SOBRE LA DISTRIBUCION DE LOS TAMAÑOS DE CORPUSCULOS CONTENIDOS EN UN CUERPO A PARTIR DE LA DISTRIBUCION EN SUS SECCIONES O PROYECCIONES

L. A. SANTALÓ

Universidad Nacional de La Plata y Comisión Nacional de la Energía Atómica.
Buenos Aires (Argentina)

1. INTRODUCCION.

Varias veces ha sido considerado el problema siguiente:

Un cuerpo convexo, opaco contiene en su interior un gran número de esferas distribuídas al azar, cuyos radios siguen una determinada ley de distribución. Al cortar por un plano se obtendrán, como secciones de las esferas, círculos de diferentes tamaños cuyos radios seguirán otra cierta ley de distribución. Se trata de expresar la distribución de los radios de las esferas mediante la distribución de los radios de los círculos de la sección plana.

Si en vez de cortar por un plano se considera una recta que atraviesa al cuerpo, se obtendrán sobre la misma las cuerdas que ella determina en las esferas y el problema análogo consiste en deducir la distribución de los radios de las esferas a partir de la distribución de las longitudes de estas cuerdas.

La cuestión ha sido estudiada recientemente por W. P. REID [6] quien cita los trabajos anteriores de E. SCHEIL [7] y R. L. FULLMAN [5]. Todavía se podría citar el trabajo anterior de S. D. WICKSELL [8], quien estudia y resuelve el mismo problema.

De un tipo análogo es el problema siguiente:

Un cuerpo convexo transparente contiene en su interior, distribuídas al azar, láminas opacas de forma y tamaño variables, cuyas áreas (independientemente de la forma) siguen una cierta ley de distribución. Se proyecta todo el cuerpo sobre un plano según una dirección al azar, obteniéndose como proyección de las láminas figuras conve-

Recibido el 10-XII-55.

xas de área variable, cuya área seguirá otra cierta ley de distribución. Se trata de relacionar estas dos distribuciones de áreas.

En vez de láminas planas se puede estudiar el mismo problema para el caso de varillas o segmentos de longitud variable con cierta ley de distribución.

En este trabajo vamos a considerar el primer problema mencionado de una manera más general, suponiendo que en lugar de esferas el cuerpo contiene corpúsculos convexos de forma cualquiera pero semejantes entre sí, de manera que su tamaño dependa de un solo parámetro λ (razón de semejanza), cuya ley de distribución se desea en función de la ley de distribución de las áreas de las secciones por un plano arbitrario o bien de las longitudes de las cuerdas determinadas por una recta arbitraria.

Veremos que para corpúsculos de forma no muy diferente de la esfera se llega a una ecuación integral del tipo de ABEL, y por tanto, resoluble.

Estudiamos también el segundo problema de las proyecciones, que conduce análogamente a ecuaciones integrales, fácilmente resolubles.

I. PROBLEMA DE SECCIONES

2. FORMULAS CONOCIDAS.

Vamos a recordar algunas fórmulas integrales referentes a cuerpos convexos que necesitaremos en lo sucesivo. En ellas, cuando se habla de rectas o planos dados al azar, debe entenderse en el sentido de la teoría de probabilidades geométricas (DELTHEIL [4]) o de la geometría integral (BLASCHKE [1]).

a) La medida de las rectas G del plano que cortan a una figura convexa del mismo es igual a la longitud L del contorno.

b) El valor medio de las longitudes α de las cuerdas que una recta G del plano determina en una figura convexa del mismo vale

$$\bar{\alpha}=\pi S/L, \tag{2.1}$$

siendo S el área y L la longitud de la figura convexa.

c) La medida de las rectas G que cortan a un cuerpo convexo del espacio vale $(\pi/2)S$, siendo S el área del cuerpo convexo.

d) La medida de los planos que cortan a un cuerpo convexo del espacio es igual a la integral de curvatura media M del mismo, o sea

$$M = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS, \tag{2.2}$$

siendo R_1, R_2 los radios de curvatura principales, dS el elemento de área en el punto correspondiente y estando la integración extendida a toda la superficie S del cuerpo. Por ejemplo, para una esfera de radio R es

$$M \text{ (esfera)} = 4\pi R. \tag{2.3}$$

Para un cuerpo convexo plano, o sea, un disco o lámina plana convexa considerada en el espacio, si la longitud de su contorno es L, es

$$M = \frac{\pi}{2} L. \tag{2.4}$$

e) El valor medio de las longitudes α de las cuerdas que una recta determina en un cuerpo convexo del espacio vale

$$\bar{\alpha} = \frac{4\,V}{S}, \tag{2.5}$$

siendo V el volumen y S la superficie del cuerpo.

f) El valor medio de las áreas σ de las secciones planas de un cuerpo convexo vale

$$\bar{\sigma} = \frac{2\pi\,V}{M}. \tag{2.6}$$

g) Si un cuerpo convexo K de integral de curvatura media M_K y superficie S_K está contenido en otro cuerpo convexo Q de características análogas M_Q y S_Q, respectivamente, la probabilidad de que un plano que corta a Q corte también a K vale $p_1 = M_K / M_Q$ y la probabilidad de que una recta que corta a Q corte también a K vale $p_2 = S_K / S_Q$.

h) El valor medio del área de las proyecciones ortogonales de un cuerpo convexo sobre planos arbitrarios vale $\bar{S} = S/4$, siendo, como siempre, S el área del cuerpo [2, pág. 67].

3. DISTRIBUCION DE LAS AREAS DE LAS SECCIONES PLANAS DE UN CUERPO CONVEXO.

Sea K un cuerpo convexo del espacio y σ el área de una sección plana. Dado un plano al azar que corte a K representaremos por $\varphi(\sigma)\, d\sigma$ a la probabilidad de que el área de la sección esté comprendida entre σ y $\sigma + d\sigma$. Esta función $\varphi(\sigma)$ es, en general, difícil de calcular (*). De ella se sabe que si σ_m es el área máxima de todas las secciones planas, debe cumplir las relaciones

$$(3.1) \qquad \int_0^{\sigma_m} \varphi(\sigma)\, d\sigma = 1, \qquad \int_0^{\sigma_m} \sigma\, \varphi(\sigma)\, d\sigma = \frac{2\pi V}{M},$$

donde la segunda es equivalente a núm. 2, *f*).

Consideremos el cuerpo convexo K_λ homotético de K con razón de homotecia λ. Llamando $\varphi(\sigma, \lambda)$ a la función de probabilidad de las áreas σ para K_λ (de manera que es $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma, 1)$), teniendo en cuenta que a cada sección plana de área σ de K corresponde una de área $\lambda^2\sigma$ de K_λ, debe ser

$$\varphi(\sigma, \lambda)\, d(\lambda^2 \sigma) = \varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right) d\sigma,$$

o sea,

$$(3.2) \qquad \varphi(\sigma, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\, \varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right).$$

Caso de la esfera.—Consideremos una esfera de radio unidad. El área máxima de las secciones planas es $\sigma_m = \pi$. La probabilidad de que una sección plana tenga el radio comprendido entre r y $r + dr$ es igual a $|dx|$, siendo $x^2 = 1 - r^2$, o sea $r(1-r^2)^{-\frac{1}{2}}\, dr$. Como $\sigma = \pi r^2$, $d\sigma = 2\pi r\, dr$, la probabilidad de tener el área comprendida entre σ y $\sigma + d\sigma$ será

$$2\,[\pi(\pi - \sigma)]^{-\frac{1}{2}}\, d\sigma,$$

y por tanto,

$$(3.3) \qquad \varphi(\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi - \sigma}}.$$

(*) Un problema interesante sería calcularla para cuerpos simples: cubo, tetraedro, cilindro.

Según (3.2) para una esfera de radio λ, la probabilidad de que una sección plana de la misma esté comprendida entre σ y $\sigma + d\sigma$ será

$$\varphi(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}\sqrt{\pi\lambda^2 - \sigma}},$$

que siendo $\sigma_m = \pi\lambda^2$, se puede escribir también

$$\varphi(\sigma, \lambda) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma_m - \sigma}}. \tag{3.4}$$

4. EL PROBLEMA DE LAS SECCIONES; SECCIONES POR UN PLANO.

Pasemos ahora a considerar el primer problema mencionado en la introducción, pero en lugar de esferas suponemos corpúsculos convexos K de forma cualquiera pero semejantes entre sí. Su tamaño queda, por tanto, determinado por un solo parámetro λ (razón de semejanza).

Sea Q el cuerpo convexo grande en cuyo interior están los corpúsculos K distribuídos al azar. Llamando M_λ a la integral de curvatura media de la superficie de los corpúsculos de razón de semejanza λ, según núm. 2, *g*), la probabilidad de que un plano que corta a Q corte también a un corpúsculo particular será M_λ / M_Q. Llamemos $F(\lambda)\, d\lambda$ al número de corpúsculos por unidad de volumen de Q, cuyo λ está comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$. El número total de corpúsculos de esta clase será $VF(\lambda)\, d\lambda$ (siendo V el volumen de Q) y el valor medio del número de corpúsculos cortados por un plano arbitrario E cuyo λ está comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$ será

$$(M_\lambda / M_Q)\, VF(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.1}$$

Este valor medio, multiplicado por la probabilidad $\varphi(\sigma, \lambda)\, d\lambda$ del núm. 3 nos dará el valor medio del número de secciones planas de los corpúsculos cuyo λ está comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$, y cuya área está entre σ y $\sigma + d\sigma$. Integrando esta expresión a todos los valores de λ, o sea entre $\lambda = \sqrt{\sigma / \sigma_m}$ (pues para que pueda haber sección de área σ debe ser $\sigma \leqslant \sigma_m \lambda^2$) y $\lambda = \infty$, tendremos el valor medio del número de secciones de los corpúsculos por un plano arbitrario E cuya área está entre σ y $\sigma + d\sigma$, a saber

$$d\sigma \int_{\sqrt{\sigma/\sigma_m}}^{\infty} (M_\lambda / M_Q)\, VF(\lambda)\, \varphi(\sigma, \lambda)\, d\lambda. \tag{4.2}$$

Llamemos $f(\sigma)\,d\sigma$ al número de secciones por unidad de área en el plano E por el cual se corta, cuya área está comprendida entre σ y $\sigma+d\sigma$. Según (2, 6), el número total de estas secciones, en toda el área de la sección Q con el plano E, será $(2\pi V/M_Q)\, f(\sigma)\, d\sigma$, y por tanto, igualando con (4,2), teniendo en cuenta (3.2) y simplificando queda

$$\int_{\sqrt{\sigma/\sigma_m}}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\,\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right) F(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi}{M}\, f(\sigma), \tag{4.3}$$

donde se ha puesto $M=M_1$ y se ha tenido en cuenta que $M_\lambda = \lambda M_1$.

Esta ecuación (4.3) *es la que liga la distribución* f(σ) *de las áreas de las secciones de los corpúsculos en el plano* E *con la distribución* F(λ) *de los tamaños de los mismos en el cuerpo* Q.

El problema práctico consiste en general en determinar $F(\lambda)$ conocida $f(\sigma)$; (4.3) es entonces una ecuación integral. Para resolverla hace falta conocer la función $\varphi(\sigma)$ que hay que calcular en cada caso, según la forma de los corpúsculos.

Caso de corpúsculos esféricos.—Si los corpúsculos son esferas de radio variable, tomando λ igual al radio, según (3.3) es

$$\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi\lambda^2-\sigma}}, \tag{4.4}$$

y como para la esfera de radio unidad es $M=4\pi$ y $\sigma_m=\pi$, resulta la ecuación integral

$$\int_{\sqrt{\sigma/\pi}}^{\infty} \frac{F(\lambda)\, d\lambda}{\sqrt{\pi\lambda^2-\sigma}} = \sqrt{\pi}\, f(\sigma). \tag{4.5}$$

Para reducir esta ecuación a la forma típica de ABEL basta hacer el cambio de variables $\pi\lambda^2=s$, con lo cual queda

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{F_1(s)\, ds}{\sqrt{s-\sigma}} = f_1(\sigma), \tag{4.6}$$

habiendo puesto

$$F_1(s) = \frac{F(\sqrt{s/\pi})}{\sqrt{s}}, \qquad f_1(\sigma) = 2\pi f(\sigma). \tag{4.7}$$

Puesto que $f_1(\infty)=0$, la solución de (4.6) es (ver, por ejemplo, HILBERT-COURANT [3], pág. 158)

$$F_1(s) = -\frac{1}{\pi}\int_s^\infty \frac{f'_1(\sigma)}{\sqrt{\sigma - s}}\, d\sigma, \tag{4.8}$$

donde el acento indica la derivada respecto σ. Volviendo a las $F(\lambda)$, $f(\sigma)$ primitivas, (4.8) se escribe

$$F(\lambda) = -2\sqrt{\pi}\,\lambda \int_{\pi\lambda^2}^\infty \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{\sigma - \pi\lambda^2}}\, d\sigma. \tag{4.9}$$

En este caso de corpúsculos esféricos en que las secciones planas son círculos, es cómodo utilizar los radios de estas secciones en lugar de las áreas, sustituyendo $f(\sigma)$ por la función $f(r)$ de distribución de los radios. Se tienen entonces las relaciones

$$\sigma = \pi r^2, \qquad f(\sigma)\, d\sigma = g(r)\, dr,$$

de donde

$$f(\sigma) = \frac{g(r)}{2\pi r},$$

y por tanto

$$f'(\sigma) = \frac{1}{4\pi^2 r}\left(\frac{g(r)}{r}\right)',$$

donde el último acento indica derivada respecto r, con lo cual (4.9) queda

$$F(\lambda) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_\lambda^\infty \left(\frac{g(r)}{r}\right)' \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \lambda^2}}, \tag{4.10}$$

que es el resultado obtenido por WICKSELL [8].

Caso de corpúsculos aproximadamente esféricos.—Para escribir la ecuación (4.3) hace falta calcular previamente $\varphi(\sigma)$, cálculo fácil como hemos visto para la esfera, pero más complicado para otras formas de corpúsculos. Sin embargo, para corpúsculos convexos de forma no muy diferente de la esfera, por analogía con (3.4) se puede tomar una expresión de la forma

$$\varphi(\sigma) = \frac{a}{(\sigma_m - \sigma)^\mu}, \tag{4.11}$$

siendo σ_m el área máxima de las secciones planas del corpúsculo y disponiendo de los parámetros a, μ para obtener la mejor aproximación posible. Para $\sigma \geqslant \sigma_m$, se conviene en que $\varphi(\sigma)=0$.

Para el cálculo de a, μ tenemos las ecuaciones (3.1) que nos dan

$$\frac{a}{1-\mu}\,\sigma_m^{1-\mu} = 1, \qquad \frac{a}{(1-\mu)(2-\mu)}\,\sigma_m^{2-\mu} = \frac{2\pi V}{M},$$

de donde

$$a = \frac{p}{\sigma_m^p}, \qquad \mu = 1 - p, \tag{4.12}$$

habiendo puesto para abreviar

$$p = \frac{M\sigma_m}{2\pi V} - 1. \tag{4.13}$$

Obsérvese que como en todo cuerpo convexo es $\sigma_m \geqslant F/4$ y $MF \geqslant 12\pi V$, se tiene

$$p \geqslant \frac{MF}{8\pi V} - 1 \geqslant \frac{1}{2},$$

y por tanto

$$\mu = \frac{1}{2}.$$

Para corpúsculos en que sea aplicable una ley de la forma (4.11) con los valores de a, μ dados por (4.12), (4.13), la ecuación integral (4.3) es reducible también al tipo ABEL (generalizada) y por tanto fácilmente resoluble.

En efecto, sustituyendo (4.11) en (4.3) resulta

$$aM\int_{\sqrt{\sigma/\sigma_m}}^{\infty} \frac{\lambda^{2\mu-1}F(\lambda)}{(\sigma_m\lambda^2-\sigma)^{\mu}}\,d\lambda = 2\pi f(\sigma).$$

Poniendo

$$\sigma_m\lambda^2 = s, \qquad F_1(s) = (s/\sigma_m)^{\mu-1}F\left(\sqrt{s/\sigma_m}\right), \qquad f_1(\sigma) = \frac{4\pi\sigma_m}{aM}f(\sigma)$$

queda

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{F_1(s)}{(s-\sigma)^{\mu}}\,ds = f_1(\sigma),$$

ecuación del tipo de ABEL generalizado cuya solución, siendo $f_1(\infty)=0$, es [3, pág. 159],

$$F_1(s) = -\frac{\operatorname{sen} \mu \pi}{\pi} \int_s^\infty \frac{f'_1(\sigma)}{(\sigma - s)^{1-\mu}} \, d\sigma,$$

o bien, volviendo a las $F(\lambda)$ y $f(\sigma)$ primitivas

$$F(\lambda) = -\frac{4 \sigma_m \lambda^{2(1-\mu)} \operatorname{sen} \mu \pi}{a M} \int_{\sigma_m \lambda^2}^\infty \frac{f'(\sigma)}{(\sigma - \sigma_m \lambda^2)^{1-\mu}} \, d\sigma, \tag{4.16}$$

que para el caso de la esfera $\left(\mu = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)$ se reduce a (4.9).

Caso de corpúsculos iguales.—Si todos los corpúsculos son iguales y hay, en término medio, N de ellos por unidad de volumen de Q, considerando a $F(\lambda)$ como N veces una función delta de DIRAC, la misma ecuación (4.3) nos da

$$f(\sigma) = \frac{MN}{2\pi\lambda_0} \varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda_0^2}\right),$$

siendo λ_0 el valor correspondiente al tamaño único de los corpúsculos.

5. SECCIONES POR UNA RECTA.

Consideremos, como en el número anterior, un cuerpo convexo Q que contiene en su interior corpúsculos convexos distribuídos al azar de tamaño variable, pero semejantes entre sí, de manera que el tamaño queda determinado por la razón de semejanza.

Igual que antes, representemos por $F(\lambda)$ la función que rige la distribución de los tamaños de los corpúsculos. Cortando el cuerpo Q por una recta G se obtendrán sobre la misma distintas cuerdas de intersección con los corpúsculos; sea ahora σ la longitud variable de estas cuerdas y representemos análogamente al número anterior por $f(\sigma)$ a la función tal que $f(\sigma)d\sigma$ sea el número de cuerdas por unidad de longitud de la intersección de G con Q cuya longitud está comprendida entre σ y $\sigma + d\sigma$. El problema consiste en relacionar $F(\lambda)$ con $f(\sigma)$.

Observemos primero que si en vez de por unidad de longitud queremos el número (valor medio) de cuerdas de longitud entre σ y $\sigma + d\sigma$ contenidas en toda la intersección de G con Q, según (2.5) será

$$(4\, V/S_Q)\, f(\sigma)\, d\sigma. \tag{5.1}$$

Consideremos un corpúsculo K_1 correspondiente a $\lambda=1$. Sea $\varphi(\sigma)d\sigma$ la probabilidad de que una recta G que corta a K_1 determine en el mismo una cuerda de longitud comprendida entre σ y $\sigma+d\sigma$. Para un corpúsculo correspondiente al valor general λ, la probabilidad análoga será (por el mismo razonamiento que condujo a (3.2))

$$\varphi(\sigma,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right). \tag{5.2}$$

Sea G una recta al azar que corta a Q. La probabilidad de que corte también a un corpúsculo particular K_λ, según núm. 2, g) es S_λ/S_Q y por tanto el valor medio del número de corpúsculos cortados por G cuyo λ está comprendido entre λ y $\lambda+d\lambda$ será (análogamente a (4.1)) $(S_\lambda/S_Q)\,VF(\lambda)\,d\lambda$.

Si σ_m es la cuerda máxima que una recta puede determinar en un corpúsculo K_1 de $\lambda=1$, análogamente a (4.2) tenemos ahora que el valor medio del número de cuerdas determinadas por los corpúsculos en la recta G y cuya longitud está comprendida entre σ y $\sigma+d\sigma$ vale

$$d\sigma\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty}\frac{S_\lambda}{S_Q}\,VF(\lambda)\,\varphi(\sigma,\lambda)\,d\lambda, \tag{5.3}$$

valor que también vimos estaba dado por (5.1). Por tanto, igualando y teniendo en cuenta que $S_\lambda=\lambda^2S$ (S = área del corpúsculo correspondiente a $\lambda=1$) y (5.2), resulta que la ecuación que liga $F(\lambda)$ con $f(\sigma)$ es

$$\int_{\lambda/\sigma_m}^{\infty}\lambda\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)F(\lambda)\,d\lambda=\frac{4}{S}f(\sigma). \tag{5.4}$$

Caso de corpúsculos esféricos.—Para una esfera de radio unidad, la probabilidad de que una recta trazada al azar determine sobre la misma una cuerda de longitud comprendida entre σ y $\sigma+d\sigma$ es fácil de calcular, resultando que vale

$$\varphi(\sigma)\,d\sigma=\frac{\sigma}{2}\,d\sigma. \tag{5.5}$$

Por tanto la ecuación (5.4) se escribe (siendo $\sigma_m=2$, $S=4\pi$)

$$\int_{\sigma/2}^{\infty}F(\lambda)\,d\lambda=\frac{2}{\pi\sigma}f(\sigma),$$

cuya solución es inmediata:

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{f(2\lambda)}{\lambda}\right). \tag{5.6}$$

A un resultado análogamente simple se llega si se consideran cuerpos convexos de forma no muy diferente de la esfera, para los cuales se pueda tomar para $\varphi(\sigma)$ una expresión de la forma

$$\varphi(\sigma) = (a\,\sigma)^{\mu} \tag{5.7}$$

más general, pero del mismo tipo, que la (5.5).

Los parámetros a y μ se determinan por las condiciones análogas a las (3.1) que en este caso, según (2.5) son

$$\int_0^{\sigma_m} \varphi(\sigma)\,d\sigma = 1, \qquad \int_0^{\sigma_m} \sigma\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = \frac{4\,V}{S}, \tag{5.8}$$

siendo V el volumen y S el área de un corpúsculo correspondiente a $\lambda=1$. Resulta de esta manera

$$\mu = \frac{\sigma_m S - 8V}{4V - \sigma_m S}, \qquad a = \left[(\mu+1)\,\sigma_m^{-(\mu+1)}\right]^{\frac{1}{\mu}}, \tag{5.9}$$

y la ecuación (5.4) toma la forma

$$\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty} \lambda^{1-\mu} F(\lambda)\,d\lambda = \frac{4}{(a\,\sigma)^{\mu} S} f(\sigma),$$

de donde

$$F(\lambda) = -\frac{4\,\lambda^{\mu-1} S}{(a\,\sigma_m)^{\mu} S}\left(\frac{f(\sigma_m\lambda)}{\lambda^{\mu}}\right), \tag{5.10}$$

que generaliza el resultado (5.6).

Caso de corpúsculos iguales.—Si todos los corpúsculos son iguales y corresponden al valor λ_0 de λ, la ecuación general (5.4), considerando a $F(\lambda)$ como N veces una función delta de DIRAC nos da

$$f(\sigma) = \frac{\lambda_0 SN}{4}\,\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda_0}\right),$$

siendo N el número de corpúsculos por unidad de volumen de Q.

6. CORPUSCULOS PLANOS CORTADOS POR UN PLANO.

Supongamos ahora que el cuerpo Q contiene corpúsculos convexos planos, o sea láminas o discos planos, de tamaño variable, pero, como siempre, semejantes entre sí, de manera que el tamaño queda fijado por la razón de semejanza λ.

Con el mismo significado anterior para $F(\lambda)$, al cortar ahora por un plano E se obtendrán, como secciones de los discos, segmentos de longitud variable σ. Siendo, como siempre, $f(\sigma)$ la función de probabilidad de las longitudes de estos segmentos (por unidad de área), se desea hallar la expresión que permita calcular $F(\lambda)$ a partir de $f(\sigma)$.

Consideremos un disco K_1 correspondiente a $\lambda=1$ e indiquemos por $\varphi(\sigma)d\sigma$ la probabilidad de que un plano al azar E que corta a K_1 determine una cuerda de longitud comprendida entre σ y $\sigma+d\sigma$. Para un disco de razón de semejanza λ, la misma probabilidad vale

$$\varphi(\sigma, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right). \tag{6.1}$$

A partir de aquí se procede exactamente como en el núm. 4 llegando hasta la ecuación (4.2) con la sola diferencia de tener ahora (6.1) en vez de (3.2) y poder poner $M=(\pi/2)L$, siendo L la longitud del contorno de los discos correspondientes a $\lambda=1$, con lo cual en vez de (4.3) tenemos ahora

$$\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty} \varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) F(\lambda)\, d\lambda = \frac{4}{L} f(\sigma). \tag{6.2}$$

Si se conoce $\varphi(\sigma)$ esta ecuación integral permite calcular $F(\lambda)$ a partir de $f(\sigma)$.

Caso de discos circulares.—Si los discos que constituyen los corpúsculos planos contenidos en Q son circulares, la función $\varphi(\sigma)$ es fácil de calcular. Tomemos por λ el radio variable de estos discos. Para $\lambda=1$ el problema consiste en hallar la probabilidad de que un plano que corta a un círculo del espacio de radio unidad lo haga según una cuerda de longitud comprendida entre λ y $\lambda+d\lambda$. Por la teoría de probabilidades geométricas se deduce inmediatamente que esta probabilidad es la misma que la de que una recta de un plano determine en un círculo de radio unidad una cuerda en las mismas condiciones y vale, por tanto,

$$\varphi(\sigma)\,d\sigma = \frac{\sigma\,d\sigma}{2\sqrt{4-\sigma^2}} \tag{6.3}$$

para $\sigma<2$ y $\varphi(\sigma)=0$ para $\sigma\geqslant 2$.

Sustituyendo esta expresión en (6.2) y teniendo en cuenta que $L=2\pi$, $\sigma_m=2$, resulta

$$\int_{\sigma/2}^{\infty} \frac{F(\lambda)}{\sqrt{4\lambda^2-\sigma^2}}\,d\lambda = \frac{4}{\pi\sigma} f(\sigma), \tag{6.4}$$

que se puede escribir en la forma de ABEL

$$\int_{x}^{\infty} \frac{F_1(s)}{\sqrt{s-x}}\,ds = f_1(x), \tag{6.5}$$

poniendo

$$s=4\lambda^2, \qquad x=\sigma^2.$$

$$F_1(s) = \frac{F\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}\right)}{4\sqrt{s}}, \qquad f_1(x) = \frac{4}{\pi\sqrt{x}} f(\sqrt{x}).$$

La ecuación (6.5) es la misma (4.6); por tanto, su solución es la (4.8), que introduciendo de nuevo las funciones $F(\lambda)$, $f(\sigma)$ queda

$$F(\lambda) = -\frac{32\lambda}{\pi^2}\int_{2\lambda}^{\infty}\left(\frac{f(\sigma)}{\sigma}\right)' \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-4\lambda^2}}. \tag{6.6}$$

Caso de corpúsculos iguales.—Como en los casos anteriores, si los corpúsculos planos son todos iguales y corresponden al valor λ_0 del parámetro, la ecuación (6.2) nos da

$$f(\sigma) = \frac{LN}{4}\varphi\left(\frac{\sigma}{\lambda_0}\right),$$

siendo N el número de corpúsculos por unidad de volumen de Q.

II. PROBLEMAS DE PROYECCIONES

7. PROYECCIONES DE SEGMENTOS.

Sea Q un cuerpo convexo del espacio de área S y volumen V. Supongamos que en su interior, distribuídos al azar, contiene segmentos de recta, en número elevado, de longitud variable λ. Sea $F(\lambda)d\lambda$ el número medio de segmentos por unidad de volumen cuya longitud está comprendida entre λ y $\lambda+d\lambda$.

Supongamos que se proyecta Q sobre un plano según una dirección al azar. Los segmentos vendrán proyectados según segmentos de longitud variable a contenidos en el área proyección de Q. Sea $f(a)da$ el número de segmentos proyectados, por unidad de área, cuya longitud está comprendida entre a y $a+da$.

El problema consiste en buscar la ecuación que liga $F(\lambda)$ con $f(a)$, para poder determinar una de estas funciones conocida la otra.

Consideremos primero el siguiente problema elemental:

Un segmento del espacio de longitud λ se proyecta ortogonalmente sobre un plano elegido al azar. Hallar la probabilidad de que la longitud del segmento proyectado esté comprendida entre a y $a+da$.

Llamando θ al ángulo entre el segmento y la normal al plano sobre el cual se proyecta es $a=\lambda$ sen θ. La probabilidad para que esta longitud de la proyección esté comprendida entre a y $a+da$, teniendo en cuenta que los casos favorables son aquellos en que el segmento del espacio forma con la normal al plano un ángulo comprendido entre θ y $\theta+d\theta$ (con $d\theta$ deducido de $da=\lambda \cos\theta \, d\theta$) y por tanto su medida es 2π sen $\theta \, d\theta$ y los casos posibles, conjunto de todas las direcciones a partir de un punto del espacio, vale 2π, resulta igual a sen $\theta d\theta$, o bien igual a

$$\varphi(a)\,da = \frac{a\,da}{\lambda\sqrt{\lambda^2-a^2}} \tag{7.1}$$

para $a<\lambda$ y $\varphi(a=0)$ para $a>\lambda$.

Según las definiciones de $F(\lambda)$ y $f(a)$ y teniendo en cuenta el valor medio núm. 2, h), se tendrá, por consiguiente, la relación buscada

$$\int_a^\infty \frac{F(\lambda)\,d\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda^2-a^2}} = \frac{S_Q}{4\,a\,V_Q}\,f(a), \tag{7.2}$$

siendo V_Q el volumen de Q y S_Q el área de su superficie.

Esta ecuación es fácilmente reducible al tipo de ABEL y por tanto fácilmente resoluble. La solución es

$$F(\lambda) = -\frac{S_Q \lambda^2}{2\pi V_Q} \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{f(a)}{a}\right)' \frac{da}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}. \tag{7.3}$$

Si todos los segmentos son de igual longitud y hay en término medio N por unidad de volumen, considerando a $F(\lambda)$ como N veces la función delta de DIRAC, (7.2) nos da

$$f(a) = \frac{4\, a\, V_Q N}{\lambda S_Q \sqrt{\lambda^2 - a^2}} \tag{7.4}$$

para $a < \lambda$ y $f(a) = 0$ para $a > \lambda$.

8. CORPUSCULOS PLANOS PROYECTADOS.

Supongamos que el cuerpo convexo Q contiene corpúsculos planos de área variable distribuídos al azar; sea $F(\sigma) d\sigma$ el número de ellos por unidad de volumen cuya área está comprendida entre σ y $\sigma + d\sigma$. Al proyectar ortogonalmente sobre un plano tendremos figuras convexas de áreas variables a; sea $f(a)\, da$ el número de ellas por unidad de área proyectada cuya área está comprendida entre a y $a + da$.

Si θ es el ángulo entre la normal al plano de proyección y la normal a un corpúsculo plano de área σ, es $a = \sigma \cos \theta$, y por tanto, por el mismo razonamiento del número anterior, la probabilidad de que el área proyectada esté comprendida entre a y $a + da$ será

$$\varphi(a)\, da = \frac{da}{\sigma} \tag{8.1}$$

para $a < \sigma$ y $\varphi(a) = 0$ para $a \geqslant \sigma$; es decir, φ es constante e igual a $1/\sigma$ para $a < \sigma$.

La relación entre $F(\sigma)$ y $f(a)$ será por consiguiente

$$\int_a^{\infty} \frac{F(\sigma)}{\sigma} d\sigma = \frac{S_Q}{4 V_Q} f(a) \tag{8.2}$$

siendo, como antes, S_Q el área y V_Q el volumen de Q.

El cálculo de $F(\sigma)$ a partir de $f(a)$ se hará por tanto mediante la fórmula

$$F(\sigma) = -\frac{\sigma S_Q}{4 V_Q} f'(\sigma). \tag{8.3}$$

Si los conjuntos tienen todos la misma área σ y hay N de ellos por unidad de volumen de Q, la ecuación (8.2) se reduce a

$$f(a) = \frac{4\, V_0 N}{\sigma\, S_Q}$$

para $a<\sigma$ y $f(a)=0$ para $a\geqslant\sigma$. Como el segundo miembro no depende de a, significa que $f(a)$ es constante para $a<\sigma$ y luego igual a cero para $a\geqslant\sigma$.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BLASCHKE: *Vorl. über Integralgeometrie,* Vol. I y II, Leigzig und Berlin, 1936-1937.

[2] T. BONNESEN-W. FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper,* Berlin, Springer, 1934.

[3] R. COURANT-D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics,* Vol. I. Interscience Publishers, New York, 1953.

[4] R. DELTHEIL: *Probabilités géométriques,* París, 1926.

[5] R. L. FULLMAN: *Measurement of Particles sizes in opaque bodies,* J. Metals, Vol. 5, pp. 447-452, 1953.

[6] W. P. REID: *Distribution of sizes of spheres in a solid from a study of slices of the solid,* J. of Math. and Phys. Vol. 34, pp. 95-102, 1955.

[7] E. SCHEIL: *Die berechnung der Anzahl und Gröszenverteilung kugelförmiger Körpern mit Hilfe der durch einen ebenen Schnitt erhaltenen Schnittkreise,* Ztsch. anorg. allgem. Chem. Vol. 201. pp. 253-264, 1931.

[8] S. D. WICKSELL: *The corpuscle problem. A mathematical study of a biometric problem.* Biometrica, Vol. 17, pp. 84-99, 1925.

SUMMARY

The following problem has been considered by several authors (P. Reid, E. Scheil, R. L. Fullman, S. D. Wicksell): A convex opacous body have inside a number of spheres randomly distributed. The rays of that spheres have a distribution function. If we cut the body by a plane we obtain, as spheres sections, a number of circles the rays of that have another distribution function. The matter of the problem is to find the distribution function of the rays of spheres by means of the distribution function of the rays of circles.

The same question arise if we cut by a straight line, instead of a plane, and on consisidere the chords that the straight line determine in the spheres.

The author generalize the problem, assuming that instead of spheres the body contain convex corpuscles with any form but similar and so the size of the corpuscles depend of one only parameter λ (similitude ratio), and the distribution function of λ is what we desire, in terms of the distribution of surfaces given by an arbitrary plane section (or length of chordes if the section is by a straight line). In the case in what the form of corpuscles is not so far of a sphere, the autor find a solvable integral equation for solution of this problem.

Furthermore, the author study the alike problem to consider a transparent body with opacous convexe plate, the areas of that have a distribution function that we want know by means of the distribution function of the areas of the convexe figures obtained by proyection of the plates in a plane with a random direction.