Finalmente, efectuamos esta misma operación con la última variante (155 P.), para cuyo objeto medimos la distancia desde el punto E hasta el punto V_4, correspondiente a la última variante, pero en este caso ya no hay más necesidad de proyectar esta distancia sobre la línea MO, puesto que la misma presenta justamente el segmento requerido, igual a $\sqrt{\Sigma x^2}$, de lo cual no es difícil convencerse, recurriendo a la simple consideración geométrica (a base del famoso teorema de Pitágoras).

Todas las distancias medidas y proyectadas por el compás, fueron trazadas, para la mayor claridad, con líneas punteadas. En realidad el trazado de estas líneas es, evidentemente, innecesario.

La comprobación de estos trazados puede efectuarse por medio de la repetida medición de todas las distancias en sentido contrario (es decir, comenzando, al revés, desde la última variante V_4). Dada la suma facilidad y rapidez con que se ejecutan las operaciones indicadas, esta comprobación no puede complicar mayormente el trabajo.

Una vez construído sobre el plano el segmento $= \sqrt{\Sigma x^2}$ y efectuada su comprobación por el método arriba indicado, hay que dividir este segmento — utilizando un gráfico de escala preparado de antemano, — ver fig. 2, — sobre $n(n-1)$ y al final obtendremos, evidentemente, el requerido error medio « m ». (Ver la fórmula arriba indicada para el cálculo de « m »).

Se procede de la siguiente manera:

De las líneas oblícuas de este gráfico, que parten como rayos del punto *R*, escogemos, precisamente, la línea que corresponda al núme-

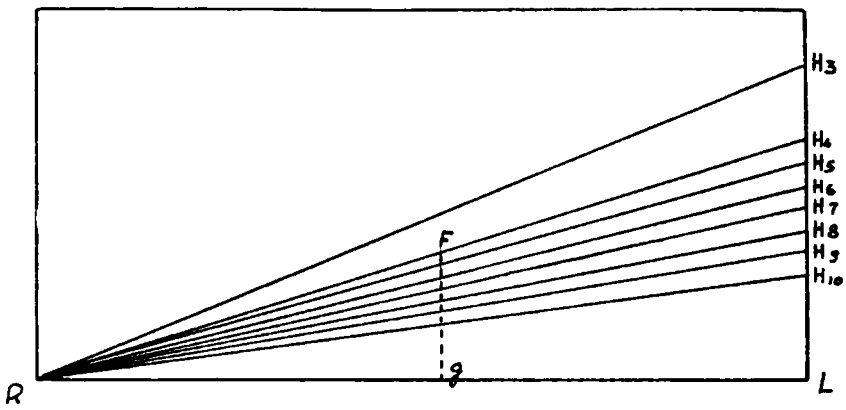

Fig. 2

ro de variantes « n » de que disponemos. En el gráfico, estas líneas oblícuas están trazadas de tal manera que la superior de todas RH_3 corresponde al número de variantes $n = 3$, la que sigue a ésta, RH_4 corresponde a $n = 4$, etc., (el signo numérico colocado al lado de la letra *H*, indica precisamente ese número de « n »).

Siendo que en nuestro ejemplo fueron tomadas 4 variantes ($n = 4$), corresponde, en este caso, utilizar la oblícua RH_4 (la segunda de arriba). Sobre esta línea proyectamos desde el punto *R*, del lado de la derecha, el segmento EV_4 ($= \sqrt{\Sigma x^2}$), (ver fig. 1) trasladado por medio del compás, y en el resultado obtendremos sobre esta línea el punto *F* ($EV_4 = RF$). Si con el mismo compás medimos ahora la distancia que media entre el punto *F* y el borde inferior del gráfico (línea *RL*), es decir, hasta el punto *G* (lo cual no es difícil hacer guiándose por el sentido de las líneas del papel milimetrado), tendremos el segmento *FG* que es igual, en la escala establecida por nosotros, al requerido error medio m (en el presente caso m resulta aproximadamente igual a 15.1 P.).

Indicaremos ahora el método general de la preparación de este gráfico en escala (ver fig. 2).

Dicho gráfico está contenido en un cuadrilátero que tiene 20 cent. de ancho por 10 cent. de alto. Las líneas oblícuas se trazan constantemente desde el punto R, uniendo distintos puntos H. Estos puntos H se determinan a la siguiente distancia a partir del punto L en el sentido vertical:

Para	$n = 3$	el	punto	H_3	desde	el	punto	L 8.94 cm.
»	$n = 4$	»	»	H_4	»	»	»	L 6.03 »
»	$n = 5$	»	»	H_5	»	»	»	L 4.59 »
»	$n = 6$	»	»	H_6	»	»	»	L 3.71 »
»	$n = 7$	»	»	H_7	»	»	»	L 3.12 »
»	$n = 8$	»	»	H_8	»	»	»	L 2.70 »
»	$n = 9$	»	»	H_9	»	»	»	L 2.37 »
»	$n = 10$	»	»	H_{10}	»	»	»	L 2,12 »

El gráfico delineado por estos puntos está calculado para un máximum de casos de 10 variedades.

Si fuera necesario preparar un gráfico para una cantidad mayor de 10 variantes, podríase utilizar la siguiente fórmula general que determina en centímetros la distancia correspondiente a la ubicación de los puntos H respecto al punto L, según sea el número de variantes n:

$$H\,L = \frac{20}{\sqrt{n\,(n-1)} - 1}$$

Siendo que el gráfico de esta escala, preparado en la forma referida, tiene la importancia de un recurso constante, es conveniente, para la mayor comodidad, (menor desgaste por el uso del compás), pegar el papel con el gráfico sobre un cartón o, aún mejor, sobre una tablita fina.

Observemos que para el número de variantes $n = 2$ no está trazada la línea oblícua correspondiente, en el gráfico de la escala. Esto se explica por el hecho de que en el caso dado, el error medio m puede determinarse fácilmente por el método aritmético tratándose simplemente de la semi-suma de dos variantes. Así por ejemplo, si tenemos dos variantes:

$$V_1 = 140 \text{ P. y } V_2 = 130 \text{ P.}$$

el error medio será:

$$m = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{140 - 130}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ P.}$$

Conviene tener en cuenta que la media aritmética *M*, calculada tan solo sobre dos variantes, resulta muy insegura y generalmente no se aconseja utilizarla.

La determinación gráfica de los errores para un conjunto de variedades, se puede obtener por construcción, en la forma indicada, sobre un mismo gráfico.

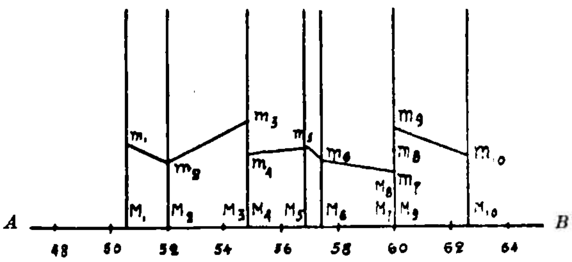

Fig 3

Para ello, hay que elegir, ante todo, una escala general para el conjunto de variedades cuyo error se trata de determinar.

Se procede de la siguiente manera: Se calcula, por las medidas del papel milimetrado, la cantidad aproximada de centímetros que puedan entrar en la línea horizontal *AB* (fig. 3). Luego se determina la diferencia existente entre la mayor y la menor variante (independientemente de la variedad a que correspondan) y, finalmente, la diferencia entre las variantes se divide por el número total de centímetros tomados.

El resultado de esta división dará, aproximadamente, la cantidad de Pud's correspondientes a un centímetro del gráfico. Si redondeamos esta cifra a un número entero de escala, el más próximo, obtendremos la unidad en la escala conveniente. Aclararemos lo dicho con un ejemplo: Sea que el rendimiento de 10 variedades ensayadas ha variado entre los límites de 48.7 a 71.2 P. Entonces la diferencia entre la variante mayor y la menor será:

$$71{,}2 - 48{,}7 = 22{,}5 \text{ P.}$$

Ahora supongamos que las dimensiones del papel permiten ubicar sobre la línea AB (fig. 3) 12 centímetros aproximadamente. (Se entiende que tratándose de muchas variedades conviene hacer esquemas de mayores dimensiones por razones de claridad).

Dividiendo 22.5 por 12, obtendremos 1,875. Redondeando este número hasta el más próximo de escala, o sea hasta 2, tendremos la cantidad definitiva para nuestra escala, o sea 2 P: por cada centímetro en el esquema.

Transportando luego las correspondientes divisiones en escala sobre la línea AB, tendremos los puntos $M_1 - M_2 - M_3 - M_4$, etc., o sea los rendimientos medios de cada una de las 10 variedades desde los cuales se levantan líneas verticales. Si en esta operación coinciden distintos valores de M, (es decir, que entre las medias aritméticas hubiera dos o más de un mismo valor) las líneas verticales correspondientes serán comunes a esos valores de M.

Para la construcción de los errores medios m de cada variedad por separado, se procederá en la misma forma indicada en la aplicación del ejemplo arriba analizado.

Todas estas construcciones se pueden efectuar, evidentemente, sobre un mismo esquema, común para todas las variedades.

Los errores m obtenidos con el resultado de estas construcciones, se pueden trasladar sobre las correspondientes líneas verticales hacia arriba de los puntos M. Uniendo entre sí los puntos señalados en esta forma $m_1 - m_2 - m_3 - m_4$ — etc., por medio de una línea quebrada $m_1 - m_2 - m_3 - m_4$ — etc., tendremos el «gráfico de errores» común para todas las variedades. Sobre este gráfico, se indica el rendimiento medio de las variedades, por separado (a la derecha las de buen rendimiento, a la izquierda las de rendimiento deficiente) y colocando las líneas verticales correspondientes, se determina el grado de exactitud de estos rendimientos medios, (es decir, sus errores m) por la longitud de los respectivos segmentos verticales.

En el trazado de este «gráfico de errores» se encuentran algunas veces dificultades técnicas, que consisten por ejemplo, en que la escala común establecida para todo el esquema, en su relación a las variantes de algunas variedades, puede resultar demasiado pequeña o demasiado grande.

En la aplicación de tales casos, que son realmente bastante raros, la construcción de los errores puede efectuarse por separado, sobre un papel milimetrado, en dimensiones disminuídas o aumentadas, los que corresponderían al número, en escala, más próximo. Así en nuestro último ejemplo, en lugar de dos P., por cada centímetro, se podría tomar, para un esquema mayor, 1 P., por cada centímetro y para uno menor, 5 P.

De acuerdo a lo dicho, cambiará, evidentemente, la cantidad resultante del error m, obtenida por el método gráfico, razón por la cual, al transportarla sobre el esquema común, habrá que disminuir o aumentar el valor obtenido, en el número necesario de veces.

Esta corrección puede hacerse sobre el mismo « gráfico de escala » en el cual, más arriba, hemos producido la división del segmento $\sqrt{\Sigma x^2}$ sobre $\sqrt{n(n-1)}$. Para ello hay que trazar previamente, sobre dicho gráfico, 3 líneas oblícuas complementarias: L_x, L_y, L_z, (ver fig. 4).

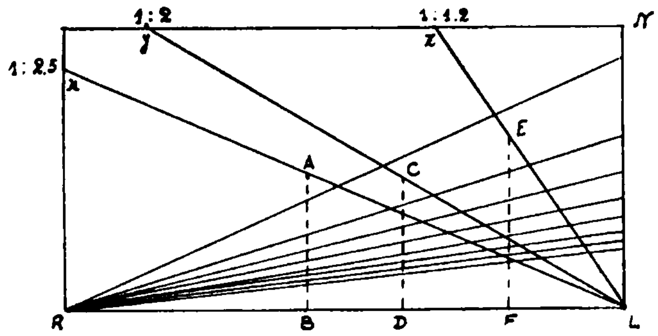

Fig. 4

La primera de estas líneas Lx se traza a partir del ángulo L, uniéndose con el punto x que se encuentra ubicado a 8.7 centímetros del punto R. La línea siguiente Ly se traza a partir del mismo punto que la anterior, uniéndose con el punto y que dista 17,32 centímetros del punto N. La última línea Lz se traza uniendo el punto L con el punto z ubicado a 6,63 centímetros del punto N. Todas estas líneas oblícuas, para diferenciarlas de las anteriores, conviene trazarlas sobre el « gráfico de escalas » con tinta colorada.

Las líneas auxiliares indicadas, sirven para la disminución o aumento de los errores m, levantados en el esquema aparte, en 2,5 y en 2 veces. Si se utilizan en el diseño únicamente los números de la escala 1,2 y 5, es evidente que no podrán presentarse otros casos. Efectivamente, al cambiar la escala del 1 al 2, del 2 al 5, del 5 al 10, etc., o viceversa, siempre aumentamos o disminuimos la escala solamente en 2 ó 2,5 veces.

Indicaremos la forma en que debe hacerse uso del gráfico auxiliar para las correspondientes correcciones de aquellos errores m que fueron construídos en la escala modificada.

1º Para disminuir el error m en dos y media veces, se toma sobre la línea Lx la medida corespondiente a su valor (la que está indicada con 1 : 2,5) a partir del punto L a la izquierda, y obtendremos sobre esta línea un punto A, por ejemplo. Si medimos la distancia desde A hasta B, tendremos la disminución necesaria en 2,5 veces.

2º Para disminuir el error en 2 veces tomamos nuestro error sobre la línea Ly (tiene la indicación 1 : 2). Tendremos, por ejemplo, el punto C. El segmento CD tendrá las dimensiones buscadas del error m disminuído en 2 veces.

3º Para aumentar el error m en 2 veces se debe, ante todo, disminuir este error en 1,2 veces por medio de la línea Lz (tiene la indicación de 1 : 1,2) y luego tomar 3 veces este segmento disminuído EF, obtenido en esa forma sobre el esquema común.

En lugar de construir el error m sobre una hoja de papel aparte, se puede proceder en esta otra forma. Si la escala común, al aplicarla al conjunto dado de variedades, resulta demasiado grande, y el segmento final $(\sqrt{\Sigma x^2})$ no puede ser colocado en el dibujo, es conveniente formar dos grupos de variantes en vez de uno y determinar aparte el segmento buscado para cada una de los dos grupos de variantes.

Disminuyendo luego ambos segmentos en dos veces, con ayuda de la línea L_y del gráfico auxiliar de escala, y tomando estos segmentos desde el punto C sobre las dos líneas CD y CE (ver fig. 5), recíprocamente perpendiculares, deberáse, luego, medir con el compás la distancia DE, la que evidentemente será igual a la mitad del segmento buscado (es decir: $^1/_2 \sqrt{\Sigma x^2}$).

El error m obtenido por medio de este último segmento será, como se ve, dos veces menor de su verdadero tamaño, siendo necesario, entonces, aumentar en dos veces este segmento final ($1/2\ m$), es decir, tomar dos veces su tamaño sobre el dibujo.

El método gráfico descripto para representar los resultados de los ensayos experimentales de cultivos, da la posibilidad de efectuar también la comparación final de rendimientos de variedades separadas, desde el punto de vista de la probabilidad de una u otra diferencia revelada. La aplicación del criterio de apreciación arriba indicado, se consigue así con una simple construcción suplementaria sobre el gráfico común de errores.

Sean, por ejemplo, dos variedades cualesquiera que hayan dado rendimientos medios M_1 y M_2 con sus errores m_1 y m_2 (ver fig. 6). La situación del punto M_1 a la derecha del punto M_2 indica directamente que la primera variedad resultó en este ensayo de mayor rendimiento que la segunda.

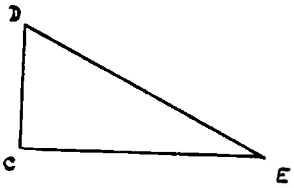

Fig. 5

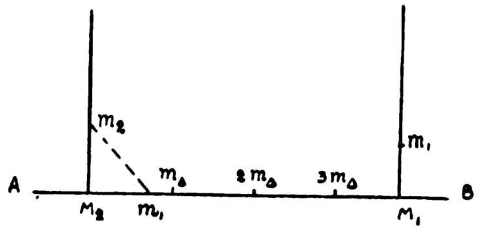

Fig 6

Para apreciar la exactitud de esta conclusión, es necesario construir el error de la diferencia de estas variedades,

$$m_\Delta = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

y ver cuantas veces entra este error en la cantidad diferencial de M_1 y M_2. Si resulta que el error m puede ubicarse sobre $M_1 \, M_2$ no menos de 3 veces, se puede considerar como real dicha diferencia de los rendimientos medios, en el caso contrario, el rendimiento mayor de la primer variedad se considerará solamente como casual (o de cualquier modo se deberá considerar el resultado del ensayo como no demostrado).

Para la construcción del error medio de la diferencia, tomaremos con el compás la medida del error de la primera variedad (es decir, la distancia desde el punto M_1 hasta el punto m_1) y colocaremos este segmento sobre la línea AB a la derecha del punto M_2 y desde el punto m_1 mediremos la distancia hasta el punto m_2 (es decir hasta el punto del segmento que representa el error de la segunda variedad). Esta última distancia, marcada en la fig. 6 con la línea punteada $m_1 \, m_2$, representa el requerido error de la diferencia (m_Δ), de lo cual no es difícil convencerse por medio de sencillas consideraciones geométricas sobre la misma base del teorema de Pitágoras.

El segmento $m_\Delta = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$, obtenido de este modo, debe tomarse desde el punto M_2, a la derecha de la línea AB, tres veces seguidas (obtendremos los puntos m_Δ , $2\, m_\Delta$ y $3\, m_\Delta$). En el presente caso el último punto ($3\, m_\Delta$) quedó comprendido entre los puntos M_2 y M_1, por lo tanto puede considerarse demostrada la diferencia de rendimiento revelada. Si, por el contrario, ese punto ($3 m_\Delta$) hubiese resultado colocado a la derecha de M_1, la exactitud de esa diferencia sería dudosa.

Como es evidente, el resultado final de estas construcciones no depende en absoluto de su orden. Podríamos por el contrario, sumar geométricamente el error m_2 al error m_1 y el error de la diferencia m_Δ obtenido en el punto M_1 (es decir, la hipotenusa del triángulo rectángulo obtenido), tomarlo 3 veces sobre la línea BA a la derecha del punto M_1. En este caso, nuestra conclusión sobre la exactitud o casualidad de la diferencia dada de los rendimientos medios, dependería de la situación del tercer punto ($3\, m_\Delta$) con referencia al punto M_2, situada a la izquierda. (Si el punto $3\, m_\Delta$ se ubicara a la derecha de M_2, la diferencia será real, y si se ubicara a la izquierda será casual). Esta variación en la resolución del problema dado, por ser completamente evidente y de fácil entendimiento, no se indica para nada en la figura 6.

Supongamos ahora que es necesario efectuar la comparación de todas las variedades de cultivos ensayadas a un mismo tiempo, con una cualquiera de ellas tomada como «Standard». En este caso, es conveniente realizar las construcciones gráficas correspondientes, empleando un medio algo distinto. (Ver fig. 7).

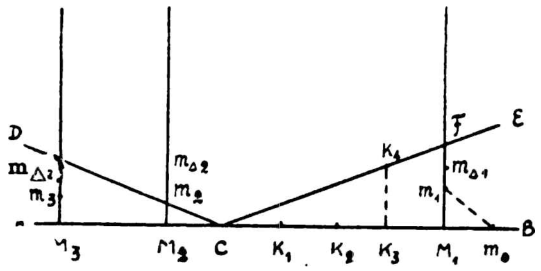

Fig 7

Sea, para simplificar, que tengamos tan solo tres variedades, las cuales han dado un rendimiento medio de M_1, M_2 y M_3 con sus errores m_1, m_2 y m_3. Estas tres variedades se deben comparar con una cuarta variedad «standard» de un rendimiento medio M_0 con el error medio m_0 (la variedad standard, no figura en nuestro gráfico de errores).

Construimos ante todo para cada variedad su error de diferencia m_{Δ}. Para esto tomamos el error de la variedad «standard» m_0 desde el punto M_1 a la derecha de la línea horizontal AB y desde el extremo del segmento correspondiente (m_0), medimos con el compás la distancia hasta el punto m_1, es decir hasta el extremo del segmento que representa el error de dicha variedad (esta distancia está indicada en la figura 7 por la línea punteada $m_0 \; m_1$). El segmento que hemos medido, representará justamente el error de la diferencia (m_{Δ}). Si tomamos este segmento en el sentido de una línea vertical, hacia arriba del punto M_1, tendremos el punto m_1^{Δ}. En la misma forma se procede con todas las demás variedades, obteniéndose como resultado los puntos $m_{1\Delta}$, $m_{2\Delta}$, $m_{3\Delta}$, etc., (estos puntos estarán ubicados arriba de los puntos m_1, m_2, etc).

Trazaremos ahora por el punto C, que corresponde, de acuerdo a nuestra escala, a la media aritmética de la variedad «standard» (es decir M_0), dos líneas oblícuas CE y CD.

Estas líneas se trazarán con la inclinación de 1 a 3. Para realizar esta condición se puede proceder de la siguiente manera: Tomamos tres veces seguidas desde el punto C, a la derecha de la horizontal AB, un segmento de tamaño cualquiera, por ejemplo CK (obtendremos los puntos K_1, K_2 y K_3, y desde el punto K_3 tomaremos un segmento del mismo valor en el sentido vertical. En el extremo de este segmento tendremos el punto K_4 que unimos con el punto C. Entonces la recta EC, trazada entre los puntos K_4 y C tendrá, evidentemente, la inclinación de 1 a 3 que necesitamos. En la misma figura construiremos la segunda línea inclinada CD, tomando un segmento cualquiera hacia la izquierda de C (esta construcción no está indicada en la fig. 7). Estas dos líneas tienen una propiedad que es de mucho valor para nosotros, siendo la siguiente: Cada segmento vertical cuyo extremo m_{Δ} se encuentra del lado de cada uno de los dos ángulos ECB y DCA, construídos por este medio, será exactamente tres veces menor que su distancia hasta el punto C.

Así por ejemplo el segmento $FM_1 = {}^1/_3$ de la distancia CM_1.

Aprovecharemos esta propiedad para nuestros fines. Sabemos que el mayor rendimiento de la primera variedad M_1, en comparación con el rendimiento de la variedad «standard» M_0, puede reconocerse como perfectamente cierta sólo en el caso de que el error de la correspondiente diferencia (es decir m_{Δ}) será, por lo menos, tres veces menor que la misma diferencia, es decir, que la distancia de M_1 hasta m_Δ debe ser 3 veces menor que el segmento M_1C. Pero como M_1C es igual a $1/3$ de FM_1, esta misma condición se puede expresar en otra forma, o sea que se puede calcular de tal manera, que la diferencia que nos interesa pueda ser demostrada, en el caso de que la distancia de M_1 hasta m_Δ será simplemente menor que la distancia que se mide desde M_1 hasta F, es decir, cuando el punto m_Δ, resultará en la figura debajo de la línea CE. Por esta razón, todas las variedades (como por ejemplo la primera) cuyos puntos m_Δ respectivos resultarán dentro del ángulo derecho ECB, podrán considerarse con cer-

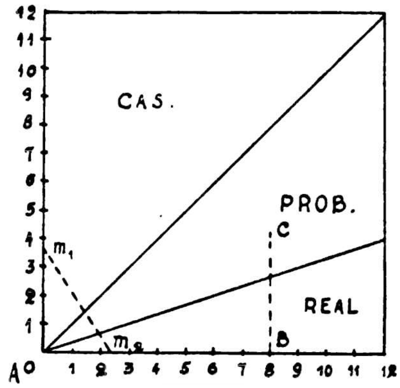

Fig. 8

teza como de mayor rendimiento en comparación con la variedad «standard». Finalmente, aquellas variedades para las cuales dichas condiciones no se cumplen y sus puntos respectivos m_Δ se encuentran en el ángulo obtuso DCE (como por ejemplo, la segunda variedad), no deben considerarse como variedades de rendimiento determinado, dado la relatividad de éstos.

En esta forma, con la construcción de los puntos m_Δ y las líneas oblícuas CE y CD, repartimos todas nuestras variedades, con relación a la variedad «standard», en tres grupos: de rendimientos superiores, de rendimientos inferiores y de rendimientos indeterminados.

El método gráfico de la apreciación del significado de unas u otras diferencias entre dos medias aritméticas cualesquiera (M_1 y M_2), puede ser aplicado también en el caso cuando los errores medios respectivos (m_1 y m_2) fueron obtenidos por el medio aritmético. Para ello, puede utilizarse un gráfico especial preparado previamente, representado en la figura 8.

Este gráfico representa un cuadrado de cualquier medida hecho sobre papel milimetrado, con algunas divisiones trazadas en los lados izquierdo e inferior del mismo.

Dentro de este cuadrado están trazadas dos líneas oblícuas por el punto A. Una de estas líneas resulta ser la diagonal del cuadrado y la otra línea está trazada con la inclinación de 1 a 3. Dentro de cada una de las 3 partes de este cuadrado, separadas por las dos líneas inclinadas, se ponen las palabras abreviadas: cas. (diferencia casual), prob. (diferencia probable) y real (diferencia real o positiva).

Analicemos el método de utilización de este gráfico con un ejemplo numérico cualquiera. Sea, por ejemplo, que tengamos dos medias aritméticas $M_1 = 50$ y $M_2 = 42$ con sus errores medios $m_1 = 3{,}5$ y $m_2 = 2{,}5$. Se requiere saber hasta qué punto el rendimiento M_1 es mayor que el rendimiento M_2.

Para la solución gráfica de este problema, procederemos de la siguiente manera: Colocamos una de las puntas del compás en el punto m_1, que corresponde en la escala de nuestro gráfico al error medio (3.5), y la segunda punta la colocamos en el punto m^2, correspondiente al segundo error medio (2,5). Los puntos m_1 y m_2 se marcan evidentemente sobre 2 lados graduados del cuadrado, siendo indiferente la elección del lado sobre el cual se marca cada uno de los errores. La distancia m_1, m_2, obtenida de este modo, resulta, evidentemente, el error de la diferencia ($m_{\triangle}$).

Si marcamos ahora sobre el lado inferior del cuadrado el punto B que corrsponde, en la misma escala, a la diferencia dada de las dos medias aritméticas $M_1 - M_2$ (en nuestro ejemplo $M_1 - M_2 = 50 - 42 = 8$) y tomamos el segmento m_1 m_2 antes obtenido, desde el punto B hacia arriba de la línea del papel milimetrado, se podrá sacar la conclusión sobre la certidumbre de la diferencia dada por la ubicación del punto C de este segmento. En efecto, si el punto C (como en nuestro caso) resultará situado en la parte media del cuadrado, dicha diferencia habrá que reconocerla como probable aunque no demostrada. Si este punto C resultara en la parte inferior del cuadrado, dicha diferencia aparecerá como completamente cierta. Si en cambio el punto C se encontrara en la parte superior izquierda de nuestro gráfico, la diferencia de las medias sería puramente casual (esta última consideración se basa en el hecho, comunmente admitido, de que dos medias aritméticas que no se diferencian una de la otra más que por el valor de un error medio, son estadísticamente iguales.

En la construcción indicada participan tres valores m_1, m_2 y M_1, M_2. Si la escala del gráfico preparado no correspondiera a estas variedades (es decir, si resultara muy pequeña o, por el contrario, demasiado grande para las mismas), se podría aumentar o disminuir estos valores en el mismo número de veces, simplemente por medio de una multiplicación o división sobre el correspondiente número entero (por ejemplo por 10 o sobre 2).

Los métodos de construcción aquí descriptos, como todo método gráfico de calcular, tiene sus ventajas como sus defectos.

A estas últimas corresponde, indudablemente una cierta inexactitud de los errores medios m, determinados por este medio, inexactitud que puede ser considerablemente disminuída empleando escrupulosidad en todas las medidas intermedias que se tomen y en el aumento de la escala general del gráfico (para la cual es necesario tener un compás del mayor tamaño posible). No hay que desconcertarse tampoco por la aparente acumulación de los errores gráficos al tomar múltiples medidas de distancias hasta los puntos V (en la construcción del error medio m), puesto que este aumento de la inexactitud se compensa aquí por la siguiente división del segmento final sobre una cantidad que depende del número de medidas n.

Al número de las ventajas importantes del método gráfico, además de su entera visibilidad, corresponde sin duda una economía de tiempo que se consigue por este método en comparación con el método común de la elaboración numérica del material de experimentación.

Todo el proceso de construcción del error medio m incluso la revisación de esta construcción, midiendo las distancias desde el final hasta el principio, ocupa aquí tan solo de uno y medio a dos minutos, mientras que el cálculo de este mismo error por el método común, sin revisación, exige por lo menos, un cuarto de hora (la revisación ocuparía además otro tanto de tiempo). En la determinación de una gran cantidad de errores para muchas variedades, esta economía de tiempo resultará evidentemente de mucho valor.

También tiene aquí gran importancia el mecanismo del proceso de estos cálculos, que se consigue utilizando el método gráfico. Tomando cierta práctica, la que se adquiere generalmente después de dos o tres construcciones de ensayos, este trabajo en lo sucesivo casi no requiere atención y se efectúa automáticamente.

Por otra parte, las ventajas del método gráfico son comprensibles aún sin su enumeración. No hay que olvidar que la aplicacion de este método se ha recomendado mucho en el dominio de una rama tan importante como lo es la técnica de las construcciones, donde el cálculo de las mismas hace tiempo que se realiza, en muchos casos, por el método gráfico.

II.

Más arriba hemos analizado una serie de métodos gráficos para la determinación de los errores medios y su utilidad en la apreciación de la exactitud de los resultados finales, con su aplicación a las condiciones especiales del ensayo agrícola en general y, a los problemas prácticos de la experimentación, en particular. Pero la apreciación final de los resultados de la experimentación de variedades, la comparación inmediata de rendimientos de cada variedad con el de todas las demás, representaría un problema por demás complicado y engorroso. Mucho más sencillo y más útil prácticamente, es clasificar esas variedades en grupos que se diferencian tanto por su respectivo rendimiento, como por el grado de exactitud de estas diferencias.

De los muchos métodos posibles para la referida clasificación, propondré uno que es, desde mi punto de vista, el más racional y fácil y que proporciona, además, la posibilidad de efectuar dicha operación por medio de un método gráfico sumamente sencillo. El principio de este método de clasificación, en sus rasgos generales, es el siguiente:

Supongamos que en el Campo de Experiencias del presente año fueron ensayadas a un mismo tiempo, 30 variedades distintas de un cultivo cualquiera, siendo sembrada cada una de estas variedades en varias parcelas (la cantidad de parcelas para cada variedad puede ser distinta). Determinaremos tres principales características numéricas para esas 30 variedades:

1º Su rendimiento medio general M_0;

2º La desviación media σ_0 al cuadrado del rendimiento de las variedades por separado, M_1, M_2, M_3, etc., con referencia al rendimiento medio, común para todas M_0, y

3º El error medio m_0 de este medio común M_0 (más abajo se indicará cómo se debe hacer ésto prácticamente).

Evidentemente, el valor obtenido por este medio M_0, puede servir de límite que separa, relativamente, el alto del bajo rendimiento entre las variedades ensayadas. Pero este límite sólo no nos basta.

Restaremos de M_0 la mitad del valor de la desviación media de los rendimientos de las variedades por separado, es decir $^1/_2\ \sigma_0$ y luego sumamos este valor al de M_0. En el resultado obtendremos el límite inferior del rendimiento medio $A = M_0 + {}^1/_2\ \sigma_0$.

Dentro de estos límites, es decir, de A a B, debe aparecer, sobre la base de la teoría de las probabilidades, con una clasificación normal, más o menos el 38 % de todas las variedades ensayadas y, fuera del mismo, los 62 % restantes (a razón del 31 % de cada lado). En esta forma todos los rendimientos teóricos imaginarios de cada variedad por separado, resultaron aquí repartidos entre tres zonas, que corresponden a las concepciones del rendimiento bajo, mediano y alto.

En efecto: las variedades cuyo rendimiento resultó ser menor del límite inferior A, pueden ser llevados al grupo de los de rendimientos bajos; las variedades cuyos rendimientos se encuentran en el límite entre A y B — se llevarán al grupo de los de rendimiento medio y, finalmente, las variedades con un rendimiento superior a B — a las variedades de alto rendimiento. Así, en un caso particular, si M_0 resultara = 120 Pud. y $\sigma_0 = \pm$ 20 P., entonces la zona del rendimiento medio se determinará, evidentemente, por los límites de A = 120 — 10 y B = 120 + 10, es decir, de 110 a 130 P.

En consecuencia, todas las variedades, en este caso, que dieron un rendimiento menor de 110 P., se apreciarán como malos; las variedades con rendimiento de 110 a 130 — como regulares y las variedades con rendimiento inferior a 130 — como buenas.

Se entiende que el concepto de « el rendimiento medio », como producción de granos, que no sale de los límites de A a B, aparece, en realidad, como absolutamente arbitrario. Podríamos con las mismas bases determinar estos límites restando o sumando a M_0 otra parte de σ_0 (por ejemplo dos tercios σ_0 o una entera σ_0) en relación con lo cual cambiaría también, evidentemente, el porcentaje de las variedades incluído dentro de estos límites. Pero si tomamos, una vez para siempre, el mismo método de determinación de estos límites estandardizados y lo utilizamos en todos los casos de apreciación, sin excepción alguna, entonces esa arbitrariedad ya no tendrá ningún valor especial, puesto que los resultados de la clasificación de variedades en grupos, resultarán en todas partes completamente adecuados y por lo tanto, comparables entre sí.

Además, para la determinación de los límites A y B por éste y no por otro método, existen también algunos fundamentos especiales. Resulta que la diferencia en una σ (de ½ en cada lado de M) en muchos casos juega, en la biología, el papel de una «norma relativa». Así, por ej., en la antropometría y pedometría todas las medidas separadas del cuerpo y los índices calculados de los mismos, a menudo se consideran típicos para una raza dada, sexo y edad, si no se diferencian de las respectivas medias aritméticas (M) más que por la mitad de la desviación media al cuadrado (σ). En esta forma, en muchos casos, el valor de M más o menos ½ σ resulta ser como una especie de «norma biológica», lo que nos dá el preferente derecho de tomar precisamente A y B como límites salientes de la zona del rendimiento medio para todas las variedades de un mismo cultivo, experimentadas a un mismo tiempo.

Pero el problema de la apreciación final del rendimiento, aún no ha sido resuelto finalmente por medio de la clasificación de las variedades en los 3 grupos arriba indicados. A la par que hacemos la relación de cada variedad por separado con uno u otro de los grupos determinados, debemos también tener en cuenta el grado de certidumbre que se tiene de que esa variedad pertenece justamente al grupo en que se la ha clasificado, a cuyo objeto es necesario, evidentemente, descontar tanto el error del rendimiento medio de dicha variedad, como también los errores de los mismos límites.

En efecto, el rendimiento medio de una variedad por separado, representa un número no del todo exacto, que puede variar en mayor o menor grado, en relación a la modificación de las condiciones del suelo y otras. Quien, por ejemplo, puede garantizar que en el ensayo repetido, dicha variedad, por haberse revelado alguna modificación en la producción del grano no entraría, digamos, en el grupo de rendimiento vecino? Para clasificar, pues, el rendimiento de todas las variedades con suficiente seguridad en la exactitud de esa clasificación, es necesario convencerse, en cada caso por separado, de que el rendimiento medio de dicha variedad se encuentra, de los límites del respectivo grupo, a una distancia tal que supera su propio error, la diferencia m (el error de $_\Delta$), por lo menos en tres veces.

Esta es la primera consideración sobre la insuficiencia de la clasificación de las variedades por el método arriba indicado. Pero aún hay otra objección en contra del establecimiento de tan solo 3 grupos de apreciación. Resulta que, tanto el rendimiento bajo como el alto, pueden tener varias escalas, tanto en lo referente a la relativa producción de granos, como en la exactitud de estas diferencias. La apreciación sumaria de un rendimiento sin descontar estas diferencias sería poco útil.

Todo ésto nos obliga a tomar, para la clasificación de las variedades, un método más diferencial, estableciendo para ésto 7 siguientes grupos:

Grupo 1 (+ 3), variedades cuyo rendimiento relativo es ciertamente superior a *B*.

Grupo 2 (+ 2), variedades cuyo rendimiento relativo es ciertamente superior a M_0.

Grupo 3 (+ 1), variedades cuyo rendimiento relativo es ciertamente superior a *A*.

Grupo 4 (0), variedades cuyo rendimiento relativo no ha sido definido con toda exactitud.

Grupo 5 (— 1), variedades cuyo rendimiento relativo es inferior a *B*.

Grupo 6 (— 2), variedades cuyo rendimiento relativo es inferior a M_0.

Grupo 7 (— 3), variedades cuyo rendimiento relativo es inferior a *A*.

En otras palabras, dos grupos extremos (+ 3 y — 3) contienen las variedades de muy buen rendimiento y del muy malo, los grupos siguientes (+ 2 y — 2) contienen las variedades de rendimiento superior e inferior a las del grupo medio, los grupos que están adheridos al centro de esta serie (+ 1 y — 1), contienen las variedades *superiores* a las del *mal* rendimiento e *inferiores* a las del *buen* rendimiento y, por último, el grupo central (0) contiene las variedades indeterminadas, con rendimientos, en el ensayo dado, no definidos.

Parecería que se puede unir en uno solo los grupos + 1 y — 1, relacionando al mismo todas las variedades para las cuales el rendimiento resultara superior al malo o inferior al bueno. Pero tal unión no sería posible en todos los casos, puesto que la certeza de uno de los síntomas, no implica, como consecuencia, la certeza del otro.

La existencia mutua de ambas condiciones de referencia representa, pues, en general, un caso bastante raro e indudablemente particular y por lo tanto no nos sirve para tomarlo en calidad de criterio común o general para las clasificaciones. Si alguna variedad aislado se encontrara por casualidad a un mismo tiempo en el grupo + 1 y — 1, se podría caracterizar condicionalmente su rendimiento por el signo simbólico ± 1, pero no hay fundamento, se entiende, para crear este caso a un grupo común especial.

Evidentemente, que tal coincidencia de apreciación de los resultados, sólo es posible para las variedades de los grupos de + 1 y — 1, siendo inadmisible en la aplicación para los demás grupos.

El indicado método de clasificación de las variedades en 7 grupos exige una determinación preliminar de 3 constantes, que caracterizan por entero toda la colección de estas variedades, o sea: M_0, σ_0 y m_0.

Si el ensayo del rendimiento comparativo fué realizado sólo por una vez, o si las experiencias fueron efectuadas con las mismas variedades de plantas en todos los puntos, es necesario, evidentemente, para la determinación de estas constantes, utilizar todos los resultados del ensayo cultural dado, tomando en cuenta el rendimiento de todas las variedades experimentadas a un mismo tiempo, sin excepción. Pero en la elaboración de los resultados de distintos puntos en los que se efectuaron las experiencias, parte con variedades iguales y parte con variedades distintas, tal método de determinación de constantes resultaría, evidentemente, inexacto. En este caso, el más común, tendremos que determinar las constantes M_0, σ_0 y m_0, solamente de la parte de las variedades que aparecen comunes para todos esos puntos, en caso contrario, los resultados de tal ensayo resultarían absolutamente incomparables entre sí.

Además, este conjunto de variedades — constante para todas — que en adelante denominaremos « Surtido de variedades standard » tendría que formarse, principalmente, de especies aclimatadas en toda la zona del ensayo dado, tomándose también, en lo posible y aproximadamente en igual proporción, tanto variedades reconocidas de mejor como de inferior rendimiento. En general conviene tener en cuenta que, con una u otra elección del « Surtido de variedades standard », se determina el criterio de apreciación para las demás variedades — que clasificamos como las de máximo o mínimo rendimiento — tan solo en relación a dicho « surtido de variedades standard », pero no en absoluto.

En esta forma, para la clasificación de un conjunto cualquiera de variedades ensayadas a un mismo tiempo, en los 7 grupos arriba indicados, es necesario efectuar previamente las siguientes 5 operaciones:

1º Determinar la media aritmética (M) y los errores medios (m) para todas las variedades sujetas a la apreciación (entre ellas, evidentemente, también de las del « standard »).

2º Establecer el « surtido standard ».

3º Determinar para el mismo las Constantes M_0, σ_0 y m_0.

4º Determinar para cada variedad (entre ellas también, para cada variedad del « Standard ») su error de diferencia m_Δ.

5º Efectuar la clasificación de las variedades en 7 grupos.

Examinaremos por separado la técnica de la realización de estas 5 operaciones.

Las determinaciones de los rendimientos medios de algunas variedades aisladas (M_1, M_2, M_3, etc.) con sus errores medios (m_1, m_2, m_3, etc.), se pueden realizar por el método gráfico descripto, en cuyo resultado tendremos el gráfico de los errores de tipo común. Conocemos también las consideraciones que se deben tener en cuenta para la elección de las variedades que han de formar el « Surtido Standard ». Sólo nos detendremos más detalladamente en la determinación de las constantes M_0, σ_0 y m_0.

El rendimiento medio general M_0 puede calcularse en este caso simplemente por la fórmula:

$$M_0 = \frac{\Sigma M}{N}.$$

donde ΣM representa la suma de los rendimientos medios de todas las variedades aisladas que entran en el « Surtido Standard » y N — la cantidad total de estas variedades.

La desviación media al cuadrado σ_0, de las variedades del « Surtido Standard », puede determinarse gráficamente de acuerdo a la siguiente fórmula común:

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N - 1}}$$

y la mitad de este valor, que es lo que necesitaremos para las constantes posteriores, será, evidentemente:

$$\tfrac{1}{2}\ \sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1}} \qquad \text{o} \quad \pm \sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N-1}},$$

donde ΣD^2 representa la suma de los cuadrados de las desviaciones (D) de los rendimientos medios de las variedades « Standard » (M), del rendimiento medio de la variedad común para todas (M_0), y N — como anteriormente — la cantidad de variedades que entran en el conjunto del « Surtido Standard ».

La construcción del segmento, igual a $^1/_2\ \sigma_0$, lo realizaremos, también, como antes, en dos operaciones: primero construiremos el segmento $= \sqrt{\Sigma D^2}$ sobre el plano general (sobre el mismo gráfico de errores), o sobre un papel milimetrado aparte (si se precisara modificar la escala), luego, por medio de un gráfico de escala preparado para este uso en todas las oportunidades, se dividirá este segmento en $2\sqrt{N-1}$.

Aclararemos lo dicho por medio de un ejemplo. Supongamos, para simplificar, que en el « Surtido de Variedades » entren tan solo 4 variedades con rendimientos medios M_1, M_2, M_3 y M_4 (ver figura 9).

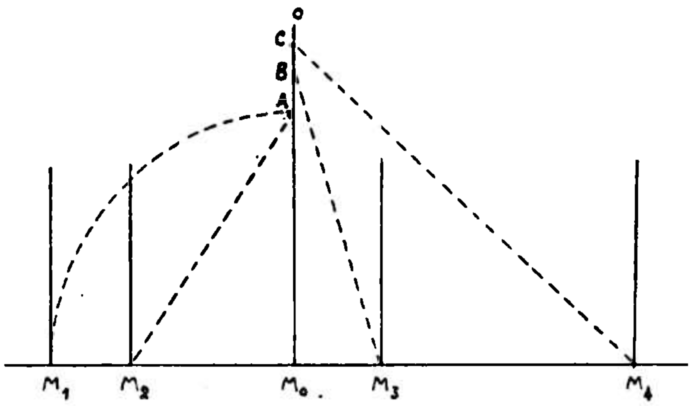

Fig. 9

Desde el punto M_0, correspondiente al rendimiento medio total de todas estas variedades, trazamos una línea vertical $M_0\ O$. Luego, por medio de un compás, medimos la distancia M_0 hasta M_1 y la tomamos sobre la vertical desde el punto M_0 hacia arriba. Obtendremos el punto A. Medimos, luego, la distancia desde el punto A hasta M_2 y volvemos a tomar esta distancia sobre la misma vertical. Obtenemos el punto B. Medimos la distancia desde B hasta M_3 y tomando esta distancia sobre la vertical $M\ O$, obtendremos el punto C.

La distancia desde C hasta el último punto M_4, será entonces igual, en nuestra escala, al valor requerido $\sqrt{\Sigma D^2}$.

Las líneas punteadas, trazadas en la figura para mayor claridad, en realidad no se deben trazar.

Para reducir el segmento $C\,M_4$, obtenido en la forma indicada, en la cantidad de veces igual a $2\ \sqrt{N-1}$, utilizaremos el gráfico de escala (ver figura 10).

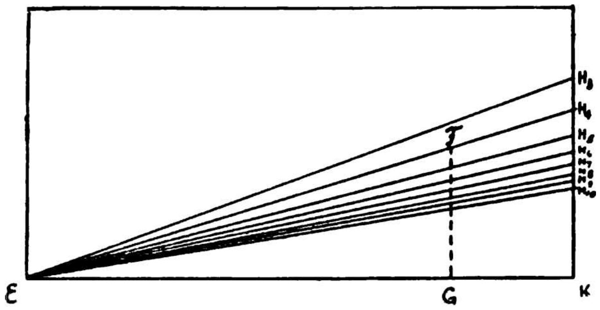

Fig. 10

Para esto tomamos el segmento $C\,M_4$ (fig. 9), sobre la línea inclinada correspondiente a la cantidad de las variedades « Standard » $N = 4$ (es decir, sobre la lísea $E\,H_4$ (fig. 10), desde el punto E a la derecha, y desde la punta F de este segmento medimos la distancia hasta el punto G (en el sentido vertical).

Esta distancia FG será, pues, igual a la mitad de la media desviación σ_0 requerida, es decir:

$$FG = \tfrac{1}{2}\ \sigma_0.$$

Para los distintos valores N este gráfico puede ser preparado en la siguiente forma: La superficie total del rectángulo puede tomarse como antes, 20 × 10 cm (en la fig. 10 está disminuída).

Para $N = 3$, la línea inclinada $E\,H_3$, trazada por el punto H_3, distante de K en 7,56 cm.

Para $N = 4$, la línea inclinada $E\,H_4$, trazada por el punto H_4, distante de K en 6,03 cm.

Para $N = 5$, la línea inclinada $E\,H_5$, trazada por el punto H_5, distante de K en 5,16 cm.

Para $N = 6$, la línea inclinada $E\,H_6$, trazada por el punto H_6, distante de K en 4,59 cm.

Para $N = 7$, la línea inclinada $E\,H_7$, trazada por el punto H_7, distante de K en 4,17 cm.

Para $N = 8$, la línea inclinada $E\,H_8$, trazada por el punto H_8, distante de K en 3,85 cm.

Para $N = 9$, la línea incilnada $E\,H_9$, trazada por el punto H_9, distante de K en 3,59 cm.

Para $N = 10$, la línea inclinada $E\,H_{10}$, trazada por el punto H_{10} distante de K en 3,38 cm.

Para $N = 11$, la línea inclinada $E H_{11}$, trazada por el punto H_{11}, distante de K en 3,20 cm.

Para $N = 12$, la línea inclinada $E\,H_{12}$, trazada por el punto H_{12}, distante de K en 3,05 cm.

Para $N = 13$, la línea inclinada $E\,H_{13}$, trazado por el punto H_{13}, distante de K en 2,92 cm.

Para $N = 14$, la línea inclinada $E\,H_{14}$, trazada por el punto H_{14}, distante de K en 2,80 cm.

Para $N = 15$, la línea inclinada $E\,H_{15}$, trazada por el punto H_{15}, distante de K en 2,70 cm.

Si se desea formar un gráfico de escala mayor, para una mayor cantidad de variedades «standard» N, — la distancia correspondiente desde los puntos H hasta el punto K, se podrá calcular, previamente, de acuerdo con la siguiente fórmula general:

$$H\,K = \frac{20}{\sqrt{4\,N - 5}}$$

Al formar un gráfico de escala mayor aún que para 20 variedades, será más cómodo marcar tan solo con pequeños signos sobre el lado lateral del gráfico y unirlos con el ángulo inferior del rectángulo sólo a medida que ello sea necesario. Con una cantidad mucho mayor de variedades, que entren en la formación del «surtido Standard», se puede prescindir totalmente del gráfico de escala, efectuando la división del segmento $= \sqrt{\Sigma\, D^2}$ sobre el valor $2\sqrt{N - 1}$, por el método común de cálculo (es decir, tomando la medida de este segmento en unidades del gráfico adoptado y dividiendo esta cantidad por $2\ \sqrt{N - 1}$.

Una vez determinado el valor de M_0 y de $\frac{1}{2}\,\sigma_0$, ya conoceremos, evidentemente, los 3 límites «standard» A, M_0 y B.. Para esto sólo falta marcar el punto M_0 sobre el plano común para todas las variedades, punto que corresponde a la media general de todas las variedades «standard», y a ambos lados de este punto tomar, en sentido horizontal, el segmento $= \frac{1}{2}\,\sigma_0$ que acabamos de obtener. Entonces, a la izquierda de M_0 quedará marcado el límite inferior del rendimiento comparativo A y a la derecha — el límite superior B (ver fig. 11).

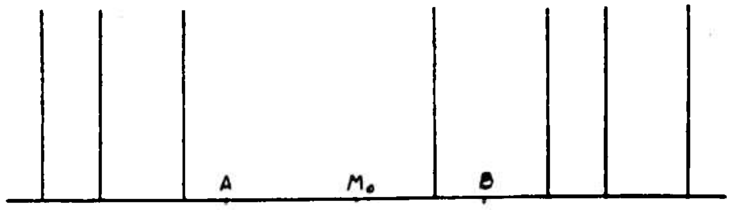

Fig. 11

El método de determinación de la tercer constante m_0 (error medio general) puede aclararse mediante las siguientes consideraciones. Si en la formación del «surtido de variedades Standard» no entrasen siempre las mismas variedades, sino que cada vez entraran variedades distintas, cuyo rendimiento medio varía entre los límiter de σ_0, tendríamos que determinar el error medio m_0 requerido, de acuerdo a la fórmula estadística común:

$$m_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{N}}\ .$$

Pero como en el presente caso se trata de una selección constante de estas variedades, cada una de las cuales varía, tan solo, dentro de los límites medios de su propio error $\pm\ m$, se puede considerar que el error medio m requerido, ya no depende de la σ_0, general de todas las variedades «standard», sino tan solo de los errores particulares aislados: m_1, m_2, m_3, etc. Por orden de consideraciones matemáticas, las que no nos detendremos a analizar en este momento, podemos utilizar, para el caso dado, la siguiente fórmula:

$$m_0 = \pm\ \frac{\sqrt{\Sigma\, m^2}}{N}$$

donde $\Sigma\, m^2$ representa la suma de los cuadrados de los errores medios (m) de todas las variedades del «Surtido Standard» y N — como anteriormente — el número de estas variedades «standard».

La construcción gráfica del segmento igual a m_0, se ejecutará también en dos operaciones: primero se construye sobre el plano general el segmento $= \sqrt{\Sigma\, m^2}$ y luego, por medio de líneas inclinadas suplementarias, trazadas previamente sobre el gráfico de escala ya descripto, dividimos este segmento en N veces.

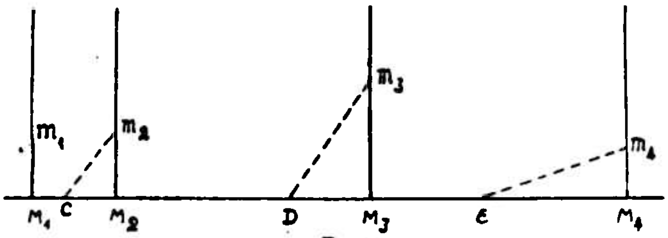

Fig. 12

He aquí un ejemplo de esta construcción. Sea, para simplificar, que el « Surtido Standard » esté compuesto, como habíamos visto antes, de sólo 4 variedades con los errores medios de m_1, m_2, m_3 y m_4 (ver fig. 12).

Por medio de un compás tomemos la medida del segmento $M_1\, m_1$ (correspondiente al error medio de la primera variedad) y la proyectamos a la izquierda del punto M_2. Obtendremos el punto C.

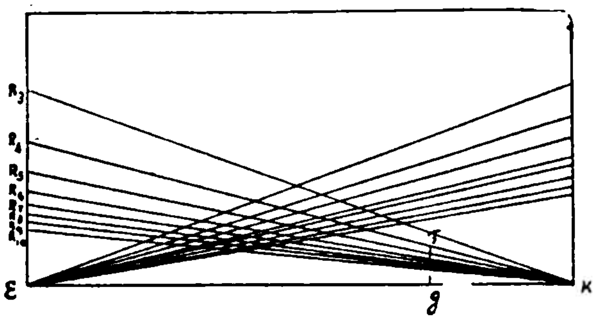

Fig 13

Luego medimos la distancia desde el punto C que acabamos de obtener hasta el punto m_2, es decir, hasta el extremo superior del segmento que corresponde al error medio de la segunda variedad y volvemos a proyectar esta medida a la izquierda del punto M_3. Obtendremos el punto D. Finalmente, medimos la distancia desde D hasta m_3, proyectamos la misma a la izquierda del punto M_4 y desde el punto E obtenido, medimos la distancia hasta m_4. Esta última distancia $E\,m_4$ representa, evidentemente, el segmento igual a $\sqrt{\Sigma\, m^2}$ requerido, en lo cual no es difícil convencerse por simples consideraciones geométricas (a base del mismo teorema de Pitágoras).

Para dividir el segmento $E\,m_4$ en N, haremos uso del gráfico de escalas (ver fig. 13).

Para esto proyectamos dicho segmento a la izquierda del punto K sobre la línea inclinada $K\,R_4$, que corresponde a nuestro número de las variedades « Standard » $N = 4$, y desde el extremo de este segmento F medimos la distancia hasta el punto G (en sentido vertical). El segmento FG, en la escala de nuestro plano, será, pues, igual al error medio m_0 requerido.

Las líneas inclinadas, por medio de las cuales se puede efectuar la división de los segmentos en N, débense trazar previamente, de acuerdo con el gráfico de escala, por el punto fijo K y por los puntos cada vez distintos de R.

Para $N = 3$, el punto R_3 debe quedar del punto E a la distancia de 7,07 cm.

Para $N = 4$, el punto R_4 debe quedar del punto E a la distancia de 5,16 cm.

Para $N = 5$, el punto R_5 debe quedar del punto E a la distancia de 4,08 cm.

Para $N = 6$, el punto R_6 debe quedar del punto E a la distancia de 3,38 cm.

Para $N = 7$, el punto R_7 debe quedar del punto E a la distancia de 2,89 cm.

Para $N = 8$, el punto R_8 debe quedar del punto E a la distancia de 2,52 cm.

Para $N = 9$, el punto R_9 debe quedar del punto E a la distancia de 2,24 cm.

Para $N = 10$, el punto R_{10} debe quedar del punto E a la distancia de 2,01 cm.

Para $N = 11$, el punto R_{11} debe quedar del punto E a la distancia de 1,83 cm.

Para $N = 12$, el punto R_{12} debe quedar del punto E a la distancia de 1,67 cm.

Para $N = 13$, el punto R_{13} debe quedar del punto E a la distancia de 1,54 cm.

Para $N = 14$, el punto R_{14} debe quedar del punto E a la distancia de 1,43 cm.

Para $N = 15$, el punto R_{15} debe quedar del punto E a la distancia de 1,34 cm.

La fórmula general para el cálculo de las distancias $E R$, en el caso dado, es la siguiente:

$$E R = \frac{20}{\sqrt{N^2 - 1}}$$

Para N mayores de 20, en lugar de trazar todas las líneas inclinadas continuas, conviene tan solo marcar con pequeños signos el lado lateral del rectángulo, y con valores muy grandes de N, conviene simplemente efectuar la división por el método común numérico.

El error medio m_0, deducido por el método arriba indicado, se refiere en realidad tan solo al límite medio del rendimiento M_0. Los errores, pues, de dos límites extremos A y B, hablando rigurosamente, correspondería determinarlos por una fórmula algo diferente, ya que ambos límites dependen también del valor σ_0 (recordaremos que $A = M_0 - \frac{1}{2}\sigma_0$ y $B = M_0 + \frac{1}{2}\sigma_0$), pero para nuestros fines, se puede prescindir libremente de cierta inexactitud aquí producida y adoptar los errores de los límites extremos m_A y m_B, coincidentes por su valor con nuestro error m_0.

Las consideraciones siguientes pueden servir de fundamento para tal simplificación. Evidentemente que la clasificación final de las variedades en grupos depende, principalmente, de la situación, en nuestro plano, del punto M_0, puesto que, precisamente, este límite divide todas las variedades en grupos de máximo y de mínimo rendimiento. Ambos límites extremos A y B, como dependientes a su vez del límite medio M_0, determinan tan solo uno u otro grado de rendimiento de estas variedades y, por lo tanto, tiene tan solo un valor secundario. Esta consideración nos da el derecho de prescindir de los errores de los límites más extremos. En esta forma admitimos aquí que ambos puntos A y B aparecen como ligados con el punto medio M_0 y que los cambios accidentales en la situación de este punto medio también se transmiten con exactitud a los puntos extremos.

Una vez determinado, por el método indicado, el valor del error medio m_0, hay que construir en el plano general los errores de la diferencia m_Δ de todas las variedades por separado, tanto de las que entran como de las que no entran en el conjunto del « Surtido Standard ».

Esto se puede efectuar en la siguiente forma (ver fig. 14):

Sea, para simplificar, que tengamos un gráfico de errores de sólo 7 variedades. A la derecha del punto M_3, por ej., correspondiente al rendimiento medio de la tercera variedad, tomemos un segmento igual al error medio m_0 anteriormente deducido, y desde el extremo del mismo, (es decir, desde el punto m_0) medimos la distancia hasta el punto m_3, es decir, hasta la punta superior del segmento que re-

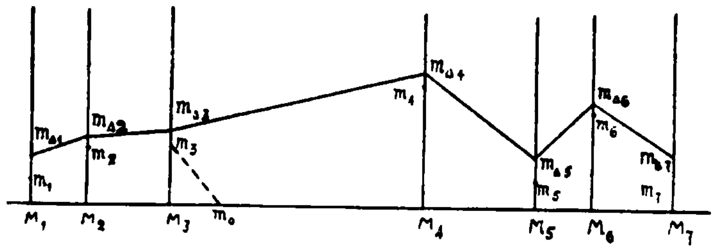

Fig. 14

presenta el error medio de la tercera variedad. Esta distancia marcada en la figura 14, por la línea punteada m_0 m_3, será igual, por supuesto, al error de diferencia requerido para la tercera variedad. Tomando este segmento por la vertical M_3 m_3 hacia arriba del punto M_3, obtendremos el punto $m_{3\Delta}$. En la misma forma procederemos con las demás variedades, en cuyo resultado obtendremos para las mismas una serie de puntos: $m_{1\Delta}$, $m_{2\Delta}$, $m_{3\Delta}$, etc. De acuerdo a la situación de estos puntos podremos juzgar, en el resultado final, sobre el rendimiento comparativo de todas nuestras variedades.

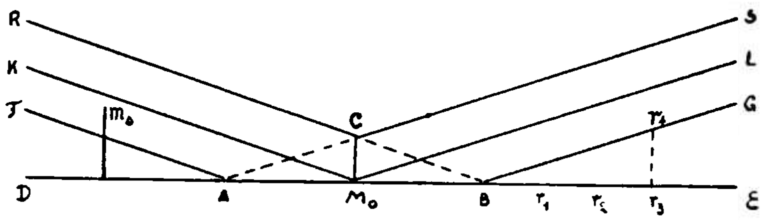

Fig. 15

Para la clasificación definitiva de estas variedades en 7 grupos, construiremos sobre nuestro plano una « red distribuidora ». Para esto, hay que trazar por los 3 puntos A, M_0 y B (ver fig. 15), correspondiente a tres límites Standard de rendimiento comparativo, de a dos líneas rectas con una inclinación de 1 a 3.

Para obtener esta inclinación hay que proceder de la siguiente forma:

Tomemos por ejemplo, desde el punto B a la derecha un segmento Br, de tamaño arbitrario, tres veces seguidas (obtendremos los puntos r_1, r_2 y r_3 y desde el punto final r_3, proyectamos el mismo segmento hacia arriba (obtendremos el punto r_4). Uniendo el punto r_4 con el punto B tendremos la recta $G\,B$ con la inclinación deseada.

En la misma forma trazamos también por el punto B la línea $R\,B$ con la inclinación de 1 a 3 pero ya por el lado contrario (izquierdo). Procediendo en la misma forma con los puntos A y M_0. obtendremos todas las seis líneas inclinadas que se indican en la figura 15 y que componen nuestra « red distribuidora ».

Para nuestros fines hay que dejar sin cruzar ciertas partes de estas líneas inclinadas (las marcadas por puntos) y trazar otra línea vertical suplementaria $M_0\ C$, como está indicado en la figura 15. Bajo este aspecto definitivo nuestra red servirá, pues, para la clasificación de las variedades en grupos.

Al relacionar una u otra variedad con un grupo determinado, tenemos que guiarnos por la situación del correspondiente punto m_Δ (construído para esta variedad) en relación a las líneas inclinadas que forman la « red distribuidora ». Así, por ej., si el punto m_Δ resulta ubicado entre las líneas $K\,M_0$ y $F\,A$ (como está representado en la figura 15), se podrá considerar el rendimiento de la variedad dada como inferior a la media, pero no se debe considerarla todavía como la de rendimiento mínimo; es decir pues, que esta variedad debe relacionarse, de acuerdo con nuestra clasificación, al grupo 2. En efecto, para demostrar la exactitud de nuestras deducciones sobre el rendimiento medio inferior (M) de esta variedad, en comparación con el rendimiento medio general M_0, es necesario determinar previamente que el error de la diferencia correspondiente (m_Δ) será por lo menos 3 veces inferior a la misma diferencia, o, representándolo gráficamente, que el punto m_Δ se encuentre a un nivel inferior de la línea inclinada $K\ M_0$, tal como efectivamente resulta en nuestro plano. Pero como al mismo tiempo el punto m_Δ se encuentra a un nivel superior de la línea $F\,A$, resulta entonces que el rendimiento inferior de la variedad dada, en comparación con el límite inferior A, no se debe considerar aún como realmente demostrado. Por lo tanto se debe referir su rendimiento al grupo 2, puesto que, de acuerdo con nuestra determinación primitiva, este grupo contiene todas las variedades cuyo rendimiento es evidentemente inferior a M_0, pero cuya inferioridad a A aún no está demostrada.

En forma idéntica podemos considerar la situación de todas las demás variedades sujetas a la clasificación, relacionándolas a uno u otro grupo determinado, de acuerdo a la situación de sus correspondientes puntos $m_\triangle$ en «la red distribuidora».

En consecuencia, nuestro plano en cuestión queda repartido en 7 secciones correspondientes a 7 grupos de rendimientos comparativos de variedades aisladas. La interpretación definitiva de los resultados gráficos de tal clasificación, puede efectuarse en la siguiente forma: (ver fig. 16)

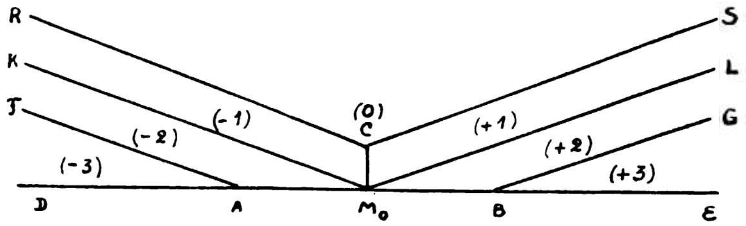

Fig 16

1º Si el punto $m_\triangle$ resulta dentro del ángulo $D\ A\ F$, la variedad respectiva corresponde al grupo — 3.

2º Si $m_\triangle$ se encuentra dentro de la sección $F\ A\ M_0\ K$, esta variedad corresponde al grupo — 2.

3º Si $m_\triangle$ cae en la sección $K\ M_0\ CR$, corresponde al grupo — 1.

4º Si $m_\triangle$ se encuentra dentro del ángulo central obtuso $R\ C\ S$, corresponde al grupo O.

5º Si $m_\triangle$ resulta en la sección $S\ C\ M_0\ L$, corresponde al grupo + 1.

6º Si $m_\triangle$ está ubicada dentro de la fig. $L\ M_0\ B\ G$, corresponde al grupo + 2 y finalmente,

7º Si $m_\triangle$ aparece entre los lados del ángulo $G\ B\ E$, la variedad respectiva corresponde al grupo + 3.

La fig. 17 representa un caso particular de semejante clasificación de variedades en su aspecto definitivo. Para simplificar se tomaron aquí solo 7 variedades, cada una de las cuales cae en diferente grupo.

De este plano se deduce que el rendimiento máximo absoluto, no siempre aparece dentro del grupo que le corresponde por su grado de rendimiento y vice-versa.

Así, por ejemplo, vemos que a pesar de que el rendimiento absoluto de la 6ª variedad, en el caso presente resultó ser superior a la 5ª variedad (es decir, que el punto M_6 se encuentra más a la derecha

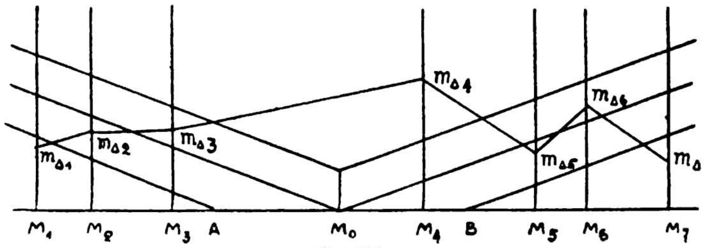

Fig. 17

del punto M_5), corresponde colocar, sin embargo, dicha variedad (la 6ª) en el grupo + 1 que le corresponde, mientras que la 5ª variedad cae en el grupo superior + 2. Esto se explica, naturalmente, si se toma en cuenta el grado de certeza de las diferencias correspondientes, certezas que dependen del valor de los errores de esas variedades.

Si sucediera, por ej., que la escala general, en la clasificación de las variedades en grupos, resultara demasiado pequeña o, por el contrio, demasiado grande en uno u otro sentido, se puede aumentar o reducir dicha escala en el sentido que corresponde corregir, sin cambiar o modificar el sentido opuesto. Es evidente, que en relación a estas modificaciones habrá que modificar también la inclinación de las líneas que forman la red. Así, por ejemplo, si habría que aumentar la escala horizontal en 2 veces sin cambiar la vertical, se tendrá que trazar las líneas de la « red distribuidora » con una inclinación de 1 a 6.

Como es fácil de ver, la aplicación del método gráfico descripto, de la apreciación de los rendimientos por medio de la clasificación de las variedades en 7 grupos, no presenta dificultades técnicas especiales. La misma clasificación de las variedades en grupos, en el gráfico general formado por el método arriba indicado, ocupa generalmente, después de un cierto ejercicio, sólo de 10 a 15 minutos, incluyendo también el tiempo necesario para calcular el rendimiento medio general de las variedades Standard.

La comodidad y claridad de este método es evidente.

Buenos Aires, Octubre de 1930.