

# SOSTITUIBILITÀ ED ELASTICITÀ DEGLI INPUTS: UN CASO STUDIO

Anna Rita Germani

## 1. Introduzione

Stimare il grado di sostituibilità tecnica tra fattori produttivi, l'esistenza di economie di scala, le elasticità del costo e le funzioni di domanda degli inputs sono elementi essenziali per studiare il tema dell'efficienza produttiva. Obiettivo del presente lavoro è di offrire alcune questioni teoriche circa la sostituibilità tecnica tra fattori produttivi. Nel secondo paragrafo vengono affrontate alcune delle più rilevanti problematiche teoriche connesse alla definizione e alla stima delle diverse funzioni di produzione. Nel terzo paragrafo e nei successivi, vengono presentati i risultati relativi al caso studio specifico.

Sono diverse le misure proposte in letteratura per misurare la sostituibilità tra fattori produttivi, basti pensare alla elasticità Hicksiana diretta, alla elasticità di Allen-Uzawa e all'elasticità di Morishima. In questo lavoro ci si soffermerà sulla elasticità di Allen-Uzawa.

Selezionare una forma funzionale per modellare un particolare processo di produzione non rappresenta un compito facile. Quando si considerano problemi empirici, l'analista dovrebbe mettere statisticamente a confronto i risultati di diverse forme funzionali oppure dovrebbe utilizzare una forma estremamente flessibile al fine di evitare forzature nell'attribuire certe caratteristiche tecniche ai dati. Per esempio, la funzione Cobb-Douglas presenta isoquanti convessi, ma ha elasticità di sostituzione unitaria; essa può essere utilizzata solamente per rappresentare fattori complementari e non consente di rappresentare fattori tecnicamente indipendenti o competitivi (Beattie B., Taylor R., 1985). Ad ogni modo, la funzione Cobb-Douglas può essere una buona approssimazione per i processi di produzione nei quali i fattori produttivi sono imperfetti sostituti, ed è relativamente semplice da stimare poichè nella forma logaritmica è lineare nei parametri.

Sono molti i potenziali candidati per la scelta della forma funzionale: solamente per dare alcuni esempi, la forma funzionale quadratica, la translogaritmica e la Leontiev generalizzata, generata da un'espansione di secondo ordine nella trasformazione dei dati, possono tutte essere delle forme funzionali adatte. In lavori simili, (Yu, Segarra *et al.* 2000), sono state utilizzate diverse forme funzionali

incluse la doppia logaritmica, la semi-logaritmica, la Mistscherlich-Spillman, la quadratica e la cubica. La quadratica è stata la forma funzionale che si è meglio adattata ai dati e che ha fornito stime economicamente solide.

Nel presente studio, è stata scelta la forma funzionale quadratica, ma questo è solo il punto di partenza per future ricerche al fine di estendere l'analisi a diverse forme funzionali a scopi comparativi. Obiettivo di questo lavoro è, quindi, quello di stimare la relazione esistente tra produzione ed inputs al fine di individuare le soluzioni economiche ottimali, applicata ad un caso studio specifico relativo alla coltivazione di lattuga nel sud-ovest degli Stati Uniti.

Un'analisi delle caratteristiche del suolo è stata condotta per sviluppare modelli di risposta del suolo con l'utilizzo di acqua ed azoto nella produzione della lattuga. L'influenza dell'azoto sulla crescita delle piante è stata studiata in esperimenti di laboratorio; la presenza o l'assenza di azoto ha un grande impatto sulla crescita delle piante. Un rilevante aspetto è che le piante dipendono quasi completamente dall'irrigazione mentre l'azoto è il nutriente più limitante per la produzione dei raccolti. Nell'agricoltura irrigua, il management dell'acqua ha una forte influenza sul management dell'azoto, ed una completa comprensione di tale interazione è necessaria per selezionare le quantità di azoto in grado di ottimizzare il prodotto raccolto e di minimizzare le perdite di azoto per volatilizzazione (Letey *et al.*, 1983; Sanchez *et al.*, 1994; Stark *et al.*, 1983).

Azoto ed acqua sembrano essere sostituti ma il coefficiente di sostituzione è vicino allo zero, e questo consente di affermare che essi sono, piuttosto, da considerare indipendenti. Questi due inputs dovrebbero essere combinati al fine di ottenere un efficiente utilizzo delle risorse e il livello massimo di produzione senza compromettere l'ambiente. Miglioramenti del modello possono essere ottenuti considerando il prezzo degli inputs al fine di specificare le implicazioni sia in termini di possibili combinazioni di produzione di un certo livello di output al minimo costo, subordinatamente a vincoli tecnici ed economici, sia in termini di massimizzazione del profitto. I risultati che emergono dall'analisi dell'elasticità di sostituzione tra acqua e azoto dimostrano che è presente un certo grado di sostituibilità tra di essi, ma è molto basso. Ciò sta a significare che essi sono quasi indipendenti e che possono essere utilizzati in proporzioni fisse. In questo caso, gli isoquanti assumono la stessa forma degli isoquanti della funzione di produzione di Leontiev, poichè non c'è sostituibilità. Ne consegue che gli isoquanti assumono la particolare forma ad angolo retto; lungo l'isoquanto esiste, infatti, una sola combinazione tecnicamente efficiente e qualsiasi quantitativo in più di un fattore produttivo, fermo restando il quantitativo dell'altro, non comporta alcun incremento dell'output.

## 2. Il problema della scelta del modello di funzione di produzione

Secondo Seiford e Thrall (1990) la descrizione delle tecnologia produttiva potrebbe essere sintetizzata nella funzione di produzione, se questa fosse conosciuta...ma in pratica, si dispone solo di dati o meglio di un insieme di osservazioni. La letteratura sugli schemi di produzione e sull'evoluzione delle forme funzionali è vastissima e va dalle più tradizionali funzioni di produzione, come la Cobb-Douglas, la C.E.S. (Constant Elasticity of Substitution), la V.E.S. (Variable Elasticity of Substitution), alle più recenti come le funzioni Leontiev generalizzata e translogaritmica. Tra i vari filoni di ricerca che studiano l'efficienza produttiva e allocativa, assume particolare rilievo l'analisi dei fattori di produzione e delle loro effettive possibilità di sostituzione. Nell'ambito di questi modelli si è sviluppata una grande varietà di funzioni, al fine di superare le limitazioni insite nelle rispettive formulazioni analitiche. L'elasticità di sostituzione è un parametro fondamentale di ogni funzione di produzione. Essa indica quanto varia l'utilizzo relativo dei fattori rispetto a una variazione percentuale unitaria del rapporto dei loro prezzi. Infatti, il concetto di sostituibilità fra fattori della produzione consente di valutare la reazione della domanda di fattori rispetto a variazioni nei prezzi relativi degli stessi (Ciaralli S., 1996). I diversi modelli di produzione implicano ipotesi diverse sull'elasticità di sostituzione; dal modello di Cobb-Douglas in cui l'elasticità di sostituzione ha valore unitario e costante, si passa a funzioni più flessibili, in cui l'elasticità può assumere qualsiasi valore, costante o variabile.

La funzione Cobb-Douglas ha costituito per lungo tempo la funzione di produzione più largamente impiegata nei modelli economici. La diffusa applicazione di questa funzione si deve sia alla facilità di stima dei parametri (regressione multipla della trasformata logaritmica), sia alla sua rispondenza alle ipotesi della teoria della produzione (es. produttività marginale decrescente). L'eccessiva rigidità delle ipotesi sottostanti al modello ha indotto, però, gli studiosi ad utilizzare i modelli C.E.S. e V.E.S., che sono stati a loro volta sostituiti successivamente dalle funzioni flessibili. La funzione C.E.S. è una funzione di tipo Cobb-Douglas caratterizzata da rendimenti di scala costanti, perfetta sostituibilità tra i fattori produttivi ed elasticità incrociata tra i fattori di produzione di valore unitario.

In verità la funzione Cobb-Douglas non è ritenuta in grado di cogliere aspetti fondamentali quali la stessa sostituibilità tra fattori e numerose altre questioni quali quelle concernenti le economie di scala (Ciaralli S., 1996). Tali limiti non vengono superati neanche dal modello C.E.S. o da quello V.E.S., se non in quanto si ammette la possibilità che i valori dell'elasticità di sostituzione possano assumere valori diversi dall'unità. Appare, quindi, poco realistico assumere che le possibilità di sostituzione tra fattori siano identiche e costanti nel tempo, come implicito nel modello Cobb-Douglas (Ciaralli S., 1996).

Quindi, i risultati sulla stima dell'elasticità di sostituzione non variano molto se si passa da forme funzionali più vincolate, come la Cobb-Douglas, a quelle meno vincolate, come C.E.S. e V.E.S. Oltretutto, il contributo fornito dalle formulazioni meno vincolate in termini di maggiore aderenza ai processi produttivi, viene controbilanciato dalla maggiore complessità delle procedure di stima che la non linearità necessariamente comporta.

Dalla famiglia dei modelli C.E.S. e V.E.S. si è passati alle più recenti forme flessibili<sup>1</sup> della funzione translogaritmica, della leontieviana generalizzata, della funzione quadratica ed altre, nelle quali sono rimaste solo le ipotesi di base imposte dagli assiomi fondamentali, mentre le rimanenti, parametrizzate, sono ormai suscettibili di verifica statistica empirica (Giusti F., 1994). Tra le forme funzionali flessibili particolare successo ha ottenuto nelle applicazioni empiriche la funzione trascendente logaritmica o translog, suggerita da Christensen, Jorgenson e Lau. Tra le ragioni di tale successo, ricordiamo che essa può approssimare un'arbitraria funzione di produzione derivabile almeno due volte, in quanto è costituita da uno sviluppo in serie di Taylor-McLaurin troncato ai termini del secondo ordine (Bruno G., 1996). I suoi parametri consentono di rappresentare una tecnologia con elasticità di sostituzione tra i fattori non unitarie e non costanti.

La funzione Leontiev generalizzata è caratterizzata da una estrema flessibilità, particolarmente utile soprattutto quando non si possono o non si vogliono fare assunzioni sull'elasticità di sostituzione, assunzioni necessarie ad esempio con le C.E.S. e Cobb-Douglas (Mandarino N., 1996). Essa è caratterizzata da una struttura quadratica con un numero qualsiasi di fattori, che contiene come caso particolare la funzione di Leontiev a rapporti fissi dei fattori.

Nonostante tali specificazioni consentano un maggior numero di sostituzioni e di trasformazioni di quante ne consentano le specificazioni basate su elasticità di sostituzione costante, il problema della scelta della forma più idonea a rappresentare una certa situazione reale, non è di facile soluzione, poichè ciascuna di esse possiede una regione più o meno grande, nello spazio dei parametri, in cui la funzione non verifica i requisiti essenziali richiesti per la descrizione di una tecnologia (monotonicità e quasi concavità) (Giusti F., 1994). Al fine di poter scegliere la forma funzionale più adatta, sarebbe importante poter disporre di test statistici in grado di verificare gli specifici gradi di flessibilità di ciascuna e la loro capacità previsionale.

La scelta a favore di una funzione di produzione quadratica, è costituita dal fatto che, come tutte le funzioni flessibili, essa è caratterizzata da un'approssimazione locale del secondo ordine (serie di Taylor)<sup>2</sup> e possiede, seguendo Fuss, McFadden e

---

<sup>1</sup> Nei modelli di funzioni flessibili non sono imposti vincoli restrittivi a priori, quali l'omoteticità, l'addività e la costanza dell'elasticità di sostituzione o di trasformazione.

<sup>2</sup> Un'approssimazione di ordine  $n$  di una funzione implica che le prime  $n$  derivate della funzione, sono approssimate in corrispondenza di un punto particolare.

Mundlak (1978), le caratteristiche di una forma funzionale ideale: *a*) parsimonia nei parametri, che rende possibile stimare coerentemente i parametri di interesse. La maggior parte dei data sets economici non sono molto grandi, cosicchè i gradi di libertà sono valutabili; *b*) semplicità di interpretazione: i parametri economici devono essere semplici per poter essere tradotti in parametri economici da spiegare; *c*) robustezza interpolativa al fine di esibire comportamenti coerenti con le ipotesi fatte (quali monotonicità e quasi-concavità) nel range dei dati.

La letteratura è molto utile nel fornire il framework teorico per il modello oggetto di analisi. C.A. Sanchez, R.L. Roth, e B.R. Gardner (1994) hanno condotto uno studio molto significativo in un lavoro simile. Alcuni dei loro risultati saranno confrontati con i risultati del presente lavoro. Essi calcolano le combinazioni di minimo costo di acqua ed azoto in modelli di risposta del suolo per coltivazioni di broccoli e cavolfiori prodotti nelle zone del basso deserto nel sud ovest degli Stati Uniti ed i tassi di massimizzazione del profitto di acqua ed azoto in uno scenario realistico di prezzi. Una delle più significative implicazioni economiche è che le quantità di acqua ed azoto necessarie per massimizzare i profitti, cambiano di poco nello scenario dei prezzi considerato.

Anche il lavoro di J. Letey, W.M. Jarrel, N. Valoras e R. Beverly (1983) realizza un modello sull'efficienza sia nell'applicazione di fertilizzante sia sul management dell'irrigazione nella produzione di broccoli. Due esperimenti nelle irrigazioni sono stati condotti sulla crescita della coltivazione di broccoli e si è osservato che la crescita delle piante aumenta con l'aumento delle applicazioni di azoto. Nelle condizioni in cui è possibile praticare considerevoli trattamenti di azoto si ottiene un notevole valore aggiunto nell'utilizzare l'azoto con l'acqua di irrigazione.

C.A. Sanchez, R.L. Roth, Gardner B.R. e Ayer H. (1996) hanno condotto un altro studio sull'irrigazione ed il management di azoto per la produzione di cavoli su sabbia con irrigazione a pioggia. Scopo dello studio è quello di stabilire i livelli critici di azoto usando concentrazioni di azoto nitrico durante la stagione di crescita dei cavoli. Emerge l'esistenza di un elevato grado di correlazione tra le concentrazioni di azoto nitrico in vari campioni. Essi dimostrano la dipendenza del prodotto raccolto dalle concentrazioni di azoto nitrico quando l'azoto è un fattore limitante della produzione.

Altri articoli di interesse per il presente studio sono quelli di Doerge, Roth, e Gardner (1991), e di Heady, Pesek, e Brown (1955). I loro lavori riguardano, rispettivamente, l'analisi del management dell'azoto come fertilizzante in Arizona e la risposta del suolo alla produzione e l'uso economico ottimale del fertilizzante.

Beverly R.B., Jarrell W.M e Letey J. (1986) descrivono, anche, in modo significativo, un modello di risposta del suolo ad applicazioni di azoto ed acqua per coltivazioni di broccoli irrigati a pioggia. Essi investigano gli effetti combinati di cinque livelli di applicazione dell'azoto con irrigazione variabile continua. I tassi di crescita generalmente aumentano sia con i trattamenti di acqua sia con quelli di

azoto, sebbene siano emerse alcune particolari interazioni. L'analisi del conseguente modello di risposta del suolo indica che sotto la condizione di irrigazione a pioggia frequente (approssimativamente due volte a settimana), tassi relativamente bassi di azoto offrono la combinazione acqua e azoto di minimo costo.

### 3. Il modello teorico

Un problema fondamentale nella stima di una funzione di produzione è quello rappresentato dalla relazione tecnologica esistente tra l'output e gli inputs. Al fine di stimare la funzione di produzione quadratica prescelta è necessario approfondire alcune delle sue caratteristiche; in particolare, si assume generalmente che la funzione di produzione  $y = f(x_1, x_2)$  soddisfi le seguenti proprietà:

- a)  $f(0, x_2) = f(x_1, 0)$
- b)  $df/dx_1 > 0$        $df/dx_2 > 0$
- c)  $d^2f/dx_1^2 < 0$      $d^2f/dx_2^2 < 0$
- d)  $(d^2f/dx_1^2)(d^2f/dx_2^2) - (d^2f/dx_1dx_2)^2 > 0$

A questo punto, *a)* indica che ambedue gli inputs sono indispensabili nella funzione di produzione dell'output; *b)* stabilisce che ambedue i prodotti marginali sono non-negativi e *c)* stabilisce che la matrice hessiana delle derivate parziali di secondo ordine della funzione di produzione risulta essere semidefinita negativa, assicurando la curvatura convessa degli isoquanti.

La funzione di produzione può esibire rendimenti di scala in punti particolari. Così nel punto  $(x_1, x_2)$  la funzione di produzione presenta

$$\left. \begin{array}{l} \text{costanti} \\ \text{crescenti} \\ \text{decrescenti} \end{array} \right\} \text{rendimenti di scala se } f(\lambda x_1, \lambda x_2) \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \\ < \end{array} \right\} \lambda f(x_1, x_2), \forall \lambda \quad (2)$$

Un'altra importante proprietà in aggiunta a quella dei rendimenti di scala, è quella della sostituibilità degli inputs. Una misura locale di tale sostituibilità è l'elasticità di sostituzione di Allen Uzawa,  $\sigma$ , definita come la variazione relativa del quoziente tra le quantità dei due fattori in rapporto alla variazione relativa del quoziente inverso dei rispettivi prodotti marginali: fornisce, cioè, la variazione proporzionale del rapporto dei fattori  $x_2/x_1$  che risulta da una variazione proporzionale del saggio marginale di sostituzione di  $x_1$  rispetto ad  $x_2$ , determinando, pertanto, la curvatura dell'isoquante (Giusti F., 1994). E' interessante analizzare il segno dei termini incrociati ed analizzare se esso è

minore, uguale o maggiore di zero, per fattori competitivi, indipendenti e complementari, rispettivamente.

In particolare, il modello stimato è il seguente:

$$Y_l = \beta_0 + \beta_1 W + \beta_2 N + \beta_3 W^2 + \beta_4 N^2 + \beta_5 WN + \varepsilon \quad (3)$$

dove W è l'input acqua, N è l'input azoto,  $W^2$  ed  $N^2$  sono i termini al quadrato e WN è il termine del prodotto incrociato. Una funzione di produzione quadratica per essere strettamente concava deve rispettare i valori attesi dei seguenti diversi parametri:

$$\begin{aligned} \beta_3 \beta_4 &> \beta_5^2 \\ \beta_3 &< 0 \\ \beta_4 &< 0 \\ \beta_0 &> 0 \\ \beta_1 &> 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Nel caso in cui  $\beta_5 > 0$  (il coefficiente del termine di interazione) i fattori sono dovunque tecnicamente complementari. Nel caso in cui  $\beta_5 < 0$  i fattori sono dovunque tecnicamente competitivi con inclinazione negativa. Infine, nel caso in cui  $\beta_5 = 0$ , i fattori sono dovunque tecnicamente indipendenti (Beattie e Taylor, 1985).

Senza l'assunzione di stretta concavità, la funzione quadratica può essere localmente quasi-concava, ma non globalmente. Per la produttività marginale decrescente, le derivate seconde  $d_2 Y/dW^2$  e  $d_2 Y/dN^2$  devono essere negative, e queste condizioni risulteranno completamente soddisfatte.

#### 4. Dati

Il data set proviene da alcuni esperimenti condotti presso lo *Yuma Mesa Agricultural Research Center* in Arizona, e sono relativi agli anni 1991-1992 e 1992-1993. I trattamenti sono stati predisposti "in a central composite rotatable design" (Cochran and Cox, pag. 346, 1960), il quale predice una risposta del suolo alla forma quadratica. Il "central composite design" per due inputs consiste di 13 *data points*. Questi includono i quattro punti di un tradizionale 2x2 fattoriale, quattro punti addizionali situati geometricamente al di fuori del quadrato fattoriale, e cinque misure ripetute nel centro. Il numero totale di combinazioni di trattamenti è  $(2^k + 2k + 1)$ . Il *central composite design* può essere adattato in un programma sequenziale di sperimentazioni. Per questo esperimento un numero totale di nove combinazioni di acqua ed azoto sono state definite da questo design statistico, con il trattamento centrale replicato 5 volte per raggiungere un totale di 13

appezzamenti di terreno trattati. La struttura dell'intero trattamento è stata replicata e randomizzata di nuovo per raggiungere un totale di 26 appezzamenti (Sanchez, Roth, Gardner, Ayer, 1996). I livelli di acqua ed azoto sono stati collocati proporzionalmente al trattamento centrale (100% acqua, 100% azoto). Gli appezzamenti sono stati irrigati utilizzando un sistema di irrigazione a pioggia, automatico, laterale (Roth e Gardner, 1989), che ha applicato cinque livelli di acqua e cinque livelli di azoto in specifiche combinazioni (vedi la tavola seguente). Due repliche del *design* sono state effettuate randomizzando i trattamenti in modo diverso per ogni replica fino a raggiungere il totale di 26 appezzamenti. L'acqua è stata applicata due volte a settimana durante la stagione di crescita, e la quantità applicata durante ciascuna irrigazione è stata calcolata sul livello del corso d'acqua e sul tempo richiesto per il sistema di irrigazione per muoversi ad una certa distanza (Sanchez *et al.*, 1996). L'azoto applicato al livello del 100% in ciascuna settimana è stato basato sulle raccomandazioni di fertilizzante già esistenti. I trattamenti di acqua sono stati applicati nelle quantità e proporzioni indicate.

**Tabella n. 1** - *Combinazioni di trattamenti di acqua ed azoto del “central composite design” utilizzate negli esperimenti su coltivazioni di lattuga, 1991-1992.*

<i>Trattamenti</i>	<i>Acqua applicata (%)</i>	<i>Azoto applicato (%)</i>
1	100	100
2	50	100
3	100	33
4	135	147
5	100	100
6	65	53
7	100	100
8	100	100
9	135	53
10	100	167
11	65	147
12	150	100
13	100	100

In ciascun esperimento, è possibile analizzare il livello crescente o decrescente di lattuga al variare dei livelli di azoto. Sulla base dei dati ricavati da questi esperimenti, è possibile analizzare i diversi raccolti di lattuga.



## 5. Metodologia empirica e risultati delle stime

Il modello econometrico proposto è il seguente:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 W + \beta_2 N + \beta_3 W^2 + \beta_4 N^2 + \beta_5 WN + \varepsilon \quad (5)$$

La variabile indipendente o endogena è la produzione della lattuga  $Y_1$ ,  $W$  ed  $N$  sono le variabili dipendenti o esogene, e rappresentano rispettivamente l'input acqua e l'input azoto. La forma funzionale utilizzata è la funzione quadratica, caratterizzata da termini lineari in  $W$ ,  $N$ , termini al quadrato in  $W^2$ ,  $N^2$  ed il termine del prodotto incrociato in  $WN$ .

Al fine di individuare il punto massimo di  $Y_1$ , è importante osservare come  $Y$  varia, in prossimità del massimo, quando i livelli dei fattori considerati si discostano dai loro valori ottimali. Nella formulazione del modello si assume che le componenti che hanno maggiore influenza sull'output sono rappresentate dall'acqua e dall'azoto; in funzione di questi elementi, vengono generati i principali componenti della produzione di lattuga. I coefficienti stimati sono:

$$\begin{aligned} \text{Estimated } Y_{\text{lettuce}} &= -56.292 + 1.173W + 0.378N - 0.006W^2 - 0.00053N^2 - 0.0011WN. \\ &\quad (38.937) \quad (1.383) \quad (0.108) \quad (0.013) \quad (0.0013) \quad (0.0018) \\ R^2 &= 0.40 \quad F = 6.381 \end{aligned} \quad (6)$$

I valori indicati in parentesi rappresentano lo standard error.

Il modello spiega il 40 per cento della variazione nella variabile dipendente, ed il valore del test  $F$  indica che le variabili esplicative contribuiscono ad una buona spiegazione totale della variazione della variabile dipendente. Utilizzando un livello di significatività del 5 per cento, il valore critico del test  $F$  per 5 e 46 gradi di libertà, è 2.45. Il valore di  $F$  calcolato (= 6.38) è significativo e quindi possiamo rigettare l'ipotesi nulla. La variabile dipendente risulta positivamente correlata ai termini lineari in  $W$  ed  $N$ , mentre conformemente alla teoria economica, è negativamente correlata ai termini al quadrato  $W^2$  ed  $N^2$  ed al prodotto incrociato  $WN$ .

In una fase preliminare si è proceduto a verificare la stabilità dei dati in esame, in particolare ad accertare che i coefficienti siano gli stessi sia nel primo che nel secondo periodo. L'adeguatezza del modello può essere verificata anche in base al grado di stabilità dei suoi parametri. Il test di Chow sulla stabilità strutturale dei parametri implica una conoscenza a priori del periodo in cui presumibilmente si verifica un *break* strutturale. A questo scopo, il Chow test ha mostrato che è possibile combinare tutte le  $n_1$  e  $n_2$  osservazioni (raccolte rispettivamente negli anni 1991-1992 e 1992-1993) e procedere alla stima di una sola funzione. Un test  $F$ , strutturato nel modo consueto, è stato utilizzato per testare se questa ipotesi potesse essere considerata coerente con l'equazione stimata, ed è risultato che il

valore stimato di F (= 0.728) non eccede il valore critico di F ( $F_{5, 40} = 2.45$ ) al livello prescelto di  $\alpha(95\%)$ ; quindi, non respingiamo l'ipotesi nulla che i coefficienti nella regressione siano gli stessi per i due anni considerati. Il Chow test è una forma speciale del test F, il quale verifica la stabilità dei coefficienti della regressione su due o più sottocampioni di dati. Questo si fa normalmente attraverso una regressione sull'intero campione, e poi ripetendo la stessa regressione per sottocampioni, e comparando la somma dei residui al quadrato. A tal fine è stato utilizzato:

$$F = \frac{(ESS_{res} - ESS_{unr})/m}{ESS_{unr}/n - k} \quad (7)$$

Per strutturare il Chow test al fine di testare la presenza di un cambiamento nel valore di un parametro da un data set ad un altro, rispettivamente nel data set del 1991-1992 ed in quello del 1992-1993, è stata introdotta una dummy D che assume valore 1 per le osservazioni relative al periodo 1 (1991-1992), e 0 per le osservazioni relative al periodo 2 (1992-1993).

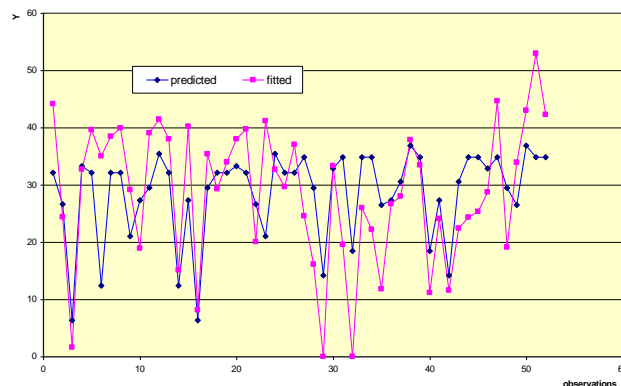
Quindi, il modello è:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 W + \beta_3 N + \beta_4 W^2 + \beta_5 N^2 + \beta_6 WN + \varepsilon \quad (8)$$

I coefficienti stimati sono:

$$\begin{aligned} \text{Estimated } Y_{\text{lettuce}} = & \\ & -67.955 + 11.028D + 1.102W + 0.389N - 0.002W^2 - 0.00054N^2 - 0.0011WN \\ & (33.291) \quad (2.574) \quad (1.178) \quad (0.092) \quad (0.011) \quad (0.00011) \quad (0.0015) \\ R^2 = 0.58 & \quad F = 10.382 \end{aligned} \quad (9)$$

Il modello spiega approssimativamente il 58 per cento della variazione nella variabile dipendente, ed il valore del test F indica che le variabili esplicative



contribuiscono ad una buona spiegazione totale della variazione nella variabile dipendente. Inoltre, la variabile dipendente risulta positivamente correlata ai termini lineari in  $W$  ed  $N$ , mentre secondo la teoria economica, è negativamente correlata ai termini al quadrato in  $W^2$  e  $N^2$  ed al prodotto incrociato in  $WN$ . La specificazione di questo modello sembra essere più coerente di quella precedente. Infatti, è interessante osservare che un  $R^2$  maggiore sembra spiegare meglio la regressione, e che vi è una più generalizzata tendenza dei coefficiente dello standard error ad essere più piccoli.

Il coefficiente di regressione della variabile dummy è positiva ed indica che la classificazione dei dati è positiva. I segni dei coefficienti della funzione stimata sono tutti, in maniera significativa, diversi da zero, e sono caratterizzati da un  $R^2$  che assume valore confortanti.

**Tabella n. 2**

<i>Anni degli esperimenti</i>	$\beta_0$	$\beta_1 D$	$\beta_1/\beta_2$	$\beta_2/\beta_3$	$\beta_3/\beta_4$	$\beta_4/\beta_5$	$\beta_5/\beta_6$
1991-92							
1992-93							
globale	-56.292		1.173	0.378	-0.006	-0.0005	-0.0011
globale+ dummy	-67.955	11.028	1.102	0.389	-0.002	-0.0005	-0.0011

E' interessante notare la seguente tavola dei valori di  $t$  ed osservare che sostanzialmente con l'aggiunta della variabile dummy si migliora la qualità della stima ed alcuni coefficienti mantengono lo stesso segno e la stessa magnitudine.

**Tabella n. 3**

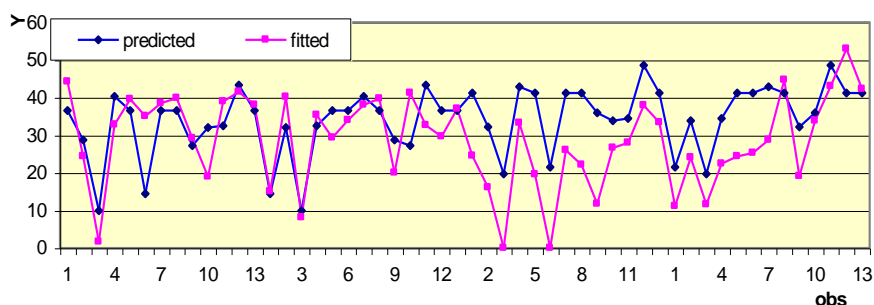
	<i>t Stat</i>	<i>t Stat</i>
<i>Intercetta</i>	-2.041	-1.446
<i>Dummy</i>	4.284	
<i>W</i>	0.935	0.849
<i>N</i>	4.210	3.489
<i>W^2</i>	-0.249	-0.470
<i>N^2</i>	-4.724	-3.947
<i>NW</i>	-0.737	-0.606

Dall'analisi dei valori medi delle diverse variabili indipendenti è possibile evidenziare le relazioni e gli effetti che possono caratterizzare la produzione di lattuga. Risulta che l'acqua e l'azoto hanno un coefficiente di elasticità di 0.048 e

0.066, rispettivamente. I valori dei parametri  $\beta_4\beta_5$  sono maggiori di  $\beta_6^2$  e questo sta a significare che una delle condizioni richieste per la stretta concavità è rispettata.

Le altre restrizioni per la stretta concavità della forma quadratica sono anche rispettate:  $\beta_6$  negativo sta a significare che i due inputs sono fattori competitivi ma, più probabilmente, essi potrebbero essere indipendenti poichè il valore del *t ratio* per  $\beta_6$  è 1.895. Così possiamo respingere l'ipotesi nulla che  $\beta_6$  sia uguale a zero, verso l'ipotesi alternativa che sia inferiore a zero ( $= -0.0011$ ). E' stato testato che l'ipotesi nulla  $H_0: \beta_4 = 0$  verso l'ipotesi alternativa  $H_1: \beta_4$  e lo stesso test è stato ripetuto per  $\beta_5$  al livello di significatività del 5 per cento ; il valore critico di *t* per 7 gradi di libertà è 1.895, così è possibile respingere l'ipotesi nulla che essi siano uguali a zero, verso l'ipotesi alternativa che essi siano significativamente inferiori a zero (rispettivamente  $-0.002$  e  $-0.0005$ ). Di nuovo è interessante osservare che questi coefficienti sono negativi, in accordo con la teoria economica.

Il coefficiente relativo all'elasticità di sostituzione di Allen Uzawa è positivo ma vicino a zero ( $=1.47583E-08$ ) e questo sta a significare che acqua ed azoto sono leggermente sostituiti l'uno dell'altro. L'elasticità di Allen Uzawa (AUES) è stata calcolata così:  $\sigma_{ij} = \sum x_i * f_i / (x_i * x_j) * F_{ij} / \det F$  dove  $f_i$  è  $= dY/dx_i$ ,  $F$  è l'hessiano orlato e  $F_{ij}$  è il cofattore associato con l'elemento  $f_{ij}$ .



## 6. Conclusioni

La verifica empirica condotta sulla base della funzione quadratica ha prodotto risultati soddisfacenti in termini di capacità di formulare valutazioni coerenti con la teoria economica. Nel presente lavoro, l'intento è stato quello di valutare se la funzione quadratica potesse fornire buoni risultati in termini di sostituibilità tra fattori e se potesse essere idonea ai fini di uno studio sull'andamento delle domande dei fattori. I risultati confermano che il modello quadratico è verosimilmente una specificazione migliore del modello Cobb-Douglas, ma

ulteriori ricerche saranno finalizzate ad analizzare se altri modelli siano eventualmente più indicati a descrivere i dati in esame.

Nella specificazione della funzione di produzione quadratica, viene data una descrizione generale delle possibilità tecniche di produzione attraverso le diverse combinazioni di acqua ed azoto. I risultati ottenuti e le relative considerazioni sono, parzialmente, non dissimili dai risultati precedenti ottenuti da Sanchez, Roth e Gardner (1996) sulla risposta economica delle coltivazioni di broccoli e cavolfiori a seguito di trattamenti di acqua ed azoto, in cui essi analizzano anche le combinazioni economiche dei due inputs in uno scenario realistico di prezzi.

In agricoltura tipicamente si fa un largo utilizzo sia di azoto sia di acqua nella produzione commerciale di vegetali, ed è molto importante utilizzare le relative valutazioni per fini di controllo e correttivi. Non si deve dimenticare un altro importante aspetto legato a questo problema. Oltre a cercare di comprendere la migliore combinazione degli inputs al fine di raggiungere le soluzioni economiche ottimali, un altro importante aspetto è che i fertilizzanti a base di azoto sono i maggiori responsabili dell'inquinamento delle falde acquifere negli Stati Uniti. Per questo, l'effetto di politiche regolamentari per controllare la contaminazione da nitrati delle falde acquifere, così come l'adozione di alcune pratiche di management per potenziare un utilizzo efficiente di azoto e probabilmente mantenere i livelli dei raccolti elevati, sono altri importanti aspetti che devono essere considerati per migliorare la produzione agricola e le pratiche di controllo dell'inquinamento. La gestione agronomica dell'azoto e le sue trasformazioni all'interno della pianta sono quindi gli aspetti principali da prendere in considerazione per il miglioramento della qualità della coltivazione della lattuga.

I risultati che emergono dall'analisi dell'elasticità di sostituzione tra azoto ed acqua dimostrano che la sostituibilità tra i due inputs è molto bassa. Questo significa che essi vengono utilizzati quasi in proporzioni fisse. In questo caso la forma degli isoquanti dovrebbe assomigliare a quelli per la funzione di produzione di Leontiev, poichè non vi è sostituibilità. Dal punto di vista del mercato, questo implica che il rapporto tra i prezzi non dovrebbe avere alcuna influenza sulle proporzioni dei due inputs utilizzati. Questo è coerente con il precedente studio condotto da C.A. Sanchez, R.L. Roth, e B.R. Gardner (1996).

Ulteriori ricerche potrebbero investigare le proprietà globali di specificazioni alternative della funzione di produzione, in modo da fornire un supporto più specifico nella selezione della forma funzionale più appropriata. Infatti, una migliore comprensione delle proprietà delle forme funzionali che possono essere adottate migliorerebbe senz'altro le stime dei parametri economici e, in definitiva, contribuirebbe a comprendere meglio l'efficiente allocazione degli inputs e dell'output. Infatti, un apporto di azoto eccessivamente basso, se da un lato causa un impoverimento della fertilità del suolo, dall'altro può ridurre anche l'efficienza nell'uso dell'acqua. Ne consegue la necessità di una attenta valutazione,

accompagnata da un altrettanto accurato monitoraggio, per ottimizzare il bilancio idrico ed azotato.

L'agricoltura può trarre notevoli vantaggi dall'utilizzo dei modelli previsionali di supporto alle decisioni. Infatti, partendo dai dati di input è possibile testare, su basi sia scientifiche che economiche, la tipologia di applicazioni da attuare al fine di scegliere pratiche agronomiche corrette, redditizie ed ecocompatibili.

### **Riferimenti Bibliografici**

- Beattie B., Taylor R. 1985. *The Economics of Production*, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida
- Beverly R.B, Jarrel W.M, Letey J. 1986. *A Nitrogen and Water Response Surface Model for Sprinkler Irrigated Broccoli*, in *Journal of Agronomy* 78
- Bruno G. 1996. *Un'Applicazione della Funzione Trascendente Logaritmica ad Alcune Branche dell'Industria Manifatturiera Italiana*, in *Modelli di Produzione – Settore Industriale Manifatturiero dell'Economia Italiana, Analisi Statistico-Econometrica*, a cura di F. Giusti, Dipartimento di Teoria Economica e Metodi Quantitativi per le Scelte Politiche, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
- Ciaralli S. 1996. *Funzioni di Produzione a Elasticità Costante e Variabile di Sostituzione: Alcune Applicazioni*, in *Modelli di Produzione – Settore Industriale Manifatturiero dell'Economia Italiana, Analisi Statistico-Econometrica*, a cura di F. Giusti, Dipartimento di Teoria Economica e Metodi Quantitativi per le Scelte Politiche, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
- Cochran W.G., Cox G.M. 1960. *Experimental Designs*, Wiley, NY. page 346
- Doerge T.A., Roth R.L., Gardner B.R. 1991. *Nitrogen Fertilizer Management in Arizona*, College of Agriculture, University Of Arizona, Tucson Publication 191025
- Erie L.J., French O.F., Harris K. 1982. *Consumptive Use of Water by Crops in Arizona*, University of Arizona Tech. Bul. 169
- Fuss M., Mcfadden D., Mundlak Y. 1978. *A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production*, in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North-Holland
- Gardner B.R., Roth R.L. 1989. *Midrib Nitrate Concentration as a Means for Determining Nitrogen Needs of Broccoli*, *J. Plant Nutr.* 12:111-125
- Giusti F., 1994. *Modelli Neoclassici di Produzione: Evoluzione Storica e Ricerca Quantitativa*, Università di Roma “La Sapienza”, Dipartimento di Teoria Economica e Metodi Quantitativi per le Scelte Politiche
- Heady E.O., Pesek J.T, Brown W.G. 1955. *Crop Response Surfaces And Economic Optima In Fertilizer Use*, Iowa State University Agr. Expt. Sta. Bul. 424
- Howell D.R., Wilcox M.A., Tickes B. 1993. *Yuma County Agricultural Statistics Report*

- Letey J., Jarrel W.M., Valoras N., Beverly R. 1983. *Fertilizer Application And Irrigation Management Of Broccoli Production and Fertilizer Use Efficiency*, Journal of Agronomy 75:502-507
- Mandarino N. 1996. *Un'Applicazione della Funzione Generalizzata di Leontiev alle Branche dell'Industria Manifatturiera Italiana*, in Modelli di Produzione – Settore Industriale Manifatturiero dell'Economia Italiana, Analisi Statistico-Econometrica, a cura di F. Giusti, Dipartimento di Teoria Economica e Metodi Quantitativi per le Scelte Politiche, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
- Paris Q., Knapp K. 1989. *Estimation of Von Liebig Response Functions*, American Journal of Agricultural Economics, 71:178-186
- Paris Q. 1992. *The Von Liebig Hypothesis*, American Journal of Agricultural Economics, 74:1019-1028
- Roth R.L., Gardner B.R. 1989. *Modified Self Moving Irrigation System for Water Nitrogen Crop Production Studies*, Appl. Eng. Agr. 5:175-179
- Sanchez C.A., Roth R.L., Gardner B.R. 1994, *Irrigation and Nitrogen Management For Sprinkler Irrigated Cabbage On Sand*, J. Amer. Soc. Hort. Sci. 119:427-433
- Sanchez C.A., Roth R.L., Gardner B.R., Ayer H. 1996. *Economic Responses of Broccoli and Cauliflower to Water and Nitrogen in the Desert*, in American Society for Horticultural Science 31(2)
- Seiford L.M., Thrall R.M. 1990. *Recent Developments in DEA. The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis*, in Lewin A.Y., Knox Lovell C.A. (eds.), Frontier Analysis. Parametric and Nonparametric Approaches, Journal of Econometrics, Supplement, Vol. 46, n. 1/2
- Stark J.C., Jarrell W.M., Letey J. 1983. *Evaluation Of Irrigation - Nitrogen Management Practices For Celery Using Continuous-Variable Irrigation*, Journal of American Society and Soil Science, 47:95-98
- U.S. Dept. of Agriculture, 1997. *Standards For Grades Of Bunched Sprouting Broccoli*, U.S. Dept. of Agriculture, Washington, D.C.
- Yu Man, Segarra E., Li Hong *et al.*, 2000. *The Economics of Precision Agricultural Practices in Cotton Production*, Texas University

---

ANNA RITA GERMANI, assegnista di ricerca, Istituto di Economia e Finanza, Facoltà di Giurisprudenza - Università di Roma “La Sapienza”

## **Summary**

In the analyzed model it is possible to find some brief theoretical considerations about the relationships existing between two different inputs, water and nitrogen, and the effects that can be observed on the production of lettuce. Subsequently are showed the stages inherent the collection of the statistical material and the method utilized in the elaboration of the data. The construction of the model and its applications are analyzed and some useful suggestions for one more complex and more sophisticated formulation of the model are delineated. It is concluded that there is very low substitutability between the two inputs under consideration and that the price ratios should not affect the utilized proportions of the two factors.