J Ó Z S E F   A T T I L A   T U D O M Á N Y E G Y E T E M

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

UNIVERZÁLIS ALGEBRÁK ABEL- ÉS HAMILTON-FÉLE PRIMITIV OSZTÁLYAIRÓL

KLUKOVITS LAJOS

doktori értekezése

SZEGED

1973

1. Felhasznált fogalmak és tételek

Algebrai strukturán vagy röviden algebrán egy müveletekkel ellátott halmazt értünk. E fogalom pontos megadásához igy először a müvelet fogalmát kell tisztáznunk. Müvelet-tartománynak nevezünk egy Ω halmazt egy $a : \Omega \to N$ leképezéssel együtt (N a nemnegativ egész számok halmazát jelöli). Az Ω halmaz elemeit müveleteknek, tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén az $a(\omega)$ számot az ω müvelet változószámának nevezzük. Azt fogjuk mondani, hogy $\omega\,(\in \Omega)$ n-változós, ha $a(\omega) = n$. Az Ω halmaz összes n-változós müveletből álló részhalmazát $\Omega(n)$ -nel jelöljük.

Legyen A tetszőleges halmaz, Ω pedig egy müvelet--tartomány. Az A halmazon értelmezett Ω algebrai struktura $\Omega(n) \to A^{A^n}$ $(n \in N)$ leképezések egy családja (minden $\omega \in \Omega(n)$ müveletnek egy $A^n \to A$ leképezést feleltetünk meg). Az A halmazt ezen strukturával együtt Ω -algebrának, vagy univerzális algebrának (röviden algebrának) nevezzük, és gyakran (A, Ω)-val jelöljük. Tekintsünk egy A Ω -algebrát, és legyen $\omega \in \Omega(n)$. Ezen müvelethez tartozó leképezés bármely - az A elemeiből álló $(a_1, \dots, a_n)$ -rendezett n-eshez A egy elemét rendeli, melyet $a_1 \dots a_n \omega$ -val jelölünk. Megjegyezzük, hogy kétváltozós müveleteknél a hagyományos - „+", „·", „°" - jelöléseket alkalmazzuk (és az inverzeknek jelölését is a hagyományos módon végezzük).

Legyen A Ω -algebra, B pedig A részhalmaza. Azt mondjuk, hogy B részalgebrája A -nak, ha B is Ω -algebra. Ezen B részalgebra valódi részalgebra, ha B valódi részhalmaza A-nak. Könnyen igazolható, hogy ha B_γ ($\gamma \in \Gamma$ indexhalmaz) A-nak részalgebrái, ekkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ - ha nem üres - A-nak részalgebrája. Megjegyezzük, hogy $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \neq \emptyset$ csak akkor lényeges kikötés, ha Ω tartalmaz nullváltozós müveleteket is.

Legyen M tetszőleges részhalmaza az $A\Omega$-algebrának. Akkor mindazon A-beli részalgebrák közös része, amelyek M-et tartalmazzák (ez nem üres) A-nak részalgebrája. Ezt a részalgebrát az A-ban <u>M által generált részalgebrá</u>nak nevezzük, és $\{M\}_\Omega$-val, vagy ha nem okoz félreértést $\{M\}$-mel jelöljük. Ha $\{M\} = A$, akkor azt mondjuk, hogy M az A-nak generátorrendszere.

Legyen P algebrák egy tulajdonsága. Azt mondjuk, hogy ezen P tulajdonság <u>lokális</u>, ha valahányszor egy A algebra minden végesen (azaz véges részhalmaz által) generált részalgebrája P tulajdonságu, mindannyiszor maga az A algebra is P tulajdonságu.

Tekintsük az (A,Ω) és (A',Ω') algebrákat és tegyük fel, hogy Ω és Ω' között olyan 1-1 értelmü megfeleltetés létesithető, amelynél n-változós müveletnek n-változós müvelet felel meg. Ilyenkor az (A,Ω) és (A',Ω') algebrákat <u>hasonló</u> algebráknak nevezzük. Az összes, egymáshoz hasonló algebrák osztályát <u>hasonlósági osztály</u>nak nevezzük. Hasonló algebrákban az egymásnak megfelelő müveleteket ugyanazon jellel jelöljük.

Legyen Ω egy müvelet-tartomány, $x_1, x_2, \dots$ pedig szimbólumok. Az $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}\omega$ alaku kifejezéseket - ahol $\omega \in \Omega(n)$ - $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ <u>elsőfoku polinom</u>jának, az $u_1 u_2 \dots u_n \omega$ alakuakat pedig - ahol $u_1, u_2, \dots, u_n$ legfeljebb k-ad foku polinomok - $(k+1)$ -ed foku polinomjának nevezzük, melyet gyakran $\omega(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})$-nel jelölünk. Az Ω elemeiből képezhető összes polinom halmazát $\overline{\Omega}$ fogja jelölni, és ezen halmaz elemeit polinomiális müveleteknek is nevezzük.

Tekintsük az A és B Ω -algebrákat, a $\varphi: A \to B$ leképezést és az $\omega \in \Omega(n)$ müveletet. Azt mondjuk, hogy φ felcserélhető ω -val, ha tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ esetén

$$a_1 a_2 \dots a_n \omega \varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi)\dots(a_n\varphi)\omega$$

teljesül. Ha φ felcserélhető minden $\omega \in \Omega$ müvelettel, akkor homomorfizmusnak vagy homomorf leképezésnek nevezzük. Megjegyezzük, hogy amennyiben φ felcserélhető minden $\omega \in \Omega$ müvelettel, akkor fokszám szerinti teljes indukcióval belátható, hogy minden $\mu \in \overline{\Omega}$ polinommal is felcserélhető. Egy $\varphi: A \to B$ homomorfizmust izomorfizmusnak nevezünk, ha φA -nak B -re való 1-1-értelmü leképezése. Ekkor az A és B algebrákat izomorfnak mondjuk, s ezt $A \cong B$ -vel jelöljük. Ha $A = B$, akkor homomorfizmus helyett endomorfizmusról, izomorfizmus helyett pedig automorfizmusról beszélünk.

Legyen A Ω-algebra, θ pedig egy A -n értelmezett ekvivalenciareláció. Ezen relációt kongruenciának nevezzük ha tetszőleges $\nu \in \Omega(n)$ müvelet és $a_1, a_2, \dots, a_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n \in A$ elemek esetén $a_i \equiv a'_i(\theta)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ -ből következik, hogy $a_1 a_2 \dots a_n \nu \equiv a'_1 a'_2 \dots a'_n \nu(\theta)$. Ez egyértelmü azzal, hogy a θ -hoz tartozó osztályozás osztályai halmazán természetes módon definiálható az Ω algebrai struktura. Az igy kapott algebrát - amelyet A/θ -val jelölünk - A θ szerinti faktoralgebrájának nevezzük.

Tekintsünk egy (A,Ω) algebrát és egy $\omega\in\bar{\Omega}(n)$ polinomiális müveletet. Legyenek $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n\in A$ tetszőleges, de rögzitett elemek. Az A algebrának egy $\tau: a\to a_1\dots a_{i-1}a\,a_{i+1}\dots a_n\omega$ önmagába való leképezését __transzlációnak__ nevezzük.

Gyakran fogunk hivatkozni a következő tételre, amely Malcev [8] egy tételének speciális esete, s transzlációk és kongruenciarelációk kapcsolatára vonatkozik.

__1.1 Tétel:__ Legyen A Ω-algebra, B A-nak részhalmaza. A B részhalmaz akkor és csak akkor osztálya A egy kongruenciája kisérő osztályozásának, ha A minden τ transzlációjára teljesül, hogy $B\tau\subseteq B$ vagy $B\tau\cap B=\emptyset$ (ahol $B\tau$ a B halmaznak a τ leképezés melletti képét jelöli).

A csoportokra, gyürükre stb. ismert direktszorzat fogalma is általánositható hasonló univerzális algebrák tetszőleges A_γ $(\gamma\in\Gamma)$ halmazára. Valóban, tekintsük a $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ halmazt (azaz az összes olyan halmazok halmazát, amelyek minden A_γ-ból pontosan egy elemet tartalmaznak). Egy ilyen halmazt tekintsük $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ egy elemének, a halmaz A_γ-hoz tartozó elemét pedig a szóbanforgó $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$-beli elem γ-komponensének. Ilyen elemekre a müveleteket a következőképp definiáljuk: ha $\nu\in\Omega(n)$ tetszőleges müvelet és $a_1,a_2,\dots,a_n\in\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ akkor $a_1a_2\dots a_n\nu$ γ-komponense legyen $a_{1\gamma}a_{2\gamma}\dots a_{n\gamma}\nu$, ahol $a_{i\gamma}$ a_i γ-komponense $(i=1,2,\dots;n)$. Világos, hogy igy a kiindulási algebrákhoz hasonló algebrákat kapunk. Ezt az algebrát az A_γ $(\gamma \in \Gamma)$ algebrák <u>direkt szorzat</u>ának nevezzük és $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ -val jelöljük. $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ elemeire a $(\dots,a_\gamma,\dots)$ jelölést fogjuk használni.

Tekintsük algebrák egy $\mathfrak{B}$ hasonlósági osztályát az Ω müvelet-tartománnyal. Vegyünk egy X halmazt, melynek elemeit szabad elemeknek fogjuk nevezni, és a latin ábécé utolsó betüivel fogjuk jelölni. Ha Ω tartalmaz nullváltozós müveleteket, akkor vegyük még ezek jeleinek σ halmazát.

Indukcióval definiáljuk a <u>szó</u> fogalmát. Szónak nevezünk bármely X vagy σ-beli elemet. Ha $p_1,p_2,\dots,p_n$ szavak akkor bármely $\nu \in \Omega(n)$-re a $p_1p_2\dots p_n\nu$ jelsorozatot is szónak nevezzük.

Egy p szó <u>rész-szav</u>ának nevezünk bármely benne előforduló hézagmentes jelsorozatot, amely maga is szó.

A szófogalom függ Ω -tól. Ez azonban nem fog félreértést okozni, mert Ω -t, azaz a hasonlósági osztályt melyben dolgozunk néhány eset kivételével (ezt akkor mindig megmondjuk) a további vizsgálatainkban mindig rögzitjük.

Tekintsük most a p_1, p_2 szavakat és az $A \in \mathfrak{B}$ algebrát. Azt mondjuk, hogy az A algebrán teljesül a $p_1 = p_2$ <u>azonosság</u>, ha a p_1 és p_2 -ben előforduló szabad elemek helyébe tetszőleges A -beli elemeket irva (azonos szabad elemek helyébe azonos A -beli elemeket), egyenlő A -beli elemeket kapunk. Általában azonosságnak nevezünk minden $p_1 = p_2$ alaku jelsorozatot, ahol p_1 és p_2 szavak.

Vegyük most azonosságok egy Λ halmazát. Mindazon $\mathfrak{B}$ -beli algebrák osztályát, amelyekben minden Λ -hoz tartozó azonosság érvényes, primitiv osztálynak, pontosabban a $\mathfrak{B}$ hasonlósági osztály Λ azonossághalmaz által meghatározott primitiv osztályának nevezzük. Ha a Λ halmaz üres, akkor az általa meghatározott primitiv osztály maga a $\mathfrak{B}$ hasonlósági osztály. Másrészt, ha Λ tartalmazza az $x = y$ azonosságot is, akkor a Λ által meghatározott primitiv osztály izomorfiától eltekintve egyetlen egyelemü algebrából áll.

Polinomiális müveletek segitségével a szavak igen kényelmesen irhatók fel, pl. ha a p szó által definiált polinomiális müveletet π -vel jelöljük, akkor p helyett $x_1 x_2 \dots x_m \pi$ -t irhatunk. Ekkor egy azonosság általános alakja: $x_1 x_2 \dots x_m \pi_1 = x_l \dots x_n \pi_2$, ahol az indexezés arra utal, hogy mindegyik oldalon előfordulhatnak olyan szabad elemek, amelyek a másik oldalon nem szerepelnek.

Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ primitiv osztályok. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ primitiv osztályok polinomiálisan ekvivalensek, ha létezik 1-1 értelmü megfeleltetése a két osztály algebráinak és különböző polinomiális müveleteinek olymódon, hogy ha φ és γ jelöli az előbb emlitett leképezéseket, akkor tetszőleges ν $\mathfrak{A}$ -beli n-változós polinomiális müvelet és $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ (A tetszőleges algebra $\mathfrak{A}$-ban) esetén $(a_1 a_2 \dots a_n \nu)\varphi = (a_1\varphi)\dots(a_n\varphi)(\nu\gamma)$ teljesül.

Legyen $\mathfrak{L}$ hasonlósági osztály az Ω müvelet-tartománnyal. Tekintsük szabad elemek egy X halmazát, és képezzük X-ből az összes lehetséges szavakat. Ezek halmazát $\mathfrak{L}$-be tartozó algebrának tekinthetjük, ha a müveleteket a következő módon értelmezzük: legyenek $p_1, p_2, \dots, p_n$ szavak és $\nu \in \Omega(n)$; ekkor a $p_1 p_2 \cdots p_n \nu$ szót tekintjük a $p_1, p_2, \dots, p_n$ szavakra alkalmazott ν müvelet eredményének. Az igy kapott algebrát $F(\Omega, X)$ -szel vagy egyszerüen $F(X)$ -szel jelöljük és abszolut szabad algebrának nevezzük $\mathfrak{L}$-ben, vagy Ω szó-algebrának. Világos, hogy $F(X)$-nek X generátorrendszere, és nincs olyan nemtriviális azonosság, mely rajta teljesülne.

Legyen most Λ tetszőleges azonossághalmaz. $F(X)$-en bevezetünk egy $p_1 \equiv p_2 (\Lambda)$ relációt, melyről igazolható, hogy kongruencia: tetszőleges $p_1, p_2 \in F(X)$ -re $p_1 \equiv p_2 (\Lambda)$ -t irunk, ha p_2 megkapható p_1 -ből a következő átalakitások véges sorozatával: q_1 rész-szó helyettesitése olyan q_2 szóval, hogy a $q_1 = q_2$ egyenlőség valamely Λ-beli azonosságból szabad elemeknek szavakkal való helyettesitése utján legyen nyerhető.

A most bevezetett kongruencia meghatározza $F(X)$-nek egy $F(X)/\Lambda$ faktoralgebráját, amelyet - $\mathfrak{A}$-val jelölve a Λ azonossághalmaz által meghatározott primitiv osztályt - $\mathfrak{A}$ szabad algebrának nevezzük, X-et pedig (tulajdonképpen az X-beli elemeket tartalmazó osztályok halmazát) ezen $\mathfrak{A}$- szabad algebra szabad generátorrendszerének. Természetesen minden $F(X)/\Lambda$-val izomorf algebrát $\mathfrak{A}$-szabad algebrának nevezünk, s az is nyilvánvaló, hogy $F(X)/\Lambda \in \mathfrak{A}$.

A szabad algebrákat és a primitiv osztályokat jellemzik a következő tételek, melyekre gyakran fogunk hivatkozni.

__1.2 Tétel:__ Legyen F az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály algebrája az M generátorrendszerrel. F akkor és csak akkor szabad algebra $\mathfrak{A}$-ban az M generátorrendszerrel, ha M-nek bármely $\mathfrak{A}$-beli A algebrába való tetszőleges leképezése egyetlen módon folytatható F-nek A-ba való homomorfizmusává.

Alapvető szerepet játszik a következő

__1.3 Tétel:__ Az $F=\{X\}\mathfrak{A}$ primitiv osztálybeli algebra akkor és csak akkor szabad algebra $\mathfrak{A}$-ban az X generátorrendszerral, ha minden olyan egyenlőség, amely X-ből képezett szavak között F-ben fennáll, azonosság $\mathfrak{A}$-ban.

Birkhoff-tól [6] ered a következő

__1.4 Tétel:__ Valamely hasonlósági osztály egy $\mathfrak{A}$ részosztálya akkor és csak akkor primitiv osztály, ha $\mathfrak{A}$ zárt a részalgebrák, faktoralgebrák és direkt szorzatok képzésére nézve.

Végül bevezetjük a __kategória__ fogalmát. Tekintsünk két osztályt; az egyik elemeit nevezzük __objektum__oknak, a másikét __morfizmus__oknak. Legyen továbbá bármely morfizmushoz hozzárendelve egy objektumokból álló pár ($\alpha \in Hom(a,b)$ jelölést használunk, ha az α morfizmushoz az (a,b) objektum-pár tartozik). Azt mondjuk, hogy a tekintett két osztály az adott hozzárendeléssel egy $\mathcal{K}$ kategóriát alkot, ha teljesülnek a következő feltételek:

(i) adott (a,b) objektum-pár esetén az $\alpha \in Hom(a,b)$ összefüggésnek eleget tevő α morfizmusok halmazt alkotnak;

(ii) ha $\alpha \in Hom(a,b)$ és $\beta \in Hom(b,c)$ akkor létezik $Hom(a,c)$ -nek egy egyértelmüen meghatározott eleme, melyet α és β szorzatának nevezünk és $\alpha\beta$ -val jelölünk (megjegyezzük, hogy tetszőleges $\alpha \in Hom(a,b)$ és $\beta \in Hom(c,d)$ szorzata akkor és csak akkor létezik, ha $b=c$);

(iii) legyenek $\alpha \in Hom(a,b)$, $\beta \in Hom(b,c)$ és $\gamma \in Hom(c,d)$; ekkor $(\alpha\beta)\gamma$ és $\alpha(\beta\gamma)$ értelmezettek, továbbá $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

(iv) minden a objektumhoz (jelölésben $a \in Ob\mathcal{K}$) tartozik egy ε_a morfizmus - melyet identikus morfizmusnak nevezünk - ugy, hogy $\varepsilon_a \in Hom(a,a)$ és minden $\alpha \in Hom(b,a)$ és $\beta \in Hom(a,c)$ esetén $\alpha\varepsilon_a = \alpha$ és $\varepsilon_a\beta = \beta$.

Az $\alpha \in Hom(a,b)$ irásmód helyett az elkövetkezőkben legtöbbször $\alpha : a \to b$ -t fogunk használni. Azonnal látható, hogy kategóriát alkotnak

(a) az összes nem nemüres halmazok egy adott univerzális halmazban az összes lehetséges leképezéssel;

(b) az összes algebrák egy adott primitiv osztályban az összes homomorf leképezésekkel (pl. az összes csoportok és homomorfizmusaik);

(c) az összes topológikus terek és folytonos leképezések.

A $\mathcal{K}$ kategóriába tartozó α morfizmust <u>epimorfiumus</u>nak nevezzük, ha bármely további β, γ morfizmusokra az $\alpha\beta = \alpha\gamma$ egyenlőségből folyik $\beta = \gamma$. Az (a) példában az epimorfizmusok éppen a ráképezések. A (b) esetben ez általában nem igaz: a gyürük kategóriájában létezik olyan epimorfizmus, amely nem ráképezés.

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ objektumok a $\mathcal{K}$ kategóriában. Az a objektumot $\mathcal{K}$-ban az a_i objektumok <u>direkt egyesitésé</u>nek nevezzük, ha léteznek olyan $\alpha_i : a \to a_i$ epimorfizmusok, hogy bármely $\mathcal{K}$-beli b objektumra és $\beta_i : b \to a_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ morfizmusokra van egyetlen olyan $\beta : b \to a$ morfizmus, amelyre a $\beta\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ egyenlőségek teljesülnek. Algebrák bármely primitiv osztályában a direkt egyesités mindig létezik és egyértelmüen meghatározott: megegyezik a direkt szorzattal.

2. Algebrák Abel-féle primitiv osztályairól

2.1 Ω-algebrák Abel-féle tulajdonságát több szerző definiálta különbözőképp: B. I. Plotkin [2], P. M. Cohn [1], A. G. Kuros [4] és Csákány Béla [11]. Az első két szerző definiciója megegyezik, mig Csákány Béláé T. Evans [13] gruppoidokra bevezetett fogalmának általánositása. Ezen tulajdonságokat az elkövetkezőkben jelölje M, H és E. Az M és H tulajdonságok ekvivalenciáját algebrákra Kuros [4] igazolta, és E nyilvánvalóan következik H-ból. A következőkben megfogalmazzuk ezen három feltételt, majd egy negyediket is (ezt C-vel jelöljük), mely egy M. Servi [12] dolgozata alapján bevezethető fogalomra épül, és bebizonyitjuk, hogy algebrák tetszőleges primitiv osztályán a négy feltétel ekvivalens.

M (B. I. Plotkin [2], 32. o.) Az A Ω-algebra tetszőleges m- és n-változós μ ill. ν müveletére bármely A-fölötti $n\times m$ tipusu (a_{ij}) mátrix esetén teljesül, hogy

$$(a_{11}\ldots a_{1m}\mu)\ldots(a_{n1}\ldots a_{nm}\mu)\nu = (a_{11}\ldots a_{n1}\nu)\ldots(a_{1m}\ldots a_{nm}\nu)\mu .$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait alkotó elem m-eseken elvégezve a μ müveletet, s az eredményként kapott elem-n-esre alkalmazva ν-t ugyanazt az elemet kapjuk, mint ha előbb a mátrix oszlopaira alkalmazzuk ν-t, s a kapott eredményeken végezzük el μ-t.

H (A. G. Kuros [4], 92. o.) Tetszőleges G Ω-algebrának az A Ω-algebrába való homomorf leképezéseinek halmaza maga is Ω-algebra, azaz ha $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ a G Ω-algebra homomorfizmusai az A-algebrába, továbbá $\mu\,(\in\Omega(m))$ tetszőleges müvelet, akkor a

$$(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu) : G \to A$$

leképezés, amelyet bármely $g \in G$ -re a következőképp adunk meg:

$$g(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu) = (g\varphi_1) \dots (g\varphi_m)\mu \quad ,$$

szintén homomorfizmus.

Másszóval a H feltétel azt jelenti, hogy a G algebra A -ba való homomorfizmusainak halmazán minden egyes Ω -beli müvelet természetes módon elvégezhető hasonlóan ahhoz, ahogyan egy Abel-csoportnak egy másik Abel-csoportba való homomorfizmusai összeadhatók, ill. additiv inverzük képezhető.

Megjegyezzük, hogy az idézett helyen a szerző a nullváltozós müveleteket külön vizsgálta, mivel a homomorfizmusokon elvégzendő μ müvelet H -ban adott definiciója csak legalább egyváltozós μ -kre alkalmazható. A jelen esetben erre nem lesz szükségünk. Ugyanis egy nullváltozós müvelet - jelölje azt ω - helyettesithető olyan egyváltozós müvelettel (ezt ugyancsak jelölje ω), melyre teljesül az $x\omega = y\omega$ azonosság. Részletesebben, ha a tetszőleges A algebrán az ω nullváltozós müvelet az a elemet jelöli ki, akkor a helyette bevezetett ω egyváltozós müvelet A minden egyes elemének az a elemet felelteti meg.

E (Csákány B. [11]) Az A Ω -algebra összes endomorfizmusainak halmaza maga is Ω -algebra, azaz ha $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ az A algebra endomorfizmusai és $\mu (\in \Omega(m))$ valamilyen müvelet, akkor az

$$(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \mu) : A \to A$$

leképezés, mely tetszőleges $a \in A$ elemre a következőképp hat:

$$a(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \mu) = (a\varepsilon_1) \dots (a\varepsilon_m)\mu \quad ,$$

szintén endomorfizmus.

M. Servi [12] dolgozata alapján bevezetünk egy speciális algebra-fogalmat, melyet "Servi-algebrá"-nak fogunk nevezni. Tekintsünk egy olyan $\mathcal{C}$ kategóriát amelyben objektumok bármely véges rendszerének létezik a direkt egyesitése. Tetszőleges A objektum esetén bármely $\varphi \in \mathcal{H}om(A^m, A)$ morfizmust - ahol m természetes szám - A -n értelmezett m-változós müveletnek nevezzük. Az (A, ϕ) (rendezett) párt - ahol $A \in Ob\,\mathcal{C}$ és ϕ az előbbi értelemben definiált müveletek egy halmaza - Servi algebrának nevezzük a $\mathcal{C}$ kategóriában. Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha $\mathcal{C}$ az összes halmazok kategóriája, akkor ezen fogalom megegyezik a közönséges algebra-fogalommal, továbbá az összes topológikus terek kategóriájában a Servi-algebrák épp a topológikus algebrák. Ezek után egy negyedik feltétel a következőképp fogalmazható meg:

C Az A Ω -algebra Servi algebra a hozzá hasonló algebrák kategóriájában.

Be fogjuk bizonyitani, hogy ezen négy feltétel algebrák primitiv osztályain ekvivalens.

2.1.1 Lemma: Tetszőleges A Ω -algebra esetén az M, H és C feltételek ekvivalensek, és E bármelyikből következik.

Bizonyitás:

$$M \Rightarrow H$$

Legyen G Ω -algebra $\mu, \nu \in \Omega$ m-, ill. n-változósok, $\varphi_i : G \to A$ $(i=1,2,\dots,m)$ homomorfizmusok és (a_{ij}) tetszőleges $n \times m$ tipusu mátrix A fölött. Ekkor léteznek olyan $g_1, g_2, \dots, g_n$ $(\in G)$ elemek, hogy $g_i \varphi_j = a_{ij}$ (mivel az (a_{ij}) mátrix tetszőleges, az igy definiált g_i elemek tetszőleges elemeknek tekinthetők). Ezek után azt kell igazolnunk, hogy

$$(g_1 \dots g_n \nu)(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu) = (g_1(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu)) \dots (g_n(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu)) \nu .$$

Ez teljesül, ugyanis

$$\begin{aligned}
(g_1 \dots g_n \nu)(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu) &= (g_1 \dots g_n \nu \varphi_1) \dots (g_1 \dots g_n \nu \varphi_m) \mu = \\
&= ((g_1 \varphi_1) \dots (g_n \varphi_1) \nu) \dots ((g_1 \varphi_m) \dots (g_n \varphi_m) \nu) \mu = \\
&= (a_{11} \dots a_{n1} \nu) \dots (a_{1m} \dots a_{nm} \nu) \mu = \\
&= (a_{11} \dots a_{1m} \mu) \dots (a_{n1} \dots a_{nm} \mu) \nu = \\
&= ((g_1 \varphi_1) \dots (g_1 \varphi_m) \mu) \dots ((g_n \varphi_1) \dots (g_n \varphi_m) \mu) \nu = \\
&= (g_1(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu)) \dots (g_n(\varphi_1 \dots \varphi_m \mu)) \nu .
\end{aligned}$$

$$H \Longrightarrow C$$

Az előbbi jelöléseket megtartva azt kell igazolni, hogy a $\bar{\nu} : A^n \to A$ leképezés, amelyre teljesül, hogy $(a_1, \dots, a_n)\bar{\nu} = a_1 \dots a_n \nu$ homomorfizmus. Ez a következő számolással látható be:

$$\begin{aligned}
&((a_{11}, \dots, a_{n1}) \dots (a_{1m}, \dots, a_{nm}) \mu) \bar{\nu} = \\
&= (a_{11} \dots a_{1m} \mu, \dots, a_{n1} \dots a_{nm} \mu) \bar{\nu} =
\end{aligned}$$

$$= ((g_1\varphi_1)\dots(g_1\varphi_m)\mu, \dots, (g_n\varphi_1)\dots(g_n\varphi_m)\mu)\bar{\nu} =$$

$$= (g_1(\varphi_1\dots\varphi_m\mu), \dots, g_n(\varphi_1\dots\varphi_m\mu))\bar{\nu} =$$

$$= g_1\dots g_n\nu(\varphi_1\dots\varphi_m\mu) =$$

$$= ((g_1\varphi_1)\dots(g_n\varphi_1)\nu)\dots((g_1\varphi_m)\dots(g_n\varphi_m)\nu)\mu =$$

$$= (a_{11}\dots a_{n1}\nu)\dots(a_{1m}\dots a_{nm}\nu)\mu =$$

$$= ((a_{11},\dots,a_{n1})\bar{\nu})\dots((a_{1m},\dots,a_{nm})\bar{\nu})\mu .$$

$$C \Longrightarrow M$$

Ismét a korábbi jelöléseket használva kapjuk, hogy egyrészt

$$((a_{11},\dots,a_{n1})\dots(a_{1m},\dots,a_{nm})\mu)\bar{\nu} =$$

$$= (a_{11}\dots a_{1m}\mu, \dots, a_{n1}\dots a_{nm}\mu)\bar{\nu} =$$

$$= (a_{11}\dots a_{1m}\mu)\dots(a_{n1}\dots a_{nm}\mu)\nu ,$$

másrészt

$$((a_{11},\dots,a_{n1})\dots(a_{1m},\dots,a_{nm})\mu)\bar{\nu} =$$

$$= ((a_{11},\dots,a_{n1})\bar{\nu})\dots((a_{1m},\dots,a_{nm})\bar{\nu})\mu =$$

$$= (a_{11}\dots a_{n1}\nu)\dots(a_{1m}\dots a_{nm}\nu)\mu .$$

Mivel $H \Rightarrow E$ nyilvánvaló, a lemmát bebizonyitottuk.

Egyszerü ellenpéldával szemléltethető, hogy ha egy algebra kielégiti az E feltételt, nem biztos, hogy az M feltételt is kielégiti. Tekintsük ugyanis a következő müvelettáblázattal megadott G grupoidot:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

Könnyen igazolható, hogy G -nek csak triviális kongruenciái léteznek, ahonnan azonnal folyik, hogy G összes endomorfizmusai ω, ι és α melyeket a következő táblázat ad meg:

	ω	ι	α
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Egyszerü számolással belátható, hogy az E feltétel teljesül, de

$$(a \circ b) \circ (c \circ a) = b$$

és

$$(a \circ c) \circ (b \circ a) = c \,,$$

igy az M feltétel nem.

Azt mondjuk, hogy algebrák egy primitiv osztályán az előbb emlitett M, H, E és C feltételek teljesülnek, ha azok a primitiv osztály minden egyes algebráján teljesülnek.

2.1.2 Tétel: Ω -algebrák tetszőleges $\mathfrak{A}$ primitiv osztályán az M, H, E és C feltételek ekvivalensek.

Bizonyitás: Az előző lemma alapján elegendő azt igazolni, hogy ha az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály kielégiti az E feltételt, akkor az M-et is. A bizonyitás menete megegyezik azzal, melyet T. Evans [13] követett grupoidok esetén.

Jelölje F az $\mathfrak{A}$ primitiv osztálynak az $X=\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ halmaz által generált szabad algebráját. Az 1.3 tétel alapján elég azt bizonyitani, hogy az M feltétel tetszőleges X fölötti $m\times n$ tipusu mátrixra teljesül. Legyenek $\mu, \nu (\in \Omega)$ az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály tetszőleges m-, ill. n-változós müveletei, és $(x_{ij})_{n\times m}$ tetszőleges mátrix X fölött. Tekintsük a következő ε_k $(k=1,\dots,m)$ leképezéseket az X halmazon:

$$x_{j1}\varepsilon_k = x_{jk}$$

minden $1 \leq j \leq n$ -re. Ezen leképezések az 1.2 tétel alapján kiterjeszthetők az F szabad algebra endomorfizmusaivá. Mivel tetszőleges $1 \leq j \leq n$ esetén

$$x_{j1}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \mu) = (x_{j1}\varepsilon_1)\dots(x_{j1}\varepsilon_m)\mu =$$
$$= x_{j1}\dots x_{jm}\mu$$

kapjuk, hogy

$$(x_{11}\dots x_{1m}\mu)\dots(x_{n1}\dots x_{nm}\mu)\nu =$$

$$=((x_{11}\varepsilon_1)\dots(x_{11}\varepsilon_m)\mu)\dots((x_{n1}\varepsilon_1)\dots(x_{n1}\varepsilon_m)\mu)\nu =$$

$$=(x_{11}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\mu))\dots(x_{n1}(\varepsilon_1\dots\varepsilon_m\mu))\nu =$$

$$= x_{11}\dots x_{n1}\nu(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\mu) =$$

$$=((x_{11}\varepsilon_1)\dots(x_{n1}\varepsilon_1)\nu)\dots((x_{11}\varepsilon_m)\dots(x_{n1}\varepsilon_m)\nu)\mu =$$

$$=(x_{11}\dots x_{n1}\nu)\dots(x_{1m}\dots x_{nm}\nu)\mu ,$$

azaz az M feltétel teljesül. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

2.2 Az elkövetkezőkben megvizsgáljuk, hogy a "klasszikus" algebrai strukturák közül melyek elégitik ki az emlitett feltételeket.

Egy grupoid akkor és csak akkor Abel-féle, ha bármely a, b, c, d elemeire $(ab)(cd)=(ac)(bd)$. Az ilyen grupoidot mediálisnak nevezzük. Ezekre vonatkozóan számos vizsgálat jelent meg, lásd. pl. [14] és [7].

Félcsoportok közül a kommutativak nyilvánvalóan eleget tesznek az M feltételen, de ezen feltételt a két elem által generált zéróelemes szabad félcsoport azon faktorfélcsoportja is kielégiti, amelyet bármely háromtényezős szorzat zéróval való egyenlősége definiál, s ezen félcsoport nem kommutativ. Ez mutatja, hogy az Abel-féle - tehát az $(xy)(uv)=(xu)(yv)$ azonosságnak eleget tevő - félcsoportok primitiv osztálya valódi részként tartalmazza a kommutativ félcsoportok primitiv osztályát.

Egységelemes félcsoportok közül pontosan a kommutativok elégitik ki az M feltételt, s ugyanez igaz csoportokra is. Ez indokolja az M (és H) feltételnek eleget tevő algebrákra az "Abel-féle" jelző használatát. (Általánosabban, tetszőleges egységelemes Abel-féle grupoid szükségképpen kommutativ félcsoport, amit az $(x\circ 1)\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ(1\circ z)$ és $(1\circ x)\circ(y\circ 1)=(1\circ y)\circ(x\circ 1)$ egyenlőségek bizonyitanak; lásd [15].)

Az Abel-féle gyürük zérógyürük, ugyanis a $(0+a)(b+0)=0b+a0$ egyenlőségből $ab=0$ következik. Ezért ferdetest vagy test nem lehet Abel-féle.

Az egyelemü háló Abel-féle, és csak ez Abel-féle. Ugyanis ha egy háló legalább kételemü, akkor tetszőleges a,b elemek esetén az M feltétel teljesülése azt jelenti, hogy

$$((a\vee b)\vee(a\wedge b))\wedge((a\wedge b)\vee(a\vee b)) =$$

$$=((a\vee b)\wedge(a\wedge b))\vee((a\wedge b)\wedge(a\vee b)),$$

azaz $a\vee b=a\wedge b$, amiből $a=b$ következik.

2.3 A Servi-algebra fogalmának illusztrálására meghatározzuk tetszőleges p prímszámra azokat a p-rendü grupoidokat, amelyek Servi-algebrák a p-rendü ciklikus csoport felett. Jelölje az utóbbit C_p. Feladatunk ekvivalens C_p^2

összes C_p -be való homomorfizmusainak meghatározásával; ha ugyanis φ ilyen homomorfizmus, akkor az

$$a \circ b = (a,b)\varphi \qquad (a,b \in C_p)$$

utján definiált müvelet Servi-grupoidot határoz meg C_p felett. Valóban, ekkor

$$(a \circ b)(c \circ d) = (a,b)\varphi \cdot (c,d)\varphi = ((a,b)\cdot(c,d))\varphi =$$
$$= (ac, bd)\varphi = ac \circ bd$$

minden $a,b,c,d \in C_p$ -re. Másrészt pedig, ha a C_p -n értelmezett „$\circ$" müvelet Servi-grupoidot definiál C_p felett, akkor a $\varphi : (a,b) \to a \circ b$ leképezés C_p^2 -nek C_p -be való homomorfizmusa; ugyanis

$$((a,b)\cdot(c,d))\varphi = (ac, bd)\varphi = ac \circ bd =$$
$$= (a \circ b)(c \circ d) = (a,b)\varphi \cdot (c,d)\varphi .$$

C_p^2 -nek C_p -be való tetszőleges φ homomorfizmusa felirható $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ alakban, ahol φ_1 C_p^2 -nek egy C_p -vel izomorf C_p^2/N faktorcsoportjára való kanonikus homomorfizmusa, φ_2 C_p^2/N -nek C_p -re való (rögzitett) izomorfizmusa, φ_3 pedig C_p -nek automorfizmusa. Különböző N és φ_3 -khoz különböző φ homomorfizmusok tartoznak. C_p^2 nemtriviális normálosztóinak (ezekhez tartozik C_p-vel izomorf faktorcsoport) száma $p+1$, mig C_p automorfizmusainak száma $p-1$. Igy a tekintett homomorfizmusok száma p^2-1 . Egyetlen további (C_p-be való) homomorfizmus létezik, amely C_p^2 minden elemét C_p egységelemébe viszi át. A C_p^2 csoport C_p -be való összes homomorfizmusok száma tehát p^2 . Ilyen homomorfizmusok a

$$\varphi_{\alpha,\beta} : (a,b) \to a\alpha \cdot b\beta \qquad (a,b \in C_p)$$

leképezések, ahol α, β C_p-nek tetszőleges endomorfizmusai. Valóban, bármely $a,b,c,d \in C_p$-re

$$\begin{aligned}((a,b)(c,d)\varphi_{\alpha,\beta} &= (ac, bd)\varphi_{\alpha,\beta} = \\ &= (ac)\alpha \cdot (bd)\beta = \\ &= a\alpha \cdot c\alpha \cdot b\beta \cdot d\beta = \\ &= a\alpha \cdot b\beta \cdot c\alpha \cdot d\beta = \\ &= (a,b)\varphi_{\alpha,\beta} \cdot (c,d)\varphi_{\alpha,\beta} .\end{aligned}$$

Mivel a p -rendü ciklikus csoportnak p számu endomorfizmusa van, azért a $\varphi_{\alpha,\beta}$ homomorfizmusok száma p^2, s igy az összes keresett homomorfizmust szolgáltatják. Homomorfizmusok helyett mostmár müveletekről beszélve nyertük a következőt:

__2.3.1 Tétel:__ A C_p csoport feletti összes Servi-grupoidok az $a \circ b = a\alpha \cdot b\beta$ $(a,b \in C_p)$ müveletek által vannak megadva, ahol α, β C_p -nek endomorfizmusai.

Megjegyezzük, hogy amikor α és β automorfizmusok, akkor C_p főizotópjaihoz (tehát kvázicsoportokhoz) jutunk (ha $(A; \cdot)$ és $(A; \circ)$ egyetlen kétváltozós müvelettel rendelkező algebrák, akkor A -nak önmagába való (φ, ψ) leképezés-párját főizotóp leképezésnek nevezzük, ha φ és ψ 1-1 értelmü leképezések, továbbá tetszőleges $a,b \in A$ esetén $a\varphi \circ b\psi = a \cdot b$). Ha α az egységelemre való ω leképezés, akkor konstrukciónk a C_p halmazán értelmezett jobbzéró félcsoportot, s annak fő-izotópjait szolgáltatja. Analóg állítás fogalmazható meg a $\beta=\omega$ esetre. Végül, ha $\alpha=\beta=\omega$, akkor a C_p halmazán értelmezett konstans félcsoportot kapjuk, melyben bármely szorzat C_p egységelemével egyenlő.

Mostmár könnyen kiválaszthatjuk a C_p feletti félcsoportokat is. Ha valamely $a\circ b = a\alpha\cdot b\beta$ müvelet asszociativ, akkor minden $a,b,c\in C_p$-re teljesül, hogy

$$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$$

részletesebben

$$a\alpha^2\cdot b\beta\alpha\cdot c\beta = a\alpha\cdot b\alpha\beta^2\cdot c\beta^2.$$

Innen $a=b=1$, ill. $b=c=1$ helyettesitéssel nyerjük: $\alpha^2=\alpha$, $\beta^2=\beta$. Ebből $\alpha,\beta=\omega$ vagy ι. Ha $\alpha=\beta=\iota$, magát C_p-t kapjuk, mig a további három eset a C_p feletti jobbzéró-, balzéró-, ill. konstans félcsoportot adja. Innen az is látszik, hogy C_p felett egyetlen csoport önmaga.

2.4. Legyen A Ω-algebra, és vezessük be rajta egy szorzásnak jelölt asszociativ müveletet, melyre teljesül, hogy $a_1\dots a_m\mu\cdot a=(a_1a)\dots(a_ma)\mu$ és $a(a_1\dots a_m\mu)=(aa_1)\dots(aa_m)\mu$ tetszőleges $a,a_1,\dots,a_m\in A$ és $\mu\in\Omega(m)$ esetén. Az $(A;\langle\Omega,\cdot\rangle)$ algebrát Ω-gyürünek nevezzük. Ezen Ω-gyürü egységelemes, ha van a szorzásra nézve egységeleme (ezt az elemet 1-gyel jelöljük). A közönséges gyürü az Ω-gyürünek speciális esete, amikor $(A;\Omega)$ Abel-csoport. Megjegyezzük, hogy ekkor az $(A;\Omega)$ algebra - ti. az az algebra, melyre az Ω -gyürü "épül" - Abel-féle algebra.

2.4.1 Tétel: Legyen $(A;\langle\Omega,\cdot\rangle)$ egységelemes Ω -gyürü, ahol $(A;\Omega)$ Abel-féle algebra. Akkor $(A;\langle\Omega,\cdot\rangle)$ beágyazható $(A;\Omega)$ endomorfizmusainak Ω -gyürüjébe, ahol a szorzás a közönséges leképezés-szorzást jelenti.

A bizonyitás előtt megjegyezzük, hogy a 2.1.2 tétel szerint $(A;\Omega)$ endomorfizmusai Ω -algebrát alkotnak. Vegyük észre továbbá, hogy abban az esetben, amikor $(A;\Omega)$ Abel-csoport, tételünk az egységelemes gyürük ismert reprezentációtételébe megy át.

Bizonyitás: Egyszerü számolással belátható, hogy a $\rho_r : x \to xr$ $(r\in A)$ minden $x\in A$ -ra leképezések az A Ω -algebrának endomorfizmusai. Valóban, legyenek $\mu\in\Omega(m)$ és $a_1,\dots,a_m\in A$ tetszőlegesek, ekkor

$$\begin{aligned} a_1\dots a_m\mu\rho_r &= a_1\dots a_m\mu\cdot r = \\ &= (a_1\cdot r)\dots(a_m\cdot r)\mu = \\ &= (a_1\rho_r)\dots(a_m\rho_r)\mu\ . \end{aligned}$$

Jelölje ezen leképezések halmazát $R(=\langle\rho_r\,|\,r\in A\rangle)$. Bebizonyitjuk, hogy $(R;\langle\Omega,\cdot\rangle)$ Ω -gyürü, mely rész-Ω-gyürüje az $(A;\Omega)$-algebra összes endomorfizmusai Ω -gyürüjének. Ehhez azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $\varrho_{r_1},\dots,\varrho_{r_n} (\in R)$ elemekhez és $\nu\in\Omega(n)$ müvelethez létezik A -nak olyan eleme, hogy egy A -beli elemre a $\varrho_{r_1}\dots\varrho_{r_n}\nu$ endomorfizmust alkalmazva annak hatása megegyezik ezen elemmel való jobbszorzással, valamint $\varrho_{r_1}\cdot\varrho_{r_2}$ -höz is létezik A -nak az előbbi feltételeknek elget tevő eleme. Legyen $a(\in A)$ tetszőleges elem. Ekkor

$$a(\varrho_{r_1}\dots\varrho_{r_n}\nu)=(a\varrho_{r_1})\dots(a\varrho_{r_n})\nu=$$

$$=(ar_1)\dots(ar_n)\nu=a\cdot(r_1\dots r_n\nu) \text{ és}$$

$$a(\varrho_{r_1}\cdot\varrho_{r_2})=(a\varrho_{r_1})\varrho_{r_2}=(ar_1)r_2=a(r_1r_2),$$

azaz a keresett A -beli elemek $r_1\dots r_n\nu$ és $r_1\cdot r_2$. Ezzel igazoltuk, hogy $(R;\langle\Omega,\cdot\rangle)$ egységelemes Ω -gyürü, mely rész-Ω -gyürüje az $(A;\Omega)$ algebra összes endomorfizmusai Ω -gyürüjének. Annak igazolása van már csak hátra, hogy $(A;\langle\Omega,\cdot\rangle)\cong(R;\langle\Omega,\cdot\rangle)$. Tekintsük az $a\to\varrho_a$ megfeleltetést, mely az előbbiek alapján nyilvánvalóan homomorfizmus, és tegyük fel, hogy $x\varrho_a=x\varrho_b$ minden $x\in A$ -ra. Ekkor speciálisan $1\varrho_a=1\varrho_b$, amiből $a=b$ következik, azaz a megfeleltetés 1-1 értelmü, s ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

2.5 Malcev klasszikus tétele [8] szerint egy primitiv osztályban az $xyy\mu=yyx\mu=x$ azonosságnak eleget tevő háromváltozós μ polinomiális müvelet létezése ekvivalens a kongruenciák felcserélhetőségével a tekintett primitiv osztály minden algebráján. Ez indokolja olyan algebrák vizsgálatát, melyeken egyetlen - az előbbi azonosságnak eleget tevő - háromváltozós müvelet van értelmezve. Az ilyen algebrát az elkövetkezőkben Malcev-algebrának fogjuk nevezni.

Be fogunk bizonyitani egy tételt, mely az Abel-féle Malcev-algebrák teljes leirását adja. Ehhez legfontosabb segédeszközünk a következő lemma lesz.

2.5.1 Lemma: Abel-féle $(A;\langle\mu\rangle)$ Malcev algebrákon teljesülnek az alábbi azonosságok:

(1): $xyz\mu uv\mu = xy(zuv\mu)\mu$

(2) $xyz\mu = zyx\mu$

Bizonyitás: Legyenek $a,b,c,d,e (\in A)$ tetszőleges elemek. Az azonosságok teljesülése az

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & d \\ b & b & e \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} b & b & a \\ b & b & b \\ c & b & b \end{pmatrix}$$

mátrixok segitségével az M feltétel felhasználásával egyszerü számolás utján látható be.

2.5.2 Tétel: Legyen $(A;\langle\mu\rangle)$ $(a(\mu)=3)$ tetszőleges algebra. Ezen algebra akkor és csak akkor Abel-féle Malcev-algebra, ha létezik olyan $(A;\langle\cdot,^{-1}\rangle)$ Abel-csoport, hogy bármely $a,b,c \in A$ -ra

$$abc\mu = a\cdot b^{-1}\cdot c \quad .$$

Megjegyezzük, hogy a tétel "csak akkor" része másszóval azt jelenti, hogy az Abel-féle Malcev-algebrák alkalmas Abel-csoportok reduktjai, melyek ugy keletkeznek, hogy az Abel-csoport müveletei közül csak az $xy^{-1}z$ (polinomiális) müveletet tartjuk meg. A következő bizonyitás a csoportok és absztrakt mellékosztályok (l. Bruck [5]) közti kapcsolat igazolásának gondolatmenetét követi.

<u>Bizonyitás</u>: Legyen $o \in A$ tetszőleges, de rögzitett elem. Vezessük be A -n a következő kétváltozós müveletet: $x \cdot y = xoy\mu$. Megmutatjuk, hogy amennyiben $(A;\langle\mu\rangle)$ Abel-féle Malcev-algebra, a "." müvelet asszociativ, kommutativ és invertálható. Valóban

(i) "." asszociativ, ugyanis bármely $a,b,c \in A$ esetén (1) alapján kapjuk, hogy

$$(a \cdot b) \cdot c = aob\mu oc\mu = ao(boc\mu)\mu = a \cdot (b \cdot c).$$

(ii) "." kommutativitása azonnal adódik a (2) azonosságból;

(iii) "." invertálható, ugyanis az $a \cdot x = b$ egyenletnek az $oab\mu$ elem megoldása.

Az is látható, hogy a rögzitett o elem egységelemként viselkedik. Mivel az $a \cdot x = o$ egyenlet megoldása $oao\mu$, bevezetjük az $oao\mu = a^{-1}$ jelölést. Ezzel igazoltuk, hogy $(A;\langle \cdot\, , ^{-1}\rangle)$ Abel-csoport, továbbá (1) alapján

$$a \cdot b^{-1} \cdot c = ao(obo\mu)\mu oc\mu = aoo\mu bo\mu oc\mu =$$

$$= abo\mu oc\mu = ab(ooc\mu)\mu =$$

$$= abc\mu .$$

Forditva, legyen $(A;\langle\cdot,^{-1}\rangle)$ Abel-csoport és tekintsük az $xyz\mu = x\cdot y^{-1}\cdot z$ polinomiális müveletet. Ekkor

$$xxy\mu = x\cdot x^{-1}\cdot y = y \qquad \text{és}$$

$$yxx\mu = y\cdot x^{-1}\cdot x = y \quad ,$$

azaz $(A;\langle\mu\rangle)$ Malcev-algebra. Végezetül legyen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

tetszőleges mátrix A fölött. Segitségével megmutatjuk, hogy $(A;\langle\mu\rangle)$ -re teljesül az M feltétel. Valóban,

$$(x_1x_2x_3\mu)(y_1y_2y_3\mu)(z_1z_2z_3\mu)\mu =$$

$$=(x_1\cdot x_2^{-1}\cdot x_3)(y_1\cdot y_2^{-1}\cdot y_3)^{-1}(z_1\cdot z_2^{-1}\cdot z_3) =$$

$$=(x_1\cdot y_1^{-1}\cdot z_1)(x_2\cdot y_2^{-1}\cdot z_2)^{-1}(x_3\cdot y_3^{-1}\cdot z_3) =$$

$$=(x_1y_1z_1\mu)(x_2y_2z_2\mu)(x_3y_3z_3\mu)\mu \quad ,$$

s ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

3. Hamilton-féle primitiv osztályokról

3.1 A Hamilton-féle kvaternió alapegységek generálta (multiplikativ) csoport a klasszikus példa - az Abel-csoportok mellett - olyan csoportra, melynek minden részcsoportja normális, azaz más terminológiával: minden részcsoport egy alkalmas kongruenciának osztálya. E tulajdonság utóbbi megfogalmazása természetes módon átvihető tetszőleges Ω-algebrára is. Ez indokolja a "Hamilton-féle" jelző használatát a következő definicióban:

Definició: Egy A Ω-algebrát Hamilton-algebrának (Hamilton-féle algebra) nevezzük, ha minden részalgebrája egy alkalmas kongruencia osztálya. Ω-algebrák egy primitiv osztályát Hamilton-féle primitiv osztálynak nevezzük, ha minden algebrája Hamilton-algebra.

Megjegyezzük, hogy a Hamilton-féle grupoid fogalmát már T. Evans [13] bevezette, s bebizonyitotta a következő tételt: loopok egy $\mathcal{L}$ primitiv osztálya akkor és csak akkor Hamilton-féle, ha $\mathcal{L}$ Abel-csoportok primitiv osztálya. Vizsgálataink függetlenek Evans meggondolásaitól; tételére uj bizonyitást is adunk.

A Hamilton-féle primitiv osztályokat jellemzi a következő

3.1.1 Tétel: Ω-algebrák egy $\mathfrak{A}$ primitiv osztálya akkor és csak akkor Hamilton-féle, ha tetszőleges n-változós g polinomhoz létezik olyan k_g 3-változós polinom, melyekre teljesül a

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n) = k_g(x_0, g(x_0,x_2,\dots,x_n), x_1)$$

azonosság.

Bizonyitás: Legyen az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály Hamilton-féle és tekintsük ezen osztály $(n+1)$ elem által generált $F(x_0,x_1,\dots,x_n)$ szabad algebráját. Legyen g n-változós polinom. Ekkor az $y \to g(y,x_2,\dots,x_n)$ hozzárendelés $F(x_0,x_1,\dots,x_n)$ egy τ transzlációját határozza meg. Tekintsük ezen szabad-algebra $\langle x_0, g(x_0,x_2,\dots,x_n), x_1\rangle$ által generált Ω -részalgebráját. A τ transzláció x_0 -t nem "viszi ki" a részalgebrából, ezért az 1.1 tétel szerint x_1 -et sem viheti ki. Igy létezik olyan k_g 3-változós polinom, hogy érvényes az

$$x_1\tau = g(x_1,x_2,\dots,x_n) = k_g(x_0, g(x_0,x_2,\dots,x_n), x_1)$$

egyenlőség. Mivel $F(x_0,x_1,\dots,x_n)$ szabad algebra, az 1.2 tétel szerint ezen egyenlőség azonosság az $\mathfrak{A}$ primitiv osztályon.

Ezek után tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály bármely g n-változós polinomjához van olyan 3-változós k_g polinom, melyre érvényes a

$$g(x_1,x_2,\dots;x_n) = k_g(x_0, g(x_0,x_2,\dots,x_n), x_1)$$

azonosság. Legyen $G\in\mathfrak{A}$ tetszőleges algebra, A részalgebra G -ben. Tekintsük G -nek egy olyan τ transzlációját, amely A -nak egy a elemét ugyanezen részalgebra valamely elemébe viszi át. Ezen τ transzláció megadható egy $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ polinom segitségével, $a\tau = g(a,d_2,\dots,d_n)$, ahol $d_2,\dots,d_n\in G$. Ezen polinomhoz is létezik a feltételünkben megadott k_g 3-változós polinom. Ekkor tetszőleges $b\in A$ esetén a

$$b\tau = g(b,d_2,\dots,d_n) = k_g(a,g(a,d_2,\dots,d_n),b)$$

egyenlőség fennáll. Igy a τ transzláció a b elemet A -nak az $\langle a,g(a,d_2,\dots,d_n),b\rangle$ halmaz által generált Ω -részalgebrájába viszi át, és igy az is teljesül, hogy $b\tau \in A$. Az 1.1 tételből - a τ transzláció és a b elem tetszőleges volta miatt következik-, hogy van G -nek olyan kongruenciája, melynek A osztálya. Az A részalgebra és a G algebra tetszőleges volta miatt kaptuk, hogy az $\mathfrak{A}$ primitiv osztály Hamilton-féle, s ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

3.2 Az elkövetkezőkben a Hamilton-algebrák néhány tulajdonságára mutatunk rá, valamint arra a tényre, hogy az algebrák Hamilton-féle tulajdonsága lokális.

<u>3.2.1 Tétel:</u> Egy A Ω -algebrára a következő két feltétel ekvivalens:

(i) A Hamilton-algebra

(ii) A bármely három elem által generált Ω -részalgebrája A egy alkalmas kongruenciájának osztálya.

<u>Bizonyitás:</u> Mivel (i) $\Longrightarrow$ (ii) triviális, elegendő az (ii) $\Longrightarrow$ (i) következést igazolni. Tegyük fel, hogy az A algebra minden három elem által generált részalgebrája egy-egy alkalmas kongruencia osztálya, de van olyan $A_1 (\subseteq A)$ részalgebra, mely nem osztálya A egyetlen kongruenciájának sem. Ekkor az 1.1 tétel szerint léteznek olyan a_1, a_2, a_3 $(\in A_1)$ elemek és olyan τ transzlációja A -nak, hogy $a_1\tau = a_2$ és $a_3\tau \notin A_1$.

Ekkor A -nak az $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ halmaz által generált Ω -részalgebrája nem osztálya egyetlen kongruenciának sem, ami ellentmondás.

<u>3.2.2 Tétel:</u> A Hamilton-tulajdonság lokális.

<u>Bizonyitás:</u> Megmutatjuk, hogy amennyiben egy A Ω -algebra nem Hamilton-algebra, akkor van olyan végesen generált részalgebrája, mely nem Hamilton-féle.

Legyen A tetszőleges Ω -algebra, A_1 olyan részalgebrája A -nak, mely nem osztálya A egyetlen kongruenciájának sem. Ekkor az 1.1 tétel szerint van A -nak olyan τ transzlációja ($a\tau = g(a, a_2, \dots, a_n)$ minden $a \in A$ -ra) és léteznek A_1 -nek olyan b, c, d elemei, hogy

$$(*) \qquad b\tau = c \qquad \text{és} \qquad d\tau \notin A_1 .$$

Tekintsük A -nak a $\langle b, c, d, a_2, \dots, a_n\rangle$ halmaz által (tehát végesen) generált A_2 Ω-részalgebráját. Az $A_1 \cap A_2$ algebra olyan részalgebrája A_2 -nek, mely - figyelembe véve, hogy τ A_2-nek is transzlációja - (*) szerint nem osztálya A egyetlen kongruenciájának sem; amit bizonyitani akartunk.

<u>3.2.3 Tétel:</u> Hamilton-algebra részalgebrája és homomorf képe is Hamilton-algebra.

<u>Bizonyitás:</u> Az állitás első része következik a részalgebra--fogalom tranzitivitásából.

Legyen A Hamilton-algebra, φ A -nak A' -re való homomorfizmusa, továbbá A'_1 részalgebra A' -ben. Tekintsük A'_1

tetszőleges b', c', d' elemeit és A' egy τ' transzlációját – melyet az $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ polinom határoz meg – és legyen $b'\tau' = c'$, azaz $f(b', a'_1, \ldots, a'_n) = c'$ ahol $a'_1, \ldots, a'_n \in A'$ rögzitett elemek. Az 1.1. tétel alapján elegendő azt belátnunk, hogy $d'\tau' \in A'$. Léteznek A-nak olyan b, c, d illetve $a_1, \ldots, a_n$ elemei, hogy $b\varphi = b'$, $c\varphi = c'$, $d\varphi = d'$ és $a_i\varphi = a'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Jelölje A'_1 φ melletti teljes inverzképét A_1. Ekkor $b, c, d \in A_1$. Tekintsük A-nak az $a\tau = f(a, a_1, \ldots, a_n)$ ($a \in A$ tetszőleges) egyenlőség által meghatározott transzlációját. Ekkor $(b\tau)\varphi = f(b\varphi, a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi) = f(b', a'_1, \ldots, a'_n) = c' \in A'$ ahonnan $b\tau \in A_1$. Mivel A Hamilton-féle és A_1 részalgebrája, innen folyik $d\tau = f(d, a_1, \ldots, a_n) \in A_1$. Igy $d'\tau' = f(d', a'_1, \ldots, a'_n) = f(d, a_1, \ldots, a_n)\varphi$, azaz $d'\tau' \in A'_1$, amiből következik az A' algebra Hamilton-algebra volta.

Megvizsgáljuk, hogy egy hasonlósági osztály összes Hamilton-algebrája primitiv osztályt alkot-e. Az előző (3.2.3) tétel és Birkhoff-tétele (1.4) szerint ez akkor és csak akkor igaz, ha hasonló Hamilton-algebrák direkt szorzata is Hamilton-algebra. A válasz negativ. Jelölje Q a kvaternió alapegységek által generált multiplikativ csoportot, mely Hamilton-féle. Megmutatjuk, hogy $Q \times Q$ nem Hamilton-algebra. Tekintsük $Q \times Q$ következő, D-vel jelölt részcsoportját: $D = \langle (a,a) \mid a \in Q \rangle$. Legyen $a (\in Q)$ olyan elem, mely nincs benne Q centrumában. Ekkor létezik olyan $b (\in Q)$ elem, hogy $ab \neq ba$ és igy $b^{-1}ab \neq a$. Ekkor $(1,b)^{-1}(a,a)(1,b) = (a, b^{-1}ab) \notin D$, azaz D nem normális részcsoport, mert van olyan belső automorfizmus, mellyel szemben nem invariáns.

3.3 Az elkövetkezőkben megvizsgáljuk, hogy csoportok, gyürük és hálók primitiv osztályai közül melyek Hamilton-félék.

A csoportokra vonatkozó eredmény következik Evansnak e fejezet elején emlitett tételéből, mely a következőképp látható be: Legyen $\mathfrak{A}$ Hamilton-féle loopok egy primitiv osztálya. Ekkor $\mathfrak{A}$ -ban minden kongruenciának van egy olyan osztálya, amely részloop és minden részloop egyetlen kongruenciának osztálya, ezért $\mathfrak{A}$ ekvivalens egy R egységelemes gyürü fölötti összes unitér jobb -R- modulusok $\mathfrak{R}$ primitiv osztályával (l. Csákány B. [11] 4. tétel). $\mathfrak{R}$ bármely müvelete felirható egyváltozós müveletek összegeként (l. Csákány B. [9]), s igy érvényes az

(*) $$x \cdot y = x\alpha + y\beta$$

azonosság, ahol "$\cdot$" a loop-müvelet, $\alpha, \beta \in R$. Az ekvivalenciánál a loop egységelemének (e) nyilvánvalóan R zéróeleme felel meg. Ekkor (*)-ból $x = e$, illetve $y = e$ helyettesitéssel kapjuk, hogy $\alpha = \beta = 1$, azaz a loop-müvelet éppen az R -modulusbeli összeadás, s ezért asszociativ és kommutativ. Speciálisan nyerjük, hogy csoportok Hamilton-féle primitiv osztálya csak Abel-csoportokat tartalmaz.

Hasonló eljárással azt fogjuk kapni, hogy gyürük tetszőleges $\mathfrak{B}$ Hamilton-féle primitiv osztálya zérógyürük egy primitiv osztálya. $\mathfrak{B}$ is ekvivalens egy R egységelemes gyürü feletti összes unitér jobb -R- modulusok $\mathfrak{R}$ primitiv osztályával, igy érvényesek az

$$x+y=x\alpha+y\beta \quad , \quad x\cdot y=x\gamma+y\delta$$

azonosságok, ahol $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$. Mint az előző gondolatmenetben adódik, hogy $\alpha=\beta=1$. A kétoldali disztributivitást felhasználva kapjuk, hogy

$$(x+y)z=(x+y)\gamma+z\delta=x\gamma+y\gamma+z\delta$$

$$xz+yz=x\gamma+z\delta+y\gamma+z\delta=x\gamma+y\gamma+z(2\delta)$$

ahonnan $\delta=0$, és

$$z(x+y)=z\gamma \ , \ zx+zy=z\gamma+z\gamma=z(2\gamma)$$

s igy $\gamma=0$.

Közvetlenül belátható, hogy ha egy háló tartalmaz három elemü láncot, akkor az nem Hamilton-féle. Igy hálók Hamilton-féle primitiv osztályai nem tartalmazhatnak három elemü láncot tartalmazó hálót. Mivel egy kételemü lánc direkt négyzete tartalmaz három elemü láncot, hálók Hamilton-féle primitiv osztályai az egyelemü hálóból állnak csak.

3.4 Végezetül a Hamilton-féle primitiv osztályok egy további sajátosságára mutatunk rá. Megmutatjuk, hogy Hamilton--féle primitiv osztályban az epimorfizmusok ráképezések. Legyenek A és B Hamilton-algebrák, $\varepsilon: A\to B$ epimorfizmus, és tegyük fel, hogy ε nem ráképezés. Ekkor létezik B-nek olyan C valódi részalgebrája, hogy $A\varepsilon=C$. Mivel B Hamilton-algebra, van olyan θ_C kongruenciája, melynek C osztálya. Jelölje ezután α_1 és α_2 B-nek B/θ_C -be való homomorfizmusait, mégpedig α_1 legyen a természetes homomorfizmus (minden $b \in B$ -nek az őt tartalmazó θ_C osztály felel meg), α_2 pedig B minden elemének feleltesse meg B/θ_C -nek C elemét. Ekkor nyilvánvalóan teljesül, hogy $\varepsilon\alpha_1 = \varepsilon\alpha_2$, de $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ami ellentmond ε epimorf voltának, s ezzel állitásunkat igazoltuk.

4. Az Abel- és Hamilton-féle tulajdonság kapcsolata

Mivel csoportok, gyürük és hálók primitiv osztályai közül ugyanazok rendelkeznek mindkét tulajdonsággal, felvetődik az a kérdés, hogy ez általában is igy van-e. A válasz tagadó: ellenpéldákat a félgyürük fölötti félmodulusok primitiv osztályai körében fogunk találni.

Az $(R;\langle 0,+,\cdot\rangle)$ algebrát, ahol 0 nulla-, "+" és "•" kétváltozós müveletek (asszociativ) félgyürünek nevezzük, ha teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$x+y=y+x \qquad (x+y)+z=x+(y+z)$$

$$(x+y)z=xz+yz \qquad z(x+y)=zx+zy$$

$$(xy)z=x(yz) \qquad x+0=x \qquad x0=0x=0$$

Egy A additiv félcsoportot, melynek 0 zéróeleme és benne léteznek $a\rho$ alaku elemek - ahol $a\in A$ és ρ egy egységelemes R félgyürü eleme - és érvényesek a következő azonosságok $(a,b\in A\,;\rho_1,\rho_2\in R)$

$$a(\rho_1+\rho_2)=a\rho_1+a\rho_2 \qquad (a+b)\rho_1=a\rho_1+b\rho_1$$

$$a(\rho_1\rho_2)=(a\rho_1)\rho_2 \qquad a0=0 \qquad a1=a \qquad 0\rho_1=0$$

unitér jobb-R- félmodulusnak nevezünk.

Létezik egységelemes félgyürü fölötti unitér jobb-R--félmodulusoknak olyan Abel-féle primitiv osztálya, mely nem

Hamilton-féle és megforditva. Érvényes ugyanis a következő két tétel:

<u>4.1 Tétel:</u> Legyen R egységelemes félgyürü. Az összes unitér jobb-R- félmodulusok $\mathcal{R}$ primitiv osztálya akkor és csak akkor Hamilton-féle, ha R gyürü.

<u>Bizonyitás:</u> Legyen $F \in \mathcal{R}$ szabad algebra az $x_0, x_1, \dots, x_n$ szabad generátorokkal. $\mathcal{R}$ tetszőleges $g(x_1, \dots, x_n)$ polinomja felirható egyváltozós müveletek összegeként [9] : $g(x_1, \dots, x_n) = x_1\gamma_1 + \dots + x_n\gamma_n$, ahol $\gamma_i \in R$ $(i=1, \dots, n)$. Mivel $\mathcal{R}$ Hamilton-féle, van olyan $k_g(x,y,z)$ polinom - $k_g(x,y,z) = x\kappa_1 + y\kappa_2 + z\kappa_3$ - hogy $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_g(x_0, g(x_0, x_2, \dots, x_n), x_1)$. Ebből kapjuk, hogy F -ben érvényes az

$$x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + \dots + x_n\gamma_n = x_0\kappa_1 + (x_0\gamma_1 + x_2\gamma_2 + \dots + x_n\gamma_n)\kappa_2 + x_1\kappa_3$$

egyenlőség. Mivel ez azonosság $\mathcal{R}$ -ben,

$$(*) \qquad \begin{cases} \kappa_1 + \gamma_1\kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = \gamma_1 \\ \gamma_i\kappa_2 = \gamma_i \qquad (i=2, \dots, n) \end{cases}$$

A fenti azonosságoknak tetszőleges g polinom esetén alkalmas κ_j $(j=1,2,3)$ R -beli elemekkel teljesülni kell, ezért választhatjuk speciálisan az összes γ_i -t 1 -nek. Ekkor azonban $(*)$-ból adódik, hogy $\kappa_2 = \kappa_3 = 1$ és $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$. Ebből következik, hogy $\kappa_1 = -1$, azaz R gyürü.

A forditott állitáshoz azt kell csak belátni, hogy a (*) egyenletrendszer tetszőleges γ_i-k esetén megoldható κ_j -kre, ha R gyürü. Ez igy van, hiszen $\kappa_1 = -\gamma_1$, $\kappa_2 = 1$ és $\kappa_3 = \gamma_1$ megoldás.

4.2. Tétel: Egy R egységelemes félgyürü fölötti összes unitér jobb - R -félmodulusok $\mathcal{R}$ primitiv osztálya akkor és csak akkor Abel-féle, ha R kommutativ félgyürü.

Bizonyitás: Legyen az $\mathcal{R}$ primitiv osztály Abel-féle. Tekintsük a következő "$\circ$" $\mathcal{R}$ -beli müveletet, ahol $\alpha, \beta \in R$:

$$x_1 \circ x_2 = x_1\alpha + x_2\beta$$

Az R- félgyürü összeadásával és az elemeivel történő jobboldali szorzásokkal maga is unitér jobb- R -félmodulus. Az M feltételt a "$\circ$" müvelettel az R feletti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixra alkalmazva kapjuk, hogy $\alpha\beta = \beta\alpha$. Mivel ilyen "$\circ$" müvelet tetszőleges R -beli α és β -ra megadható $\mathcal{R}$-ben, kapjuk, hogy az R -beli szorzás kommutativ.

Megforditva, legyen R kommutativ, egységelemes félgyürü. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}$ Abel-féle. Tekintsük a tetszőleges μ, ν m- ill. n-változós $\mathcal{R}$-beli müveleteket és egy $A \in \mathcal{R}$ algebra fölötti (a_{ij}) $m \times n$ tipusu mátrixot. Mivel minden $\mathcal{R}$ -beli müvelet egyváltozós müveletek összegére bomlik, léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ $(\in R)$ elemek, hogy

$$x_1 \ldots x_m \mu = x_1\alpha_1 + \ldots + x_m\alpha_m$$

$$x_1 \ldots x_n \nu = x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n$$

Ekkor

$$(a_{11} \ldots a_{1n}\nu) \ldots (a_{m1} \ldots a_{mn}\nu)\mu =$$

$$=(a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{1n}\beta_n)\alpha_1 + \ldots + (a_{m1}\beta_1 + \ldots + a_{mn}\beta_n)\alpha_m =$$

$$=(a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{m1}\alpha_m)\beta_1 + \ldots + (a_{1n}\alpha_1 + \ldots + a_{mn}\alpha_m)\beta_n =$$

$$=(a_{11} \ldots a_{m1}\mu) \ldots (a_{1n} \ldots a_{mn}\mu)\nu ,$$

azaz teljesül az M feltétel.

Irodalom

[1] P. M. COHN: Universal Algebra, Harper and Row; New York, Evanston, London, 1965.

[2] Б. И. ПЛОТКИН: Группы Автоморфизмов Алгебраических Систем, Наука, 1966.

[3] А. Г. КУРОШ: Лекции по Общей Алгебре, Физматгиз, 1962.

[4] ―――――――― : Общая Алгебра (лекции 1969-70 учебного года), МГУ Москва, 1970.

[5] R. H. BRUCK: A Survey of Binary Systems, Springer--Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[6] G. BIRKHOFF: Lattice Theory (3rd edition), Providence, AMS, 1968.

[7] В. Д. БЕЛОУСОВ: Основы Теории Квазигрупп и Луп, Наука, 1967.

[8] А. И. МАЛЬЦЕВ: К общей теории алгебраических систем, Мат. сб., 35. (77.) (1954), 3-20.

[9] Б. ЧАКАНЬ: Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, Acta Sci. Math. 23(1962), 46-57.

[10] ――――――――: Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, Acta Sci. Math. 24(1963), 157-164.

[11] ――――――――: Об абелевых свойствах примитивных классов универсалных алгебр, Acta Sci. Math. 25(1964), 202-208.

[12] M. SERVI: Question di algebra universala in una categoria astratta II., Annali della Universita di Ferrara, 15(1970), 57-92.

[13] T. EVANS: Properties of algebras almost, equivalent to identities, J. London Math. Soc., 35(1962), 53-59.

[14] S. Fajtlowicz - J. Mycielski: On affine algebras , Notices AMS 19(1972), A-686.

[15] O. Frink: Symmetric and self-distributive systems, Amer. Math. Monthly, 62 (1955), 697-707.

[16] L. Klukovits: On commutative universal algebras,Proc. of the Miniconference on Universal Algebras, Szeged (1971).