**Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**
Revue internationale de didactique des mathématiques

**21 | 2016**
**Varia**

# Les moments d'exposition des connaissances analyses et exemples

*Teaching Knowledge during Lectures in Mathematics Analyses and Examples*

**Stephanie Bridoux, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache et Aline Robert**

OpenEdition Journals

**Édition électronique**
URL : https://journals.openedition.org/adsc/813
DOI : 10.4000/adsc.813
ISSN : 2804-2514

**Éditeur**
IREM de Strasbourg

**Édition imprimée**
Date de publication : 13 octobre 2016
Pagination : (187-233)
ISSN : 0987-7576

**Référence électronique**
Stephanie Bridoux, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache et Aline Robert, « Les moments d'exposition des connaissances analyses et exemples », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* [En ligne], 21 | 2016, mis en ligne le 30 octobre 2022, consulté le 05 novembre 2022. URL : http://journals.openedition.org/adsc/813 ; DOI : https://doi.org/10.4000/adsc.813

**STEPHANIE BRIDOUX, NICOLAS GRENIER-BOLEY, CHRISTOPHE HACHE ET ALINE ROBERT**

# LES MOMENTS D'EXPOSITION DES CONNAISSANCES ANALYSES ET EXEMPLES

**Abstract. Teaching Knowledge during Lectures in Mathematics Analyses and Examples**
We investigate several issues tied to the moments when the teacher introduces in his classroom the general, formal mathematical knowledge (the "course"). These issues are especially explained with reference to a theoretical hypothesis stated in terms of "pseudo-concepts". Our didactical analyses take into account the contents of the course and its sequence of events. In particular we clarify several discursive "proximities" that may or may not appear during the sequence of events. Such proximities are particularly associated to explicit "closenesses" between students' work over contextualized activities and the underlying general non-contextualized statement. These analyses are first illustrated on examples extracted from a course about graphical representation of functions (14-16 years old students). Secondly, we compare three types of courses on sequences and functions' limits given to first-year university students: a textbook, a video and a lecture. The study reveals differences between diverse courses. It leads to clarify the issue about the specificity of the courses' input in the students' learning.

**Key words**: lecture, course, course contents, sequence of events, proximities.

**Résumé**
Nous étudions les moments où l'enseignant expose, en classe, les connaissances (savoirs) qui constituent « le cours ». Nous précisons le questionnement, notamment en référence à une hypothèse théorique en termes de pseudo-concepts. Nous développons nos analyses didactiques, à la fois sur les contenus des cours et sur leurs déroulements. En particulier nous précisons diverses proximités discursives, qui peuvent ou non être en jeu, pendant les déroulements. Elles sont notamment associées à des rapprochements explicites entre le travail des élèves sur des activités contextualisées, et l'énoncé précis concerné, non-contextualisé. Ces analyses sont illustrées d'abord par des exemples tirés d'un extrait de cours sur une introduction des représentations graphiques des fonctions au collège et sur la comparaison de diverses modalités de cours de première année de licence de mathématiques sur les limites de suites ou de fonctions : cours écrit, amphithéâtre, vidéo en ligne. L'étude révèle des différences entre divers cours et conduit à préciser le questionnement sur la spécificité de l'apport des cours dans les apprentissages des élèves.

**Mots-clés**. Exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités.

---

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 21, p. 187 - 233.

## Introduction

Beaucoup de recherches portent sur la conception et/ou l'observation des activités des élèves, plus ou moins autonomes, considérées comme une pièce maîtresse des apprentissages. Cependant ces derniers mettent en jeu plusieurs moments distincts, qui peuvent contribuer à donner du sens aux notions et à construire la disponibilité recherchée, dont participe l'organisation des connaissances : la résolution d'exercices et de problèmes s'accompagne de cours qui ont leur part dans l'acquisition des techniques, du formalisme mathématique et finalement des objets et outils visés par l'enseignement. Un des enjeux de nos recherches est de comprendre certaines articulations entre les activités de différentes natures des élèves, ce qu'elles « embarquent » les unes des autres, pour enrichir la réflexion sur l'enseignement, compte tenu des contraintes incontournables qui l'accompagnent. Activités, cours, lesquels, dans quel ordre, pour qui ?

Dans cet article nous interrogeons spécifiquement le(s) moment (s) des séances où l'enseignant (réel ou virtuel) (éventuellement avec une participation des élèves) expose des connaissances générales, en particulier ce qui sera à retenir, et à utiliser dans des exercices ultérieurs (voire évalué), en leur réservant le mot « cours » (qui ne désigne donc pas l'ensemble de la séance). On peut évoquer aussi, à la place de « connaissances générales », « le savoir » ou un « texte du savoir » pour qualifier ce que l'enseignant présente, associé à un produit culturel de l'activité scientifique, qui est à transformer en connaissances par les élèves, à retenir et à utiliser (cf. Margolinas, 2015, 14-15). Ces moments peuvent suivre une recherche spécifique des élèves, inclure des exercices, des exemples mais sont néanmoins dédiés à un exposé décontextualisé, même si le degré de généralité des énoncés adoptés varie, selon le niveau scolaire notamment. D'une certaine manière, les contenus des cours c'est ce qui ne peut pas être élaboré (dans son ensemble) par les élèves… D'ailleurs les enseignants débutants ne s'y trompent pas et ont souvent le sentiment que c'est au moment des cours qu'ils ont le plus de légitimité.

Présentons plusieurs raisons de ce choix des cours comme thème d'étude, ainsi que plusieurs difficultés qui se posent d'emblée.
Du côté des acteurs, les enseignants de mathématiques questionnent dès le collège (11-12 ans) l'utilité des moments « de cours ». L'évolution des modalités de ces cours, souhaitée ou constatée par l'institution (notamment en lien avec les « pédagogies inversées », ou plus largement l'usage de ressources en ligne) entretient cette mise en question. Des interviews (Bridoux et al, 2015) permettent de constater que certains enseignants sont plutôt attachés à ces moments spécifiques de l'enseignement où, tout au long de l'année scolaire, le professeur expose aux élèves les connaissances qu'ils sont censés « apprendre ». Toutefois ces enseignants témoignent d'un certain embarras à ce sujet. Ce qui nous intéresse, c'est la manière dont l'enseignant gère les activités des élèves pendant les cours, alors qu'il ne peut

plus faire jouer les leviers habituels utilisés dans les exercices, activités autonomes, aides...
Les formateurs sont aussi interpellés par les questions posées par les cours, ajoutant la question délicate de l'appropriation des textes à exposer par les débutants (Bridoux et al, 2015).
Le même type de questions se pose aussi en primaire, mais la formation des enseignants et les contenus enseignés différant de ceux du secondaire et ultérieurs, les problématiques ne sont pas les mêmes (voir par exemple Allard, 2015).

Du côté des recherches, la question que nous abordons ici n'est pas nouvelle. C'est celle des moyens d'analyser, d'apprécier ce que peut apporter l'*exposition des connaissances* dans les acquisitions des élèves, quel que soit le dispositif. Les notions d'*institutionnalisation* et de *décontextualisation*[1], utilisées en Théorie des situations didactiques (TSD), permettent déjà d'aborder le moment d'exposition des connaissances et leur place dans l'ensemble d'une séquence. Nous y reviendrons brièvement.

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité (TA) et utilisons la double approche ergonomique et didactique (DA) (Robert et Rogalski, 2002) pour analyser les pratiques. De manière générale, les activités des élèves, induites des tâches proposées et des traces observables en classe nous renseignent sur les apprentissages possibles et pilotent nos analyses. Ce sont les activités que pourraient développer les élèves pendant les cours, suite à ce que l'enseignant propose, qui nous intéressent ici, et nous amènent à étudier précisément les pratiques correspondantes. Or pendant les moments d'exposition des connaissances il y a peu d'observables sur les activités des élèves. De plus, il est quasiment impossible d'apprécier séparément l'apport des moments de cours et de ceux des résolutions d'exercices, tant les uns et les autres se complètent.

Cela nous a conduits à élaborer une hypothèse théorique sur le rôle des cours, qui fournit des indicateurs permettant d'apprécier, au moins partiellement, les déroulements de ces moments (en termes de rapprochements induits par le discours, ou proximités discursives), complétant l'analyse des contenus des cours, nécessaire à l'utilisation de ces indicateurs. Cela ne garantit rien sur les activités correspondantes des élèves mais délimite des possibles. Cela permet des comparaisons, entre divers cours, voire différents supports, et aussi entre des prévisions des chercheurs et des réalisations des enseignants. En revanche la question des effets des cours est encore hors de portée.

En première partie nous revenons sur les aspects théoriques que nous mettons en œuvre, en les situant par rapport à d'autres. En deuxième partie nous développons

[1] Nous ne distinguons pas la dépersonnalisation qui accompagne aussi l'exposé du cours après des activités des élèves en contexte, le passage au général associé à l'omission de l'action et ses acteurs.

nos indicateurs. En troisième partie, nous donnons des exemples d'analyses et de résultats partiels. D'abord (partie 3.1) on étudie un extrait de cours filmé en classe de troisième (élèves de 15 ans) sur l'introduction des représentations graphiques des fonctions. Pour le chercheur, il s'agit de repérer s'il y a ou non, à ses yeux, des occasions de proximités, en comparant ensuite à la manière dont l'enseignant s'y prend. Nous présentons ensuite en 3.2 des analyses de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions. Leur comparaison amène à illustrer tout ce qui peut être dans un « vrai » cours oral et pas dans les autres (manuel, cours à distance filmé), avec en même temps les questions que cela soulève, notamment sur le formalisme. Bilans et conclusion reprennent la portée et les limites de cette étude, et reviennent sur des perspectives.

# 1. Appuis théoriques

## 1.1. En amont de l'étude

Rappelons que la DA (inscrite dans la TA) amène à étudier les déroulements des séances, au même titre que les contenus mathématiques travaillés, pour apprécier les activités mathématiques des élèves, supposées déterminantes pour leurs apprentissages. Ces activités sont en grande partie provoquées par les choix correspondants des enseignants, et il s'agit de délimiter les activités possibles à partir de tout ce qui peut influer sur elles, tâches, nature du travail demandé, accompagnements et discours du professeur. Nous postulons en particulier que si l'autonomie des élèves[2] pendant les activités est une condition d'apprentissage (Piaget), la possibilité de travailler dans une ZPD des élèves, et donc la qualité des discours de l'enseignant, associée au caractère collectif de ce qui se joue, et à tous les échanges en sont une autre, tout aussi cruciale (Vygostki).

Pendant le travail sur les exercices (déroulements), les activités possibles des élèves sont appréciées à partir de la comparaison entre tâches attendues et constats de ce qui se passe, compte tenu des interventions des enseignants.

Mais les activités des élèves pendant les cours sont peu observables, nous l'avons dit. On peut voir si les élèves notent, voire acquiescent, certains participent – mais écoutent-ils ? Ont-ils vraiment compris ? Quelle est la portée de la question à laquelle ils répondent, vont-ils intégrer cette réponse au reste, quelle mémorisation est enclenchée ? Dans quelle mesure les élèves ont accès à autre chose qu'à la suite linéaire de ce qui est développé par l'enseignant ? C'est donc sur les discours des enseignants que nous nous centrons, en traquant notamment, tout ce qui peut rapprocher les élèves des connaissances visées – cela restera de l'ordre du potentiel, et non vérifié. Nous cherchons en particulier, à partir d'une analyse des contenus traités, à repérer les occasions que les enseignants donnent (ou non) à leurs élèves d'entendre, de voir, de prendre conscience de proximités entre des activités déjà

[2] En termes d'a-didacticité ou de travail en petits groupes par exemple.

faites ou des connaissances « déjà-là » ou « presque déjà-là », et les connaissances (et activités) nouvelles qui sont visées par l'enseignement (Robert et Vandebrouck, 2014). Nous ajoutons une hypothèse spécifique sur le rôle des cours (ci-dessous) qui permet de préciser encore ce qui est recherché localement.
Cela dit, le cadre de la DA amène à ne pas isoler trop l'étude ; non seulement on ne se restreint pas à ce qui se passe pendant une séance de classe pour comprendre la place des cours par rapport au reste, en référence au scénario global, mais encore on croise avec les contraintes liées au métier (institution notamment), aux élèves et au contexte (social), aux personnes (entretiens, représentations) et aux maths (relief)… pour apprécier mieux les choix et leurs raisons. Dans ce texte cependant on se limite à des études locales.

### 1.2. Une référence incontournable pour analyser les contenus des cours et les scénarios : le relief, les manuels

Le relief sur une notion résulte du **croisement** d'une étude *épistémologique* – nature des notions et spécificités –, *curriculaire* [institutionnelle - programmes] et *cognitive* – difficultés des élèves déjà répertoriées. Son étude facilite par exemple la réflexion sur le choix du mode d'introduction aux élèves d'une notion : par exemple selon sa nature et sa place dans les programmes, selon la distance entre le nouveau et l'ancien, on pourra ou non élaborer un bon problème d'introduction facilitant la construction de la notion par les élèves. Les exemples traités ici relèvent de notions FUG (Robert, 1998), qu'un nouveau formalisme, généralisateur et unificateur, rend éloignées des connaissances anciennes. Il en est de même pour l'appréciation des tâches proposées aux élèves – voire des exemples et exercices résolus du cours. Cette étude du relief permet par exemple de se rendre compte de ce qui est apparemment majoré ou minoré dans le scénario, dans les évaluations.

Le manuel est lui aussi un exemple de texte du savoir et de mise en forme, mais sans fractionnement entre leçons ni beaucoup d'explications ni d'usage de certains ostensifs, ni de réponses adaptées aux questions d'élèves ni beaucoup de liens entre chapitres. Le manuel délivre un texte relativement homogène, alors qu'un cours oral et écrit peut davantage fluctuer, être adapté à ce qui se devine chez les élèves, à ce qui a été fait, aux difficultés qu'on connait et qu'on anticipe.

### 1.3. Une hypothèse spécifique sur un rôle possible des cours

Banalement le cours participe à une certaine formalisation des notions visées, à leur mémorisation et à leur utilisation future, et, plus généralement à leur compréhension locale et globale. Nous allons préciser ces idées en nous appuyant sur des éléments théoriques. Par ce mot « cours », nous désignons à la fois un contenu (rapporté à ce texte du savoir), écrit et/ou oral, et un déroulement devant les élèves. Nous étendons cependant quelquefois le mot aux parties des manuels dévolues aux seuls textes du

savoir. Dans quelle mesure ce peut être un moment constitutif de l'appropriation par les élèves des concepts visés ?
Nous nous plaçons dans la perspective d'un apprentissage conceptuel. Rappelons que nous adoptons une définition « opérationnelle » de la conceptualisation : en l'associant à la disponibilité des notions (outils et objets, utilisés à bon escient sur un ensemble de tâches données) et à l'organisation des connaissances nouvelles et anciennes, avec la flexibilité attendue et la possibilité de résoudre les tâches comportant des adaptations.

#### *1.3.1. Présentation de l'hypothèse*

L'hypothèse que nous faisons sur un rôle possible des cours est inspirée à la fois des idées de zone proximale de développement (ZPD) et de la notion de pseudo-concept, empruntées à Vygotski, reprises en partie par Vergnaud notamment en didactique professionnelle. Cela prolonge d'une certaine manière les idées d'institutionnalisation suivant l'activité autonome des élèves, voire la précédant (inspirées par Piaget, reprises par Brousseau (ibid.), Douady (ibid.) et d'autres didacticiens à leur suite). Nous assimilons ainsi les cours à la présentation aux élèves de concepts en mots et en formules, qui, pour eux, joueraient d'abord le rôle de « pseudo-concepts ». On pourrait avancer que les concepts-en-acte introduits par Vergnaud en sont une illustration, dans certains cas.

L'exposition des connaissances serait un moment qui peut participer à l'appropriation visée, par la possibilité de familiariser avec les mots (et formalisations) et de faire activer ensuite (ou grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, d'abord provisoires et partielles, entre mots et activités mathématiques – en référence imagée et adaptée aux pseudo-concepts de Vygotski. C'est un processus long, qui doit s'apprécier dans la durée.

#### *1.3.2. Retour sur les pseudo-concepts*

Imaginons un enfant en train d'apprendre à parler se cognant au coin d'une table – l'adulte présent tape la table en disant « vilaine table ». Il fait ainsi un rapprochement à la fois gestuel et en mots (avec le qualificatif vilaine) entre du vécu et le mot général introduit par l'adulte « table ». Plus tard l'enfant se cogne à un fauteuil et le tape en répétant « vilaine table » – et l'adulte de rectifier, en expliquant que cette fois ce n'est pas une table (et il la montre du même coup) mais un fauteuil… Il corrige l'utilisation erronée de l'enfant du mot en contexte, et en profite pour remontrer l'objet associé à « table ». Ainsi à partir du mot utilisé par un adulte qui s'adresse à lui en contexte, l'avancée vers le concept pour l'enfant est rendue possible par un début de manipulation du mot, hésitante, peut-être en partie erronée. L'enfant reprend le mot en étant attentif aux réactions de l'adulte confronté à cette utilisation, en en testant ainsi l'usage en quelque sorte. Cela joue comme une anticipation de ce qui est visé et l'usage, ainsi rendu possible même s'il est incertain, en est alors sans cesse ajusté grâce aux effets de son utilisation par l'enfant sur ses interlocuteurs, reprises, corrections mais aussi encouragements, jusqu'à la transformation attendue en concept et à son intériorisation.

### *1.3.3. Retour sur les moments d'exposition des connaissances*

C'est ce type de processus que nous proposons d'emprunter, toutes proportions gardées et métaphoriquement, en faisant l'hypothèse qu'il y aurait là un des moteurs de ce qui peut se passer en cours et après. Il s'initialiserait ainsi pendant les cours quelque chose, une familiarisation, qui ressemble à ce qui précède : autrement dit les concepts introduits dans le cours avec des phrases, y compris formelles, symboliques, porteuses d'idées et/ou de techniques (relevant de théories, porteuses de justifications), ne seraient que des « pseudo-concepts » pour les élèves au début, mais devraient pouvoir se transformer à moyen terme en concepts ; les leviers de ce processus de conceptualisation étant les exercices et le texte du savoir proposés ainsi que la qualité des explicitations et des liens entre exercices et cours. Sans prétendre cependant que parce qu'une proximité est dévoilée, explicitée, cela suffit à ce que l'élève s'en saisisse.

L'enseignant énonce des éléments généraux, décontextualisés, plus ou moins liés à des activités antérieures (où des outils visés ont pu être utilisés en contexte), donne ensuite des exemples, des exercices résolus, et l'élève (ou l'étudiant) va ensuite, après cette présentation, s'exercer à mettre en fonctionnement (contextualiser, adapter) ces éléments généraux dans des activités ultérieures. Charge à l'enseignant de préparer ces mises en œuvre, y compris par des choix de tâches, de les aider, voire de rectifier les dérapages éventuels : c'est ce qui est en jeu dans les connexions évoquées ci-dessus, faites de rapprochements explicites sous forme de commentaires entre les objets et outils du cours, généraux, nouveaux, et leur utilisation en contexte. Ce qui est en jeu est l'activation, explicite, de proximités entre ce que les élèves savent, ont fait ou doivent faire et ce qui est nouveau, y compris les aspects « objets » et outils introduits par l'enseignant. C'est l'ensemble cours-activités qui est en jeu.

De ce point de vue l'apprentissage spécifique lié aux cours s'apparenterait à la transformation individuelle, sans doute longue, des pseudo-concepts en conceptualisations.

« L'efficacité » des cours dépendrait alors notamment des occasions et de la qualité de l'activation de ces connexions, de ces liens entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé – et serait donc liée aux discours des enseignants, pendant la présentation des contenus de cours, aux choix des tâches associées et des discours accompagnant le travail correspondant des élèves (cf. activités des élèves), en particulier des [tentatives de] rapprochements entre activités, connaissances déjà-là et connaissances nouvelles des élèves. Cela oriente les recherches en fournissant des indicateurs plus précis que nous détaillerons ci-dessous.

## 2. Méthodologie générale

### 2.1. Comment mener de telles études ?

Dans notre acception de ce qui est à étudier, et comme nous l'annoncions en première section, ce qu'il y a à analyser dans un cours n'est pas seulement le texte du savoir à présenter puis présenté par l'enseignant mais bien tout l'accompagnement. Voire même davantage, dans la mesure où le processus n'est pas immédiat, mais ce ne sera pas fait ici.
Nous allons étudier des cours réels, en général filmés[3] et transcrits, éventuellement complétés par des documents, voire des entretiens. Ce sont des études cliniques (quelques séances par professeur), adaptées au contexte des cours.

Nous n'avons pas encore de problématiques précises, si ce n'est la description de ces moments de cours, et ce sont des comparaisons qui constituent la première étape de ces recherches. En particulier l'étude des différences entre manuel et cours est l'objet d'une partie de nos travaux, avec la mise en évidence de ce qu'apporte l'introduction des déroulements. De plus ces comparaisons, entre les prévisions des chercheurs et les analyses de divers déroulements effectifs conduiront à repérer des variables (dans les contenus et objectifs des cours selon les niveaux) et à baliser une palette de possibles dans les pratiques.

### 2.2. Analyses des contenus

On étudie les contenus des cours réels, en référence au relief, une fois déterminés la place dans les programmes et les objectifs.

Le problème du découpage de ce qui est étudié se pose d'abord – on a décidé d'analyser les chapitres que l'enseignant délimite lui-même (cependant les exemples de cet article sont encore plus limités, ils servent surtout ici à illustrer notre méthodologie).

Le cours présente une mise en forme d'un texte de savoir sur le chapitre, en partie hors tout contexte, général – on dira non-contextualisé – au moins en partie écrit (même si les supports diffèrent), cohérent du début à la fin du chapitre. Il s'y intercale des exercices et des problèmes, dont nous devons tenir compte, au moins dans une étude complète analysant les dynamiques et autres liens entre cours et exercices. Tout comme nous tenons aussi compte (sauf dans l'étude des manuels) de la présentation orale qui est faite, en général en plusieurs temps. Les rythmes et durées respectives des différentes parties de l'enseignement ne sont pas pris en compte ici. Pas plus que nous n'étudions les encouragements et autres éléments de contrat par

[3] En classe, la caméra est posée au fond de la salle et centrée sur le tableau et l'enseignant.

exemple, pour maintenir les élèves en activité. Cela complèterait certainement utilement notre étude, tout comme la prise en compte de la manière dont l'enseignant s'adresse aux élèves, comme c'est étudié en pragmatique (Pariès, 2004), voire de toute sa gestuelle.

#### *2.2.1. Contenus mathématiques*

Banalement on trouve dans un cours, et la liste est donnée ici en vrac, des définitions, théorèmes et propriétés, des démonstrations (et modèles de raisonnements), des méthodes, des exemples, des exercices résolus ou exercices types (à imiter), des activités d'introduction, des éléments historiques, des commentaires variés, des formules et des représentations graphiques ou géométriques.
Les didacticiens ont développé un certain nombre d'outils que nous utilisons pour décrire ces éléments mathématiques, caractères outil/objet, cadres, registres de représentations, symbolisme et ostensifs…

On s'intéresse ici particulièrement au degré de généralité des énoncés non-contextualisés (Butlen et Pezard, 2003), pour apprécier la distance entre ceux-ci et les exercices contextualisés sur lesquels les élèves ont travaillé ou vont travailler : par exemple dans un exemple générique pris comme énoncé de cours, il n'y a pas de variable, seulement des nombres, qui pourront être remplacés par d'autres nombres, ce qui n'est pas tout à fait le cas dans les énoncés les plus généraux.

Cela dit, dans un cours, « tout » ne va pas servir directement, tout n'est pas toujours transformable en activité ni évaluable – même si c'est très variable pendant la scolarité. Il peut y avoir des éléments du cours qui ne se prêtent pas directement à des exercices mais, par exemple, plus à des réflexions. Lors d'un cours sur la nature des différents nombres, il n'y a pas d'exercices d'application immédiats, même si les élèves peuvent être sollicités sur ce qu'ils connaissent déjà. Citons encore par exemple la justification de la règle des signes pour la multiplication des nombres négatifs, dont les élèves n'ont pas besoin directement. Citons encore le discret et le continu, difficile à approcher dans un cours du secondaire et pourtant présents (cf. Rousse).

Enfin d'autres éléments présents dans les cours ne sont pas définissables : la notion d'équation par exemple, pourtant très utilisée. Cela met en jeu ce que Pouyanne (Robert et Pouyanne 2004) appelle des notions non encore formalisées, voire non encore formalisables ; les notions para-mathématiques et proto-mathématiques définies par Chevallard (1991) s'inscrivent aussi dans cette catégorie.

#### *2.2.2. Ce que l'enseignant peut ajouter aux stricts contenus, notamment à l'oral*

Il peut indiquer le statut des connaissances (admis, démontré, méthode, utilité…), ainsi que les liens et mises en relation entre cours et applications (entre aspects déclaratifs et procéduraux), entre connaissances anciennes et nouvelles, entre diverses parties du cours. Il peut ainsi mettre en évidence, plus ou moins explicitement, l'organisation des connaissances, que ce soit à travers la structuration d'un même cours ou entre cours.

Ce sont des commentaires qu'on a appelés « méta » qui sont souvent utilisés pour ces ajouts (Tenaud, 1991, Robert et Robinet, 1996). On en a défini plusieurs niveaux, mettant en jeu l'objet du commentaire. Rappelons qu'on distingue le *méta 3*, au niveau le plus général, avec les références au mode de fonctionnement mathématique, au *pourquoi* et au *pour quoi* des choses. Le *méta 2* aborde des questions de structuration globale, des idées générales sur le *comment*, par exemple les méthodes à utiliser face à un type de problème, sans tenir compte des données particulières ; le *méta 1* est le plus adapté aux différents contextes rencontrés, il permet de parler des liens précis, locaux, déclaratif / procédural ; sur des exercices il est associé à la prise en compte de la conclusion et des données (des hypothèses).

Finalement le cours peut ainsi être vu comme une réserve d'énoncés divers, voire une référence, avec plus ou moins d'indications sur les liens et mises en relation entre les connaissances, leur origine, leur statut, pour que les élèves y puisent les objets et outils utilisés ensuite et les retiennent.

### 2.3. Un outil pour étudier localement les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants

Une des conséquences de la prise en compte du métier dans nos analyses de pratiques est l'importance que nous accordons à la préoccupation des enseignants de garder les élèves plus ou moins attentifs, y compris pendant les cours, et même si possible de faire progresser certaines de leurs connaissances, ou au moins d'amorcer ce progrès, pendant ces moments-là. Nous admettons qu'une des manières développées par les enseignants pour y arriver est de rester aussi « proche » que possible des élèves. C'est sans doute une caractéristique constante de ce que font les professeurs en classe, à tout moment, mais elle est d'autant plus importante pendant les cours qu'ils ne peuvent pas s'appuyer autant qu'à d'autres moments sur les activités des élèves.

Nous avons ainsi introduit la notion de *proximité-en-acte* pour qualifier ce qui, dans les discours ou dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves (Robert et Vandebrouck, 2014 ibid). Nous les avons étudiées dans des phases de recherche d'exercices en classe et, dans le travail présenté ici, nous allons les spécifier et les repérer dans les moments d'exposition des connaissances.

Les proximités-en-acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité entre ce qu'il veut introduire et les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves. Cette activité de l'enseignant peut être consciente et voulue, plus ou moins explicitement, mais peut aussi être automatique[4]. Cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves. Il y a ainsi des proximités non strictement mathématiques : affectives (encouragements), langagières (jouant sur divers niveaux de langue, du familier au symbolique, ou sur des images, etc.), de type « carotte/bâton » (jouant sur des motivations liées à la scolarité et les contrats).

D'autres proximités peuvent avoir une portée plus directement cognitive, mettant en jeu des liens portant sur des contenus (par l'intermédiaire de commentaires méta mais pas seulement), ou révélant des relations portant sur diverses tâches, ou sur diverses sous-activités, ou sur leurs liens avec le cours, au sens large… Par exemple, même si l'enseignant a explicitement conçu une activité préalable à un cours, pour préparer l'introduction de certaines connaissances visées, ce n'est pas pour autant que le passage de l'activité aux connaissances qui vont être dégagées soit facilement perçu comme proche par (tous) les élèves, sans explicitation complémentaire (qui constitue une proximité). Ainsi ce mot « en-acte » accolé à « proximité » spécifie, dans notre idée, une qualité de l'activité de l'enseignant en classe qui accompagne le développement des contenus, qualité ni nécessairement consciente pour l'enseignant, ni exprimable. Ceci de la même façon que pour Vergnaud (1990), le « en acte » de l'expression concept-en-actes qualifie une connaissance qui se manifeste dans l'activité d'un sujet sans être toujours consciente ni exprimable.

De manière générale, nous reconstituons ces proximités (ou non-proximités) à détecter dans des pratiques enseignantes à partir de divers indicateurs, les enrôlements et certains arguments employés pour mettre et maintenir les élèves au travail, la durée du travail des élèves et ce qui amène à l'arrêter, la nature des questions ou les types d'aides (procédurales ou constructives notamment, Robert et Vandebrouck 2014) avec leur relation au travail des élèves, à leurs réponses et tous les autres commentaires qui font qu'il n'y a pas une simple juxtaposition entre divers éléments du cours. Les aides sont souvent des ajustements improvisés pour répondre aux élèves, très ajustées au travail fourni, et donc ce sont des formes particulières de proximités.

Même si l'étude préalable du relief sur la notion nous aide dans notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant, et ce qui est étiqueté comme proximité-en-acte reste dans une certaine mesure « potentiel » : d'une part il n'est pas certain que l'enseignant l'ait conçue comme telle, mais, d'autre part, il n'est pas certain que cela soit efficace pour les élèves, que la proximité soit reconnue et source de progrès. Ce serait par des entretiens *a posteriori* qu'on pourrait vérifier la concordance entre

[4] Si un élève semble perdu, on lui pose une question.

l'attribution par le chercheur d'une intention de rapprochement et l'intention réelle de l'enseignant.

Une dernière remarque s'impose sur la différence entre les proximités étudiées ici et les « petits pas » préconisés par certaines pédagogies, même si cette dernière expression n'est pas très précise. Les petits pas engagent les élèves dans une forme de proximité très limitée, locale, souvent sans changement ni de point de vue ni de degré de généralité ni de cadre ou registre, et souvent ils peuvent effectuer seuls une partie du chemin. En revanche, les proximités sur lesquelles nous travaillons peuvent concerner un changement de niveau de connaissances, une généralisation importante, que les élèves auraient eu du mal à faire seuls, voire à concevoir seuls, mais qu'ils pourront accepter, s'approprier, parce que l'enseignant va leur expliquer, y compris sur un exercice, *a posteriori*, ce qui dans leurs connaissances est proche de ce qui est mobilisé et ce qui est nouveau.

### 2.4. Les proximités discursives dans le cas particulier des moments d'exposition des connaissances

Nous suggérons qu'il peut y avoir, dans les cours, plusieurs grands types de ces proximités-en-acte particulières, discursives. Elles se déclinent en relation avec les contenus précis, habillant en quelque sorte le cours. Elles sont soit le fait de l'enseignant pendant l'exposé, soit se jouent dans des échanges, des interactions avec les élèves, des questions (improvisées ou non, venant de l'enseignant ou des élèves) et des réponses. En particulier lorsque l'enseignant attire l'attention des élèves, fait redire ou demande « qu'est-ce que vous avez compris ? »… Cependant, nous y insistons, il ne peut pas y avoir de certitude sur le fait que l'élément de discours sélectionné joue effectivement comme un rapprochement pour les élèves.

Dégager les proximités potentielles, les éléments de discours candidats à apporter des proximités, engage deux types d'analyses des cours, *a priori* lorsqu'on met en jeu les contenus travaillés, avec des *occasions de proximités* repérées par le chercheur qui se réfère au relief sur la notion, et *a posteriori* sur le déroulement du cours avec des *proximités possibles* développées par l'enseignant (et également repérées par le chercheur).

Un premier niveau d'analyses de ces déroulements, une fois reconstitués les contenus du cours, énoncés et exemples, et les degrés de généralité et de formalisation utilisés, concerne le vocabulaire utilisé. L'utilisation du langage courant, voire familier, au regard du langage mathématique, plus généralement les commentaires métamathématiques peuvent être porteurs de rapprochements. On étudie ainsi les rappels (et appels à la mémoire), annonces, répétitions, reprises (avec modifications ou non), mais aussi les analogies, métaphores, éclaircissements, explicitations, et enfin, plus globalement, structuration, statuts des savoirs (voire éléments d'histoire) et histoire racontée. On repère dans ces éléments ce qui apparait comme des liens, des dévoilements ou des implicites, des mises en garde (souvent liés à des anticipations), à différents niveaux de généralité. Une autre source d'analyse importante se trouve dans les différences entre oral et écrit, avec l'usage plus ou moins commenté des ostensifs et des diverses formalisations et représentations en jeu. Il se peut que certains gestes accompagnent ces commentaires entre oral et écrit, que nous incluons éventuellement dans nos descriptions les plus fines.

C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'elles explicitent entre contextualisé et non-contextualisé qui déterminent les types de proximités que nous retenons, vu l'importance des connexions provisoires à transformer en nouvelles connaissances, et notamment des liens entre ce qui est contextualisé, lié aux activités proposées aux élèves, et ce qui est général. Les proximités peuvent ainsi rapprocher un exemple et sa généralisation (dans les deux sens) ou deux éléments ayant le même degré de généralité (horizontales).
Ces dernières peuvent être globales (sur le sens, le pour quoi, le pourquoi, les statuts de ce qui est présenté… cf. méta 3), ou plus locales (sur le comment, méta 2 ou sur le texte du savoir) – elles peuvent aller de ce qui précède à ce qui suit ou le contraire.

Soulignons qu'un passage du cours ou une activité introductive ou illustrative peut activer plusieurs types de proximités successivement.

Enfin les proximités possibles développées au cours d'interactions peuvent à la fois renseigner l'enseignant sur la compréhension des élèves et les motiver, par-delà un strict gain cognitif.

Dans ce qui suit, nous détaillons la caractérisation retenue de chaque type de proximité, avec un exemple, puis nous indiquons des questions qui concernent leur production. D'autres exemples seront donnés dans la troisième partie.

#### *2.4.1. Les proximités « ascendantes »*

Elles se placent entre ce qu'ont pu déjà faire les élèves et du nouveau (mots, définitions, propriétés) – lorsqu'il y a généralisation ou décontextualisation, soit d'un caractère outil qui donne naissance à un « nouvel » objet ou à un « nouvel » outil, soit directement d'un nouvel objet, définition ou propriété. Ce qui varie selon les cours, c'est ce qui est décontextualisable à partir de ce que peuvent savoir ou faire les élèves, et la distance entre ancien et nouveau. Mais le transfert, inductif, mis en jeu, pour passer au général, n'est pas toujours transparent, et un enjeu de ces proximités est d'expliciter ce qui est retenu et généralisé à partir du cas particulier, de ce que les élèves ont pu faire. Selon l'empan de cette généralisation, c'est plus ou moins facile.

Ce type de proximités peut se retrouver dans beaucoup d'ingénieries ou de problèmes développant une dialectique outil-objet (Brousseau ibid, Douady ibid, Butlen et Pezard, 2003). Nous en avons moins d'exemples au collège qu'à l'école primaire. Il n'est pas exclu qu'il y a là une source de différences entre les cours du primaire et du secondaire, liées à un degré de généralité différent des éléments non-contextualisés, à leur place dans l'ensemble des séances et aux dynamiques avec les exercices qui les accompagnent – selon que les éléments de cours sont ou non repris dans des exercices. Peut-être aussi y a-t-il davantage de notions FUG à partir du collège (cf. ci-dessus).

Donnons un petit exemple de proximité ascendante possible. Il s'agit d'un cours sur les fonctions affines en seconde (ZEP) :

Enseignant et élèves ont tracé la représentation graphique de la fonction $f$ définie par $f(x) = -2x + 3$ à partir de deux points (ils ont choisi deux valeurs de $x$ et calculé $f(x)$).

L'enseignant reprend la parole :

*Si je calcule l'image de 0* – (des élèves : 3) *c'est 3. C'est le quel 3 ?* (elle montre le 3 de $-2x + 3$ et le souligne) – *c'est l'ordonnée de ce point sur la courbe* (elle montre le point où la courbe coupe l'axe des $y$).

*A chaque fois quand vous calculez l'image de 0 par* $f(x) = ax + b$ *vous obtenez* $b$ *que vous allez trouver sur l'axe des ordonnées* (elle désigne un point virtuel de coordonnées $(0, b)$ sur l'axe des ordonnées). *La valeur de b faut toujours qu'elle soit sur l'axe des ordonnées. Quel nom* ? (des élèves : ordonnée à l'origine).

*Vous notez : b est appelé l'ordonnée à l'origine…*

Nous repérons que l'enseignant redit aux élèves, en s'appuyant sur un cas particulier qu'ils ont traité, la double lecture qu'on peut faire du 3 (dans la formule, sur la courbe) et généralise immédiatement au cas général, associé à une formule algébrique, cette double lecture, en soulignant les mêmes éléments ($b$ de la formule et $b$ ordonnée d'un point de l'axe des $y$).

Ce qui est en jeu ici, c'est que nous pensons qu'en fait, le général n'est pas automatiquement proche des élèves, que des rapprochements explicites peuvent vraiment aider. Nous en voulons pour preuve certains travaux de Butlen et al., qui montrent que spontanément les élèves en restent au générique (à l'exemple qui engendre le général) et ne passent pas au général. Nous avons aussi fait passer un questionnaire à des élèves de lycée, qui montre qu'une partie d'entre eux ont du mal avec les activités introductives et avec le sens du mot « général » en mathématiques (Bridoux et al, 2015).

De plus, lorsque les élèves ont travaillé diversement sur une activité d'introduction, le choix par l'enseignant de la procédure qu'il généralise peut poser problème, pour ceux qui font autrement, qui ne reconnaîtront pas le rapprochement explicite.

Autant de questions à se poser sur ce type de proximités, pour avancer sur leur efficacité possible.

#### *2.4.2. Les proximités descendantes*

Elles se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou exercices à faire ensuite avec ou par les élèves ((re-)contextualisation). L'enjeu est d'expliciter ce qui est à contextualiser, la manière d'inscrire le cas particulier traité dans l'invariant général, de substituer les données aux variables (à repérer). Ce n'est pas toujours transparent pour les élèves, alors même que leur longue fréquentation des mathématiques amène les enseignants à ne pas toujours repérer ces difficultés, tant ces connaissances sont naturalisées chez eux. Par exemple il n'est pas question d'appliquer le théorème de Pythagore à un triangle non rectangle, ou à un quadrilatère – mais on peut changer le nom des sommets, les mesures des côtés, la place de la figure… On peut aussi transformer « triangle rectangle » en « triangle ayant un angle droit », ou passer de « côtés perpendiculaires » à « triangle rectangle » ou repérer un triangle rectangle dans une figure plus compliquée.

Donnons un exemple de proximité descendante possible (donné en classe tout de suite après l'exemple précédent) :
L'enseignant reprend, après avoir donné la définition de l'ordonnée à l'origine.
*On va tracer la courbe de* $f(x) = 2x - 3$. *Que vaut b cette fois ?* (des élèves : -3)
*Donc il va y avoir un point sur l'axe des ordonnées* en (-3) – (elle le place directement).

Il y a proximité possible parce que l'enseignant applique l'énoncé général précédent, et non plus le calcul direct, mais en explicitant cette démarche (par l'interrogation sur $b$, à identifier, et le « donc »).

On peut citer un autre exemple, a contrario. Un enseignant débutant vient de donner la règle sur le calcul de l'exposant d'un produit de puissances du même nombre. Confronté à un problème numérique de ce type, un élève recommence à développer chaque facteur du produit pour donner le résultat juste. L'enseignant le corrige lui reprochant de ne pas appliquer la règle. Une alternative, qui pourrait être une proximité descendante, serait de montrer à l'élève qu'il pouvait aussi aller plus vite en appliquant la règle, qui donne le même résultat... Autrement dit on admet que le cours ne donne pas de modèle à retenir et à appliquer pour les élèves dès qu'il a été dispensé. Une fois qu'ils ont entendu (et/ou noté) le cours, les élèves peuvent revenir à d'autres procédures, correctes ; en revanche, et c'est là qu'il peut y avoir occasion de proximité, il s'agit pour l'enseignant d'illustrer comment que le cours permet de faire autrement.

En fait, pour les applications qui sont l'essentiel de ce qui est concerné ici, l'enjeu est dans les explicitations de ce qui est à « faire » par les élèves à partir de l'énoncé général à contextualiser, y compris la reconnaissance éventuelle. On pourrait évoquer la clarification du passage du déclaratif au procédural.

#### *2.4.3. Les proximités horizontales*

Elles ne font pas intervenir de changement de discours entre contextualisé et non-contextualisé. Elles peuvent ainsi porter sur le cours en train de se faire, à un niveau général, par exemple sur les statuts des éléments en jeu ou sur des liens, ou sur la structuration du cours (« *on en est où ?* ») ou les méthodes en jeu. Elles peuvent aussi expliciter localement une suite de calculs, ou des différences entre écrit et oral. Elles nourrissent alors souvent des interactions limitées, brèves questions et réponses de faible « portée ».

Donnons des exemples de proximités horizontales. Nous avons trouvé dans une capsule vidéo sur le net, comme introduction du « cours » sur le tableau de signes d'un produit de facteurs algébriques le discours suivant :
*« pour chercher le signe de l'expression* $(3x-9)(1-2x)$*, on cherche quand « tout ça » (l'enseignant montre le produit) est positif ou négatif. Pour cela on cherche quand le premier facteur est positif ou négatif, le 2ème facteur est positif ou négatif et on applique la règle des signes. Pour faire tout ça et pour simplifier la discussion, on fait un tableau. »*

Nous y voyons un exemple de proximité horizontale locale possible, dans la mesure où l'enseignant explique ce qu'il y a à faire sur l'exemple, sans faire allusion à un procédé général.

En revanche on pourrait imaginer une occasion de proximité horizontale plus générale, permettant à l'enseignant d'expliquer, hors exemple, que, dès qu'on peut connaitre les signes des facteurs d'un produit, on peut connaître le signe de leur produit, dans la mesure où la règle des signes peut être appliquée sur chaque intervalle où les facteurs gardent un signe constant.

Et une occasion de proximité encore plus générale serait de questionner les élèves sur le statut de cette règle des signes (et de signaler qu'on l'admet, par exemple).

## 3. Exemples

### 3.1. Au collège, un exemple de différences entre occasions de proximité et proximités possibles.

#### *3.1.1. Des enjeux liés à l'étude des représentations graphiques des fonctions au collège – un point de vue de chercheur*

Notre étude du relief sur la notion nous amène à distinguer dans cette introduction en troisième (14-15 ans) des graphiques de fonctions plusieurs enjeux, que nous allons présenter et dont nous discuterons des occasions de proximités (potentielles, rappelons-le). Nous ne faisons pas une étude exhaustive du relief, mettant en jeu une bibliographie importante.

La première chose qu'on peut souligner est que la représentation graphique des fonctions est non congruente à l'expression algébrique : en effet cette dernière n'est pas directement accessible sur la courbe. Le lien entre abscisse et ordonnée de tous les points de la courbe, par l'expression algébrique de la fonction, est « illisible » en général.

Les connaissances anciennes des élèves de troisième sont les courbes déjà étudiées depuis longtemps, mais exclusivement graphiquement. Les élèves savent placer des points de coordonnées données, lire des coordonnées (valeurs numériques particulières), repérer visuellement des variations des grandeurs en jeu sur chaque axe. Ils savent passer des abscisses numériques aux ordonnées et réciproquement. Mais c'est un travail « séparé », successif, sur les deux coordonnées. Les tâches et techniques antérieures ne nécessitent pas de prendre en compte les couples $(x, y)$, alors que cela devient nécessaire si on travaille sur la fonction représentée, car alors $y = f(x)$.

Autrement dit les élèves interprètent déjà beaucoup de choses sur des graphiques mais en dehors de l'association à une représentation de fonction, donc sans que cette propriété serve, et l'enjeu nous semble être le transfert à $f$ de ce qu'ils savent déjà faire sans mettre en jeu $f$ – transfert invisible, qui ne peut pas se deviner. Par exemple l'image remplace l'ordonnée, l'antécédent remplace $x$ ; si on se donne un intervalle de l'axe des $x$, cela permet d'accéder à des informations sur la portion de courbe correspondante (par exemple elle monte) et sur les ordonnées associées (leur croissance éventuelle) mais ce qui est nouveau c'est la traduction de ces dernières informations sur $f$ (par exemple $f$ croît). Pour travailler sur cet aspect, on doit réaliser en actes *une substitution* liée à une *transitivité* (*remplacer y par* $f(x)$ *et* $(x, y)$ *par* $(x, f(x))$ très difficile, très éloignée de ce que les élèves savent faire.

Mais il y a une autre nouveauté, liée à ce qui est introduit dans l'aspect algébrique : si les élèves peuvent construire des points isolés, même proches, rien ne peut les aider à joindre les points, à tracer la courbe qui passerait par ces points, ni surtout à justifier ou interpréter ce tracé : sauf l'habitude de voir des courbes et l'envie de les tracer, ou sauf si c'est une droite dont ils connaissent deux points. Il leur manque (encore) l'idée de s'intéresser à tous les points (à leur ensemble), et l'idée que, sur les courbes associées à des fonctions, non seulement tous les points sont obtenus de la même façon à partir de la fonction, l'ordonnée valant « $f$ de l'abscisse » mais encore tout point $(x, f(x))$ est sur la courbe (idée de réciproque, associée à celle d'ensemble)… Ils ont certes l'intuition du continu mais cela reste une intuition !

***Le cas de la proportionnalité***

On pourrait penser qu'il y a là une source d'activité d'introduction bien naturelle, restreinte aux droites.

En classe de quatrième (13-14 ans), en effet, on étudie la proportionnalité et à partir d'un tableau de valeurs discrètes et numériques (souvent entières d'ailleurs), on trace, dans le plan muni d'un repère, des points que l'on joint par une droite. Ces points ont comme coordonnées les deux valeurs numériques d'une colonne du tableau. Cet alignement, ainsi que sa réciproque – si des points sont alignés avec l'origine ils représentent une situation de proportionnalité –, sont des propriétés admises. Mais ce qu'il faut souligner, c'est que les points de la droite différents de ceux qui ont servi à la tracer ne sont pas l'objet d'attention, ni d'explication ni d'interprétation (du moins dans les programmes actuels). La droite (alors objet géométrique) ne sert qu'à traduire l'alignement des points initiaux, le fait que tous les autres points de la droite ont des coordonnées proportionnelles, liées par la même relation du type $y = ax$, est souvent passé sous silence, même si on fait vérifier qu'un certain nombre d'autres couples de coordonnées proportionnelles sont sur la droite.

Une démonstration utilisant le théorème de Thalès était proposée dans certains programmes antérieurs. Le fait est qu'elle était difficile pour un certain nombre d'élèves, qui ne pouvaient la produire seuls : ce n'est donc sans doute pas un bon candidat à une activité d'introduction.

***Et les logiciels ?***

On pourrait objecter à ce qui précède que les élèves « disposent »[5] de courbes tracées par un logiciel, ou données dans un document, mais questionnent-ils la manière de les obtenir ? Quelles mathématiques là-dedans ? Qu'est-ce que la donnée de telles courbes produit chez les élèves ? Qu'est-ce qui peut être dit aux élèves ? On retrouve la question plus générale de ce qui est « embarqué » comme propriétés dans les logiciels.

De manière générale un logiciel comme Geogebra peut placer de très nombreux points de coordonnées $(x,y)$, avec $y = f(x)$ (commande), points suffisamment nombreux pour qu'on ait l'impression visuelle de continuité dans le cas de graphes de fonctions. On gagne ainsi le fait de s'intéresser à beaucoup de valeurs de $x$, avec la « bonne » relation entre $x$ et $y$ pour un point tracé. Les élèves peuvent déduire que si on trace beaucoup de points, cela finit par « se toucher », mais il nous semble que la dépendance systématique entre $x$ et $y$ de tous les points de la courbe représentative de $f$ (et la réciproque évoquée ci-dessus) peut encore rester lointaine.

***Occasions de proximités à mettre en jeu ?***

Que ce soit avant ou (plutôt) après le cours au collège, en terme d'occasions de proximités, on peut penser à expliciter tout ce qui est ajouté à ce qu'on connait déjà : étant donné une fonction $f$, le fait de tracer la courbe revient à représenter par des points d'un plan muni d'un repère tous les couples $(x, f(x))$ correspondants et surtout la possibilité nouvelle que cela donne de transférer des informations visuelles, à partir du graphique, non seulement sur $f(x)$ mais aussi sur $f$. En se basant sur un

[5] Que ce soit par eux-mêmes ou grâce à l'enseignant.

certain usage antérieur des représentations graphiques, on pourrait introduire l'idée de dépendance, ou même l'idée de variation, jusque-là réservées à un travail visuel sur des courbes non associées (explicitement) à des fonctions. Cette possibilité de transfert à des propriétés de $\{(x,\ f(x)\}$ à $f$, ce passage du visuel (graphique) au fonctionnel est nouvelle, c'est un changement de point de vue difficile qui peut (doit) donc être explicité. On conçoit qu'il y a plutôt là des occasions de proximités descendantes ou horizontales qu'ascendantes, notamment en explicitant le transfert, malgré la non-transparence de l'association courbe-fonction, et en indiquant que, par définition, tous les points $(x, f(x))$ sont sur la courbe et seulement eux.

### *3.1.2. Pour préparer un cours en troisième sur les représentations graphiques – des proximités possibles…*

C'est le deuxième cours sur fonctions dans une classe de troisième dont on a analysé les vidéos. Il y a trois activités successives avant le cours pour préparer la définition des représentations graphiques des fonctions. Nous allons les résumer en indiquant à chaque fois les proximités possibles (et ce qui pourrait y échapper).

La première activité consiste à deviner que des couples de nombres proposés sont associés à la fonction $x \to 2x$.

Puis les élèves complètent avec quelques autres valeurs le tableau formé par les nombres et leurs images (en colonne). Ils identifient une situation de proportionnalité (déjà vue en quatrième) que l'enseignant demande de représenter dans un repère. Le fait que les points (il y en a donc beaucoup plus que deux) sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère est rappelé. La droite est tracée. Rien n'est dit à ce moment de la séance sur les points intermédiaires. Il n'y a rien de nouveau, ce sont des révisions (sans doute avec des différences entre élèves). On peut remarquer l'association explicite d'un couple de nombres $(a, b)$ en colonne sur le tableau aux coordonnées $(a, b)$ d'un point. Il n'y a pas de fonction dans l'affaire sauf dans deux allusions de l'enseignant. Il cite au début la fonction $x \to 2x$ et, après le tracé, il évoque « la représentation graphique de la situation donc de la fonction ». En réponse à une question d'élève il annonce une généralisation de la représentation graphique à d'autres fonctions comme $(x \to 2x + 3)$. L'enjeu ultime des représentations graphiques, à savoir l'interprétation des coordonnées de tout point d'une courbe représentative de $f$ comme $\big(x, f(x)\big)$ n'est pas encore préparé.

Dans la deuxième activité, il s'agit de deviner que des couples de nombres proposés sont associés cette fois à la fonction qui à un nombre fait correspondre son carré. L'enseignant demande ensuite de compléter un tableau de valeurs de ce qui sera la fonction $x \to x^2$ puis de placer les points dont les coordonnées sont les colonnes du tableau dans un repère. Il demande aux élèves de s'arrêter au tracé de ces seuls points. L'enseignant continue lui-même, en traçant grâce à un logiciel « tous » les points de coordonnées (nombre de départ $x$, nombre d'arrivée $x^2$). Il parle de courbe

– qui n'est pas une droite (reprenant ce que dit un élève), il évoque « l'ensemble des points de la courbe », mais sans insister du tout sur le mot ensemble. Les points initiaux des élèves sont placés et on constate qu'ils sont sur la courbe obtenue. Là, l'enseignant insiste sur la construction de la courbe par le logiciel grâce au placement de « très nombreux points de coordonnées $(x, x^2)$. La question se pose peut être encore pour les élèves entre la construction de la courbe à partir de points nombreux et son interprétation : ce n'est pas parce que la courbe est obtenue à partir de beaucoup de points $(x, x^2)$ que les coordonnées de tous ses points vérifient la même relation. Même si l'enseignant affiche les coordonnées d'un point au hasard, et indique que l'ordonnée est le carré de l'abscisse, l'explicitation de ce que veut dire « ensemble » n'est pas faite, voire n'est pas possible. On vérifie ce que nous signalions ci-dessus : le manque de clarté sur ce point, alors qu'implicitement on met en œuvre cette définition de la courbe. Autant généraliser une construction de courbe point par point en remplaçant $y$ par $f(x)$ peut sembler à la portée des élèves, autant, à l'envers, interpréter les coordonnées de n'importe quel point de la courbe comme $(x, f(x))$ met en jeu quelque chose de nouveau qui n'est plus proche du tout de ce qu'ont déjà fait les élèves. Tout se passe comme s'il manquait un « réciproquement ». L'utilisation du mot ensemble justifie ce que dit l'enseignant sans avoir vraisemblablement de signification pour les élèves. Est-ce cependant important ? L'activité suivante donne une réponse.

La troisième activité reprend la même chose pour la fonction $x \to \sqrt{x}$. Les élèves complètent un tableau de valeurs numériques puis pour le représenter autrement, les élèves placent les points dans un repère. L'enseignant demande s'il est légitime de les joindre, comme certains élèves l'ont fait cette fois-ci. Il laisse la réponse en suspens. Ensuite il trace devant les élèves la courbe sur ordinateur en commandant à ce dernier de placer les points (abscisse $x$, ordonnée $\sqrt{x}$). Il fait varier l'abscisse, $x$, déclarée comme variable, et redit que l'ordonnée du point correspondant de la courbe est $\sqrt{x}$. La courbe s'affiche. L'enseignant choisit un point de la courbe et l'ordinateur affiche les coordonnées numériques. L'enseignant demande la signification des deux nombres ainsi affichés. Pas de réponses jusqu'à ce qu'un élève reprenne le $(x, \sqrt{x})$. On constate à nouveau à la fois l'appui sur les constructions précédentes et la difficulté pour beaucoup d'élèves d'interpréter la courbe, ce qui est trop éloigné de ce que les élèves ont déjà pu faire. Enfin l'enseignant donne la définition : une représentation graphique est un ensemble de points, « l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ », – il précise qu'une droite est une courbe… Il demande enfin de tracer une courbe non représentation graphique d'une fonction.

On peut se demander quelles proximités avec tous les élèves sont engagées. Peut-on parler de proximité ascendante ? L'enseignant s'appuie sur une interprétation des coordonnées mais il n'explique pas pourquoi on choisit justement ces coordonnées pour chaque point ; les élèves peuvent encore moins le deviner seuls. Il nous semble qu'il y a là une proximité tentée par l'enseignant qui peut rester un peu illusoire, pour un certain nombre d'élèves.

De plus l'enseignant insiste sur le fait que $x$ prend toutes les valeurs, que tous les points sont concernés (comme s'ils se touchaient, qu'ils avaient une épaisseur) mais il ne dit rien sur le fait que tout point de la courbe a comme ordonnée $f(x)$. Il n'évoque pas non plus ce qu'on connait de plus sur la fonction grâce à cette représentation, il dit seulement que c'est une autre façon de l'aborder (juxtaposition des points de vue).

Certes, en dire trop aux élèves peut aussi bien les noyer que n'en dire pas assez. Il s'agit d'adapter à chaque classe les informations qu'on juge adéquates, mais il nous semble que le didacticien peut clarifier les occasions de proximités, en explicitant notamment ce qui pourrait être ascendant ou plus difficile.

### 3.2. Exemples en première année d'université (cursus scientifique)

#### *3.2.1. Contexte du travail*

Le cours en amphi engendre probablement encore moins d'interactions entre l'enseignant et les étudiants qu'il n'y en a au secondaire, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont en général présents. À l'université, les étudiants peuvent aussi avoir accès à de nombreuses ressources qui leur donnent directement accès au texte du savoir, comme des livres, des polycopiés, des vidéos de cours en ligne. La présence au cours magistral n'étant, de plus, pas obligatoire, il nous a semblé pertinent de nous intéresser à ce que les étudiants peuvent retirer de ce type de cours. Nous mettons ici en regard le cours d'un manuel, une vidéo de type FAD (formation à distance) et un cours en amphi filmé. Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. Cette diversité est selon nous un moyen de mieux mettre en évidence les spécificités propres au cours magistral.

Nous nous sommes centrés sur la notion de limite (suite et fonction) qui est une notion clé de l'enseignement de l'Analyse à l'université. Elle est en effet introduite en L1 dans de nombreux pays et son enseignement est source de difficultés récurrentes chez les étudiants en première année universitaire (par exemple, Bridoux (2016), Robert (1982) Przenioslo (2005)). Dans la suite, quand nous parlerons de la notion de « limite » de suite ou de fonction, cela signifiera la « notion mathématisée formelle quantifiée de limite ».

#### *3.2.2. Un peu de relief sur les notions de limites formalisées*

La notion de limite d'une suite numérique apparaît pour la première fois dans la classe de première au lycée (programme de 2010 en France). Les programmes précisent bien que la définition formelle n'est pas donnée à ce stade de l'enseignement. La notion est donc introduite de manière empirique à partir d'exemples d'expérimentations logicielles, d'études d'algorithmes, etc. Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont étudiées, pour lesquelles la convergence est aussi abordée de manière intuitive, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. La notion de limite de fonction apparaît aussi en classe de première au lycée dans le chapitre « Dérivation » : comme pour les suites, le programme stipule qu' « on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point » et qu'on n'en donne pas de définition formelle.

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite $(u_n)$ tend vers un réel $l$ quand $n$ tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang » ; le fait que $(u_n)$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites avant celle de continuité. Cependant, que ce soit pour la notion de limite de suite ou celle de limite de fonction, les tâches proposées aux élèves relèvent en général de l'application de techniques algébriques opératoires. D'ailleurs, cet aspect est confirmé dans les programmes où on peut lire que « le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Soulignons qu'il n'y a pas besoin d'utiliser la définition formalisée pour résoudre ces exercices.

À l'université, en revanche, les définitions formelles en $(\varepsilon, N)$ de limite de suite et en $(\varepsilon, \alpha)$ de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalité que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

Une fonction $f$ admet une limite finie $l$ en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0\ \forall x \in Df, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

Les quantifications présentes dans ces caractérisations, l'usage (ou non) des parenthèses et du symbole d'implication, tout comme l'emploi d'une inégalité avec une valeur absolue, font que ces définitions sont porteuses d'un formalisme complexe à ce niveau d'enseignement. De plus, il semble difficile de les introduire en s'appuyant sur les connaissances anciennes (même intuitives) des étudiants acquises au lycée puisque les notions formelles de limite n'y ont pas ou peu été travaillées, que le besoin de telles définitions ne s'est pas fait sentir, et que, si on se réfère aux programmes, lorsqu'une définition est donnée, elle n'est pas formulée de la même manière dans les deux institutions (lycée et université). En ce sens, ces deux notions de limite sont porteuses d'un nouveau formalisme qui généralise les exemples étudiés au lycée tout en unifiant la notion de limite dans un cadre général. Les notions de limite de suite et de fonction sont donc des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG) au sens de Robert (1998). Comme Robert l'explique, ce type de notion est difficile à introduire car la distance ancien-nouveau est grande. Elle souligne ainsi la difficulté à trouver un problème initial à proposer aux étudiants où la notion de limite apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal, les amenant ainsi à écrire de manière autonome la (nouvelle) définition formelle tout en lui donnant du sens. Il y a peu d'espoir de mettre en place des proximités ascendantes naturelles.

Une fois la définition formelle introduite à l'université, elle est en général utilisée pour étudier les premiers exemples, puis pour démontrer quelques résultats classiques comme l'unicité de la limite ou les règles de calculs (en partie déjà connues) sur les limites. Compte tenu de la complexité de la structure logique de la définition, ce type de travail nécessite d'utiliser à bon escient des connaissances en logique élémentaire mais aussi sur l'ordre dans les réels pour manipuler les inégalités. Nous savons que ces connaissances sont souvent peu disponibles en première année d'université (Dieudonné et al., 2011). De plus, les recherches sur la transition secondaire-supérieur (par exemple Gueudet, 2008, Durand-Guerrier, 2013) pointent des difficultés chez les étudiants avec les aspects formels, spécifiques de l'activité mathématique dans le supérieur, et en particulier avec la manipulation des écritures quantifiées et de leur contrôle sémantique. Les étudiants sont donc d'emblée confrontés à des tâches complexes pour eux. Cela nous amène à penser qu'il est difficile de trouver des premières tâches qui seraient simples et isolées[6], permettant aux étudiants de se familiariser avec l'usage de la notion formalisée donnée en cours. Même les exercices d'application immédiate de la définition ne sont pas immédiats pour les étudiants (on retrouve un résultat de Bridoux (2011) qui semble spécifique de certaines notions FUG). Ainsi s'il y a proximité descendante, entre cours et exercices, elle devra mettre en jeu des explicitations à réfléchir. Restent alors les proximités plutôt horizontales…

#### *3.2.3. Nature des analyses réalisées et méthodologie*

Dans une recherche récente (Petropolou et al. (2016)), les auteurs ont cherché à identifier dans quelle mesure les besoins des étudiants au début de l'université sont conceptualisés et pris en compte par les enseignants en cours magistral. Dans notre travail, nous nous plaçons dans une perspective similaire, en cherchant plus précisément les « manières de se rapprocher des étudiants » et, parmi celles-ci, lesquelles apparaissent (ou pas) dans les différents types de cours analysés.

[6] Ce sont des applications immédiates (définition, propriété) des connaissances des étudiants.

Compte tenu de l'analyse du relief de la notion de limite, nous faisons l'hypothèse que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de son introduction, notamment pour amener les étudiants à lui donner du sens, c'est-à-dire en comprenant ce qu'elle traduit et ce dont il y a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'appropriation du nouveau formalisme que la définition contient.

Nous nous sommes donc demandé ce qui était explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances approximatives du plus grand nombre possible d'étudiants ? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation ? Illustre-t-il la définition avec un dessin ? Ces premières questions sont selon nous l'occasion de dégager des premiers exemples de proximités (plutôt horizontales) dans le discours de l'enseignant. Nous nous restreignons ici à l'émergence de la définition dans le cours mais pour avoir une vue globale du scénario choisi par l'enseignant, les premiers exemples proposés par l'enseignant, puis les premiers résultats et leurs démonstrations ont eux aussi été étudiés, prolongeant ce que nous montrons ici (Bridoux et al. (2015)).

Pour repérer des occasions de proximités, nous étudions, pour chaque média, la présence de reformulations de la définition, la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et la prise en compte de la structure globale de la définition, en nous demandant en particulier quels sont les implicites entre écrit et oral dans ce qui est fait : qu'est-ce qui est écrit et pas dit, qu'est-ce qui est dit et pas écrit ? Ce choix méthodologique est associé aux éléments curriculaires sur la notion de limite et à la nature FUG de cette notion présentés dans l'étude du relief.

### *3.2.4. Étude de manuels et occasions de proximités*

#### *Ce qui est recherché*

Pour mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe, il nous a semblé pertinent d'étudier un média, ici le manuel, où le professeur est absent. L'analyse menée vise à dégager des occasions de proximités qui pourraient être développées par l'enseignant. Elle permet également de repérer, *a priori*, les occasions de tisser des liens entre l'ancien et le nouveau. Par exemple, lorsqu'une définition est donnée dans un manuel et qu'elle est ensuite illustrée sur un exemple, il pourrait y avoir une occasion de voir émerger une proximité descendante dans le discours de l'enseignant : par l'explicitation de ce qui est contextualisé dans la définition générale.

Nous regardons ici le manuel *Mathématiques Tout-en-Un*[7]. Ce manuel couvre le programme de mathématiques de la première année des classes préparatoires

[7] GAUTIER C., WARUSFEL A., CAMINADE B., FONTAINE H. & NICOLAS S. (2007) *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1re année,* Éditions Dunod.

économiques et commerciales et concerne principalement la filière scientifique. La partie « Analyse » du manuel commence par l'étude des suites et des nombres réels (chapitre 15) puis vient celle de la notion de limite d'une fonction (chapitre 16). La progression suivie dans le chapitre 15 est la suivante : définition de la notion de suite, étude de certains comportements globaux des suites (monotonie, suite majorée/minorée/bornée), définition de la convergence d'une suite et unicité de la limite (avec démonstration). Quelques résultats classiques sont ensuite démontrés.

***La définition de convergence***

La section qui traite des suites convergentes démarre par la définition suivante et fixe ensuite les notations (p.322) :

*Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l tel que*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

*On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On note $l = \lim u$ ou $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.*

La caractérisation choisie pour définir la notion de convergence vers un réel n'utilise que des symboles mathématiques. Elle n'est accompagnée d'aucun commentaire explicatif et n'est pas illustrée par un dessin. Telle qu'elle est présentée, il nous semble difficile d'établir ici un rapprochement avec les connaissances « déjà-là » d'un étudiant de L1 qui tenterait de s'approprier seul la notion en lisant ce manuel. L'étudiant aurait en effet complètement à sa charge de donner du sens au formalisme utilisé dans la définition.

Deux remarques suivent la définition dans le manuel. La première consiste à reformuler la définition précédente en termes d'intervalles (comme le préconisent les programmes du lycée) :

*La définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ou encore tous les termes de la suite sauf un nombre fini, sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon;\ l+\varepsilon]$.*

Cette reformulation est une occasion de donner un certain sens à la définition précédente. Cependant, aucune explication n'est donnée sur le passage des symboles présents dans la définition aux expressions utilisées ici, comme « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang », ni sur le passage de l'inégalité à la notion d'intervalle. Le lecteur doit donc ici aussi puiser dans ses connaissances ce qui permet de passer d'une caractérisation à une autre.

La deuxième remarque concerne le fait que la caractérisation en termes d'intervalles est aussi vérifiée pour des intervalles ouverts, avec une tentative de justification :

*Comme tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle de la forme $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, la propriété est vérifiée pour tout intervalle ouvert contenant l : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si, pour tout intervalle ouvert I contenant l, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans I.*

Remarquons que la justification ne porte que sur la transformation des intervalles, la question de savoir si le même entier $n_0$ convient selon qu'on travaille avec un intervalle ouvert ou un intervalle fermé n'est pas abordée. Elle est de nouveau laissée à la charge du lecteur.

Trois exemples d'utilisation de la définition sont ensuite traités pour montrer qu'une suite donnée converge vers un réel *l* ou est divergente (p.323) : « *une suite u constante converge vers* $u_0$ *», « la suite* $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0 » et « la suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente* ». C'est donc en tant qu'objet que la définition est ici utilisée. Nous étudions ici le second exemple. Les deux autres sont étudiés dans Bridoux et al. (2015).

Nous découpons la présentation du livre.
*En effet, soient* $\varepsilon > 0$ *et* $n_0$ *tel que* $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Cette première ligne soulève selon nous une ambiguïté. En effet, l'expression « soi(en)t » fait classiquement référence à la présence d'un (de) quantificateur(s) universel(s) dans la proposition quantifiée à montrer. Or, dans la définition de convergence, c'est un quantificateur existentiel qui précède l'entier $n_0$. Le fait de considérer un entier quelconque parmi tous ceux qui sont supérieurs à $\frac{1}{\varepsilon}$ ne met donc pas en évidence la quantification existentielle portant sur cet entier dans la définition puisque cet entier n'est pas explicitement donné. On se contente d'affirmer implicitement la possibilité d'en construire un qui satisfait l'inégalité donnée. Cela tient peut-être au fait que pour définir facilement un tel entier positif, il faudrait utiliser la partie entière d'un réel. Or, cette notion n'est définie que plus tard, dans la section sur les nombres réels. Nous y revenons juste après.
*On a alors, pour tout entier* $n \geq n_0$, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon$.

Tout d'abord, remarquons que l'expression « *pour tout entier* $n \geq n_0$ » ne respecte pas la structure logique choisie dans la définition dans laquelle il y a une implication liant les indices *n* et $n_0$. Ensuite, les inégalités ne sont pas justifiées, de nouveau c'est au lecteur de le faire lui-même.

Nous trouvons enfin une remarque en lien avec la construction de l'indice $n_0$ (qui renforce ce qui précède) :
*L'existence, pour tout réel x d'un entier* $n \geq x$*, utilisée constamment ici, sera justifiée dans la section 6 sur la partie entière.*

Telle que proposée, la rédaction de cet exemple ne montre pas une utilisation de la définition qui met en évidence sa syntaxe logique. Il nous semble de plus que la rédaction proposée ici pourrait ne pas être acceptée par tous les enseignants universitaires s'il s'agissait de la production écrite d'un étudiant de L1, puisque l'entier $n_0$ n'est pas explicitement donné et que les inégalités ne sont pas justifiées.

### *3.2.5. Analyse d'un cours en ligne, proximités potentielles*

En complément de l'analyse précédente, nous présentons ici une analyse logique des pratiques langagières d'un enseignant (vidéo proposée dans le cadre d'une formation à distance[8], l'enseignant n'est pas devant des étudiants, il accompagne son propos avec un diaporama). Cette analyse permet, à un niveau très local, de mettre en lumière des occasions de proximités lorsque l'oral s'ajoute à l'écrit mais sans étudiants réels. Nous voyons ici que l'enseignant s'éloigne du formalisme strict (tout en restant conforme aux pratiques de la communauté, ces pratiques langagières sont complètement naturalisées). On peut penser qu'il gagne souvent ainsi une certaine souplesse dans la formulation et une certaine concision. L'usage d'expression courante pour formuler les mathématiques, les reformulations ou la constations de possibilités multiples de formulations (jeu entre écrit et oral notamment) peuvent permettre certaines proximités horizontales, ou a minima peuvent donner à voir certains implicites.

#### *Reformulations*

Le cours analysé commence par énoncer la définition de la limite d'une suite. La formulation symbolique est très rapidement donnée. Il est frappant de constater que l'enseignant formule et reformule onze fois cette définition, par écrit ou oralement, de façon à chaque fois différente, en un peu plus d'une minute au début du cours. Cette première présentation est suivie d'un commentaire oral d'une représentation graphique d'une suite convergente, l'enseignant poursuit avec les limites infinies, puis énonce des propriétés des limites et prouve deux d'entre elles. Dans toutes ces phases de l'exposé, la définition est reformulée. Nous nous concentrons ici sur la première minute[9, 10].

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *Diapo* | 0:00 | La suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ |
| 2 | *Oral* | 0:08 | La suite $u\ n$ a pour limite $l$ appartenant à R |
| 3 | *Diapo* | 0:00 | Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que si $n \geq N$ alors $\lvert u_n - l \rvert < \epsilon$ |
| 4 | *Oral* | 0:12 | Pour tout epsilon positif il existe un entier grand $N$ tel que dès que l'entier petit $n$ est plus grand que grand $N$ alors valeur absolue de $u\ n$ moins $l$ est plus petit que epsilon. |
| 5 | *Diapo* | 0:24 | $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Longrightarrow \lvert u_n - l \rvert < \epsilon)$ |
| 6 | *Oral* | 0:27 | Pour tout epsilon [main sur ∀] il existe un entier [un pas, main sur ∃] naturel grand $N$, tel que [deux pas, main sur « $(n \geq N$»] si petit $n$ est plus grand que $N$ alors [un pas, main sur « $\Longrightarrow$ »] valeur absolue de [recule] $u\ n$ |

[8] http://youtu.be/253AEiNBvGw

[9] « Diapo » signale des éléments projetés sur le diaporama, « Oral » signale des phrases prononcées par l'enseignant, mis à part pour la formulation n°7 les formulations orales sont des reformulations de formulations écrites.

[10] Les temps indiqués correspondent au début de la formulation ou à l'apparition de la diapo. La vidéo commence 43 secondes avant le temps 0:00 ci-dessus. Pendant ces 43 secondes, l'enseignant présente le plan du cours.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | moins $l$ est plus petit que epsilon. |
| 7 | *Oral* | 0:44 | Autrement dit $u\ n$ est aussi proche que l'on veut de $l$ à partir d'un certain rang. |
| 8 | *Diapo* | 0:51 | $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ |
| 9 | *Oral* | 0:58 | Limite de $u\ n$ égale à $l$ lorsque $n$ tend vers plus l'infini. |
| 10 | *Diapo* | 0:51 | $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ |
| 11 | *Oral* | 1:01 | $u\ n$ tend vers $l$ lorsque $n$ tend vers plus l'infini. |

La définition est également reformulée plusieurs fois dans la suite du cours, notamment au cours des preuves, mais ce ne sera pas développé ici. Reprenons ici une des observations soulignées dans Bridoux (2015) : le cas de la quantification de $n$ est un cas intéressant de jeu entre l'oral et l'écrit, l'un complétant l'autre. Dans la formulation 3 la quantification universelle de $n$ est classiquement omise (implicite lié à l'implication), dans la formulation 4 on peut voir une trace de la quantification de $n$ dans le « dès que », dans la formulation 5 elle apparaît très explicitement, dans la formulation 6 elle disparaît à nouveau complètement (y compris dans la gestuelle de l'enseignant qui accompagne sa lecture de la main sur la diapo).

Notons également que dans les formulations 8 et 10 on énonce la définition en commençant par parler des termes de la suite et de sa limite, on parle ensuite de $n$ (ordre d'énonciation inverse de l'ordre logique[11]). « $n$ tend vers plus l'infini » acquiert une autonomie grammaticale dont on sait qu'elle pose ensuite des difficultés quant à la compréhension de la notion de limite (voir par exemple Job 2013).

L'enseignant ne peut, ici, ajuster son discours aux réactions qu'il constaterait chez les étudiants. On constate qu'il ne propose pas de commentaire mathématique des éléments pointés ci-dessus : une implication sous-entend toujours une quantification universelle, (non) sens de l'expression « $n$ tend vers l'infini » hors contexte, pourquoi utilise-t-on le mot « limite », « tendre vers », « proche », « à partir d'un certain rang » etc. Ces éléments sont pourtant potentiellement des moyens de travailler le contenu exposé.

[11] Voir par exemple Hache (à paraître) : "Un des questionnements récurrents sur l'expression des [quantifications] concerne l'ordre de ces [quantifications] : [Rakotovoavi] distingue l'*ordre logique* et l'*ordre d'écriture*. (…) retenons qu'en présence de deux [quantifications] on dit en général que la première des deux, selon l'ordre logique, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la [quantification] s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique. Donnons ici un exemple (...) : « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné ». La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné »".

La seule proximité en acte effective ici réside dans la succession de reformulations. Chaque reformulation enrichit les formulations précédentes, et peut enrichir potentiellement la compréhension de la notion par les étudiants.

***Usage du mot « rang », de l'expression « à partir d'un certain rang »***

Le second exemple développé concerne l'introduction du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang ». Le mot « rang » dans le contexte des suites mathématiques est synonyme d'« indice », il peut parfois aussi être remplacé par « nombre entier » (mais on perd alors le rappel du contexte des suites). L'expression « à partir d'un certain rang » renvoie à la double quantification « $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$ », et la cache. On peut par exemple dire « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang » pour « $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ u_n > 0$ ». Soulignons que dans cette situation il existe effectivement un entier $N$ tel que, quel que soit l'entier $n$, si $n$ plus grand que $N$ alors $u_n$ est positif. Les expressions « constante à partir d'un certain rang » ou « croissante à partir d'un certain rang » sont un peu plus compliquées, mais relèvent de la même analyse. Notons que ces différentes formulations ne font pas apparaître les variables muettes présentes dans les formulations quantifiées (classiquement $N$ et $n$). Il existe d'autres formulations usuelles proches utilisant la variable $n$ (mais pas $N$) comme « pour n assez grand », ou utilisant la variable $N$ (mais pas $n$) comme « il existe un rang $N$ à partir duquel ».

La formulation 7 ci-dessus « $u\ n$ est aussi proche que l'on veut de $l$ à partir d'un certain rang » est classique. L'usage de « à partir d'un certain » est plus complexe que dans les phrases précédentes. Il faut ainsi lire dans la formulation une quantification universelle de $\varepsilon$ (en ajoutant une intention concernant le fait que l'on veut que $\varepsilon$ soit petit, on retrouve une dimension pragmatique) et le fait que le rang évoqué par « à partir d'un certain rang » n'est pas déterminé : il dépend de $\varepsilon$.

Les expressions issues des usages courants de la langue permettent des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (conjugaisons, nuances qualitatives, insertion d'adverbes etc.) que ne le permet le formalisme. Elles cachent par contre la référence formelle, et elles ne permettent pas un usage directement « opérationnel » : comment montrer par exemple qu'une suite n'a pas pour limite zéro avec la définition « Une suite tend vers zéro si et seulement si elle est aussi proche que l'on veut de zéro à partir d'un certain rang » ? Elles ne permettent pas facilement non plus de saisir certaines nuances (différences d'usage de « à partir d'un certain rang » entre « la suite est strictement positive à partir d'un certain rang » et « $u\ n$ est aussi proche que l'on veut de $l$ à partir d'un certain rang »).

Il est intéressant d'analyser la façon dont l'enseignant introduit ces formulations dans son discours. Dans le premier cours sur les suites (définitions, exemples de suites, premières propriétés) et dans le cours étudié (2e cours), on trouve dix occurrences du mot « rang ». Le mot « rang » est utilisé pour « indice » (trois fois), dans une expression « à partir d'un certain rang » pour laquelle il existe effectivement un rang (cinq fois) ou dans le contexte plus complexe de l'usage de « à partir d'un certain rang » lié à la définition de limite (deux fois). Aucun commentaire n'est fait à propos de ces usages, l'étudiant peut faire des liens entre les formulations employées et ce qui est écrit (quand quelque chose est écrit et quand ce qui est écrit est différent de ce qui est prononcé, deux occurrences), mais c'est en général à lui de prendre l'initiative, et de faire le lien avec les questions de contenu. Autrement dit, les occasions de proximité existent bien, mais ne sont pas exploitées.

***Prononciation de «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ »***

La formulation écrite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être lue simplement[12] : la lecture explicite des parenthèses serait lourde, la variable $n$ est muette (« $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ » ne parle pas de $n$), cette suite n'a pas nécessairement encore de nom (faut-il l'appeler « $u$ » ?)... On lit souvent cette formulation en commençant par « La suite... » : « La suite $u$ », « La suite $u$ indice $n$ » (en ajoutant éventuellement « pour $n$ dans $\mathbb{N}$ », ce qui présente la variable $n$ et introduit plus explicitement le fait qu'elle est muette), « La suite $u$ $n$ » (idem), « La suite de terme général $u$ indice $n$ » (là aussi on peut ajouter « pour $n$ dans $\mathbb{N}$ » ce qui précise le domaine dans lequel la variable $n$ prend ses valeurs, la variable $n$ est déjà rendue muette par « de terme général ») etc. Il arrive qu'on utilise des formulations plus concises : « $u$ $n$ » pour « La suite $u$ $n$ », ou « $u$ », celles-ci permettent de simplifier les formulations de propositions ou de preuves complexes, tout en nécessitant une certaine complicité de l'auditeur ou du lecteur, et un travail complémentaire d'interprétation plus important.

Pour un entier $n$ donné, le $n$-ième terme de la suite est noté « $u_n$ », ce qui est souvent lu « $u$ indice $n$ » ou plus simplement « $u$ $n$ », on peut parfois préciser en disant « le terme $u$ $n$ » (ou « le nombre $u$ $n$ » par exemple).

On voit donc ici que deux objets très différents mais liés (une suite de nombres et un nombre par exemple, ce dernier étant un des termes de la suite) peuvent être désigné par des formulations orales très proches, voire par la même formulation (« $u$ $n$ »). Les relations entre ces deux objets sont au centre de la définition de limite : la convergence est une propriété de la suite, définie par une propriété de ses termes (et de la limite en question) quantifiée de façon complexe. La compréhension de la notion de limite est très liée à la compréhension de cet emboitement (propriété de la suite, propriétés de ses termes), de ces deux niveaux de lecture. L'enseignant désigne ici presque systématiquement les suites par les expressions « suite $u$ $n$ » ou « $u$ $n$ », il est intéressant d'analyser ce que permet ces quasi similarités de formulations, la façon dont cela fait parler le formalisme, lui donne sens, mais aussi les difficultés que cela peut engendrer (plus une formulation est concise, plus elle est porteuse

[12] La thèse de Jean Philippe Drouhard (Drouhard 1992) étudie entre autres ces notations mathématiques utilisant deux dimensions (notations des racines n-ièmes par exemple).

d'implicites), et la façon dont l'enseignant gère ces difficultés potentielles.

Certaines formulations jouent sur les deux niveaux (suite ou termes de la suite). Un exemple[13] « si *u n* tend vers plus l'infini [la suite] alors la suite des *u n* sur tend vers zéro [la suite]. Réciproquement, si *u n* tend vers zéro [la suite] et si les *u n* sont strictement positifs [les termes[14]], alors un sur tend vers plus l'infini [à nouveau la suite] ». La formulation écrite correspondante affichée (ci-dessous) ne laisse aucune ambiguïté sur le statut des objets. Elle permettrait donc à un auditeur attentif de décoder l'oral :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

Comme pour l'utilisation du mot « rang », les formulations orales sont souvent complétées ici par une formulation écrite. Celles-ci lèvent parfois l'ambigüité, et donnent donc implicitement des éléments des pratiques langagières concernant les suites. Parfois les formulations écrites intègrent, elles aussi, des raccourcis (que les formulations orales précisent ou non). Dans tous les cas, rien n'est explicité sur ces points.

Cela pourrait engendrer des difficultés de compréhension ou d'apprentissages : le cours porte sur une propriété des suites définie de façon complexe à partir des propriétés quantifiées des éléments de la suite, mais il arrive fréquemment que l'on désigne suite et éléments par le même nom.

Les analyses précédentes montrent qu'il y a à la fois dans le manuel et dans la vidéo de FAD des occasions de proximités mais celles-ci ne sont pas exploitées : par exemple des proximités descendantes à la suite de la définition de limite (manuel) ou des proximités discursives (vidéo de FAD) plutôt horizontales et locales. Nous allons maintenant voir dans quelle mesure ces occasions de proximités sont converties (ou non) en des proximités possibles par l'enseignant dans le cours magistral.

#### *3.2.6. Des exemples de proximités dans le cours magistral*

#### *Ce qui est recherché*

Pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1 sur la limite de

---

[13] Entre crochets, nos commentaires.

[14] L'enseignant marque, dans son expression orale, le fait qu'il parle des termes en utilisant le pluriel (« les $u\ n$ sont » et non simplement « $u\ n$ »).

fonction[15]. Pour ce faire, nous procédons à une analyse au niveau global et étudions le déroulement de ce cours en tentant d'y repérer des liens explicites entre ancien et nouveau pilotés par l'enseignant ; en particulier, nous nous intéressons à la présence de reformulations de la définition, à la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et de la structure logique (globale ou locale) de la définition de limite. Plus finement, nous prenons en compte le fait que dans un cours magistral le texte du savoir est accompagné du discours oral de l'enseignant, de ses gestes et d'interactions éventuelles avec certains étudiants[16] qui peuvent lui permettre de donner une certaine cohérence au savoir et de tisser des liens.

La nature FUG de la notion de limite laisse supposer qu'il n'y a pas d'activités préalables qui permettraient aux étudiants d'élaborer quelque chose se rapprochant de la définition visée. Cela nous amène à prendre en compte tout ce que l'enseignant explicite, les différentes reformulations ou illustrations qu'il utilise, les commentaires méta qu'il fait, la distance entre ce qu'il dit et ce qu'il écrit et la formulation orale associée au formalisme écrit. On se donne ainsi les moyens de repérer plusieurs types de passage dans cette association entre écrit et oral : la lecture orale des symboles écrits, avec ou non des ajouts de liaisons implicites (*tel que* par exemple) ; la traduction de certaines parties formalisées en mots (les inégalités lues en termes de distance par exemple).

***Présentation générale du cours étudié***

Le cours magistral étudié est une séance de 1h30 donnée au semestre 2 devant environ 200 étudiants de L1[17] portant sur l'introduction de la définition de la notion de limite de fonction (en un point, en l'infini). Il constitue la première rencontre des étudiants avec cette définition. Pour analyser cette séance, nous avons procédé à la transcription des écrits de l'enseignant au tableau et de son discours puis nous les avons mis en regard avant de procéder à un découpage du déroulement en phases qui suit celui effectué par l'enseignant sur le plan de son cours.

Le cours a été découpé en 15 phases mais, comme dans le cas du manuel, nous en analysons quatre qui correspondent à l'émergence de la définition de limite (finie) d'une fonction et à sa première utilisation en tant qu'objet : phase 1 (introduction intuitive), phases 3 et 6 (écriture et reformulation de la définition) et phase 12 (application de la définition). Nous renvoyons à Bridoux et al., ibid., pour une analyse plus complète de ces phases.

[15] Malgré les différences notables entre les définitions de limite de fonction et de limite de suite, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs puisque nous étudions des moments de première rencontre avec la définition formelle associée à une notion FUG.

[16] Même si l'on peut raisonnablement penser qu'il y a plutôt moins d'interactions entre enseignant et élèves que dans l'enseignement secondaire.

[17] Ces étudiants se destinent à des études en informatique ou en mathématiques.

Dans la suite, nous mettons en italique dans le corps des paragraphes les paroles transcrites.

***Introduction intuitive (phase 1)***

L'enseignant débute le cours en demandant aux étudiants une définition de la notion de limite puis écrit au tableau sous la dictée d'un étudiant :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\quad\quad\quad$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

L'enseignant obtient auprès d'un autre étudiant une définition intuitive, en mots, qu'il reformule : « *OK,* $f(x)$ *doit se rapprocher autant que l'on veut de* $l$ *mais quand* $x$ *se rapproche de* $x_0$ » (reformulation 1). Il s'appuie ensuite sur un graphique sur lequel il traduit « se rapprocher/se rapproche » par des symboles « flèche » avant de les reformuler en « aussi proche/suffisamment proche » en s'aidant de gestes ; la locution « quand » devient « si » : « $f(x)$ *est aussi proche que l'on veut de* $l$ *si* $x$ *est suffisamment proche de* $x_0$ » (reformulation 2).

Cette phase témoigne de la volonté de l'enseignant de tenter de partir des représentations intuitives d'un étudiant pour en arriver à une reformulation qui contient déjà en germe certains éléments logiques et formels de la définition. Cependant, la reformulation 2 est encore éloignée de la définition formelle quantifiée. D'une part, si les deux propositions qui la composent sont formulées de façon similaire (« $f(x)$ *est aussi proche que l'on veut de* $l$ » et « *si* $x$ *est suffisamment proche de* $x_0$ »), elles ne seront pas quantifiées de la même manière (respectivement par une quantification universelle et par une quantification existentielle). D'autre part cette reformulation nous semble être porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs[18] qui rend *a posteriori* difficile la justification de l'ordre choisi dans la définition. Cette tentative s'appuie-t-elle sur des connaissances ou représentations déjà-là de tous les étudiants ? Relaie-t-elle des besoins ou une réelle motivation ? La question se pose.

***Premières définitions (phases 3 et 6)***

Lors de la phase 3, l'enseignant écrit la définition de limite d'une fonction en un point en respectant une chronologie qu'il base sur la reformulation 2 obtenue en phase 1. Le tableau ci-dessous met en parallèle un extrait de ce qu'il écrit et de ce qu'il dit au début de cette chronologie.

[18] Il y a de fait une « inversion » entre l'idée intuitive que si $x$ se rapproche de $x_0$ alors $f(x)$ est proche de $l$, et la traduction formalisée qui garantit que cela est vrai « sans trou » pour peu qu'on soit « près de $x_0$ ».

| Ce qui est écrit au tableau | Ce qui est dit par l'enseignant (extraits) |
|---|---|
| $\forall\varepsilon > 0$ $\quad |x - x_0| < \alpha$ $\quad |f(x) - l| < \varepsilon$ | *Qu'est-ce que c'est que la distance de $f(x)$ à $l$ ?*[réponse d'un étudiant] *Oui c'est la valeur absolue de $f(x) - l$. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu'on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu'on veut de l, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu'on veut, on est d'accord. On veut que epsilon soit aussi petit qu'on veut, ça veut dire que ça va être vrai pour tout epsilon positif. Et on doit avoir ça si $x$ est suffisamment proche de $x_0$, c'est-à-dire si la distance de $x$ à $x_0$ est inférieure à une certaine valeur alpha.* |

Au tableau, il aboutit finalement à cet écrit à la fin de la phase 3 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underline{\forall\varepsilon > 0}$<br>que l'on veut | $\underline{\exists\alpha > 0}\ \forall x \in Df$<br>Suffisamment | $\underline{|x - x_0| < \alpha} \Rightarrow$<br>Proche | $\underline{|f(x) - l| < \varepsilon}$<br>Proche |

Lors de la phase 6, l'enseignant écrit la définition et le commentaire suivants : *<u>Définition :</u> soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f$ une fonction définie sur un voisinage de $x_0$. $f$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $x_0$ si et seulement si $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - l| < \varepsilon$. Autrement dit, aussi petit que soit ε on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de $x_0$ sur lequel la distance de $f(x)$ à $l$ est inférieure à ε.*

Lorsqu'il écrit la définition, il lit les valeurs absolues en termes de distances et dit : *D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit ε », « $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha$ » ça c'est un intervalle en fait donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de $x$ sur lequel la distance de $f(x)$ à $l$ est inférieure à ε.*

Il commente ensuite l'équivalence : $|x - x_0| < \alpha \iff x \in ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$.

Ce travail de l'enseignant témoigne de sa volonté d'introduire la définition de limite en travaillant sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales possibles basées sur des reformulations : en mots (oral et écrit), par le biais d'un graphique (oral et écrit), en termes de distance (oral) et d'inégalités strictes impliquant des valeurs absolues (écrit), en termes d'intervalles et de voisinages (oral et écrit). Cette tentative de rapprochement est à relativiser car elle reste orale et non écrite et que la distance dit/écrit est grande.

Même s'il prend en charge une partie de la structure logique de la définition de limite avec différentes reformulations (voir aussi phase 1), son ordre et l'apparition des quantificateurs sont entièrement à sa charge et sans lien avec les connaissances des étudiants. Ainsi, l'introduction de « $\exists\alpha > 0$ » semble retardée puis forcée par l'enseignant, étant donné qu'aucun élément de ses différentes reformulations ne permet de la motiver réellement. Ce sont des choix de mathématiciens motivés par des exigences hors de portée des étudiants, ensemblistes ou topologiques et par l'efficacité qui ont présidé à l'émergence de cette expression…

### *Un exemple d'application de la définition (phase 12)*

Durant la phase 11, l'enseignant définit la limite finie d'une fonction en $+\infty$ :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall x \in Df, x > r \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

qu'il reformule oralement en terme de distance avant d'écrire : autrement dit, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle $]r; +\infty[$ sur lequel la distance de $f(x)$ à $l$ est inférieure à ε. L'enseignant utilise dans cette définition la plupart des reformulations qu'il a introduites dans les phases 1, 3 et 6 ce qu'on peut interpréter comme une tentative de mise en cohérence des proximités horizontales qui y ont été mises en valeur. On peut penser aussi que cette mise en cohérence anticipe l'usage que l'enseignant va faire de cette définition dans la phase 12.

Dans la phase 12, l'enseignant propose de démontrer que « $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ », annonce qu'une « *méthode systématique* » va être utilisée puis écrit :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall x \in Df, x > r \implies |\frac{1}{x}| < \varepsilon$. Soit ε > 0 quelconque. On cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $x > r$ alors $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$. *J'écris donc si alors plutôt que l'implication. Alors est ce que ça vous semble possible et pour quelles valeurs de $r$ ça marche ?*

Un étudiant répond, l'enseignant poursuit :

*Eh oui, voilà $\frac{1}{\varepsilon}$ très bien. Alors la bonne manière de faire c'est de regarder la conclusion qu'on veut obtenir, on veut avoir cette propriété alors regardons à quelle condition on peut avoir ça, $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$, comment on peut l'écrire ? Moi je voudrais avoir une condition qui s'écrit $x > r$ donc on a des nombres positifs donc qu'est ce qui se passe si on prend l'inverse ? La fonction inverse elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc c'est dire que*

Il écrit : $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x$. Donc a fortiori $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Il commente : *Je cherche une implication, j'ai une équivalence donc si maintenant j'impose que x soit positif, ça, ça s'écrit... Alors est ce que je peux écrire ça, là on avait une équivalence et puis je rajoute une condition x positif. Donc j'ai plus une équivalence mais j'ai une inclusion de gauche à droite. Alors une fois qu'on a écrit les choses comme ça, qu'est qu'on prend pour $r$ ? On cherche un $r$ tel que si $x > r$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ et bien $r = \frac{1}{\varepsilon}$ ça marche d'accord ?*

Il écrit finalement : On pose $r = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > r$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Pour cette démonstration, l'enseignant met en valeur le formalisme et la logique locale de la définition qu'il reformule en utilisant les connaissances supposées anciennes des étudiants sur les valeurs absolues et la fonction inverse. Ce faisant, il crée une proximité descendante possible vis-à-vis de la définition formelle. En fin de démonstration, il revient explicitement et oralement sur une méthode générale et féconde pour prouver ce type de résultat :

*Donc qu'est-ce qu'il y a de général dans cette démarche ? C'est déjà de partir d'un epsilon positif quelconque et après d'avoir pour attitude de chercher r vérifiant cette propriété. Donc pour ça vous écrivez, vous tentez de réécrire la conclusion à laquelle vous voulez arrivez de manière à trouver une condition suffisante sur $x$, une condition de la forme $x > r$ pour avoir cette conclusion, d'accord ?.*

En quelque sorte, il tente de rendre la définition « procédurale », il faut se donner un epsilon et réaliser quelque chose ensuite qui est de l'ordre de la recherche d'une condition suffisante d'une forme souhaitée. En d'autres termes, il a introduit l'activité de définition formelle par le biais de reformulations (proximités horizontales) et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser.

#### *3.2.7. Bilan*

#### *Analyse du manuel et occasions de proximités*

Dans le manuel étudié, la notion de convergence d'une suite numérique est présentée sans motivation, la nécessité de la nouvelle définition n'apparaît pas. Dans un cours oral, l'enseignant peut commenter, même brièvement, l'introduction de cette nouvelle notion, même si la motivation tient seulement à l'évocation du savoir mathématique, donnant ainsi une occasion de proximité horizontale globale. L'enseignant qui introduit cette définition peut aussi l'exprimer à voix haute tout en l'écrivant et commenter la définition en mettant en évidence l'ordre des quantificateurs par exemple, en la reformulant – souvent ces commentaires sont dits et pas écrits –, ces reformulations pouvant aussi être accompagnées de commentaires explicatifs de l'enseignant (rappels sur la manipulation d'inégalités avec valeur absolue, dessin[19] pour les illustrer), donnant ainsi des occasions de proximités horizontales locales.

La progression choisie par le manuel est de donner la définition puis de l'illustrer sur des exemples, offrant ainsi une occasion de proximité descendante. Cependant, cette occasion est selon nous « manquée » puisque rien n'est dit sur l'utilisation de la définition, ni sur la prise en compte de sa syntaxe logique dans les exemples traités. De plus, toutes les justifications sollicitant des connaissances anciennes sur les inégalités et sur l'ordre des réels sont laissées à la charge du lecteur.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe (cours sur une notion FUG), le savoir présenté dans le manuel reste exclusivement « objet » puisqu'on n'a pas de commentaire sur « à quoi il sert » et comment, même s'il est utilisé ; tous les liens sont à construire par le lecteur (dont le manuel ne préjuge pas les connaissances déjà-là).

#### *Analyse du cours magistral et proximités possibles*

Les analyses du manuel et de la vidéo de FAD ont mis en valeur des occasions de proximités non exploitées. L'analyse du déroulement du cours magistral montre que certaines d'entre elles sont converties en proximités possibles locales par

[19] Robert (1983) a élaboré une séquence didactique visant à introduire la définition de convergence à partir d'un travail sur la représentation graphique de certaines suites. Une première représentation de la notion en terme de bande autour de la limite dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang peut émerger de ce travail avec l'aide l'enseignant.

l'enseignant. Si le caractère FUG de la définition de limite semble interdire à l'enseignant des liens complets avec les connaissances des étudiants, de nombreux indicateurs au sein de son activité discursive font état de proximités horizontales possibles avec les connaissances ou représentations anciennes des étudiants (soit par le biais de reformulations des définitions ou par la traduction de phrases logiques) mais aussi de proximités descendantes possibles dans les démonstrations.

Pour établir ces proximités, l'enseignant se base sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, distances et valeurs absolues, voisinages…) et sur une mise en valeur de connaissances en logique (quantificateurs, méthodes de raisonnement, condition suffisante…) : en outre, il les accompagne de commentaires explicatifs, contrairement au manuel où certains passages étaient laissés à la charge du lecteur. On a cependant noté un certain nombre de paraphrases, qui ne permettent pas d'aborder des difficultés importantes, liées aux choix faits par les mathématiciens pour fixer cette définition de limite et pas à la traduction « mot à mot » de l'idée intuitive dynamique des étudiants. D'autre part, la plupart de ces proximités possibles sont dites et non écrites (grande distance en général entre le dit et l'écrit chez cet enseignant) ce qui peut relativiser leur portée : parmi ceux qui participent, on peut se demander qui est susceptible de profiter de ces commentaires ; sans doute faudra-t-il attendre les cours ou les travaux dirigés suivants les rendre opérationnels.

***Discussion et bilan général***

Dans notre étude, nous n'avons pas identifié de proximités ascendantes, ce qu'on peut interpréter de plusieurs manières. L'analyse du relief de la notion de limite et son interprétation comme notion FUG en particulier rend selon nous difficile la mise en place d'une situation permettant un recours à des proximités ascendantes naturelles, quel que soit le type de cours. Cette difficulté pourrait être encore accentuée par le choix du moment d'enseignement, à la transition secondaire/supérieur, et aux « *manières de faire les mathématiques* » à chacun des ordres (Corriveau, 2013).

Les analyses de la vidéo de FAD et du cours magistral ont mis en valeur les reformulations successives de la définition de limite utilisées par les deux enseignants. Dans le premier cas, les reformulations restent très proches de la définition formalisée écrite, celle-ci étant souvent traduite directement en mots et le symbolisme sous-jacent étant souvent lu de gauche à droite. Dans le deuxième cas, nous avons vu que les reformulations sont progressives, en lien avec certaines connaissances anciennes des étudiants et que le symbolisme de la définition est introduit selon une chronologie qui tient compte d'une partie de ses difficultés logiques. Les reformulations dans les deux types de cours ne sont donc pas de même nature : en termes de proximités, nous interprétons cela comme une occasion de proximité discursive partiellement manquée dans le cas de la vidéo de FAD et comme une proximité possible dans le cas du cours magistral.

Dans cette partie, notre objectif principal était d'illustrer notre méthodologie générale. Elle nous a permis d'identifier des différences entre les occasions de proximités (repérées par le chercheur) dans le manuel et la vidéo de FAD et des proximités possibles (repérées par le chercheur) dans le cours magistral, compte tenu de l'enseignant et du déroulement qu'il organise. Dans ce dernier cas, on peut se demander si ces proximités sont conscientes (ou pas) chez l'enseignant et questionner leur impact sur les étudiants. Enfin, une question se pose naturellement : parmi les nombreuses occasions de proximités identifiées, lesquelles retenir ? C'est le travail du chercheur en didactique des mathématiques que de mettre en valeur des choix de proximités à l'aune de différentes analyses et cela constitue sans doute une perspective prometteuse de nos travaux.

## 4. Bilan de l'étude, limites, discussion

### 4.1. Un bilan de l'étude proposée

#### *4.1.1. L'importance de la prise en compte du contexte*

Rappelons que toute analyse d'un cours doit être rapportée au contexte précis où il a eu lieu – il n'est qu'à lire ce qui est constaté en première année d'université pour apprécier les différences avec ce qui peut se passer au lycée sur la notion de limite, où sa présentation a des objectifs beaucoup moins formels, sur la même notion. Sont en jeu les programmes et les spécificités de la notion à enseigner, mais aussi la classe, l'enseignant et ses conceptions… Par exemple, selon le niveau de conceptualisation en jeu, on peut viser des connaissances mobilisables ou disponibles, que ce soit en termes d'outils et/ou d'objets, et c'est l'ensemble du cours qui en est affecté.

#### *4.1.2. Étude locale croisée des contenus et des déroulements*

L'hypothèse que nous avons développée induit qu'interviennent dans ce qui nous intéresse, à savoir les activités, même invisibles, des élèves, non seulement les choix de contenus des cours, mais aussi les discours effectivement tenus. Nous devons analyser par exemple le degré de généralité des énoncés, mais le rapporter aux exemples et exercices les accompagnant ainsi qu'aux commentaires qui sont tenus en même temps que les énoncés, aux échanges et questions auxquels cela donne lieu – que cela vienne ou non des élèves.

Plus précisément, nous donnons un rôle dans les acquisitions visées, aux proximités discursives que l'enseignant développe (ou non) pendant le cours. Nous avons en effet fait l'hypothèse que ces tentatives de rapprochements peuvent jouer comme un levier cognitif, d'autant plus que les élèves ont moins d'occasion de développer des activités autonomes pendant le cours. Ces proximités favoriseraient, on l'a dit, la conceptualisation attendue, à partir de la présentation de ce qui peut n'être d'abord que des pseudo-concepts pour les élèves. Il est donc important à nos yeux de les prévoir, puis de les repérer.

À ce titre, nous avons avancé que les passages contextualisé↔non-contextualisé (général), dans les deux sens, sont spécifiques des cours[20] de mathématiques et sont des occasions particulièrement propices à développer des proximités cognitives. Elles mettent en jeu des liens entre des activités, des connaissances déjà-là, ou presque déjà-là et des connaissances visées (avec notamment les liens ancien/nouveau, théorèmes et applications). Ces proximités sont associées au fait de rendre visible, explicite, ce qui est illustré, ou généralisé, et les relations précises entre contexte et non-contextualisé[21]. En effet une nouvelle notion, et particulièrement lorsqu'elle s'accompagne d'un nouveau formalisme, embarque un certain nombre d'éléments invisibles directement à partir des seuls mots ou des premières formules, avec un potentiel d'utilisation pour aborder des (nouveaux) problèmes, également en partie caché.

Dans le cas des proximités ascendantes, le chercheur essaie de comprendre ce qui est (pourrait être) ajouté par l'enseignant aux activités préliminaires pour éclairer la montée en généralité, le repérage de ce qui est en jeu dans la nouvelle notion en regard de la version contextualisée travaillée.

Dans le cas des proximités descendantes il s'agit de traquer le repérage (explicite) de ce qui est variable dans l'expression générale, non-contextualisée et de ce qui ne l'est pas, ainsi que les remplacements et substitutions à faire quand on passe à une contextualisation de l'expression générale. Les proximités descendantes ont pour objectif d'aider les élèves, au cours d'exercices d'application voire d'exemples, en accompagnant leur application en contexte et à éprouver le potentiel de la notion (et des formules).

Il se peut que l'analyse du relief indique qu'il est difficile d'introduire une proximité ascendante – on évoquera une proximité impossible, voire en partie un peu illusoire si elle est tentée. Il se peut qu'au contraire une occasion de proximité soit manquée aux yeux du chercheur. On en a vu des occurrences dans l'exemple des représentations graphiques en troisième et pour les limites en L1.
De plus, des éléments explicites sur des parties générales, non-contextualisées, non transformables en activités immédiates, peuvent participer à maintenir les élèves dans une forme d'activité : le cours est presque le seul moment où l'enseignant peut expliciter des éléments liés à une vue globale de ce qui est en jeu, où il peut dégager des relations entre notions, dégager ainsi leur organisation ; il peut aussi dévoiler la structuration de l'exposition des connaissances en cours, ou même référer à la genèse

[20] Même s'il y en a aussi dans les moments d'exercices, mais plus dispersés, et toujours initiés par le contextualisé.
[21] En général de l'ordre des commentaires méta, plus ou moins généraux eux-aussi.

du savoir en jeu et aux démarches à l'œuvre. On évoque des proximités horizontales globales. De plus on suppose qu'un certain nombre d'explications, d'échanges enseignant-élèves plus locaux, sans changement de niveau de généralité de ce qui est en jeu, jouent aussi un rôle dans le maintien dans l'écoute (et dans l'activité). On évoque des proximités horizontales locales. Elles servent également à renseigner l'enseignant sur cette écoute, contribuant à entretenir une certaine proximité entre les acteurs, peut-être pas directement cognitive, mais nécessaire. Cela peut aussi éclairer les objectifs à atteindre pour les élèves. On en a vu des exemples dans les différents cours sur les limites.
Reste à savoir dans quelle mesure ces interventions s'inscrivent dans le reste des activités des élèves, et participent à la compréhension visée. Sans même évoquer les notions éloignées des connaissances antérieures (FUG) pour lesquelles il nous semble d'emblée difficile de développer des proximités ascendantes, il pourrait y avoir des proximités engagées par des questions de l'enseignant, faisant référence à des questionnements théoriques (ou technologiques) non « obligatoires ».

### 4.2. Des limites théoriques

Plus généralement la notion même de pseudo-concept s'applique plutôt à des concepts quotidiens, pour des petits enfants – nous l'appliquons à des concepts scientifiques en réseaux, pour des élèves plus âgés... De plus les pseudo-concepts introduits par Vygotski, sont associés souvent seulement à des mots et des idées, à partir d'actions concrètes : le concept mathématique associé aux mots, et souvent il y a plusieurs mots en jeu, est, lui, porteur de sens, de techniques, il peut faire intervenir du symbolisme, il y a même souvent plusieurs représentations associées et il n'est jamais isolé. Cela justifie l'attention que nous portons à tout ce qui accompagne le texte du savoir, à plusieurs niveaux, exprimé dans différents registres pour illustrer les différents aspects du concept.

D'autre part toute cette élaboration théorique s'appuie sur une tentative d'opérationnaliser la ZPD – mais les ZPD sont des caractéristiques individuelles, et il s'agit de cours à une classe – y aurait-il lieu d'introduire une notion de ZPD « moyenne » ?
Quel est le rôle du collectif dans les moments de cours – cf. échanges provoquant des proximités ? Quelles différences entre les élèves ?

De même qu'il y a des différences dans les différentes parties des cours, qui n'alimentent pas les mêmes aspects des connaissances, de même il est vraisemblable qu'il y a des différences entre les élèves concernant les processus d'apprentissage. Par exemple l'expérience montre que certains élèves ont du mal à entrer directement dans un cours décontextualisé, d'autres en revanche ont du mal à s'intéresser à un exercice dont ils ne comprennent pas (encore) la finalité.

### 4.3. Une discussion didactique

Pourquoi ne pas se contenter de la notion d'institutionnalisation (introduite en TSD, notamment pour le primaire, et très répandue hors de son contexte initial) et lui préférer le mot exposition des connaissances ? Cela tient à ce que nous adoptons un point de vue plus général que celui de la TSD, lié aux pratiques effectives… sur toutes les notions. Nous pensons qu'il n'y a pas toujours lieu d'utiliser le mot dans son sens initial, précis.
En fait d'une part, c'est tout un processus d'institutionnalisation qui est en jeu, qui n'est pas présent dans nombre de séances ordinaires. Du reste en TSD, il reste aussi des interrogations sur la manière précise et la possibilité de mener à bien la phase finale d'institutionnalisation qui nous concerne ici (Mounier, 2010, Allard, 2015).
D'autre part, en lien avec les différents types de notions, déjà évoqués, la notion d'institutionnalisation est peut-être trop restrictive pour rendre compte de tout ce qui se fait ou de ce qui peut être fait en cours. « *On ne peut pas regarder le cours de la même manière s'il vient en synthèse d'une situation qui mettait en jeu le contenu ou s'il vient avant…* [22]».

Par ailleurs la TSD a amené à travailler l'institutionnalisation à partir de la décontextualisation et de la dépersonnalisation des savoirs (nous regroupons les deux qualités sous le terme de « non-contextualisé »), à partir des activités antérieures des élèves. Ainsi, après une recherche des élèves sur un problème, accessible, où la mise en œuvre du savoir visé par les élèves est incontournable, voire si possible contrôlable par les seuls élèves, suivie d'une synthèse du travail des élèves, les enseignants dégagent, en s'appuyant sur cette synthèse le savoir décontextualisé, légitime, général, à retenir et réutiliser. Le mot « décontextualisé » a alors son sens propre, « issu d'un contexte », « généralisé ». En fait lui aussi est souvent utilisé de manière plus large, comme synonyme de « général ».
Nous utilisons le mot « non-contextualisé » pour nous démarquer de l'indication implicite d'un travail contextualisé, antérieur à l'énonciation du savoir.

### 4.4. Des questions globales qui restent posées

Comment savoir qu'une (ou un ensemble de) proximité(s) a (ont) été active(s) dans un processus de conceptualisation ?
Comment apprécier les moments de cours dans l'ensemble d'un scénario ?

Qu'attend-on des élèves comme travail sur le cours ? Qu'est-ce que les élèves attendent des cours ?
Y a-t-il des différences selon les différents supports utilisés dans les cours (vidéos[23], TNI, polycopié à trous, sans trous, manuels…) ?

---

[22] Communication privée MJ Perrin.
[23] Une étude est en cours sur la classe inversée.

Quid du travail « hors-classe » ?

Cela rejoint des questions plus larges et notamment celles-ci : quel profil d'élèves est visé dans la scolarité obligatoire ? À quelles différences d'objectifs, voire de potentialités des élèves, peuvent être liées les alternatives, dans la forme, la durée, les modalités des cours, voire des programmes ?

## 5. Conclusions et perspectives

Nous ne répondrons pas aux questions ci-dessus mais nous indiquons des pistes pour avancer la réflexion dans certaines de ces directions.

### 5.1. Une vision globale dans un cours : perspective de recherches ultérieures

À un niveau global, faire cours engage inévitablement des choix (ou des compromis ?), plus ou moins prévisibles, en tension, entre la présentation d'un exposé cohérent, général, donnant à voir le jeu auquel on joue dans ce chapitre des mathématiques, abordant des aspects du pourquoi ou du pour quoi (cf. proximités horizontales non locales, ou ascendantes), provoquant des interrogations, avec une ambition en termes de compréhension, et celle d'un exposé plus directement applicable et peut être plus utile aux élèves, abordant les aspects liés au comment faire (cf. proximités descendantes ou horizontales locales).

Tout se passe comme si deux niveaux de pensées étaient « activés » liés à deux logiques :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, à l'adoption plus ou moins implicite d'un mode de validation mathématique. On pourrait évoquer une logique épistémologique, voire heuristique, qui mettrait en jeu des réponses à des questionnements explicites ou non, d'ordre théorique ou technologique.
- et une autre plus « scolaire », plus locale, plus liée aux contrats, liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, d'armer les futures utilisations (y compris techniques). On pourrait évoquer une logique « procédurale » qui mettrait en jeu des réponses à des questions techniques, explicitées ou non.

Il peut y avoir tension car suivre la deuxième logique peut faire perdre le fil aux élèves, voire être (très) ennuyeux, tout en les rassurant en partie, privilégiant un apprentissage procédural et des réponses sur le « comment », mais suivre la première peut avoir aussi pour conséquence de perdre les élèves, notamment au moment du retour aux applications strictement mathématiques, en « séduisant » certains et en ennuyant d'autres élèves. Le recours à des éléments un peu externes aux mathématiques, faisant intervenir l'intelligence « ordinaire », le langage familier, ou à des éléments historiques, l'énoncé d'éléments non directement utilisables, peuvent être bien reçus ou le contraire : on a tous l'expérience de ces élèves qui lèvent leur stylo quand « ça ne sert pas » et, a contrario, de ces yeux qui s'allument quand on s'évade du strict contexte.

Participent notamment à ces choix les niveaux de langage et de généralité adoptés, ainsi que la nature des commentaires ajoutés et le choix des proximités développées. Ainsi les études précédentes des choix de contenus (avec le statut des connaissances, la traque de ce qui ne sert pas) et des différentes proximités possibles détectées pourraient amener à détecter les traces de ces deux logiques qui se combinent différemment dans les cours.

Ajoutons que les évaluations choisies par les enseignants font partie du tableau global qu'on peut dresser pour comprendre mieux ce que peut apporter un cours dans l'ensemble d'un scénario : y compris pour apprécier dans quelle mesure ce sont les évaluations qui président à certains choix dans les cours ou l'inverse, quand les évaluations sont fonctions de ce qui aura été fait...

### 5.2. Des entretiens avec les enseignants et les élèves : une autre piste

Des entretiens avec des enseignants pourraient compléter ce qui est inféré des vidéos à ce sujet – complétés par des questionnaires des élèves (notamment de ces enseignants), sur les cours. C'est un premier moyen d'approcher à la fois ce que les enseignants attendent des élèves et la manière dont les élèves reçoivent le cours et en conçoivent l'utilisation : un certain nombre de questionnaires de ce type ont déjà été dépouillés et d'autres sont en cours de réalisation (Bridoux et al, 2015). Nous avons constaté que les interrogations portent souvent sur les choix difficiles, à repenser chaque année, de ce qu'on choisit d'exposer, sur l'insertion de ces moments dans le reste des activités et sur ce qu'on attend des élèves.

Cela confirme à la fois la diversité des points de vue des enseignants et leur auto-questionnement (cf. logiques en tension).
Du côté des difficultés des élèves, ils se demandent souvent à quoi sert ce moment de « cours », comment concilier écoute, compréhension et prise de notes (de façon à garder une trace jugée indispensable). Dans le questionnaire correspondant (ibidem), une question tentant de faire associer le qualificatif « général » aux théorèmes et définitions n'a pas du tout été comprise. Un certain nombre d'élèves semble ne pas non plus apprécier autant les activités préparant le cours que les exemples ou exercices résolus donnés pendant ce dernier. Pour eux très majoritairement l'étude du cours est assimilée à l'acquisition de ce dont ils ont besoin pour la résolution des exercices, tout particulièrement pour les contrôles.
Cela rejoint notre intérêt pour les proximités ascendantes et horizontales non locales, dont l'effet reste à tester.

### 5.3. Conclusion

Le cours proprement dit serait un réservoir de pseudo-concepts à retenir et à travailler pour les transformer en concepts, ce qui met en jeu un temps long et tout le scénario concerné. Nous avons évoqué différents outils pour étudier les contenus des cours, et d'autres, très liés au repérage de ces contenus, pour étudier les discours effectifs, dont les proximités discursives.

Suivant cette hypothèse et les perspectives envisagées, plusieurs conditions joueraient, selon les cas, pour que des éléments donnés en cours puissent être appropriés, transformés par chaque élève en connaissances individuelles (éventuellement disponibles) :

- l'inscription des moments d'exposition dans le reste du scénario, en termes de cohérence, de liens et de dynamiques, mettant notamment en jeu les activités des élèves, avant ou après,
- le déroulement choisi et les explicitations des passages du contextualisé au décontextualisé ainsi que les reformulations, reprises, répétitions et commentaires sur le décontextualisé, impliquant plus ou moins les élèves (appréciées en termes de proximités discursives réalisées)
- les logiques globales récurrentes, imbriquées, procédurale ou épistémologique, développées à l'oral, sur l'ensemble d'un chapitre, voire sur l'année.

En particulier ce serait de la qualité et des variétés des tâches proposées et du jeu des proximités développées, notamment en cours, y compris improvisées, ajustées aux élèves, que dépendraient la compréhension, la richesse et l'apprentissage de ce qui peut être mis en mémoire et la possibilité de mobiliser correctement les savoirs correspondants.

Cela demande une grande disponibilité des enseignants, notamment pour improviser des proximités alors même que ce qui est en jeu est peut-être naturalisé pour lui (transparent, non objet de questionnement – cf $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Pour avancer, il manque une étude de davantage de cours, et une mise en relation peut-être indirecte avec des effets sur les élèves – ou au moins des hypothèses à ce sujet. Des recherches complémentaires sont à mener, en faisant varier les contenus étudiés, les élèves, les enseignants, en interrogeant les élèves à la sortie d'un cours, en comparant des productions d'élèves et leur cours... On peut aussi penser à comparer les occasions de proximités repérées par les chercheurs et les proximités possibles développées par les enseignants et réfléchir aux raisons des différences dans des recherches collaboratives…

## Bibliographie

ALLARD C. (2015), *Étude du processus institutionnalisation dans les pratiques d'enseignants de fin d'école primaire : le cas des fractions*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot.

BRIDOUX S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas.* Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).

BRIDOUX S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY N., HACHE C. & ROBERT A. (AVEC LA COLLABORATION DE LEVI, M.C. ET PILORGE F.) (2015), Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz,* n°14, Juillet 2015.

BRIDOUX S. (2016), Introduire la notion de convergence avec une ingénierie didactique des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant ?, *Actes du colloque INDRUM,* Montpellier.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D. & PEZARD M. (2003), Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des mathématiques* **23.1**, 41-78, Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1991), Sur la déconcertation cognitive. *Interactions didactiques* **12**, 27-51.

CORRIVEAU C. (2013), Explicitation des ethnométhodes mathématiques des enseignants du secondaire et du postsecondaire pour mieux comprendre les enjeux de transition. Dans N. Bednarz (dir.) *Recherche Collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement,* L'Harmattan, Paris, 231-263.

DIEUDONNE M., DRONIOU J., DURAND-GUERRIER V., RAY B. & THERET D. (2011), Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. *Repères-IREM* **85**, 5-30.

DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7/2**, 5-31.

DROUHARD J.P. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, éditée par l'IREM de Paris, Paris.

DURAND-GUERRIER V. (2013), Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage,* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

GUEUDET G. (2008), Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175.

HACHE C. (A PARAITRE), Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques, in *Actes du 20e colloque de la CORFEM, juin 2014*, Grenoble.

JOB P. (2013), Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations, in COPPE S. et HASPEKIAN M. (2013) *Actes du séminaire national de didactique des Mathématiques, année 2013*, édité par l'IREM de Paris, Paris.

MARGOLINAS C. (2015), Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie* **188**, 13-22.

MOUNIER E. (2010), *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot (Paris7).

PARIES M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques. Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24 2-3**, 251-284.

PETROPOLOU G., JAWORSKI B., POTARI D. & ZACHARIADES T. (2016), Addressing large cohorts of first year mathematics students in lectures. *INDRUM 2016 Proceedings.*

PRZENIOSLO M. (2005), Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics* **60 1**, 71-93.

ROBERT A. (1982), L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **3.3**, 307-341.

ROBERT A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* **340**, 431-449.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18/2**, 139-190.

ROBERT A. & POUYANNE N. (2004), Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°5*, IREM Paris-Diderot.

ROBERT A. & ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.2**, 145-176.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies* Vol 2 (4), 505-528.

ROUSSE S. Thèse en cours, Université Paris Diderot.

ROBERT A. & VANDEBROUCK F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **34 2-3**, 239-285.

TENAUD I. (1991), *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes.* Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2**, 133-170.

**STEPHANIE BRIDOUX**
LDAR (EA 4434)
Université de Mons (Belgique)
stephanie.bridoux@umons.ac.be

**NICOLAS GRENIER-BOLEY**
LDAR (EA 4434)
Université de Rouen (France)
nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr

**CHRISTOPHE HACHE**
LDAR (EA 4434)
Université Paris-Diderot (France)
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

**ALINE ROBERT**
LDAR (EA 4434)
Université Cergy-Pontoise (France)
aline.robert@u-cergy.fr