

УДК 519.246

АНАЛИЗ И ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО sech^k РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А.В. ОВСЯННИКОВ, В.М. КОЗЕЛ

Белорусский государственный университет
Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 июля 2013

Проведен анализ робастных свойств обобщенного sech^k распределения. Показана возможность получения естественно-сниженных оценок максимального правдоподобия параметра смещения этого распределения. Получена нестационарная плотность процесса, описываемого СДУ со случайной структурой при сосредоточенных переходах из одного состояния в другое. Приведены примеры применения обобщенного sech^k распределения в статистических и технических задачах.

Ключевые слова: плотность распределения, робастность, оценка.

Введение

Адекватное вероятностное описание сложных помеховых ситуаций в задачах статистической радиотехники, описание случайных составляющих статистических данных при их обработке требует использования в этих целях универсальных, обобщенных, многопараметрических моделей. Одной из таких моделей, введенной в [1], является обобщенное sech^k -распределение (generalized secant hyperbolic k distribution – GSHK модель) с плотностью:

$$P_k(x, u) = uC(k)\text{sech}^k(ux), \quad k = v/u, \quad u, v > 0, \quad (1)$$

где $C(k) = \Gamma((1+k)/2)\Gamma^{-1}(k/2)/\sqrt{\pi}$, $\Gamma(x)$ – гамма функция. Отметим, известны и другие модели такого класса: GHS-модель (W. L. Harkness, M. L. Harkness, 1968) и GSH-модель (David S. Vaughan, 2002). Однако, применение этих моделей в технических задачах затруднено в связи со сложностью получающихся на их основе нелинейных преобразований в алгоритмах обработки и существенными трудностями, возникающими при идентификации параметров моделей. В то же время для плотности (1) нелинейное преобразование имеет простой и легко реализуемый в технических задачах вид $Z(x) = -\ln P_k(x, u) / dx = v \text{th}(ux)$. Распределение с плотностью (1) включает в себя, как частные случаи, распределение Чампернауна [2] $P_1(x, u) = u \text{sech}(ux) / \pi$ и логистическое распределение с плотностью $P_2(x, u) = u \text{sech}^2(ux) / 2$. Коэффициент эксцесса плотности (1) ограничен: $\lim_{k \rightarrow 0} \gamma(k) = 3$ (соответствует лапласовской плотности $P_0(x) = (v/2)\exp(-v|x|/2)$) и $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(k) = 0$ (соответствует гауссовской плотности $P_\infty(x) = \sqrt{vu/\pi} \exp(-vix^2/2)$). Описание ряда основных свойств и характеристик GSHK модели приведено в [3].

Цель работы – анализ робастных свойств плотности (1); формирование нестационарной плотности процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) использующим (1); исследование применения модели плотности GSHK.

Робастные свойства GSHK модели

Следующая теорема устанавливает основное свойство плотности (1), которое может быть использовано при построении робастных процедур оценивания скалярного параметра смещения $\theta \in \Theta$ (Θ – интервал на действительной оси) при аддитивном шуме x и модели наблюдения $r = \theta + x$, $P = P(r|\theta)$.

Теорема. Плотность (1) $P_k(x, u) = P^*$ минимизирует количество информации Фишера $I = \int Z_0^2 P dr$, $Z_0 = P'_\theta / P = -P'_x / P = Z$ на классе параметрических, регулярных, не финитных на носителе $x \in (-\infty; \infty)$, гладких плотностей P , для которого существует и конечна величина $\int Z^{*2} P dr$, где $Z^* = -P_x^{*'} / P^*$, в условиях $Z^*(0) = 0$, $P^*(0) = \varepsilon > 0$.

Доказательство. Функция Лагранжа изопериметрической задачи с учетом нормировки $\int P dx = 1$ имеет вид $L = P_x'^2 / P + \lambda_0 P + \lambda_1 Z^{*2} P$, где λ_0 , λ_1 – множители Лагранжа. Соответствующее функции L уравнение Эйлера $-2Z_x' + Z^2 - \lambda_0 - \lambda_1 Z^{*2} = 0$. Поскольку минимум I достигается при $Z = Z^*$, то имеем $-2Z_x^{*'} + (1 - \lambda_1)Z^{*2} - \lambda_0 = 0$. Рассмотрим при каких значениях $\lambda_j \neq 0$, $j = 0, 1$ нетривиальные решения уравнения Эйлера будут удовлетворять условиям теоремы.

1. $\lambda_j > 0$. $Z^* = -\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 - 1)^{-1}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 - 1)}x/2)$.
2. $\lambda_j < 0$. $Z^* = \sqrt{\lambda_0(\lambda_1 + 1)^{-1}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 + 1)}x/2)$.
3. $\lambda_0 > 0$. $\lambda_1 < 0$. $Z^* = -\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 + 1)^{-1}} \operatorname{th}(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 + 1)}x/2)$.
4. $\lambda_0 < 0$. $\lambda_1 > 0$. $Z^* = \sqrt{\lambda_0(\lambda_1 - 1)^{-1}} \operatorname{th}(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 - 1)}x/2)$.

В случаях 1 и 2 плотности имеют вид $P_{1,2}^* = \varepsilon \left[\cos(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 \mp 1)}x/2) \right]^{\mp 2/(\lambda_1 \mp 1)}$. Однако эти плотности с учетом нормировки финитны и не удовлетворяют условиям теоремы. В случаях 3 и 4 плотности имеют вид $P_{3,4}^* = \varepsilon \left[\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_0(\lambda_1 \pm 1)}x/2) \right]^{\pm 2/(\lambda_1 \pm 1)}$. Выберем $\lambda_0^{3,4} = \mp 2\nu u$, $\lambda_1^{3,4} = \mp 1 \mp 2u/\nu$, тогда $P_{3,4}^* = \varepsilon \left[\operatorname{ch}(ux) \right]^{-\nu/u} = \varepsilon \operatorname{sech}^k(ux)$, $k = \nu/u$. Эта плотность удовлетворяет условиям теоремы. Окончательно, с учетом нормировки, получаем распределение (1), т. е. $P_{3,4}^* = P_k(x, u)$, $\varepsilon = uC(k)$. Нелинейная функция $Z^* = \nu \operatorname{th}(ux)$. Таким образом, теорема доказана.

Количество информации Фишера относительно параметра смещения $I(u, k) = u^2 k^2 / (1 + k)$. Оценка максимального правдоподобия (ММП-оценка) параметра смещения, имеющая вид $\int Z P dx = 0$, состоятельна по Фишеру, асимптотически нормальна и эффективна [4, 5]. ММП-оценке присущи следующие свойства.

1. Является В-робастной и качественно робастной с пороговой точкой 1/2, поскольку функция Z и, следовательно, функция влияния $IF(x, P) = I^{-1}(u, k)Z(x)$ ограничена с предельной чувствительностью $\rho^*(u, \nu) = \sup |IF(x, P)| = (1 + k) / \nu$.

2. Является V-робастной, т. к., согласно [5], для неубывающей функции Z понятия V-робастности и В-робастности эквивалентны. Существует и конечна величина чувствительности к изменению асимптотической дисперсии: при $P = P^*$ имеем $\chi^*(u, \nu) = 1 + \rho^{*2}(u, \nu)I(u, k) = 2 + k$.

3. Имеет не только конечные чувствительности ρ^* и χ^* , но и является наиболее робастной, сходящейся при $u \rightarrow \infty$ к медианной [5].

Следует заметить, что модификация приведенной ММП-оценки $\int \Psi P dx = 0$, где $\Psi = Z_x' Z$, есть естественно-сниженная ММП-оценка [5], сходящаяся к сниженной:

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x) = 0$. Действительно, поскольку $\int (Z^2)'_x P dx = (Z^2 P)|_{-\infty}^{\infty} + \int Z^3 P dx$, но в симметричных пределах $(Z^2 P)|_{-\infty}^{\infty} = 0$ и аналогично стандартной ММП-оценке имеет место $\int Z^3 P dx = 0$, следовательно, $\int Z'_x Z P dx = 0$. Графики плотности $P_k(x, u)$ и функции $\Psi(x) = Z'_x(x)Z(x)$ изображена на рис. 1 и рис. 2.

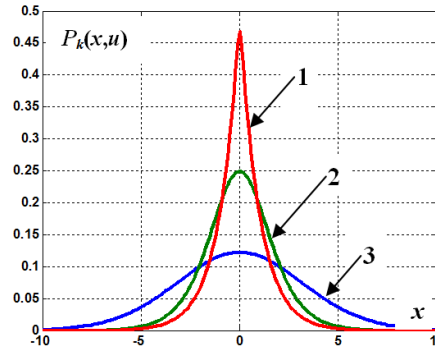


Рис. 1. Плотность (1) с параметрами u, v, k : 1 – $u = 10, v = 1 (k = 0,1)$; 2 – $u = 0,5, v = 1 (k = 2)$; 3 – $u = 0,1, v = 1 (k = 10)$

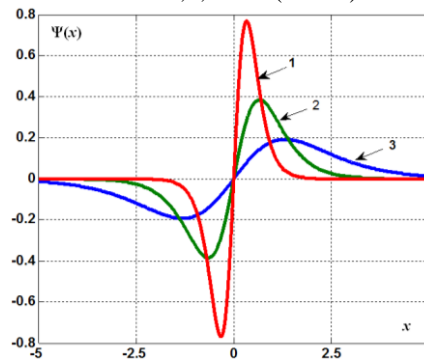


Рис. 2. Функция Ψ : 1 – $u = 2 (k = 0,5)$; 2 – $u = 1 (k = 1)$; 3 – $u = 0,5 (k = 2)$

СДУ процесса со стационарной плотностью GSHK

При известной стационарной плотности скалярного процесса $x(t)$ его СДУ:

$$\dot{x}(t) + bZ(x) / 2 = n(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум с нулевым средним $\langle n(t) \rangle = 0$ и дельтаобразной корреляционной функцией $\langle n(t)n(t') \rangle = N\delta(t'-t)$, $b = N$ – коэффициент диффузии. Перепишем СДУ в виде $\dot{y}(t) + cth(y) = un(t)$, где $y(t) = ux(t)$, $c = vub / 2$ и рассмотрим непрерывную кусочно-линейную аппроксимацию функции $cth(y)$. Тогда получим

$$\dot{y}(t, s) + A_{0,s} + A_{1,s}y(t, s) = un(t), \quad y(t_0, s_0) = y_0, \quad (3)$$

где $A_{0,s} = c[th(y_s) - seah^2(y_s)y_s]$, $A_{1,s} = cseah^2(y_s)$, $\{y_s\}$ – множество заданных точек в области определения $Z(y) = cth(y)$, $s \in S$ – индекс структуры, $s = \overline{1, ns}$, ns – нечетное число структур, причем структурам с номерами 1 и ns соответствует $Z(y) = \mp c$, а структуре с номером $s = \text{med}(ns)$ функция $Z(y) = cy$. Таким образом, уравнение (3) описывает СДУ со случайной структурой при сосредоточенных переходах из одного состояния в другое [6]. Поскольку функция $Z(y)$ ограничена, то задаваясь абсолютной погрешностью непрерывной кусочно-линейной аппроксимации Δ_s участка структуры, соответствующего индексу s из условия $|y_s - y| \leq \Delta_s$, число ns однозначно определяется методами этой аппроксимации. Решение (3) имеет вид

$$y(t, s) = y_0 e^{-A_{1,s} t} - (A_{0,s} / A_{1,s}) (1 - e^{-A_{1,s} t}) + u \int_0^t e^{A_{1,s}(\tau-t)} n(\tau) d\tau. \quad (4)$$

При достижении и пересечении ординарным процессом $y(t, s)$ границ $y_s \pm \Delta_s$ происходит смена структуры s на $s \pm 1$. На границах $y_s \pm \Delta_s$ происходит поглощение реализации процесса $y(t, s)$ и восстановление реализации $y(t, s-1)$ (или $y(t, s+1)$) с начальным условием $y(t_0, s_0) = y_s - \Delta_s$ ($y(t_0, s_0) = y_s + \Delta_s$), т.е. конечные условия процесса в состоянии s совпадают с начальными в состоянии $s-1$ (или $s+1$).

Локальные характеристики – снос и диффузия – определяются выражениями $a(t, s) = -A_{0,s} - A_{1,s} y(t, s)$, $b = u^2 N$; математическое ожидание и дисперсия имеют следующий вид: $M(t, s) = y_0 e^{-A_{1,s} t} - (A_{0,s} / A_{1,s}) (1 - e^{-A_{1,s} t})$, $D(t, s) = u^2 N (1 - e^{-2A_{1,s} t}) / 2A_{1,s}$. Уравнения для стационарных вероятностей состояния структуры:

$$p(1) = \int_{-\infty}^{y_2 - \Delta_2} P_k(y, u) dy = F(y_2 - \Delta_2, k), \quad p(1) = p(ns), \quad (5)$$

$$p(s) = p(ns - s + 1) = \int_{y_s - \Delta_s}^{y_s + \Delta_s} P_k(y, u) dy = F(y_s + \Delta_s, k) - F(y_s - \Delta_s, k). \quad (6)$$

Таким образом, если плотность начальной координаты $P(0, y | s) = \delta(y - y_0)$, граничные условия $P(t, \pm\infty | s) = 0$, то условная нестационарная плотность

$$P(t, y | s) = [2\pi D(t, s)]^{-1/2} \exp\left[-(y - M(t, s))^2 / 2D(t, s)\right], \quad (7)$$

которая является решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial P(t, y | s)}{\partial t} = -\nabla \Phi_s, \quad \Phi_s = a(t, s) P(t, y | s) - \frac{1}{2} \nabla (b P(t, y | s)), \quad \nabla = \partial / \partial y. \quad (8)$$

Для структур $s = 1, ns$ из (7) с учетом того, что $\lim_{A_{1,s} \rightarrow 0} M(t, s) = y_0 - A_{0,s} t$ и $\lim_{A_{1,s} \rightarrow 0} D(t, s) = bt$, получаем плотность $P(t, y | s = 1, ns) = [pb t]^{-1/2} \exp\left[-(y - y_0 \mp ct)^2 / bt\right]$, $Z_{1,ns}(y) = \mp c$. Для медианной структуры $s = \text{med}(ns)$, т.к. $y_s = 0$ также получим

$$P(t, y | s) = [2\pi\sigma^2(1 - e^{-ct})]^{-1/2} \exp\left[-(y - y_0 e^{-ct})^2 / 2\sigma^2(1 - e^{-ct})\right], \quad \sigma^2 = b / 2c, \quad Z_s(y) = cy.$$

Условная нестационарная плотность $P(t, y | s)$ для остальных индексов структур определяется общей формулой (7) для конкретных значений y_s . Таким образом, совместная нестационарная плотность процесса $\{y(t), s(t)\}$ принимает вид

$$P(t, y, s) = \sum_{s=1}^{ns} P(t, y | s) p(s) \delta(S - s).$$

Например, если $ns = 3$, что соответствует кусочно-линейной аппроксимации функции $Z(y) = \{cy, |y| \leq 1; c \text{sign}(y), |y| > 1\} = \max\{-c; \min(cy, c)\}$ в виде нелинейности с насыщением, получаем условные нестационарные плотности $P(t, y | s = 1)$, $P(t, y | s = ns = 3)$, $P(t, y | s = \text{med}(ns) = 2)$ и стационарные вероятности структур $p(1) = p(3) = F(-1, k)$, $p(2) = 1 - 2p(1)$.

Применение GSHK модели и результаты моделирования

Применение GSHK модели $P_k(x, u)$, $k = 1, 2$ в практике статистического анализа достаточно широко. Так, например, плотности $P_1(x, u)$ (распределение Чампернауна), $P_2(x, u)$ (логистическое распределение) получили распространение в социальных и финансово-экономических исследованиях. Кроме того, известны применения логистического

распределения в описательной статистике биосферы и технических областях, например, для описания прочностных характеристик усталости металлов. В математической статистике источником возникновения логистического распределения является асимптотическая теория экстремальных значений. Вместе с тем, обобщенное sech^k -распределение, за счет дополнительного параметра $k=v/u$, представляет более гибкий инструмент в анализе и решении теоретических и прикладных задач. Приведем некоторые области применения свойств и характеристик исследуемого распределения.

1. Обобщенное sech^k -распределение относится к хьюберовскому классу [4] приближенно гауссовских распределений, которые можно представить как $P(x) = (1-\alpha)N(x) + \alpha G(x)$ или $P(x) = \{(1-\alpha)N(x), |x| \leq \Delta_x; \alpha G(x), |x| > \Delta_x\}$, где $0 < \alpha < 1$, Δ_x – ширина участка, описываемого плотностью $N(x)$, $N(x) = N(x; 0, \sigma^2)$ – гауссовская плотность, $G(x)$ – произвольная плотность. В практике применения робастных процедур статистической обработки данных при наличии «утяжеленных хвостов» экспериментальных гистограмм, для их описания, в качестве плотности $G(x)$ используется лапласовская плотность $G(x) = \lambda \exp(-\lambda |x|) / 2$. Показано [4,5], что ММП-оценка параметра смещения θ при использовании функции с насыщением $Z(x) = \max\{-\lambda; \min(x/\sigma^2; \lambda)\}$, где $\sigma^2 = \Delta_x / 2\lambda$, определяет оптимальную робастную оценку Хьюбера. В этой связи обобщенной робастной ММП-оценкой параметра смещения θ является алгоритм с функцией $Z(x) = v \text{th}(ux)$, $x = r - \theta$. ММП-оценка, в этом случае, оказывается более гибкой, учитывающей возможности адаптации к параметрам v и u [1].

2. Распределение с плотностью (1) может быть использовано в анализе финансовых рядов. Так, например, адекватное вероятностное описание логарифмической доходности индекса РТС в период с 02.02.2009 по 29.01.2013 ($N_x = 1000$ отсчетов временного ряда, источник <http://www.rts.ru>) может быть получено с использованием плотности (1) ($k = 0,70$; $u = 1,02$; $\theta^* = 0,11$).

В таблице представлены сравнительные значения критерия Пирсона для трех распределений и различным числом интервалов группирования данных при построении гистограммы. Величина m (ближайшее нечетное число) определялась: для столбца №1 формулой Старджеса $m = \log_2(N_x) + 1$, для столбца №2 формулой [7] $m = (\gamma^* + 4,5)N_x^{0,4} / 6$, для столбца №3 формулой $m = \sqrt{N_x}$, где $\gamma^* = 2,34$ – выборочный коэффициент эксцесса. В строке №4 таблицы приведены критические значения для соответствующих величин $m-2$ степеней свободы и уровня значимости 1 %. Выборочная оценка параметра λ лапласовской плотности вычислялась по формуле $\lambda^* = \left(\sum_{i=1}^K |x_i|\right)^{-1}$.

Сравнительные значения критерия Пирсона

Распределение		№ 1, $m = 11$	№ 2, $m = 19$	№ 3, $m = 31$
№ 1	гауссовское	47,2	88,7	131,2
№ 2	лапласовское	31,2	28,9	42,1
№ 3	sech^k	8,1	12,5	17,9
№ 4	критич. значение	21,7	33,4	49,6

На рис. 3 приведена гистограмма данных логарифмической доходности индекса РТС в сравнении с теоретическими кривыми плотностей (строки № 1–№ 3 таблицы) для случая, приведенного в столбце №3 таблицы. Представленные результаты показывают, что гипотеза о принадлежности выборочных данных модели обобщенного sech^k -распределения не отвергается, тогда как гауссовскую модель следует отвергнуть. Модель в виде лапласовского распределения, согласно критерию, также не отвергается, но показатель критерия хуже, чем у распределения $P_k(x, u)$. Визуализация (рис. 3) показывает, что модель $P_k(x, u)$ адекватно описывает выборочные данные и находится между лапласовской и гауссовской моделью.

Таким образом, плотность $P_k(x, u)$ представляет гибкий инструментальный анализа финансовых рядов.

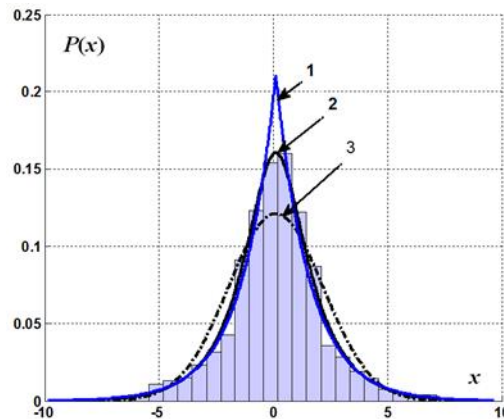


Рис. 3. Гистограмма и аппроксимации (таблица): 1 – строка № 2; 2 – строка № 3; 3 – строка № 1

3. В области статистической радиотехники распределение $P_k(x, u)$ удобно использовать для описания шума с медленными, нестационарными изменениями интенсивности и амплитуды [1]. В этом случае эффективным оказывается применение адаптивных процедур для настройки параметров функции $Z(x) = v^* \text{th}(u^* x)$, например, таких как совместные ММП-оценки $u^* = \arg \max_{u \in U} P_k(x, u)$, $v^* = \arg \max_{v \in V} P_k(x, v/k)$. Уравнения аналоговой и последовательной дискретной ММП-оценки (фильтрации в случае $\theta = \theta(t)$) параметра θ принимают вид $\int_0^T v^* \text{th}[u^*(r(t) - \theta)] dt \Big|_{\theta(T) = \theta^*(T)} = 0$, $\theta_{i+1}^* = \theta_i^* - K_i v^* \text{th}[u^*(r_i - \theta_i^*)]$, где $\theta^*(0) = \theta_0^*$ – предварительно заданное начальное значение оценки, K_i – коэффициент, определяемый конкретным видом стохастической аппроксимации $\sum_{i=1}^n v^* \text{th}[u^*(r_i - \theta^*)] = 0$.

Заключение

Проведен анализ робастных свойств GSHK модели плотности (1). Показано, что ММП-оценка параметра смещения для этой плотности распределения качественно робастна, В- и V-робастна. Простая модификация ММП-оценки приводит к формированию естественно-сниженных ММП-оценок. Исследована возможность получения нестационарной плотности, описываемого СДУ процесса со случайной структурой при сосредоточенных переходах из одного состояния в другое. Приведены примеры применения GSHK-модели.

ANALYSIS AND APPLICATION OF GENERALIZED DISTRIBUTION SECH^k

A.V. AUSIANNIKAU, V.M. KOZEL

Abstract

The analysis of the robust properties of the generalized sech^k-distribution is made. The possibility of producing natural-reduced maximum likelihood estimates of the offset parameter of the distribution is shown. Time-dependent density of the process described by the SDE with random structure centered at the transitions from one state to another is obtained. Examples of application of the generalized sech^k distribution in statistical and technical problems are given.

Список литературы

1. *Овсянников А.В.* // Радиотехника. 2011. № 3. С. 85–89.
2. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. СПб., 2001.
3. *Овсянников А.В.* // Докл. БГУИР. 2012. № 5. С. 58–64.
4. *Хьюбер Дж. П.* Робастность в статистике. М., 1984.
5. *Хампель Ф., Ронchetti Э., Рауссеу П. и др.* Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М., 1989.
6. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М., 1993.
7. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов наблюдений. Ленинград, 1985.