

Desafíos conceptuales para una teoría del significado basada en la teoría de la demostración

Resumen

El objetivo del presente trabajo es caracterizar las principales nociones de la concepción de la llamada *proof-theoretic semantics*, una alternativa a la semántica extensional basada en la teoría de modelos, y analizar desafíos conceptuales y filosóficos de la misma. Esta perspectiva surge como una profundización de los aportes de Gerhard Gentzen a la teoría de la demostración a partir de los desarrollos de los sistemas de deducción natural y cálculo de secuentes. Se analizan esquemáticamente desarrollos semánticos basados en la teoría de la demostración con un corte inferencialista como elucidación de la relación de consecuencia lógica y se sugieren ampliaciones en vistas a determinar una visión completa del significado desde la perspectiva de los sistemas formales incluyendo aspectos pragmáticos.

Palabras clave

Semántica; teoría de la demostración; significado.

La construcción actual de la lógica responde a tradiciones y problemáticas diversas. Desde las reflexiones prístinas sobre la validez esbozadas por Platón y especialmente por Aristóteles, hasta el proyecto de Leibniz de construir un cálculo algebraico que sea normativo para el conjunto de las ciencias; desde los desarrollos teóricos de Bolzano, Frege, Russell, Wittgenstein y Tarski, hasta la matemática finitaria de Hilbert y los sistemas de deducción natural y cálculo de secuentes de Gentzen; todos estos desarrollos, y muchos otros, impactan en un entramado teórico de complejidad.

El impacto filosófico de estas construcciones es verdaderamente enorme y el esmerado trabajo de los profesionales en el campo abre de manera permanente nuevas elaboraciones teóricas de relevancia en distintas direcciones, que crecen a una velocidad vertiginosa. En la enseñanza de la lógica, por su parte, la mayoría de los manuales disponibles la presenta habitualmente

como un sistema formal con una sintaxis y una semántica. La semántica se estructura sobre la noción de interpretación y permite la definición de los conceptos de consecuencia lógica, satisfacibilidad y verdad lógica; mientras que la sintaxis se restringe a la gramática del lenguaje y a las demostraciones que sirven para construir la definición de los conceptos de deducción lógica, consistencia lógica y teorema lógico. El estudio de estas nociones y sus relaciones recae alternativamente sobre la teoría de la demostración y la teoría de modelos, que constituyen las construcciones teóricas más relevantes de la ciencia lógica en siglo XX (Chateaubriand, 2015).

Es claro que hay primacía de la teoría de modelos, propuesta principalmente por Tarski, en cuanto elucidación de la noción más básica de la lógica, a saber, la noción de consecuencia lógica; así, la elaboración de esta teoría tiene un lugar preponderante en los cursos introductorios a la disciplina y en la formación científi-

ca de alumnos y docentes. Más allá de las motivaciones y problemáticas que llevaron a la formulación tarskiana de los conceptos de verdad lógica y consecuencia lógica, la hegemonía de sus elucidaciones es casi indiscutible. El propio Etchemendy, cuando emprende su labor crítica sobre estos conceptos, advierte en principio sobre la hegemonía en el campo profesional de la lógica de los desarrollos señalados:

The highest compliment that can be paid the author of a piece of conceptual analysis comes not when his suggested definition survives whatever criticism may be leveled against it, or when the analysis is acclaimed unassailable. The highest compliment comes when the suggested definition is no longer seen as the result of conceptual analysis—when the need for analysis is forgotten, and the definition is treated as common knowledge. Tarski’s account of the concepts of logical truth and logical consequence has earned him this compliment¹ (Etchemendy, 1990, p. 1).

La dificultad de establecer una crítica a la teoría de modelos o incluso la formulación de una elucidación alternativa deben enfrentarse a un ADN lógico consolidado que ha realizado grandes aportes a la teoría desde 1930. A las dificultades teóricas de proponer una alternativa de la noción de consecuencia lógica se suma la complejidad de integrar a la misma en la estructura teórica vigente y romper con preconcepciones arraigadas en el campo disciplinar. En el presente trabajo caracterizaremos los principales conceptos y algunos desafíos filosóficos de la llamada *proof-theoretic semantics* —perspectiva que se apoya especialmente en las ideas de Gerhard Gentzen; una alternativa a las nociones de significado en los lenguajes formalizados de la ciencia lógica que otorga un lugar central a la noción de deducción en oposición a la noción de verdad— y mostraremos algunas problemáticas conceptuales que se proponen en su caracterización y recepción.

El término *proof-theoretic semantics*, traducido como “*semántica basada en la teoría de la demostración*” (Legris, 2010) fue propuesto en 1987 por

Schroeder-Heister durante un seminario que tuvo lugar en la ciudad de Estocolmo (Schroeder-Heister, 1991). Preferimos la traducción de “*proof*” por “*demostración*” en oposición a “*prueba*” porque en castellano las *demostraciones* remiten a la cadena completa de transformaciones —objetivo claro de la teoría en cuestión—, mientras que se utiliza *prueba* para referir a esquemas de demostraciones, no a sus desarrollos específicos. Aclarado esto, podemos avanzar hacia los temas de la semántica:

According to the model-theoretic view, which still prevails in logic [...] A consequence is logically valid if it transmits truth from its premises to its conclusion, with respect to all interpretations. Proof systems are shown to be correct by demonstrating that the consequences they generate are logically valid. [...] Proof-theoretic semantics proceeds the other way round, assigning proofs or deductions an autonomous semantic role from the very onset, rather than explaining this role in terms of truth transmission. In proof-theoretic semantics, proofs are [...] treated [...] as entities in terms of which meaning and logical consequence can be explained² (Kahle, R. & Schroeder-Heister, 2006, p. 503).

La idea subyacente a la propuesta es que las demostraciones tendrían un valor semántico y servirían para definir los significados de la noción de consecuencia lógica y verdad lógica, pero de una manera diferente e incluso inversa a la formulación tarskiana. La teoría analizaría entonces la semántica de entidades que determinan cómo se arriba a ciertas afirmaciones a partir de ciertos supuestos, o sea la semántica de las demostraciones en términos de demostraciones y no en términos de valores de verdad.

Se pueden señalar muchas motivaciones para la formulación de una nueva elucidación, y de distinta índole. En el presente escrito no profundizaremos sobre dichas críticas y consideraremos solamente una problemática filosófica básica. Tal como lo advierte Etchemendy, la noción de consecuencia lógica elaborada por Alfred Tarski padece de una impotencia epistémica:

The property of being logically valid cannot simply consist in membership in a class of truth preserving arguments, however that class may be specified. For if membership in such a class were all there were to logical consequence, valid arguments would have none of the [modal] characteristics described above. They would, for example, be epistemically impotent when it comes to justifying a conclusion. Any uncertainty about the conclusion of an argument whose premises we know to be true would translate directly into uncertainty about whether the argument is valid. All we could ever conclude upon encountering an argument with true premises would be that either the conclusion is true or the argument is invalid. For if its conclusion turned out to be false, the associated class would have a non-truth-preserving instance, and so the argument would not be logically valid. Logical validity cannot guarantee the truth of a conclusion if validity itself depends on that self-same truth”³ (Etchemendy, 2008, p. 266).

Es claro que los conceptos de verdad, significado y consecuencia se analizan de modo independiente de los medios para establecerlos, librando la fuerza epistémica de la noción de consecuencia lógica en la teoría de la demostración. Prawitz denomina a esta reconstrucción de la lógica ‘teoría de los dos estratos’ (Prawitz, 1978), con lo cual apunta a los desarrollos independientes de la teoría de modelos y la teoría de la demostración. ¿Pero son esos estratos necesarios para la formulación de una lógica? Si la transmisión de la verdad sirve para fundamentar las demostraciones, ¿no hay en las demostraciones un sentido semántico que no se encuentra explícitamente elucidado? Estos interrogantes indican que una elucidación fundamentada sobre un único estrato sería filosóficamente atractiva (Legris, 2010).

Sin embargo, el mismo Schroeder-Heister advierte inicialmente que la expresión *proof-theoretic semantics* puede resultar confusa y hasta contradictoria en vista de que la teoría de la demostración en los abordajes previos versa específicamente sobre aspectos

sintácticos de la lógica. Sin embargo, en beneficio de la adecuación del concepto agrega las motivaciones de su uso:

in order not to leave the term “semantics” to denotationalism alone- after all, “semantics” is the standard term for investigations dealing with the meaning of linguistic expressions⁴ (Schroeder-Heister, 2014).

¿Cuáles son las dimensiones de una teoría del significado? ¿Es legítimo establecer una semántica que no se fundamente sobre la denotación? Aquí conviene hacer una pequeña digresión. Es sabido que la semiótica, entendida como una teoría de los signos, se divide en tres dimensiones, a saber: la dimensión sintáctica, la semántica y la pragmática (Morris, 1938). La dimensión sintáctica se ocupa de las relaciones entre los signos y las reglas que las ordenan. La dimensión semántica hace lo propio con la relación del signo con su significado, analizando la designación, la extensión y la denotación de un término dado. Por último, a la dimensión pragmática le incumbe otro aspecto del significado, que se establece a partir del uso que se haga del signo. El lenguaje de la lógica, no obstante, se concibe tradicionalmente con una dimensión sintáctica, que indica las reglas de formación y las reglas de transformación de los símbolos, y una dimensión semántica, que señalalas reglas de verdad y las reglas de designación. La dimensión pragmática, aquella que esclarece las reglas que indican cómo el hablante debe manejar los signos, se encuentra cercenada de la teoría en aras de mantener la neutralidad del sujeto y de proteger la objetividad de la ciencia. Esta última tesis responde a intereses propios del positivismo en la caracterización de las disciplinas científicas (Gómez, 1976).

La fundamentación teórica que plantea Schroeder-Heister —en la concepción del lenguaje que sirve para justificar que la semántica puede abordarse desde una perspectiva inferencial y no denotacional— se apoya sobre las reflexiones de Dummett sobre el significado, y podemos rastrear su filiación principalmente

con los aportes teóricos de los escritos posteriores al *Tractatus* del último Wittgenstein.

Kripke atribuye a Wittgenstein una cierta tesis sobre el significado que se apoya sobre cinco puntos particulares:

1. Los significados no son cosas, puesto que eso sería equivalente a confundir el nombre con el portador del nombre. *“It is important to note that the word “meaning” is being used illicitly if it is used to signify the thing that ‘corresponds’ to the word. That is to confound the meaning of a name with the bearer of the name. When Mr. N.N. dies one says that the bearer of the name dies, not that the meaning dies”*⁵ (Wittgenstein, 2001).
2. El significado es un concepto normativo; esto es, involucra reglas acerca del uso correcto de las expresiones. Dichas reglas sirven para justificar los significados de las expresiones dadas.
3. La normatividad no puede entenderse separada de las prácticas sociales que la sustentan. Una porción de actividad lingüística está unida a una *forma de vida* específica.
4. El lenguaje es un fenómeno heterogéneo; es decir, hay juegos de lenguaje diferentes vinculados a diferentes *formas de vida*. No puede entenderse como un fenómeno uniforme.
5. El significado de las expresiones está dado por las condiciones para su uso dentro de la práctica social. Una atribución de significado tiene sentido dentro del contexto social, y es la comunidad de hablantes la que sustenta su carácter normativo.

Dummett, por su parte, también defiende la identidad del uso sobre la identidad del significado, e indica tres puntos centrales:

1. La comunicabilidad del significado.
2. La posibilidad de aprender un lenguaje a partir de su uso.
3. El conocimiento de un significado en el lenguaje está implícito en el mismo lenguaje (Dummett, 1978).

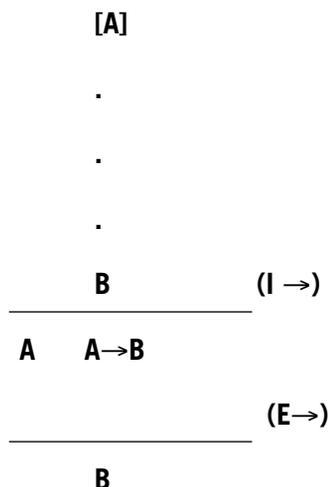
En el caso de los enunciados matemáticos, el rasgo especial del uso se determina a partir del conocimiento de su demostración. Por ello, la definición de las constantes lógicas y de la noción de consecuencia se encuentra directamente asociada al rol que cumplen en la axiomatización de las reglas de inferencia en el marco de los sistemas de deducción natural y cálculo de secuentes (aunque podría no limitarse a estas sistematizaciones). Ahora bien, Schroeder-Heister considera estas disquisiciones sobre el significado como elaboraciones semánticas, y no analiza el giro pragmático que suponen, posiblemente por sus filiaciones con la división positivista antes mencionada.

La semántica de la teoría de modelos se caracteriza por el análisis de los aspectos del significado que dependen de las condiciones de verdad. Hemos señalado algunas falencias de este análisis. El hecho de que la semántica estándar no explique todos los aspectos del significado implica que necesitan ser perfeccionados o que hay aspectos del significado que quedan por fuera de la semántica lógica.

Los análisis del significado en torno a los sistemas de deducción natural y el cálculo de secuentes constituyeron elaboraciones superadoras de las problemáticas mencionadas. Entre los muchos resultados podemos reconocer, por ejemplo, la elaboración por parte de Prawitz de dos propiedades metalógicas fundamentales de los sistemas de deducción natural:

1. Reducción: Puede eliminarse todo rodeo resultante de la aplicación de una regla de introducción seguida por una eliminación.

2. Normalización: Al eliminar completamente los rodeos las derivaciones adquieren su forma normal.



Por este medio se reduce a



Es a partir de estos procedimientos de reducción que se hace evidente la dependencia (justificación) de las reglas de eliminación sobre las reglas de introducción. Esta elaboración rescata la concepción de las reglas de inferencia propuesta por Gentzen en su afirmación: *“The introductions represent, as it were, the ‘definitions’ of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis, than the consequences of these definitions”*⁶ (Gentzen, 1934-1935, p. 80). La regla de eliminación de determinada constante lógica requiere de su regla de introducción como condición de posibilidad de su ocurrencia. Esto no implica que toda regla de eliminación es derivable de la regla de intro-

ducción —lo que es falso—, sino que adquieren su justificación en estas últimas. Una consecuencia de la aplicación de estos recursos es que solo la lógica intuicionista puede ser justificada. Extendiendo estas propiedades define la validez de los argumentos, en tanto la posibilidad de configurar un argumento canónico o de ser reducido a un argumento canónico, idea que podría rastrearse en el propio Gentzen (Adan, 2013).

Un interesante corolario de estos análisis lleva al debate filosófico entre la lógica clásica y la lógica intuicionista. ¿La lógica clásica contiene formas inválidas de argumentar y debe ser reemplazada por la lógica intuicionista? ¿Los cánones de la lógica intuicionista son independientes de aquellos propios de la lógica clásica? Este debate tuvo gran arraigo en la filosofía de las matemáticas.

Más allá del interés inicial que pudo tener la elaboración del cálculo de secuentes en el ideario de Gentzen, el mismo posibilitó una exploración más rica de los aspectos de significado, tanto leídos desde una semántica basada en la teoría de modelos como en una elaboración basada en la teoría de la demostración. En el plano del cálculo de secuentes el análisis se enriquece y podemos encontrar, siguiendo a F. Paoli, toda una gama de análisis fundamentados sobre un enfoque inferencial *a la Gentzen*, como por ejemplo:

1. La perspectiva nihilista de la relación entre reglas estructurales y operacionales del sistema (Negri&von Plato, 2001). Esta posición determina que el significado de una constante lógica se encuentra establecido únicamente por las reglas operacionales del sistema. Las reglas estructurales se corresponden con reglas referentes al descargo de supuestos en deducción natural, se encuentran sujetas al formalismo aplicado y, por ello, no asignan significado. Así pues, esta posición es escéptica respecto de la posibilidad de que las reglas estructurales sirvan a los fines de otorgar significado a las constantes lógicas.

2. La perspectiva auxiliar (Wansing, 2000), creencia difundida en los ámbitos donde opera la semántica basada en la demostración. En esta caracterización las conectivas tienen tanto un contenido operacional como un contenido global. Así, por ejemplo, el significado de la implicación intuicionista depende tanto de las reglas de introducción como de las reglas estructurales del cálculo.
3. La perspectiva dualista (Hacking, 1979) establece una separación en las funciones de las reglas estructurales y las reglas operacionales. Las reglas operacionales otorgan el significado de las conectivas, mientras que las reglas estructurales determinan la noción deducibilidad lógica, habiendo una primacía de las reglas estructurales sobre las operacionales.
4. La perspectiva relativista (Došen, 1989). En esta perspectiva, las constantes lógicas explicitan en un lenguaje de nivel más bajo, estructuras de un lenguaje de nivel más alto formuladas como signos de puntuación; y le otorgan mayor importancia a las reglas estructurales, mientras que las operacionales son simplemente reglas de traducción (Paoli, 2002).

La variedad de posiciones respecto de las nociones de consecuencia y verdad lógica resultante es sumamente rica. Los debates filosóficos en torno a estos desarro-

llos teóricos despiertan gran interés entre los especialistas. La primacía de la noción de deducción sobre la noción de verdad, el debate antes mencionado entre la lógica intuicionista y la lógica clásica, la posibilidad de evitar pseudoconstantes como *tonk* en los sistemas inferenciales, la instalación del debate entre una concepción realista y una concepción antirrealista de la lógica, la posibilidad de construir lógicas estructurales y subestructurales, la formulación de una elucidación epistémica de la noción de consecuencia lógica, etc., circunscriben el interés que presenta la elaboración de la nueva teoría y sirven para mostrar que es necesaria una teoría del significado sobre una base más amplia que la puramente extensional ofrecida desde la teoría de modelos.

Sin embargo, parece confuso limitar estos análisis a lo estrictamente semántico. Los desarrollos que sirvieron como fundamento a la llamada semántica basada en la teoría de la demostración y los resultados posteriores a su formulación efectiva son la evidencia de un giro pragmático en la consideración y creación de sistemas formales. Una *proof-theoretic pragmatics* tendría, entonces, el mérito de eludir la deficiencia esencial de la teoría semántica lógica. La teoría semántica constituye una perspectiva parcial sobre el significado, mientras que el abordaje de la dimensión pragmática permitiría una visión completa de la cuestión. Formular sistemas formales creando una sintaxis adecuada, una semántica y una pragmática es necesario para reformular las concepciones de la neutralidad y la objetividad científicas.

Notas

¹ “El mayor cumplido que se puede pagar al autor de una pieza de análisis conceptual no se establece cuando su definición sugerida sobrevive a cualquier crítica que pueda hacerse contra ella, ni tampoco cuando el análisis es aclamado como inatacable. El mayor cumplido viene cuando la definición sugerida ya no se ve como el resultado de un análisis conceptual, cuando se olvida la necesidad misma de análisis, y la definición es tratada como conocimiento común. Las elucidaciones de los conceptos de verdad lógica y consecuencia lógica ofrecidas por Tarski hicieron que gane dicho cumplido”.

² “Según la concepción de la teoría de modelos, que prevalece todavía en la lógica [...] una consecuencia es lógicamente válida si transmite la verdad de sus premisas a su conclusión, respecto a todas las interpretaciones. Los sistemas de demostración se prueban como correctos cuando se demuestra que las consecuencias que ellos generan son lógicas”.

camente válidas. [...] La semántica basada en la teoría de la demostración procede al revés, asignando a las demostraciones o deducciones un papel semántico autónomo desde el principio en vez de elucidar su función en términos de transmisión de verdad. En la semántica basada en la teoría de la demostración, las demostraciones son [...] tratadas [...] como entidades en términos de las cuales se puede explicar el significado y la consecuencia lógica”

³ “La propiedad de ser lógicamente válido no puede consistir simplemente en la pertenencia a una clase de argumentos que preservan la verdad, más allá de cómo se especifique esa clase. Porque si la pertenencia a dicha clase constituye el único elemento para establecer la relación de consecuencia lógica, los argumentos válidos no tendrían ninguna de las características [modales] descritas anteriormente. Serían, por ejemplo, epistémicamente impotentes cuando se trata de justificar una conclusión. Cualquier incertidumbre sobre la conclusión de un argumento cuyas premisas sabemos que son verdaderas se traduciría directamente en incertidumbre acerca de si el argumento es válido. Todo lo que podríamos concluir al encontrarnos con un argumento con premisas verdaderas sería o bien que la conclusión es verdadera o

bien que el argumento es inválido. Porque si su conclusión resultase falsa, la clase asociada tendría una instanciación no preservativa, por lo que el argumento no sería lógicamente válido. La validez lógica no puede garantizar la verdad de una conclusión si la validez en sí misma depende de esa misma verdad.”

⁴ “con el fin de no dejar el término “semántica” al denotacionalismo solamente- después de todo, “semántica” es el término estándar para las investigaciones que se ocupan del significado de las expresiones lingüísticas.”

⁵ “Es importante tener en cuenta que la palabra “significado” está siendo utilizada de forma ilícita si se utiliza para significar aquella cosa que ‘corresponde’ a la palabra. Esto es confundir el significado de un nombre con el portador del nombre. Cuando el Sr. N.N. muere se dice que el portador del nombre muere, no que el significado muere”.

⁶ “Las introducciones representan, por así decirlo, las “definiciones” de los símbolos en cuestión, y las eliminaciones no son más, a fin de cuentas, que las consecuencias de estas definiciones”.

Referencias Bibliográficas

- Adan, A. (2013). *Sobre el significado de las constantes lógicas*. Trabajo presentado en IX Jornadas de Investigación en Filosofía, La Plata, Argentina. Recuperado de http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.2878/ev.2878.pdf
- Chateaubriand, O. (2015). *Formas lógicas I*. Ciudad autónoma de Buenos Aires: Eudeba.
- Došen, K. (1989). Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic*; 30, 362–381.
- Dummett, M. (1978). *Truth and other enigmas*. London: Duckworth.
- Etchemendy, J. (1990). *The Concept of Logical Consequence*. CSLI Publications. Stanford.
- Etchemendy, J. (2008). Reflections on consequence, *New Essays on Tarski and Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Gentzen, G. (1934). Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* 39 (1935) 176-210, 405–431. Translated in *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, edited by M. E. Szabo. North Holland, 1969.
- Gómez, R. (1976). *Las teorías científicas*. Buenos Aires: El Coloquio.
- Hacking, I. (1979). What is logic?. *Journal of Philosophy*; 76, 285–319.
- Kahle, R. & Schroeder-Heister, P. (2006). Introduction. En *Proof-theoretic semantics, Synthese* 148 (3), 503-506.
- Kripke, S. (1982). *Wittgenstein on Rules and Private Language*. Harvard University Press.
- Legris, J. (2010). Semántica de Gentzen. En *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, XLII (2), pp. 661-670. Recuperado de <http://www.ciencias.org.ar>
- Morris, C. W. (1938). Foundations of the Theory of Signs. En *International Encyclopedia of Unified Science*, vol. 1 (2). Chicago: University of Chicago Press.
- Negri, S. & von Plato, J. (2001). *Structural Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Paoli, F. (2002). *Substructural Logics: A Primer Philosophy*. Oxford University Press: Kluwer Academic Publishers.

- Prawitz, D. (1978). Proofs and the meanings and completeness of the logical constants. En J. Hintikka (ed.). *Essays on Mathematical and Philosophical Logic* (pp. 25-40). Dordrecht: Reidel.
- Schroeder-Heister, P. (2014). "Proof-Theoretic Semantics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy Edward N. Zalta (ed.). Recuperado en <http://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/proof-theoretic-semantics/>.
- Schroeder-Heister, P. (1991). Uniform Proof-Theoretic Semantics for Logical Constants. En *Journal of Symbolic Logic*; 56, 1142.
- Wansing, H. (2000). The idea of a proof-theoretic semantics and the meaning of the logical operations, *Studia Logica*, 64, 3–20.
- Wittgenstein, L. (2001). *Philosophical Investigations*. Oxford: Trans. G. E. M. Anscombe. Blackwell.