

UN MODELLO INTERNO DI STIMA E DI ALLOCAZIONE DEL CAPITALE A RISCHIO DI UN “TIPICO” PORTAFOGLIO CREDITI ITALIANO: CONFRONTO CON L’APPROCCIO IRB DI BASILEA II

Annalisa Di Clemente* e Claudio Romano**

ABSTRACT

In questo lavoro presentiamo un modello interno di portafoglio per la stima e l’allocazione del rischio di credito del *banking book* alternativo al modello regolamentare proposto da Basilea II nell’approccio IRB (Internal Rating Based). Il nostro obiettivo è ottenere una stima più accurata dell’ammontare di rischio creditizio del *banking book* assieme ad un’allocazione *coerente* del capitale di rischio. Il punto di forza di questo modello sta nella sua facilità d’implementazione ad un “tipico” portafoglio crediti italiano. Inoltre il modello proposto, di tipo binomiale (*default/non-default*) e basato su simulazione Monte Carlo, ha il pregio di tenere in considerazione le correlazioni d’insolvenza tra i debitori in portafoglio sfruttando il concetto di funzione copula e di utilizzare le correlazioni tra i rendimenti delle attività dei debitori stimate attraverso solide tecniche statistiche e non tramite la formula regolamentare di Basilea II. Tale modello interno è inoltre suscettibile di considerare anche tassi di recupero stocastici e dipendenti sia tra di loro che con l’evento insolvenza. Relativamente al problema di un’allocazione *coerente* del capitale a rischio, il modello presentato stima i contributi di ciascun debitore al rischio complessivo del portafoglio crediti non più in termini di Value-at-Risk (VaR), bensì di Expected Shortfall (ES), misura di rischio coerente e maggiormente cautelativa rispetto al tradizionale VaR. Ricordiamo che, mentre il VaR (inteso come Massima Perdita) può essere considerato un alto quantile della distribuzione delle perdite del portafoglio, la ES è approssimativamente la media condizionata delle perdite eccedenti il VaR. Dopo aver descritto le caratteristiche del modello interno di portafoglio, lo implementiamo ad un ipotetico ma “tipico” portafoglio crediti di una grande banca commerciale italiana presente su tutto il territorio nazionale. Tale portafoglio è inoltre ripartito in 17 sottoportafogli formati dalle esposizioni bancarie verso le imprese debtrici residenti in 17 gruppi regionali italiani. I risultati in termini di correlazione, misure di rischio e di allocazione del capitale sono confrontati con quelli ottenuti dal modello IRB di Basilea II.

* Università di Roma “La Sapienza”.

** Gruppo Bancario Capitalia. Il lavoro riflette esclusivamente le opinioni dell’autore. Le tesi espresse non impegnano in alcun modo il Gruppo bancario di appartenenza.

I capitoli 1, 2, 5, 6 e 7 sono da attribuirsi ad A. Di Clemente, mentre i capitoli 3 e 4 sono contributi di C. Romano.

1. Introduzione

Attualmente l'appropriata modellizzazione del rischio di credito di portafoglio è un aspetto cruciale nella gestione del rischio finanziario. La qualità di un modello di portafoglio risiede nella capacità di calcolare il capitale a rischio prendendo in considerazione gli effetti di portafoglio, in particolare le correlazioni d'insolvenza tra le attività¹. E' ben noto come l'approccio IRB (Internal Rating Based), proposto dal Comitato di Basilea², basandosi su un modello “*portfolio invariant*” (Gordy, 2001) calcoli il requisito di capitale a copertura del rischio di credito delle attività bancarie in funzione delle sole caratteristiche del prestatore e della linea di credito, trascurando le caratteristiche del portafoglio in cui l'attività è contenuta. In particolare, si assumono come ipotesi alla base del modello:

- l'infinita granularità del portafoglio e, quindi, l'approssimazione asintotica del rischio complessivo del portafoglio al solo rischio non diversificabile;
- l'esistenza di un solo fattore di rischio sistematico (approccio uni-fattoriale) e successiva quantificazione di tale rischio attraverso il valore della correlazione media tra le attività economiche delle diverse controparti e l'indicatore sintetico dello stato economico generale.

L'adozione di un modello “*portfolio invariant*” comporta indubbi vantaggi analitici alle autorità regolamentari, potendo prescindere dalla struttura specifica del portafoglio della banca nel calcolo dei requisiti minimi di capitalizzazione. D'altro canto tale approccio può sottostimare il rischio del portafoglio non altamente diversificato e granulare. E' risaputo, inoltre, come Basilea proponga per la classe “esposizioni verso *corporate*” un valore regolamentare del coefficiente di correlazione delle attività (ρ) compreso tra il 12% ed il 24%. Tale valore, pur considerando l'aggiustamento proposto da Basilea per le piccole e medie imprese, risulta eccessivamente prudentiale per il mercato delle imprese di piccola dimensione italiane. E' comunque legittimo domandarsi se l'adozione di un coefficiente di correlazione regolamentare più severo, rispetto al valore empirico del ρ per le imprese di piccola dimensione, produca un innalzamento dei requisiti di capitale per le banche finanziatrici tale da compensare la sottostima del rischio derivante (a sua volta) dall'assunzione regolamentare d'infinita granularità, ipotesi forse poco realistica per un “tipico” portafoglio crediti di una banca italiana.

Alla luce di tali considerazioni, in questo lavoro ci proponiamo di analizzare e commentare i risultati, in termini di misurazione e allocazione del rischio di credito, derivanti dall'utilizzo di un modello di portafoglio interno, alternativo a quello adottato da Basilea II. In particolare, il modello

¹ Per una puntuale rassegna dei modelli di portafoglio per il rischio di credito attualmente adottati vedi Crouhy et al. (2000).

² Comitato di Basilea di Supervisione Bancaria, BIS, giugno 2004.

presentato è binomiale (ossia considera solo l'evento insolvenza trascurando gli eventi di migrazione del merito creditizio del debitore) e di tipo simulativo (Monte Carlo Simulation) e *non* fondato sulle ipotesi restrittive alla base del modello regolamentare. La nostra verifica empirica riguarda, in particolare, un ipotetico ma caratteristico portafoglio crediti di una grande banca commerciale italiana presente su tutto il territorio nazionale. Tale portafoglio è ripartito in 17 sottoportafogli formati dalle esposizioni verso le imprese debitrice non finanziarie residenti in 17 gruppi regionali italiani. I requisiti di capitale per ciascun sottoportafoglio, così come per l'intero portafoglio crediti, sono calcolati sia con il modello di Basilea II che con il modello interno qui presentato. In particolare, i contributi di ciascun sottoportafoglio al rischio di credito dell'intero *banking book* sono stimati in termini di diverse misure di rischio (VaR, Massima Perdita ed Expected Shortfall) tutte calcolate in corrispondenza di un livello di probabilità del 99,9% e su un orizzonte temporale di un anno. Il nostro obiettivo finale è investigare in quali circostanze i risultati scaturiti dai due modelli possono risultare simili e in quali casi, viceversa, divergono nettamente. In altre parole, vogliamo verificare quando le ipotesi restrittive alla base del modello di Basilea II producono una stima del rischio accurata e quando, invece, possono produrne una rappresentazione distorta.

Schematicamente, i contributi del modello interno simulativo in termini di stima del rischio di credito del portafoglio riguardano:

- l'introduzione di una struttura di dipendenza delle insolvenze basata su un modello unifattoriale di generazione degli scenari del vettore casuale dei *times until default* delle N esposizioni in portafoglio (τ_1, \dots, τ_N) dalla copula gaussiana (Gregory e Laurent, 2004);
- la stima dei coefficienti di correlazione delle attività (Rho) attraverso tecniche statistiche, quali il metodo di massima verosimiglianza (Frye, 2002) e utilizzando come dati i tassi di decadimento, forniti dalla Base Informativa Pubblica della Banca d'Italia, relativi alle imprese non finanziarie residenti sul territorio nazionale e ripartite in 17 distinti gruppi regionali;
- l'introduzione di una struttura di dipendenza tra i tassi di recupero e tra questi e gli eventi d'insolvenza.

I contributi del modello simulativo in termini di allocazione del capitale vertono su:

- l'introduzione di una metodologia *coerente* di allocazione del capitale (Kalkbrener et al., 2003) basata sulla stima dei contributi al rischio dell'intero portafoglio da parte di ciascun debitore (o prenditore) in termini di Expected Shortfall, misura coerente di rischio (Acerbi e Tasche, 2002).

Il piano dell'opera è così articolato. Nel capitolo 2 e nei paragrafi 2.1. e 2.2 descriviamo le caratteristiche tecnico-quantitative del modello interno di portafoglio proposto. Nel capitolo 3 presentiamo la metodologia di Frye (2002) idonea a calcolare i coefficienti di correlazione delle attività (Rho) dai *factor loading* (i coefficienti di sensitività dei rendimenti delle attività dei debitori al rendimento del fattore sistematico) stimati tramite metodo di massima verosimiglianza. Nel capitolo 4 spieghiamo come poter eventualmente inserire nel modello di portafoglio una struttura di dipendenza tra i tassi di recupero, così come una struttura di dipendenza tra i tassi di recupero e gli eventi d'insolvenza. Nel capitolo 5 descriviamo una tecnica *coerente* di allocazione del capitale, enfatizzandone le peculiarità rispetto allo schema tradizionale fondato sulla ben nota Teoria del Portafoglio (Markowitz, 1952). Nel capitolo 6 implementiamo il modello interno di portafoglio precedentemente descritto ad un ipotetico *banking book* di esposizioni creditizie verso imprese non finanziarie residenti sull'intero territorio nazionale e raggruppate in 17 distinti cluster regionali. Il nostro primo obiettivo è calcolare i requisiti di capitalizzazione del portafoglio globale e dei 17 singoli sottoportafogli utilizzando sia il modello IRB di Basilea II che il modello interno di portafoglio qui presentato. Inoltre, passiamo a confrontare i risultati scaturiti dai due modelli (interno e regolamentare) anche in termini di coefficiente di correlazione, di misure di rischio diverse dal VaR, e di allocazione del capitale, sia nel caso di tassi di recupero deterministici e indipendenti tra loro che nel caso di tassi di recupero stocastici e dipendenti tra loro e con l'evento insolvenza. Commenti e conclusioni relativi ai due modelli sono riportati nel capitolo 7.

2. Descrizione del modello interno di portafoglio e stima delle misure di rischio di credito

Si assuma un portafoglio crediti composto da N distinti debitori (o prenditori) e un orizzonte temporale di riferimento pari alla maggiore scadenza tra tutti i crediti in portafoglio³. Definiamo la variabile casuale (v.c.) perdita di portafoglio L, seguendo la formalizzazione proposta da Jouanin et al. (2004). Analiticamente:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N EaD_i \cdot (1 - R_i) \cdot \mathbf{1}\{\tau_i \leq M_i\} \quad (1)$$

L'equazione (1) esprime un modello *default/non-default* dove L_i è la v.c. perdita associata al generico credito (o debitore) i , EaD_i è l'esposizione all'insolvenza relativa al credito i , R_i è il tasso di recupero relativo al debitore o al credito i , M_i è la scadenza del credito i , τ_i è la v.c. *time until default* (o tempo all'insolvenza) del debitore i e $\mathbf{1}$ è una funzione che assume valore 1 se $\tau_i \leq M_i$ e

³ Supponendo di essere in 0, se la maggiore scadenza in portafoglio è M_{\max} , l'orizzonte temporale di riferimento per il calcolo del rischio creditizio del portafoglio sarà $[0, M_{\max}]$.

valore 0 negli altri casi⁴. Relativamente ai tassi di recupero R_i , questi possono assumersi deterministici⁵, oppure stocastici con media m_i e deviazione standard s_i e indipendenti⁶ tra loro e indipendenti dai rispettivi *times until default*. L'assunzione più comune circa la rappresentazione analitica di R_i è la distribuzione Beta(a_i, b_i) con parametri a_i e b_i stimati attraverso il metodo dei momenti, noti i valori di m_i e di s_i . Analiticamente:

$$a_i = \frac{m_i^2(1-m_i)}{s_i^2} - m_i, \quad b_i = \frac{m_i^2(1-m_i)^2}{m_i s_i^2} - (1-m_i) \quad (2)$$

Il vettore stocastico dei *times until default* (τ_1, \dots, τ_N) ha una funzione di distribuzione cumulata (f.d.c.) multivariata, F , che può essere scritta attraverso la seguente rappresentazione copula:

$$F(t_1, \dots, t_N) = \Pr\{\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_N \leq t_N\} = C(F_1(t_1), \dots, F_N(t_N)) \quad (3)$$

dove F_i è la f.d.c. marginale di τ_i e C è la funzione copula che determina la struttura di dipendenza della f.d.c. multivariata del vettore dei *times until default*.

La f.d.c. sconosciuta G della v.c. L (perdita di portafoglio) può essere stimata, tramite simulazione Monte Carlo, attraverso il seguente algoritmo:

- 1) generare una determinazione di N v.c. uniformemente distribuite in $[0, 1]$, (u_1, \dots, u_N) dalla copula C^7 .
- 2) Determinare uno scenario dei *times until default* invertendo (u_1, \dots, u_N), utilizzando le marginali: $t_i = F_i^{-1}(u_i)$, $i = 1, \dots, N$.
- 3) Per ogni debitore $i=1, \dots, N$ otteniamo uno scenario di perdita pari a $EaD_i(1-R_i)$ se $t_i \leq M_i$ o, altrimenti, pari a 0.
- 4) Sommiamo le perdite degli N debitori ottenendo uno scenario j (dove $j= 1, \dots, s$) della perdita di portafoglio, L_j .
- 5) Le fasi da 1 a 4 sono ripetute un elevato numero s di volte.

Dalla distribuzione delle perdite di portafoglio così ottenuta, possiamo stimare diverse misure di rischio del portafoglio crediti, quali la perdita attesa EL , la Massima Perdita ML , il Credit VaR e la Expected Shortfall ES . In particolare, la perdita attesa del portafoglio EL è calcolata come media delle perdite di portafoglio in tutti gli scenari s . Analiticamente:

⁴ Si assume che M_i e τ_i siano espresse in anni.

⁵ Questo è il caso dell'approccio IRB presentato da Basilea per il calcolo dei requisiti di capitalizzazione a copertura del rischio di credito.

⁶ Nel prossimo capitolo vedremo come tale ipotesi possa essere abbandonata.

⁷ Vedi C. Romano (2002) per una rassegna degli algoritmi di generazione di scenari Monte Carlo da differenti tipi di funzione copula.

$$EL = \frac{\sum_{j=1}^s L_j}{s} \quad (4)$$

La Massima Perdita del portafoglio in corrispondenza di un livello di probabilità α , ML_α , può essere calcolata ordinando in ordine non decrescente gli s scenari di perdita del portafoglio e tagliando la distribuzione ottenuta in corrispondenza dell' α -esimo quantile.

Il Value-at-Risk del portafoglio è calcolato come differenza tra la massima perdita e la perdita attesa sempre in corrispondenza di un livello di probabilità α . Analiticamente:

$$VaR_\alpha = ML_\alpha - EL \quad (5)$$

La Expected Shortfall del portafoglio ES_α , calcolata sempre in corrispondenza del livello di probabilità α , è la media condizionata delle perdite di portafoglio eccedenti la massima perdita. Analiticamente:

$$ES_\alpha = ML_\alpha + \frac{1}{(1-\alpha) \cdot s} \sum_{j=1}^s (L_j - ML_\alpha)^+ \quad (6)$$

dove $(L_j - ML_\alpha)^+ = L_j - ML_\alpha$ se $L_j - ML_\alpha > 0$; $(L_j - ML_\alpha)^+ = 0$ se $L_j - ML_\alpha \leq 0$.

2.1. Determinazione delle distribuzioni marginali dei times until default

Per poter applicare l'algoritmo descritto nel capitolo 2, è necessario dare una rappresentazione analitica alle distribuzioni cumulate marginali F_i delle variabili casuali *times until default* e stimare i loro parametri. A tal fine, dobbiamo introdurre la funzione *hazard rate* (intensità istantanea d'insolvenza), $h_i(t)$, definita analiticamente come:

$$h_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr\{t < \tau_i \leq t + \Delta t | \tau_i > t\}}{\Delta t} \quad (7)$$

Estendendo l'equazione (7), otteniamo:

$$h_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr\{t < \tau_i \leq t + \Delta t\}}{\Delta t \Pr\{\tau_i > t\}} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} F_i(t)}{1 - F_i(t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(1 - F_i(t)) \quad (8)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (8), otteniamo:

$$F_i(t) = P_r[\tau_i \leq t] = 1 - \exp\left(-\int_0^t h_i(u) du\right) \quad (9)$$

Assumendo che la funzione *hazard rate* abbia una struttura a termine piatta, ossia $h_i(t) = h_i$ per ogni t , l'equazione (9) può essere riscritta come segue:

$$F_i(t) = P_r[\tau_i \leq t] = 1 - e^{-h_i t} \quad (10)$$

Poiché la funzione *hazard rate* caratterizza completamente la distribuzione della variabile casuale *times until default* τ_i , la calibrazione di $h_i(t)$ dai dati reali è un aspetto cruciale in tale modello di portafoglio. Facciamo osservare come a fini di pricing, gli *hazard rates* siano calibrati utilizzando dati di mercato, quali le quotazioni delle obbligazioni defaultable, gli asset swap spreads o i credit default swaps⁸. Diversamente, a scopi di risk management, gli *hazard rates* possono essere calibrati utilizzando le probabilità d'insolvenza fornite dall'appropriato sistema di valutazione interna della banca o dalle agenzie pubbliche di rating. Ad esempio, se $q_i(0, t)$ è il tasso d'insolvenza medio cumulato su un orizzonte temporale $[0, t]$ ⁹, dall'equazione (10) otteniamo:

$$1 - e^{-h_i(t)t} = q_i(0, t) \Rightarrow h_i(t) = -\ln(1 - q_i(0, t)) / t \quad (11)$$

Disponendo di una struttura a termine delle probabilità d'insolvenza, possiamo assumere una rappresentazione analitica degli *hazard rates* costante a tratti¹⁰. Se T_1, T_2, \dots, T_m sono i nodi della struttura a termine delle probabilità d'insolvenza (espressi in anni), allora la funzione *hazard rate* può essere scritta nel modo seguente:

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^m h_{i,j} \mathbf{1}_{(T_{j-1}, T_j]}(t) \quad (12)$$

dove $h_{i,j}$ sono costanti positive, $j=1, \dots, m$ e $\mathbf{1}_{(T_{j-1}, T_j]}(t) = 1$ se $t \in (T_{j-1}, T_j]$. Questa ipotesi implica che la f.d.c. $F_i(t)$ possa essere scritta come segue:

$$F_i(t) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{j=1}^k h_{i,j} (T_j - T_{j-1}) \right\}, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq T_1 \\ 2 & \text{if } T_1 < t \leq T_2 \\ \dots & \\ m & \text{if } t > T_{m-1} \end{cases} \quad (13)$$

Dall'equazione (13) $h_{i,1}$ può essere stimato utilizzando la probabilità d'insolvenza sulla maturità T_1 ; $h_{i,2}$ può essere calibrato utilizzando la probabilità d'insolvenza sulla maturità T_2 , noto $h_{i,1}$ e così via. I rimanenti $h_{i,j}$ possono essere calibrati fino al tempo T_m .

2.2. Descrizione del modello uni-fattoriale di generazione degli scenari dalla copula Gaussiana

Per utilizzare l'algoritmo descritto nel capitolo 2, è necessario generare gli s scenari (u_1, \dots, u_N) da una generica funzione copula, C . Ricordiamo come le funzioni copula più utilizzate, sia nelle applicazioni pratiche di *risk management* che nella letteratura accademica specializzata, siano

⁸ In tal caso, è ottenuta una misura di h_i neutrale al rischio.

⁹ Solitamente $t=1$, potendo disporre di probabilità d'insolvenza ad un anno.

¹⁰ Vedi Galiani (2003).

quella Gaussiana e quella t di Student. Questi tipi di funzione copula sono infatti facili da implementare oltre ad essere dotate di un numero di parametri sufficiente a descrivere adeguatamente la struttura di dipendenza della multivariata (nel nostro caso della distribuzione dei *times until default* dei debitori in portafoglio). Il parametro delle funzioni copula più importante da calibrare è la matrice di correlazione.

E' stato dimostrato (Li (2000)) che quando modelliamo la f.d.c. dell'equazione (3) utilizzando la copula Gaussiana, nel caso bivariato il parametro di correlazione è uguale alla correlazione delle attività tra le due controparti. Questo caso può essere esteso al caso della copula t di Student (vedi Mashal e Naldi (2002); Meneguzzo e Vecchiato (2002)). Quindi, in generale, gli elementi della matrice di correlazione di dimensione $N \times N$ sono i coefficienti di correlazione delle attività (prese due a due) degli N debitori in portafoglio. Tuttavia, il numero dei debitori di un tipico portafoglio crediti di una banca commerciale italiana è talmente elevato da richiedere costi eccessivi, sia in termini di spazio di memoria occupata che di tempi computazionali, nell'applicazione della metodologia Monte Carlo. Per questa ragione è conveniente utilizzare un modello ad un fattore con J cluster¹¹ per simulare gli scenari dalla copula Gaussiana o dalla copula t di Student (Gregory e Laurent (2004)). Poiché J, il numero dei cluster, è molto più piccolo di N, il numero dei debitori, anche il numero dei parametri da stimarsi e i relativi costi computazionali sono notevolmente più contenuti. Supponiamo, quindi, di generare gli scenari dalla copula Gaussiana attraverso un semplice modello ad un fattore¹² che descrive il rendimento delle attività Y_i del generico debitore i (con $i=1, \dots, N$) con la seguente espressione analitica:

$$Y_i = b_{m(i)}X + \sqrt{1-b_{m(i)}^2} e_i \quad (14)$$

dove X ed e_i sono v.c. indipendenti Normali standardizzate, inoltre e_1, \dots, e_N sono pure indipendenti tra loro. Precisamente X è il rendimento del fattore macroeconomico o dell'indice globale di mercato comune a tutti i debitori in portafoglio e rappresenta la componente sistematica di Y_i ; e_i è la componente di rendimento di Y_i indipendente dal fattore sistematico ma legata alle caratteristiche proprie del debitore (componente specifica o idiosincratca del rendimento complessivo Y_i). Inoltre $b_{m(i)} > 0$ è il peso della componente sistematica X, mentre $m(i)$ esprime la relazione che lega il debitore i al suo cluster $j=m(i)$ con $j=1, \dots, J$. In questo modello anche Y_i è una v.c. Normale standardizzata.

In tale modello assumiamo che i pesi $b_{m(i)}$ siano uguali per ciascun debitore appartenente allo stesso cluster. In tal caso i pesi possono essere calcolati utilizzando le correlazioni intra-cluster dei

¹¹ I cluster possono essere settori industriali o aree geografiche.

¹² Ricordiamo come anche il modello IRB di Basilea adotti un modello ad un fattore (la versione ad un fattore del modello di Merton (1974)). La comune assunzione teorica dei due modelli di portafoglio studiati ne rende plausibile il confronto dei risultati ed i relativi commenti.

rendimenti delle attività (e viceversa). In particolare, la correlazione dei rendimenti delle attività tra due debitori i e j appartenenti allo stesso cluster k è la seguente:

$$\rho_k = E[Y_i Y_j] = b_{m(i)} b_{m(j)} = b_k^2 \quad (15)$$

dove $b_k = \sqrt{\rho_k}$. Di conseguenza, la correlazione dei rendimenti delle attività tra due generici debitori i e j appartenenti a due distinti cluster, rispettivamente k ed l , è la seguente:

$$\rho_{kl} = E[Y_i Y_j] = b_{m(i)} b_{m(j)} = b_k b_l = \sqrt{\rho_k \rho_l} \quad (16)$$

Per generare uno scenario dalla copula Gaussiana, dobbiamo applicare il seguente algoritmo:

- 1) generiamo $N+1$ variabili casuali indipendenti dalla distribuzione Normale standard (queste sono le determinazioni di X , e_1, \dots, e_N);
- 2) calcoliamo uno scenario y_i di Y_i , con $i=1, \dots, N$;
- 3) generiamo dalla copula Gaussiana lo scenario $u_i = \Phi(y_i)$ con $i=1, \dots, N$, dove Φ è la f.d.c. normale standard.

Qualora volessimo generare uno scenario dalla copula t di Student con v (numero) gradi di libertà attraverso un modello ad un fattore, è sufficiente trasformare l'equazione (4) come segue (Frey e McNeil (2003); Wehrspohn (2003)):

$$Y_i = \sqrt{\frac{v}{W}} \left(b_{m(i)} X + \sqrt{1 - b_{m(i)}^2} e_i \right) \quad (17)$$

dove X, e_1, \dots, e_N sono v.c. normali standard e indipendenti; W è una v.c. chi-quadrato con v gradi di libertà e indipendente da X, e_1, \dots, e_N . In questo caso, l'algoritmo da applicare è il seguente:

- 1) generiamo $N+1$ variabili casuali indipendenti dalla distribuzione normale standard (queste sono le determinazioni di X, e_1, \dots, e_N) e una determinazione dalla v.c. chi-quadrato con v gradi di libertà, W , indipendente da X, e_1, \dots, e_N ;
- 2) calcoliamo uno scenario y_i di Y_i , $i=1, \dots, N$, utilizzando l'equazione (17);
- 3) generiamo dalla copula t di Student con v gradi di libertà lo scenario $u_i = T_v(y_i)$, $i=1, \dots, N$ dove T_v è la f.d.c. standardizzata della t di Student.

La struttura di correlazione implicita nel modello ad un fattore descritto dall'equazione (14) è molto restrittiva. Infatti, le correlazioni delle attività appartenenti a differenti cluster k ed l (ossia le correlazioni delle attività inter-cluster) sono implicitamente determinate dalle correlazioni delle attività intra-cluster attraverso l'equazione (16). Volendo adottare una struttura di correlazione più

completa¹³, possiamo adottare il modello fattoriale proposto da Gregory e Laurent (2004). Analiticamente:

$$Y_i = b_{m(i)} X_{m(i)} + \sqrt{1 - b_{m(i)}^2} e_i \quad (18)$$

Anche per il modello sopra (18) valgono le considerazioni fatte per il modello (14). Inoltre nel modello (18) il fattore di rischio sistematico, $X_{m(i)}$ è espresso attraverso un secondo modello unifattoriale. Analiticamente:

$$X_j = a_j X + \sqrt{1 - a_j^2} e'_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (19)$$

dove X , e'_j , Y_j sono variabili casuali indipendenti Normali standard. Quindi, sostituendo l'equazione (19) nella (18), otteniamo:

$$Y_i = b_{m(i)} a_{m(i)} X + b_{m(i)} \sqrt{1 - a_{m(i)}^2} e'_{m(i)} + \sqrt{1 - b_{m(i)}^2} e_i \quad (20)$$

Dal modello fattoriale sopra (20) otteniamo che la correlazione delle attività tra due debitori appartenenti allo stesso cluster $m(i)=j$, $j=1, \dots, J$ è $b_{m(i)}^2$. Diversamente, la correlazione tra due distinti cluster $m(i)$ e $m(j)$, con $m(i) \neq m(j)$, è $b_{m(i)} b_{m(j)} a_{m(i)} a_{m(j)}$. Per ottenere una struttura di dipendenza in cui le correlazioni all'interno di ciascun cluster sono uguali a ρ_j ($j=1, \dots, J$) e tutte le correlazioni tra cluster sono uguali a ρ , è sufficiente calibrare il modello (20) nel modo seguente: $b_j = \sqrt{\rho_j}$ e

$$a_j = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_j}}, \quad j=1, \dots, J.$$

3. Stima dei coefficienti di correlazione dei rendimenti delle attività

Il modo più semplice per stimare i coefficienti di correlazione tra i rendimenti delle attività è assumerli tutti uguali fra loro e pari ad un certo valore, per esempio a 0,20 (soluzione scelta nella prima versione del modello IRB di Basilea per il segmento *corporate*). Una seconda metodologia, adottata nell'ultima versione del modello IRB di Basilea¹⁴ sempre per il segmento *corporate*, calcola il coefficiente di correlazione delle attività come media ponderata di due valori limite fissati rispettivamente a 0,12 e 0,24. Analiticamente:

$$\rho_i = 0,12 \cdot \frac{(1 - e^{(-50 \cdot P(i))})}{(1 - e^{(-50)})} + 0,24 \cdot \left[1 - \frac{(1 - e^{(-50 \cdot P(i))})}{(1 - e^{(-50)})} \right] \quad (21)$$

¹³ Per ottenere un modello con una struttura di dipendenza ancora meno restrittiva si veda anche Jouanin et al. (2004).

¹⁴ Vedere Basel Committee on Banking Supervision (2003 and 2004).

dove ρ_i è la correlazione dei rendimenti delle attività all'interno di ciascun cluster i (con $i=1, \dots, J$). Le correlazioni dei rendimenti delle attività appartenenti a due diversi cluster i e j sono implicitamente calcolate come $\rho_{i,j} = \sqrt{\rho_i \rho_j}$.

Una metodologia alternativa per stimare le correlazioni dei rendimenti delle attività dei debitori è quella presentata da Frye (2002). Per applicare tale tecnica ad un portafoglio crediti italiano possiamo utilizzare come dati iniziali le serie temporali storiche dei tassi di decadimento annui $TdD_{t,j}$ (scaricabili liberamente dal sito della Banca d'Italia) per ciascun anno t ($t=1, \dots, T$) e relativamente a ciascun cluster geo-settoriale j ($j=1, \dots, J$)¹⁵. Il rendimento standardizzato delle attività del generico debitore i appartenente al generico cluster j è rappresentato dal modello unifattoriale già descritto dall'equazione (14). Data tale assunzione, abbiamo già visto come la correlazione dei rendimenti delle attività all'interno di uno stesso cluster ρ_j possa essere ricavata stimando il peso (o *factor loading*) b_j del cluster stesso. L'equazione (15) ci mostra infatti chiaramente come $\rho_j = b_j^2$. Cruciale in questo modello è quindi la stima dei pesi b_j dai quali, successivamente, possiamo ricavare i coefficienti di correlazione ρ_j . Inoltre, nella stima dei ρ_j , si assume che il numero dei debitori all'interno di ciascun cluster sia molto elevato e che questi siano *omogenei*, ossia che tutti i debitori (appartenenti allo stesso cluster) condividano la stessa probabilità d'insolvenza non condizionale (approssimata dal tasso di decadimento cumulato annualizzato medio di lungo periodo) e lo stesso peso b_j . Assumiamo infine che il tasso d'insolvenza osservato nell'anno t sia una determinazione della probabilità d'insolvenza condizionata al valore x_t del fattore sistematico X nell'anno t . Analiticamente:

$$TdD_{t,j} = \Pr[Y_j < \Phi^{-1}(TdD_j) | X = x_t] = \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(TdD_j) - b_j x_t}{\sqrt{1 - b_j^2}} \right] = g_j(x_t) \quad (22)$$

dove Φ è la f.d.c. normale standard e TdD_j è il tasso di decadimento medio di lungo periodo del cluster j . Poiché nella equazione (22) $g_j(x_t)$ è una funzione monotona del fattore sistematico X , che ha distribuzione Normale standard, la funzione di densità di probabilità (f.d.p) di $g_j(X)$ può essere scritta seguendo la formula di Vasicek (1987; 2002) nel modo seguente¹⁶:

$$f_j(TdD_{t,j}) = \frac{\sqrt{1 - b_j^2}}{b_j} \cdot \frac{\phi \left(\frac{\sqrt{1 - b_j^2} \cdot \Phi^{-1}(TdD_{t,j}) - \Phi^{-1}(TdD_j)}{b_j} \right)}{\phi(\Phi^{-1}(TdD_{t,j}))} \quad (23)$$

dove ϕ è la funzione di densità di probabilità (f.d.p) Normale standard.

¹⁵ I tassi di decadimento annui possono essere considerati stime delle probabilità d'insolvenza condizionali.

¹⁶ Vedi Finger (1999).

Successivamente la stima di b_j è ottenuta tramite massimizzazione della seguente funzione di log-verosimiglianza:

$$\hat{b}_j = \max_{b_j} \sum_{t=1}^T \ln f_j(TdD_{t,j}) \quad (24)$$

Data l'assunzione di un modello uni-fattoriale, è semplice dimostrare come la correlazione dei rendimenti delle attività tra due debitori appartenenti a due cluster diversi i e j possa calcolarsi come segue: $\rho_{i,j} = b_i b_j = \sqrt{\rho_i \rho_j}$.

4. Introduzione di una struttura di dipendenza tra tassi di recupero ed eventi d'insolvenza

Nei capitoli precedenti abbiamo assunto l'ipotesi di indipendenza dei tassi di recupero tra di loro e con i *times until default* (momenti all'insolvenza). Diversamente, in questo capitolo, assumiamo l'ipotesi di tassi di recupero correlati tra loro e con i *times until default*, seguendo l'approccio descritto in Pykhtin (2003), Tasche (2004), Gregory e Laurent (2004), Chabaane et al. (2004). In tale contesto, la perdita del portafoglio, calcolata come somma delle perdite relative a tutti i debitori in portafoglio, è guidata da due variabili casuali: Y_i (legata ai *times until default*) e V_i (legata ai tassi di recupero e quindi all'ammontare della perdita). Entrambe queste due variabili Y_i e V_i possono essere interpretate, coerentemente con il modello di Merton (1974), come il valore del rendimento delle attività del debitore i rispettivamente prima, Y_i , e immediatamente dopo l'insolvenza, V_i . L'intuizione economica sottesa a tale modello è che al momento dell'insolvenza il tasso di recupero sarà tanto più basso quanto più basso sarà il valore del rendimento delle attività immediatamente dopo l'insolvenza. Quindi, assumendo costante la correlazione tra i tassi di recupero e tra questi e i *times until default* all'interno di ciascun cluster, le variabili Y_i e V_i possono essere espresse attraverso il seguente modello fattoriale:

$$\begin{aligned} Y_i &= b_{m(i)} X + \sqrt{1 - b_{m(i)}^2} e_i \\ V_i &= c_{m(i)} X + \sqrt{1 - c_{m(i)}^2} e_i' \end{aligned} \quad (25)$$

Nel modello sopra, X , e_i , e_i' (con $i=1, \dots, N$) sono variabili casuali Normali standard e indipendenti tra loro. Le correlazioni sono funzione dei pesi (o *factor loading*) $b_{m(i)} > 0$ e $c_{m(i)} > 0$. A causa di problemi di calibrazione è conveniente assumere $b_{m(i)} = c_{m(i)}$ come in Tasche (2004).

La v.c. Y_i guida il *time until default* di ciascun debitore, mentre il valore del tasso di recupero R_i deriva dal valore della v.c. V_i . Se il debitore i fallisce nello scenario j , allora è generata una determinazione del tasso di recupero, altrimenti la perdita nello scenario j è zero. In particolare, il debitore i fallisce se $Y_i < \Phi^{-1}(q_{m(i)}(0, M_i))$, dove Φ è la f.d.c. Normale standard e $q_{m(i)}(0, M_i)$ è la probabilità d'insolvenza del cluster $m(i)$ relativamente alla scadenza residua M_i .

Questo tipo di evento è equivalente all'evento $\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(Y_i)) < M_i$, poiché per l'equazione (11): $q_{m(i)}(0, M_i) = F_i(M_i) = \Pr\{\tau_i \leq M_i\}$. Se $G(x; a, b)$ è la f.d.c. Beta con parametri a e b stimati utilizzando l'equazione (2), allora la determinazione del tasso di recupero nel caso d'insolvenza è la seguente:

$$R_i = G^{-1}\left(\Phi(c_{m(i)} X + \sqrt{1 - c_{m(i)}^2} e_i); a, b\right) \quad (26)$$

L'equazione (26) mostra chiaramente come il valore del tasso di recupero R_i sia correlato all'evento insolvenza attraverso il fattore sistematico X (una *proxy* dello stato generale dell'economia). In caso di depressione economica X assumerà valori bassi, più alto sarà il numero delle insolvenze (guidate dalla v.c. Y_i) e più basso sarà il valore dei tassi di recupero (guidati dalla v.c. V_i). Il contrario si verificherà nel caso di un'espansione economica.

5. Allocazione del Capitale a Rischio

Dopo aver calcolato le misure di rischio del portafoglio crediti attraverso il modello descritto nel capitolo 2, è necessario allocare il capitale a rischio tra i singoli debitori o sottoportafogli (qualora volessimo ripartire il portafoglio in cluster geografici o settoriali). La soluzione tradizionalmente adottata dalla letteratura accademica internazionale è quella di allocare il Value-at-Risk o Capitale a Rischio del portafoglio tra tutti i debitori (o sottoportafogli) proporzionalmente alle covarianze: $Cov(L_1, L)$, ..., $Cov(L_N, L)$, dove L_i è la v.c. perdita del generico debitore i ($i=1, \dots, N$) e L è la v.c. perdita dell'intero portafoglio crediti. Questa tecnica di allocazione del capitale, conosciuta come allocazione della volatilità, è la soluzione naturale derivante dall'adozione della tradizionale Teoria del Portafoglio (Markowitz, 1952), in cui la misura di rischio per eccellenza è la deviazione standard. L'uso di tale tecnica è appropriato solo quando l'ipotesi sottostante, ossia la normalità delle distribuzioni delle perdite, sia vera. Poiché nel caso del portafoglio crediti tale ipotesi non è realistica, allocare il capitale a rischio proporzionalmente alle covarianze può portare a risultati fuorvianti. Per esempio, può accadere che il capitale allocato ad un sottoportafoglio P^* sia maggiore del capitale di rischio dello stesso portafoglio P^* qualora considerato come portafoglio a sé stante (scoraggiando in tal modo la diversificazione del portafoglio). Potrebbe pure accadere che il requisito di capitale di un singolo prestito risulti maggiore del valore dell'esposizione del prestito stesso.

Ben diversamente, uno schema *coerente* di allocazione del capitale deve soddisfare le seguenti tre proprietà (Kalkbrener et al. (2004)):

- il capitale allocato all'unione di più sottoportafogli deve essere uguale alla somma dei capitali allocati ai singoli sottoportafogli. In particolare, il capitale di rischio del portafoglio è la somma dei capitali di rischio dei suoi sottoportafogli.

- Il capitale allocato al sottoportafoglio X, appartenente al portafoglio più grande Y, non deve mai eccedere il capitale di rischio del sottoportafoglio X considerato come portafoglio a sè stante.
- Un piccolo incremento nel valore di un'esposizione deve avere un piccolo effetto sull'ammontare di capitale di rischio allocato a quell'esposizione.

Una allocazione di capitale realizzata utilizzando, come misura di rischio, la Expected Shortfall (vedi equazione (6)) soddisfa le tre proprietà sopra descritte. In altri termini, l'allocazione di capitale in termini di ES è un'allocazione *coerente*. Analiticamente, l'ammontare di capitale allocato al debitore (o al cluster) i attraverso la ES, calcolata ad un livello di probabilità α , è il seguente:

$$E(L_i | L > ML_\alpha(L)) = \frac{1}{1-\alpha} E(L_i \cdot \mathbf{1}_{\{L > ML_\alpha(L)\}}) \quad (27)$$

dove L_i è la v.c. perdita relativa al debitore i, L è la v.c. perdita di portafoglio, $ML_\alpha(L)$ è la Massima Perdita del portafoglio e $\mathbf{1}_E$ è una v.c. che assume valore 1 se l'evento E (ossia $L > ML_\alpha(L)$) è vero, 0 se è falso. L'equazione (27) rappresenta il contributo medio del debitore i alle perdite di portafoglio eccedenti la ML_α . Tale contributo può essere facilmente calcolato tramite simulazione Monte Carlo nel modo seguente:

- 1) registrando le perdite $L_{i,j}$ del debitore i negli scenari j nei quali la perdita di portafoglio L_j è maggiore di ML_α ;
- 2) calcolando la loro media condizionata.

Sfortunatamente la simulazione Monte Carlo non produce una stima stabile dei contributi dei singoli debitori al rischio del portafoglio, anche generando un numero molto alto di scenari. Per tale ragione è consigliabile utilizzare tecniche di *importance sampling* capaci di ridurre la varianza degli stimatori¹⁷.

6. Implementazione ad un tipico portafoglio crediti italiano

In questo capitolo implementiamo il modello interno simulativo (descritto nel capitolo 2) ad un tipico portafoglio crediti italiano. Il nostro obiettivo è confrontare i risultati ottenuti da questo modello interno di portafoglio, in termini di misure di rischio e di allocazione del capitale, con quelli derivanti dal modello regolamentare (ossia dall'approccio IRB proposto dal Comitato di Basilea¹⁸). Nel caso di un portafoglio di esposizioni creditizie verso imprese non finanziarie, il

¹⁷ Vedere Glasserman and Li (2003).

¹⁸ Vedi Comitato di Basilea sulla Vigilanza Bancaria (aprile 2003; giugno 2004).

modello IRB calcola il requisito di capitale K_i per un generico debitore o esposizione i secondo la seguente formula regolamentare:

$$K_i = EaD_i \times LGD_i \times \left(\Phi \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho_i}} \Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} \Phi^{-1}(0,999) \right] - PD_i \right) \times \frac{1}{(1-1,5 \times b(PD_i))} \times (1 + (M_i - 2,5) \times b(PD_i))$$

Nella formula sopra, PD_i è la probabilità d'insolvenza ad un anno del debitore i , EaD_i è la sua esposizione all'insolvenza, $LGD_i = (1 - R_i)$ è la sua perdita data l'insolvenza (o il complemento ad 1 del rispettivo tasso di recupero R_i), M_i è la scadenza residua del prestito concesso al debitore i e ρ_i è la correlazione dei rendimenti delle attività di i stimata attraverso formula regolamentare (vedi equazione (21)). K_i , l'ammontare minimo di capitale calcolato tramite funzione regolamentare a fini di copertura dell'esposizione i dal rischio d'insolvenza, è anche il contributo del debitore o dell'esposizione i al rischio dell'intero portafoglio prestiti. In altri termini, K_i è il VaR di i ad un anno aggiustato su un orizzonte temporale $[0, M]$ e calcolato ad un livello di probabilità del 99,9% dato un portafoglio infinitamente granulare¹⁹.

Ricordiamo ancora come tutti i debitori i ($i=1, \dots, 10.500$) appartenenti al portafoglio oggetto di analisi siano imprese non-finanziarie residenti nelle 17 distinte aree geografiche italiane j (dove $j = 1, \dots, 17$). Inoltre, assumiamo che tutti i debitori appartenenti alla stessa area geografica condividano la stessa probabilità d'insolvenza PD_j . Come *proxy* delle probabilità d'insolvenza di lungo periodo, PD_j , di ciascun cluster geografico abbiamo utilizzato i tassi di decadimento annualizzati medi di lungo periodo di ciascuna area ricavati dai tassi di decadimento trimestrali forniti dalla Base informativa pubblica della Banca d'Italia²⁰ su un orizzonte temporale di 13 anni (precisamente dal 1990 al 2002). I coefficienti di correlazione delle attività si assumono costanti all'interno di ciascun cluster geografico. In altre parole, assumiamo che tutti i debitori appartenenti allo stesso cluster abbiano stesso coefficiente di correlazione ρ_j . Le correlazioni sono calcolate utilizzando sia la formula regolamentare (vedi equazione (21)) che la funzione di massima verosimiglianza (vedi equazione (24)). Tutte le scadenze residue delle esposizioni si assumono pari ad un anno. Inizialmente tutte le LGD si assumono non stocastiche e costanti al 50%.

La tabella 1 mostra la composizione e le caratteristiche del portafoglio crediti analizzato. Questo è ripartito in 17 cluster o sottoportafogli rappresentanti le 17 distinte aree geografiche italiane a cui appartengono tutti i debitori in portafoglio. Riportiamo inoltre per ciascun cluster il valore (in euro) della rispettiva esposizione, EaD_j , il numero dei debitori appartenenti a ciascun cluster, N_j , la

¹⁹ Con portafoglio infinitamente granulare intendiamo un portafoglio in cui il numero dei debitori è molto alto e ciascuna esposizione è molto bassa confrontata con il totale dell'esposizione di portafoglio. Il VaR è inoltre stimato attraverso una versione ad un fattore del modello di Merton (1974).

²⁰ Banca d'Italia (2003).

probabilità d'insolvenza del cluster, PD_j , e il rispettivo coefficiente di correlazione, ρ_j , calcolato sia attraverso la formula di Basilea II che attraverso la funzione di massima verosimiglianza.

Tabella 1 – Composizione e caratteristiche del portafoglio crediti

Cluster	EaD	N	PD	rho (Basel)	rho max likelihood
LIGURIA	102.000	510	2,52%	15,40%	0,85%
LOMBARDIA	252.000	1.260	1,93%	16,56%	0,83%
TRENTINO-ALTO ADIGE	72.000	360	1,28%	18,32%	1,87%
VENETO	142.000	710	1,72%	17,08%	1,23%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	64.000	320	2,15%	16,10%	2,83%
EMILIA-ROMAGNA	183.000	915	1,68%	17,18%	1,39%
MARCHE	94.000	470	2,01%	16,40%	1,78%
TOSCANA	128.000	640	2,25%	15,89%	1,27%
UMBRIA	76.000	380	2,41%	15,59%	1,03%
LAZIO	231.000	1.155	4,46%	13,29%	1,03%
CAMPANIA	132.000	660	4,23%	13,45%	1,27%
CALABRIA	54.000	270	5,18%	12,90%	1,00%
SICILIA	174.000	870	4,56%	13,23%	2,25%
SARDEGNA	68.000	340	3,87%	13,73%	0,82%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	153.000	765	1,93%	16,58%	0,78%
ABRUZZO E MOLISE	84.000	420	3,34%	14,26%	1,00%
PUGLIA E BASILICATA	91.000	455	4,13%	13,52%	2,24%
TOTAL	2.100.000	10.500			

Fonte: nostra elaborazione

Possiamo osservare come i coefficienti di correlazione, rho, stimati con il metodo di massima verosimiglianza (6° colonna Tab.1) siano marcatamente più bassi di quelli calcolati attraverso la formula regolamentare (5° colonna Tab. 1). Facciamo notare come tale risultato sia coerente con quello di altri studi sul tema riguardanti, in particolare, il segmento piccole e medie imprese del mercato francese e tedesco (Dietsch e Petey, 2004). E' risaputo come la maggior parte delle imprese non finanziarie italiane sia di piccola e media dimensione e come per queste il rischio sia più di natura idiosincratICA o specifica che di natura sistematica. Al contrario, le grandi imprese sembrerebbero molto più sensibili alle fluttuazioni dei fattori di rischio sistematico come, per esempio, le condizioni economiche generali. Poiché il coefficiente di correlazione quantifica l'ammontare di rischio sistematico o non diversificabile, le piccole e medie imprese pur configurandosi più rischiose delle grandi imprese in termini di probabilità d'insolvenza, sembrerebbero meno esposte ai cicli economici. Tale constatazione avrebbe portato il Comitato di Basilea ad esprimere il coefficiente di correlazione come funzione inversa della probabilità d'insolvenza. Dai nostri dati non sembrerebbe comunque emergere sempre una relazione negativa tra i rho stimati e le PD, nel caso di piccole imprese non finanziarie. Nella Tabella 2 riportiamo i risultati in termini di requisiti di capitalizzazione o di contributo al rischio di portafoglio, K_j , ottenuti adottando la formula di Basilea II e utilizzando prima le correlazioni regolamentari e successivamente le correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza. I requisiti di

capitalizzazione per l'intero portafoglio crediti e per i 17 sotto portafogli sono espressi sia in termini monetari (colonne 3° e 5° di Tab.2) che in percentuale dell'esposizione (colonne 2° e 4° di Tab.2).

Tabella 2 – Requisiti di capitalizzazione del portafoglio crediti calcolati seguendo la formula di Basilea ed utilizzando sia le correlazioni regolamentari che quelle stimate –

Cluster	K% (rho Basel)	K (rho Basel)	K% (rho max likelihood)	K (rho max likelihood)
LIGURIA	9,21%	9.398	1,07%	1.092
LOMBARDIA	8,41%	21.205	0,85%	2.151
TRENTINO-ALTO ADIGE	7,22%	5.202	1,06%	761
VENETO	8,07%	11.465	1,00%	1.426
FRIULI-VENEZIA GIULIA	8,73%	5.584	2,10%	1.345
EMILIA-ROMAGNA	8,00%	14.646	1,07%	1.950
MARCHE	8,52%	8.009	1,45%	1.359
TOSCANA	8,87%	11.352	1,27%	1.622
UMBRIA	9,08%	6.898	1,17%	887
LAZIO	11,23%	25.936	1,86%	4.291
CAMPANIA	11,01%	14.537	2,04%	2.690
CALABRIA	11,89%	6.421	2,04%	1.103
SICILIA	11,32%	19.697	3,10%	5.394
SARDEGNA	10,66%	7.251	1,45%	987
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	8,40%	12.857	0,82%	1.259
ABRUZZO E MOLISE	10,13%	8.509	1,47%	1.236
PUGLIA E BASILICATA	10,91%	9.929	2,88%	2.623
TOTAL	9,47%	198.895	1,53%	32.174

Fonte: nostra elaborazione

I requisiti di capitalizzazione appaiono molto sensibili al valore dei coefficienti di correlazione. A parità di condizioni, all'aumentare di rho aumenta il requisito di capitale. In particolare, nel nostro caso, assistiamo ad una forte riduzione di K sia a livello di cluster che di portafoglio totale andando ad inserire nella formula regolamentare i rho stimati anziché quelli regolamentari. Per esempio, per il portafoglio totale il requisito di capitalizzazione passa dal 9,47% dell'esposizione totale all'1,53% (in termini monetari da 198.895 euro a 32.174 euro) sostituendo ai rho regolamentari quelli stimati, questi ultimi decisamente più bassi (vedi 6° colonna di Tab.1).

Successivamente abbiamo calcolato diverse misure di rischio, precisamente VaR, ML e ES tutte in corrispondenza di un livello di probabilità del 99,9%, tramite implementazione del modello simulativo MC al portafoglio crediti analizzato. Abbiamo inoltre espresso le perdite sia in termini monetari che in percentuale del valore dell'esposizione dell'intero portafoglio e di ciascun sotto portafoglio. Per stimare la distribuzione delle perdite di portafoglio, abbiamo generato 100.000 scenari Monte Carlo.

Inizialmente, abbiamo supposto che l'esposizione creditizia verso ciascun debitore fosse omogenea e pari a 200 euro approssimando, in questo modo, l'ipotesi di infinita granularità del portafoglio

(assunzione alla base del modello IRB di Basilea). I risultati, in termini di diverse misure di rischio, ottenuti utilizzando i rho stimati sono riportati in Tabella 3.

Tabella 3 – 99,9%VaR, 99,9%ML, 99,9%ES calcolati attraverso il modello simulativo, utilizzando le correlazioni stimate tramite funzione di massima verosimiglianza e ipotizzando un portafoglio granulare-

Cluster	VaR 99.9%	%	ML 99.9%	%	ES 99.9%	%
LIGURIA	968	0,95%	2.255	2,21%	2.440	2,39%
LOMBARDIA	2.030	0,81%	4.467	1,77%	5.010	1,99%
TRENTINO-ALTO ADIGE	850	1,18%	1.311	1,82%	1.340	1,86%
VENETO	1.503	1,06%	2.725	1,92%	2.970	2,09%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	1.567	2,45%	2.254	3,52%	2.342	3,66%
EMILIA-ROMAGNA	2.108	1,15%	3.645	1,99%	4.090	2,23%
MARCHE	1.465	1,56%	2.408	2,56%	2.560	2,72%
TOSCANA	1.738	1,36%	3.180	2,48%	3.450	2,70%
UMBRIA	844	1,11%	1.762	2,32%	2.100	2,76%
LAZIO	3.766	1,63%	8.917	3,86%	10.140	4,39%
CAMPANIA	2.674	2,03%	5.468	4,14%	5.890	4,46%
CALABRIA	967	1,79%	2.366	4,38%	2.830	5,24%
SICILIA	6.225	3,58%	10.192	5,86%	10.250	5,89%
SARDEGNA	799	1,18%	2.116	3,11%	2.420	3,56%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	1.122	0,73%	2.596	1,70%	3.100	2,03%
ABRUZZO E MOLISE	1.154	1,37%	2.557	3,04%	2.750	3,27%
PUGLIA E BASILICATA	3.004	3,30%	4.881	5,36%	4.975	5,47%
TOTAL	32.782	1,56%	63.100	3,00%	68.657	3,27%

Fonte: nostra elaborazione

Come possiamo osservare, i risultati in termini di VaR ottenuti tramite simulazione MC ed utilizzando i rho stimati (colonna 2° e 3° di Tab. 3) sono molto vicini anche se superiori a quelli ricavati dalla formula di Basilea ed utilizzando sempre i rho stimati (vedi colonne 4° e 5° di Tab. 2). Infatti, dal modello simulativo otteniamo a livello di portafoglio totale un VaR pari all'1,57% dell'esposizione totale contro un K pari all'1,53% dell'esposizione totale ottenuto dall'adozione del modello di Basilea II.

I risultati in termini di VaR ottenuti implementando il modello simulativo si allontanano leggermente da quelli ottenuti con il modello di Basilea II al crescere del valore dei rho. Nel nostro caso ciò accade quando andiamo a sostituire nel calcolo dei requisiti di capitalizzazione i rho regolamentari a quelli stimati. In Tabella 4 riportiamo i risultati in termini di diverse misure di rischio (relative al portafoglio analizzato e ai sotto portafogli) scaturiti dall'adozione del modello interno ma questa volta utilizzando i rho regolamentari e sempre approssimando l'ipotesi di infinita granularità del portafoglio.

Tabella 4 - 99,9%VaR, 99,9%ML, 99,9%ES calcolati attraverso il modello simulativo, utilizzando le correlazioni regolamentari e ipotizzando un portafoglio granulare-

Cluster	VaR 99.9%	%	ML 99.9%	%	ES 99.9%	%
LIGURIA	9.646	9,46%	10.933	10,72%	13.460	13,20%
LOMBARDIA	20.697	8,21%	23.134	9,18%	31.130	12,35%
TRENTINO-ALTO ADIGE	4.603	6,39%	5.065	7,03%	7.470	10,38%
VENETO	10.944	7,71%	12.166	8,57%	16.630	11,71%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	5.600	8,75%	6.287	9,82%	8.220	12,84%
EMILIA-ROMAGNA	13.847	7,57%	15.384	8,41%	21.740	11,88%
MARCHE	7.887	8,39%	8.829	9,39%	11.670	12,41%
TOSCANA	11.427	8,93%	12.870	10,05%	15.870	12,40%
UMBRIA	7.062	9,29%	7.979	10,50%	9.810	12,91%
LAZIO	29.668	12,84%	34.820	15,07%	38.280	16,57%
CAMPANIA	16.516	12,51%	19.310	14,63%	21.100	15,98%
CALABRIA	7.560	14,00%	8.959	16,59%	9.560	17,70%
SICILIA	22.591	12,98%	26.558	15,26%	27.700	15,92%
SARDEGNA	8.056	11,85%	9.372	13,78%	10.060	14,79%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	12.563	8,21%	14.037	9,17%	18.030	11,78%
ABRUZZO E MOLISE	9.278	11,05%	10.682	12,72%	12.310	14,65%
PUGLIA E BASILICATA	11.239	12,35%	13.116	14,41%	14.290	15,70%
TOTAL	209.184	9,96%	239.501	11,40%	287.330	13,68%

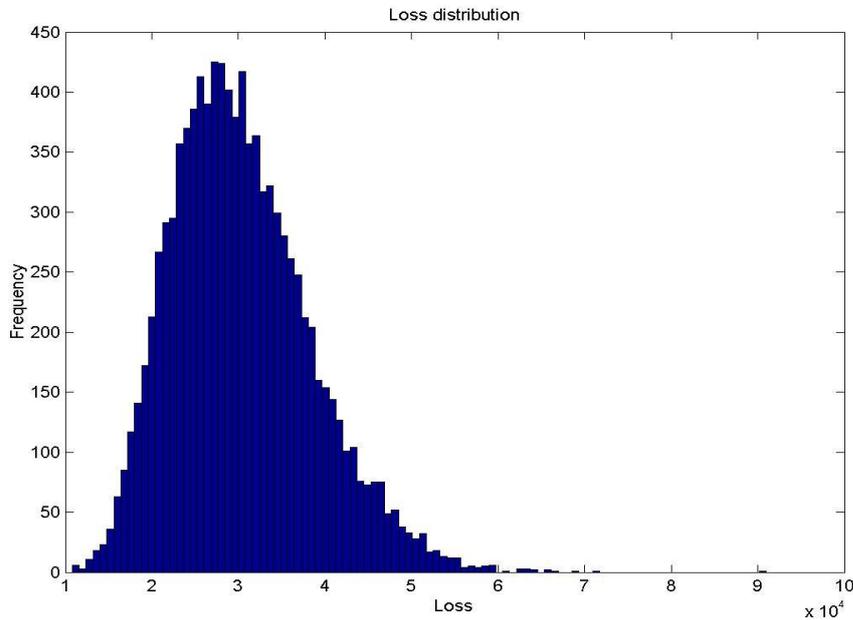
Fonte: nostra elaborazione

Come possiamo osservare dalla Tab. 4, anche adottando i rho regolamentari (decisamente più alti di quelli stimati) i VaR sia a livello di sotto portafoglio che di portafoglio globale ottenuti dal modello simulativo sono leggermente più alti dei K ricavati dal modello di Basilea II (vedi Tab. 2). A titolo d'esempio, il VaR a livello di portafoglio totale ed espresso in percentuale dell'esposizione passa da un 9,47% nel modello di Basilea II (colonna 2° di Tab. 2) ad un 9,96% nel modello simulativo (colonna 3° di tab. 4).

E' opportuno considerare che quando le correlazioni sono molto alte, fino al limite a tendere ad uno, tutti i debitori in portafoglio possono essere considerati come un'unica controparte. In altre parole, al crescere del valore delle correlazioni ci allontaniamo dall'ipotesi di infinità granularità o elevata diversificazione del portafoglio con un conseguente incremento del suo livello di rischio complessivo. Questo fenomeno è evidente osservando le due distribuzioni delle perdite di portafoglio raffigurate nelle Figure 1 e 2 rispettivamente. La distribuzione delle perdite di portafoglio in Fig.1, calcolata tramite il modello simulativo MC ed utilizzando le correlazioni stimate (notevolmente più basse di quelle regolamentari), è decisamente più vicina alla distribuzione Normale di quella rappresentata in Fig. 2, quest'ultima calcolata sempre attraverso il modello simulativo ma utilizzando le correlazioni regolamentari. Infatti, quando il valore delle correlazioni diminuisce, fino a tendere a zero, è necessario un minore numero di debitori in portafoglio per ottenere la convergenza della distribuzione delle perdite di portafoglio alla

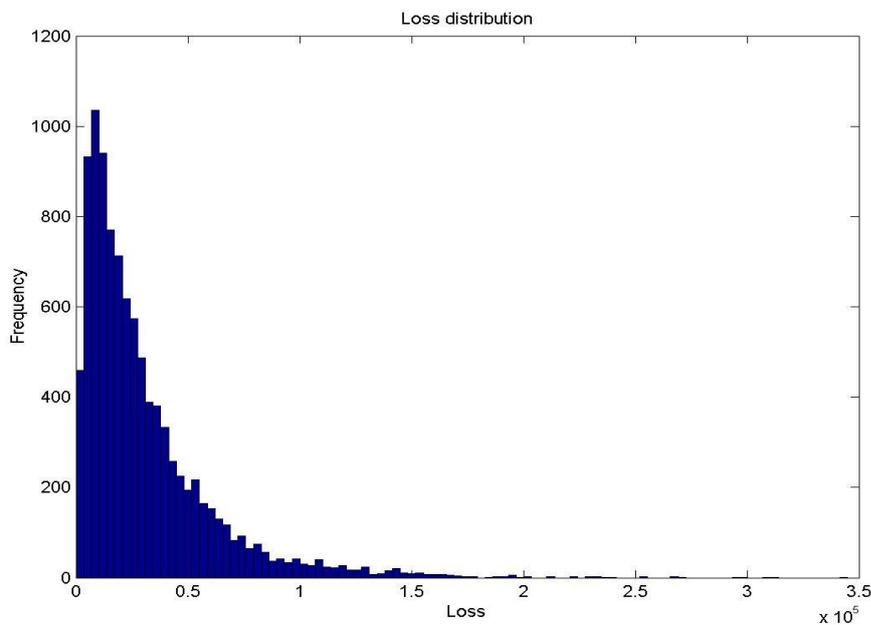
distribuzione Normale. Al contrario, quando le correlazioni sono alte, all'aumentare del numero dei debitori in portafoglio la convergenza alla distribuzione Normale è più lenta.

Fig. 1 – Distribuzione delle perdite del portafoglio calcolata tramite modello simulativo MC ed utilizzando le correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza –



Fonte: nostra elaborazione

Fig. 2 - Distribuzione delle perdite del portafoglio calcolata tramite modello simulativo MC ed utilizzando le correlazioni regolamentari –



Fonte: nostra elaborazione

Successivamente, abbiamo abbandonato l'ipotesi di infinita granularità del portafoglio o di assenza di rischio idiosincratco, per passare a calcolare i requisiti di capitalizzazione di un portafoglio

crediti con le stesse caratteristiche del precedente ma con esposizioni più concentrate. Più precisamente, abbiamo ipotizzato che metà dell'esposizione nei confronti di ciascun cluster sia concentrata su un solo debitore appartenente a quello stesso cluster. Per esempio, nel caso del cluster Lazio, 115.500 euro su 231.000 euro di esposizione complessiva sono concentrati su un solo debitore, mentre i rimanenti 115.500 euro d'esposizione sono ripartiti omogeneamente su tutti i rimanenti 1.154 debitori appartenenti allo stesso cluster. Quindi, assunto un portafoglio crediti concentrato, abbiamo calcolato i requisiti di capitalizzazione (99,9% VaR) assieme ad altre misure di rischio (99,9%ML e 99,9%ES) implementando il modello simulativo ed utilizzando prima i rho stimati (vedere Tab. 5) e successivamente i rho regolamentari (vedere Tab. 6).

Tab. 5 - 99,9% VaR, 99,9%ML, 99,9%ES calcolati attraverso il modello simulativo, utilizzando le correlazioni stimate tramite funzione di massima verosimiglianza e ipotizzando un portafoglio concentrato -

Cluster	VaR 99.9%	%	ML 99.9%	%	ES 99.9%	%
LIGURIA	2.973	2,91%	4.260	4,18%	5.882	5,77%
LOMBARDIA	17.278	6,86%	19.715	7,82%	39.361	15,62%
TRENTINO-ALTO ADIGE	616	0,86%	1.078	1,50%	291	0,40%
VENETO	4.763	3,35%	5.985	4,22%	841	0,59%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	967	1,51%	1.654	2,58%	547	0,85%
EMILIA-ROMAGNA	8.608	4,70%	10.145	5,54%	10.086	5,51%
MARCHE	2.642	2,81%	3.584	3,81%	2.986	3,18%
TOSCANA	5.652	4,42%	7.095	5,54%	4.157	3,25%
UMBRIA	1.290	1,70%	2.208	2,90%	551	0,73%
LAZIO	29.256	12,67%	34.408	14,90%	43.753	18,94%
CAMPANIA	9.424	7,14%	12.218	9,26%	14.993	11,36%
CALABRIA	1.270	2,35%	2.669	4,94%	2.193	4,06%
SICILIA	18.589	10,68%	22.556	12,96%	24.463	14,06%
SARDEGNA	1.785	2,62%	3.101	4,56%	827	1,22%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	5.896	3,85%	7.370	4,82%	966	0,63%
ABRUZZO E MOLISE	2.667	3,18%	4.071	4,85%	3.102	3,69%
PUGLIA E BASILICATA	4.746	5,22%	6.623	7,28%	10.438	11,47%
TOTAL	118.423	5,64%	148.741	7,08%	165.438	7,88%

Fonte: nostra elaborazione

Osservando i risultati in termini di VaR raccolti in Tab.5 e confrontandoli con quelli di Tab.2 rinveniamo una forte divergenza. Precisamente, i requisiti di capitalizzazione (colonne 2° e 3° di Tab.5) scaturiti dal modello simulativo sono più onerosi (più alti) di quelli derivati dall'utilizzo del modello di Basilea II (colonne 4° e 5° di Tab.2) quando abbandoniamo l'ipotesi di diversificazione del portafoglio e, soprattutto, quando utilizziamo i rho stimati (più bassi). A titolo d'esempio, ipotizzando un portafoglio concentrato, il VaR totale passa dall'1,53% dell'esposizione totale (modello di Basilea II) al 5,64% dell'esposizione (modello simulativo). Utilizzando i rho regolamentari nella stima dei requisiti di capitalizzazione la divergenza nei risultati tra modello simulativo e modello di Basilea II permane ma è meno marcata (vedere Tab.6). Il VaR del

portafoglio globale passa infatti da un 9,47% dell'esposizione nel modello regolamentare (colonna 2° di Tab.2) ad un 11,25% dell'esposizione totale nel modello interno (colonna 3° di Tab.6).

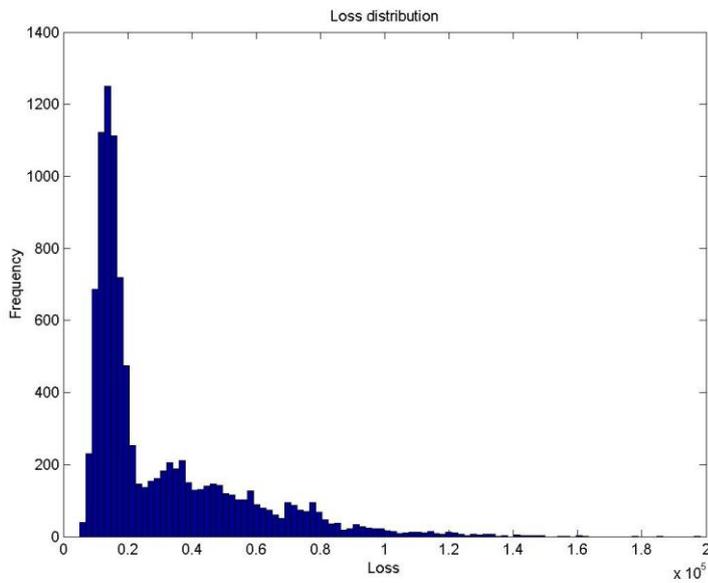
Tab.6 - 99,9%VaR, 99,9%ML, 99,9%ES calcolati attraverso il modello simulativo, utilizzando le correlazioni regolamentari ed ipotizzando un portafoglio concentrato -

Cluster	VaR 99.9%	%	ML 99.9%	%	ES 99.9%	%
LIGURIA	9.434	9,25%	10.721	10,51%	15.065	14,77%
LOMBARDIA	30.647	12,16%	33.084	13,13%	54.743	21,72%
TRENTINO-ALTO ADIGE	3.975	5,52%	4.437	6,16%	4.382	6,09%
VENETO	10.270	7,23%	11.492	8,09%	20.013	14,09%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	4.760	7,44%	5.448	8,51%	4.369	6,83%
EMILIA-ROMAGNA	17.262	9,43%	18.799	10,27%	34.893	19,07%
MARCHE	6.795	7,23%	7.737	8,23%	8.714	9,27%
TOSCANA	11.070	8,65%	12.513	9,78%	9.014	7,04%
UMBRIA	6.417	8,44%	7.334	9,65%	11.204	14,74%
LAZIO	41.825	18,11%	46.977	20,34%	48.847	21,15%
CAMPANIA	18.921	14,33%	21.715	16,45%	17.727	13,43%
CALABRIA	6.155	11,40%	7.554	13,99%	4.963	9,19%
SICILIA	29.030	16,68%	32.997	18,96%	32.648	18,76%
SARDEGNA	7.006	10,30%	8.322	12,24%	8.997	13,23%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	13.217	8,64%	14.691	9,60%	10.404	6,80%
ABRUZZO E MOLISE	8.057	9,59%	9.461	11,26%	10.936	13,02%
PUGLIA E BASILICATA	11.433	12,56%	13.310	14,63%	16.917	18,59%
TOTAL	236.274	11,25%	266.591	12,69%	313.835	14,94%

Fonte: nostra elaborazione

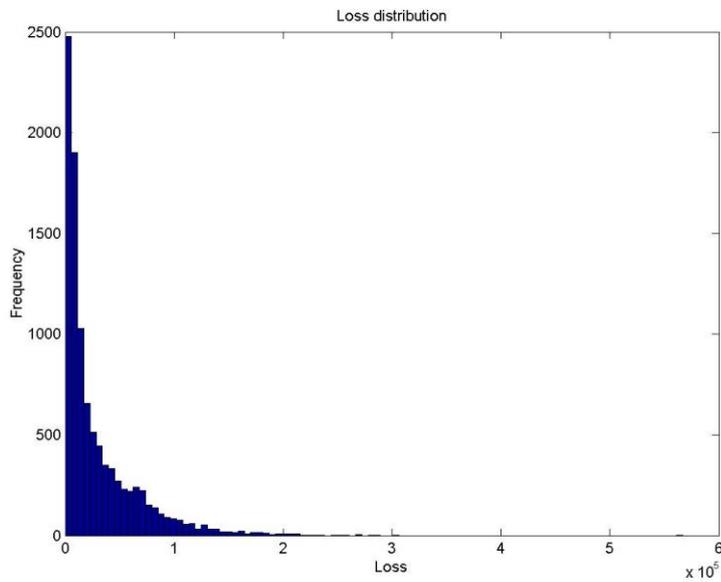
Nelle successive Figure 3 e 4 riportiamo la distribuzione delle perdite di portafoglio, nel caso di portafogli concentrati, ottenuta implementando il modello interno ed utilizzando prima le correlazione stimate (Fig.3) e, successivamente, le correlazioni regolamentari (Fig.4). Possiamo osservare come, in tali circostanze, le due distribuzioni delle perdite di portafoglio siano molto lontane dalla distribuzione Normale. Soprattutto in tali casi, ossia a fronte di portafogli concentrati, è raccomandabile un'allocazione coerente del capitale. In Tabella 7 riportiamo i risultati in termini di allocazione del capitale, relativamente ai 17 cluster geografici (o sotto portafogli crediti), espressi in percentuale del capitale totale nel caso di portafogli concentrati. Il nostro obiettivo è confrontare i risultati scaturiti da un'allocazione del capitale tradizionale o di tipo media-varianza (espressa in termini di Massima Perdita, ML) con quelli derivanti dall'utilizzo di un'allocazione coerente del capitale (espressa in termini di Expected Shortfall, ES). Inoltre, vogliamo pure valutare l'impatto del valore dei coefficienti di correlazione sulle scelte di allocazione del capitale. Come possiamo osservare dalla Tab.7, i risultati di allocazione tradizionale del capitale, espressi in termini di ML, ed allocazione coerente, espressi in termini di ES, sono molto diversi sia utilizzando i rho regolamentari che quelli stimati. Nel caso invece di portafogli granulari o diversificati (vedi Tab.8), i risultati in termini di allocazione del capitale derivanti dall'utilizzo delle due diverse tecniche (quella tradizionale e quella coerente) sembrano simili, soprattutto quando i rho sono bassi (nel nostro caso i rho stimati tramite metodo di massima verosimiglianza).

Fig.3 – Distribuzione delle perdite di portafoglio calcolata tramite modello simulativo MC, utilizzando le correlazioni stimate ed ipotizzando un portafoglio concentrato -



Fonte: nostra elaborazione

Fig.4 Distribuzione delle perdite di portafoglio calcolata tramite modello simulativo MC, utilizzando le correlazioni regolamentari ed ipotizzando un portafoglio concentrato-



Fonte: nostra elaborazione

Tab.7 – Risultati in termini di allocazione tradizionale (ML) e coerente (ES) del capitale relativi a ciascun cluster espressi in percentuale del capitale totale, ottenuti utilizzando i rho stimati e quelli regolamentari, ed ipotizzando portafogli concentrati -

Cluster	ML (rho max likelihood)	ES (rho max likelihood)	ML (rho Basel)	ES (rho Basel)
LIGURIA	2,86%	3,56%	4,02%	4,80%
LOMBARDIA	13,25%	23,79%	12,41%	17,44%
TRENTINO-ALTO ADIGE	0,72%	0,18%	1,66%	1,40%
VENETO	4,02%	0,51%	4,31%	6,38%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	1,11%	0,33%	2,04%	1,39%
EMILIA-ROMAGNA	6,82%	6,10%	7,05%	11,12%
MARCHE	2,41%	1,81%	2,90%	2,78%
TOSCANA	4,77%	2,51%	4,69%	2,87%
UMBRIA	1,48%	0,33%	2,75%	3,57%
LAZIO	23,13%	26,45%	17,62%	15,56%
CAMPANIA	8,21%	9,06%	8,15%	5,65%
CALABRIA	1,79%	1,33%	2,83%	1,58%
SICILIA	15,16%	14,79%	12,38%	10,40%
SARDEGNA	2,08%	0,50%	3,12%	2,87%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	4,95%	0,58%	5,51%	3,32%
ABRUZZO E MOLISE	2,74%	1,88%	3,55%	3,48%
PUGLIA E BASILICATA	4,45%	6,31%	4,99%	5,39%

Fonte: nostra elaborazione

Tab.8 - Risultati in termini di allocazione tradizionale (ML) e coerente (ES) del capitale relativi a ciascun cluster espressi in percentuale del capitale totale, ottenuti utilizzando i rho stimati e quelli regolamentari, ed ipotizzando portafogli granulari -

Cluster	ML (rho max likelihood)	ES (rho max likelihood)	ML (rho Basel)	ES (rho Basel)
LIGURIA	3,57%	3,55%	4,56%	4,68%
LOMBARDIA	7,08%	7,30%	9,66%	10,83%
TRENTINO-ALTO ADIGE	2,08%	1,95%	2,11%	2,60%
VENETO	4,32%	4,33%	5,08%	5,79%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	3,57%	3,41%	2,63%	2,86%
EMILIA-ROMAGNA	5,78%	5,96%	6,42%	7,57%
MARCHE	3,82%	3,73%	3,69%	4,06%
TOSCANA	5,04%	5,02%	5,37%	5,52%
UMBRIA	2,79%	3,06%	3,33%	3,41%
LAZIO	14,13%	14,77%	14,54%	13,32%
CAMPANIA	8,67%	8,58%	8,06%	7,34%
CALABRIA	3,75%	4,12%	3,74%	3,33%
SICILIA	16,15%	14,93%	11,09%	9,64%
SARDEGNA	3,35%	3,52%	3,91%	3,50%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	4,11%	4,52%	5,86%	6,28%
ABRUZZO E MOLISE	4,05%	4,01%	4,46%	4,28%
PUGLIA E BASILICATA	7,74%	7,25%	5,48%	4,97%

Fonte: nostra elaborazione

Ricordiamo che, quando la correlazione dei rendimenti delle attività è vicina allo zero, la distribuzione delle perdite di ciascun cluster e dell'intero portafoglio converge velocemente alla distribuzione Normale. In tal caso, come già dimostrato in letteratura (Rockafellar e Uryasev, 2000), l'allocazione tradizionale del capitale è equivalente a quella coerente. Diversamente, quando i valori delle correlazioni sono più alti, le distribuzioni delle perdite di portafoglio (nel caso di portafogli diversificati) presentano una convergenza più lenta alla distribuzione Normale. In tale contesto, i risultati di allocazione del capitale derivanti dalla metodologia tradizionale e da quella coerente divergono leggermente (confronta la colonna 4° con la colonna 5° della Tab.8). Differenze maggiori si rinvengono in quei cluster o sotto portafogli con coefficiente di correlazione più alto e con più basso numero di debitori (per esempio il cluster Emilia Romagna). Infatti, quando le correlazioni sono alte, un portafoglio diversificato presenta in termini di VaR risultati simili a quelli di un portafoglio con bassa diversificazione.

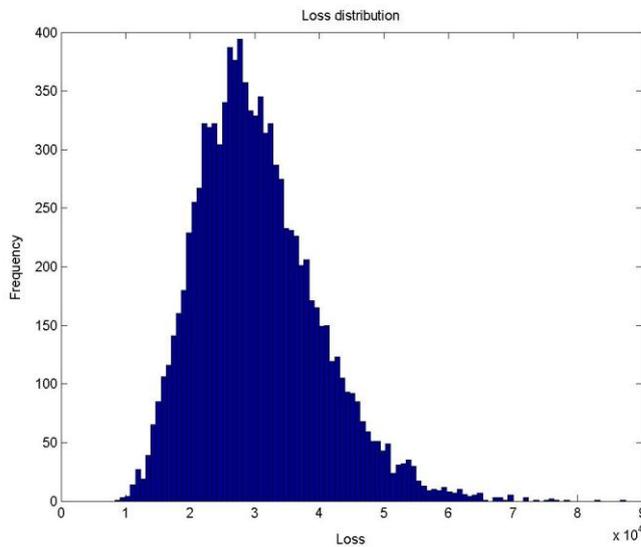
A questo punto, abbandoniamo l'ipotesi di tassi di recupero deterministici e indipendenti ed implementiamo il modello interno simulativo allo stesso portafoglio creditizio, ma assumendo tassi di recupero stocastici e correlati tra loro e l'evento insolvenza seguendo l'approccio di Pykhtin (2003) e Tasche (2004) (già descritto nel capitolo 4). In tale contesto, assumiamo $b_{m(i)}=c_{m(i)}$ con $i=1,\dots,N$, esposizioni omogenee (ossia tutte di pari ammontare) e con scadenza residua uguale ad 1 anno. Per ciascun debitore ipotizziamo un valore medio del tasso di recupero $m=0,5$ e una deviazione standard $s=0,2$. Successivamente stimiamo le distribuzioni di perdita del portafoglio e dei sottoportafogli, le misure di rischio e di allocazione del capitale per i 17 gruppi regionali utilizzando sia le correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza che le correlazioni calcolate tramite la formula di Basilea II. I risultati sono riportati in Tabella 9. Nelle Figure 5 e 6 sono rappresentate le distribuzioni delle perdite del portafoglio complessivo calcolate tramite il modello interno simulativo sia nel caso di correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza che tramite formula regolamentare.

Tabella 9 – Requisiti di capitale calcolati assumendo tassi di recupero stocastici e correlati all’evento insolvenza ed utilizzando sia i rho regolamentari (rho Basel) che i rho stimati tramite metodo di massima verosimiglianza nel caso di portafoglio omogeneo.

Cluster	ML 99.9% (rho max likelihood)	%	ES 99.9% (rho max likelihood)	%	ML 99.9% (rho Basel)	%	ES 99.9% (rho Basel)	%
LIGURIA	2.530	2,48%	2.557	6,83%	13.884	13,61%	17.677	17,33%
LOMBARDIA	4.980	1,98%	5.455	5,16%	29.183	11,58%	40.487	16,07%
TRENTINO-ALTO ADIGE	1.465	2,04%	1.374	2,45%	6.478	9,00%	9.625	13,37%
VENETO	3.037	2,14%	3.177	0,88%	15.425	10,86%	22.106	15,57%
FRIULI-VENEZIA GIULIA	2.520	3,94%	2.843	3,73%	7.898	12,34%	10.974	17,15%
EMILIA-ROMAGNA	4.142	2,26%	4.448	3,18%	19.552	10,68%	27.958	15,28%
MARCHE	2.757	2,93%	3.023	1,46%	11.190	11,90%	15.515	16,51%
TOSCANA	3.575	2,79%	3.707	6,53%	16.429	12,84%	22.185	17,33%
UMBRIA	1.981	2,61%	2.389	4,96%	10.118	13,31%	13.208	17,38%
LAZIO	10.182	4,41%	11.305	12,92%	43.856	18,99%	49.825	21,57%
CAMPANIA	6.332	4,80%	7.013	8,08%	24.451	18,52%	28.185	21,35%
CALABRIA	2.661	4,93%	3.161	5,13%	11.248	20,83%	12.126	22,46%
SICILIA	11.630	6,68%	12.057	9,79%	33.537	19,27%	38.755	22,27%
SARDEGNA	2.424	3,57%	2.540	6,34%	11.949	17,57%	14.374	21,14%
PIEMONTE E VALLE D'AOSTA	2.931	1,92%	3.103	4,68%	17.791	11,63%	24.289	15,88%
ABRUZZO E MOLISE	2.892	3,44%	3.143	4,85%	13.420	15,98%	16.251	19,35%
PUGLIA E BASILICATA	5.568	6,12%	5.563	4,94%	16.449	18,08%	18.798	20,66%
TOTAL	71.609	3,41%	76.856	5,95%	302.859	14,42%	382.338	18,21%

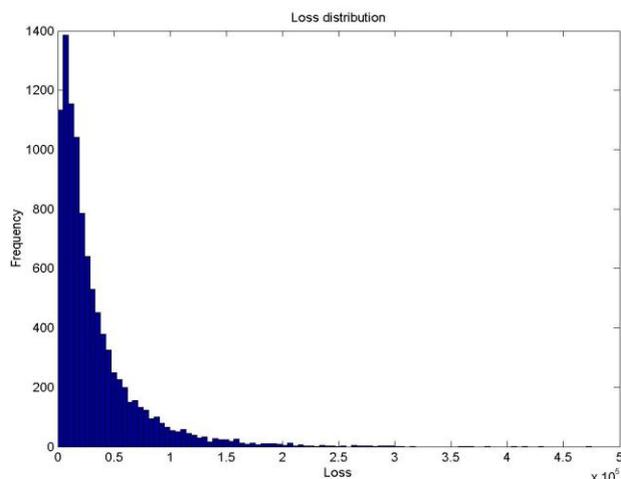
Fonte: nostra elaborazione

Figura 5 – Distribuzione delle perdite del portafoglio globale calcolate tramite Simulazione Monte Carlo ed assumendo tassi di recupero stocastici e correlati all’evento insolvenza (nel caso di portafoglio omogeneo e correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza).



Fonte: nostra elaborazione

Figura 6 – Distribuzione delle perdite del portafoglio globale calcolata tramite Simulazione Monte Carlo ed assumendo tassi di recupero stocastici e correlati all'evento insolvenza (nel caso di portafoglio omogeneo e correlazioni calcolate tramite formula di Basilea II).



Fonte: nostra elaborazione

Possiamo osservare dalla Tab.9 come le richieste di capitale (sia in termini di ML che di ES espresse in termini monetari e in percentuale dell'esposizione) di ciascun sottoportafoglio e del portafoglio crediti globale aumentino nettamente rispetto al caso, analizzato in precedenza, di tassi di recupero deterministici e incorrelati (vedere le tabelle 3 e 4). Tale risultato è ancora più evidente quando la correlazione tra tasso di recupero (R_k) ed evento insolvenza (τ_k), che è una funzione di ρ_k , è alta. In altre parole, l'incremento di valore delle misure di rischio è più accentuato utilizzando i rho regolamentari (decisamente più alti dei rho stimati).

7. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo implementato un modello interno simulativo di stima del rischio di credito e di allocazione del capitale di un tipico *banking book* di una grande banca commerciale italiana. Tale portafoglio è formato da esposizioni creditizie verso imprese non finanziarie distribuite sull'intero territorio nazionale e ripartite in 17 gruppi geografici. I risultati in termini di diverse misure di rischio sono stati confrontati con quelli ottenuti dal modello IRB proposto da Basilea II per calcolare i requisiti minimi di capitalizzazione bancaria a fini di vigilanza prudenziale. Tali risultati sono stati ottenuti ipotizzando inizialmente tassi di recupero deterministici e indipendenti tra loro e, successivamente, considerando tassi di recupero stocastici e dipendenti tra loro e con l'evento insolvenza. A differenza del modello IRB di Basilea II, abbiamo calcolato il capitale a rischio del portafoglio crediti utilizzando le correlazioni dei rendimenti delle attività dei debitori in portafoglio stimate tramite metodo di massima verosimiglianza e non solo tramite

formula regolamentare. Anche in termini di capitale allocato abbiamo utilizzato una tecnica di allocazione coerente basata sulla ES, diversa da quella tradizionale.

I risultati più interessanti ottenuti da questo studio possono schematizzarsi come segue:

- i requisiti di capitalizzazione di ciascuna esposizione sono particolarmente sensibili ai valori del coefficiente di correlazione dei rendimenti delle attività del debitore, a parità di altre condizioni.
- I coefficienti di correlazione ricavati dai *factor loading*, stimati a loro volta tramite metodo di massima verosimiglianza, hanno valori nettamente inferiori a quelli ottenuti calcolando i rho attraverso la formula regolamentare, anche prendendo in considerazione la detrazione riconosciuta da Basilea II per le piccole e medie imprese in funzione del loro fatturato annuo.
- Quando consideriamo portafogli altamente diversificati e granulari, i valori dei requisiti minimi di capitalizzazione ottenuti dal modello IRB sono coerenti con quelli ottenuti dal modello interno, soprattutto quando utilizziamo in quest'ultimo le correlazioni stimate tramite metodo di massima verosimiglianza. Quando invece utilizziamo nel modello interno i rho regolamentari i risultati divergono leggermente (ossia sono leggermente superiori).
- Quando consideriamo portafogli concentrati, i risultati in termini di requisiti di capitalizzazione o di VaR ottenuti dal modello IRB di Basilea II si allontanano da quelli ottenuti dal modello interno. In particolare, il modello interno dà risultati più onerosi (più alti) in termini di VaR. Tale differenza risulta più marcata utilizzando i rho stimati anziché quelli regolamentari.
- Nel caso di portafogli concentrati è consigliabile l'utilizzo di una tecnica coerente di allocazione del capitale, basata sulla ES. Tale raccomandazione è valida anche nel caso di portafogli omogenei e in corrispondenza di rho elevati.
- Quando si assumono tassi di recupero stocastici e dipendenti tra loro e con l'evento insolvenza, i risultati in termini sia di capitale a rischio che di allocazione del capitale aumentano di valore. Ciò è vero soprattutto quando la correlazione tra tasso di recupero ed evento insolvenza, che assumiamo dipendere da rho, è alta (ossia quando utilizziamo i rho regolamentari). In tale circostanza, il modello di Basilea II sottostima il rischio di credito.

Bibliografia

Acerbi, C., and D. Tasche (2002): "On the coherence of expected shortfall", *Journal of Banking and Finance* 26, pp. 1487-1503.

Andersson, F., H. Mausser, D. Rosen and S. Uryasev (2001): "Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion", *Mathematical Programming, Serie B* 89, pp. 273-291

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1999): “Coherent measures of risk”, *Mathematical Finance* 9, pp. 203-228.

Banca d'Italia (2003), Base informative pubblica, aprile.

Basel Committee on Banking Supervision (2003): “The New Basel Capital Accord”, Consultative Document, BIS, April.

Basel Committee on Banking Supervision (2004): “Modifications to the capital treatment for expected and unexpected credit losses in the New Basel Accord”, BIS, January.

Chabaane, A., J.-P. Laurent and J. Salomon (2004): “Double Impact: Credit Risk Assessment and Collateral Value”, working paper.

Crouhy, M., D. Galai, and R. Mark (2000): “A comparative analysis of current credit risk models”, *Journal of Banking and Finance*, 24.

Dietsch, M. and J. Petey (2004): “Should SME exposures be treated as retail or corporate exposures? A comparative analysis of default probabilities and asset correlations in French and German SMEs”, *Journal of Banking and Finance*, 28, pp.773-788.

Finger, C. C. (1999): “Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions”, *CreditMetrics Monitor*, April, pp.14-33.

Frye, J. (2002): “Depressing recoveries”, *RISK* 13(11), pp. 106-111.

Galiani, S. S. (2003): “Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products”, King's College London, MSc thesis.

Glasserman, P. and J. Li (2003): “Importance Sampling for Portfolio Credit Risk”, working paper.

Gordy, M. (2001): “A risk-factor model foundation for ratings-based capital rules”, Working Paper, FED.

Gregory, J. And J.-P. Laurent (2004): “In the Core of Correlation”, working paper, April.

Jouanin, J.-F., G. Riboulet and T. Roncalli (2004): “Financial Applications of Copula Functions”, in *Risk Measures for the 21st Century*, edited by G. Szegö, John Wiley & Sons.

Kalkbrener, M., H. Lotter and L. Overbeck (2004): “Sensible and Efficient Capital Allocation for Credit Portfolios”, *RISK Magazine*, January.

Li, D. X. (2000): “On Default Correlation: A Copula Function Approach”, *Journal of Fixed Income*, 9 (March), pp. 43-54.

Markowitz, H. (1952): “Portfolio selection”, *Journal of Finance* 7, pp. 77-91.

Mashal, R., M. Naldi (2002): “Extreme Events and Default Baskets”, *RISK*, June, pp. 119-122.

Meneguzzo, D., W. Vecchiato (2002): “Copula sensitivity in collateralised debt obligations and basket default swaps pricing and risk monitoring”, working paper, Intesa Bank, Milan, Italy.

Merton, R. C. (1974): “On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, 29, pp. 449-470.

Pykhtin, M. (2003): “Unexpected recovery risk”, *RISK* 16(8), pp. 74-78.

Rockafellar, R. T., S. Uryasev (2000): “Optimization of Conditional Value-at-Risk”, *The Journal of Risk*, 2, pp. 21-41.

Rockafellar, R. T., S. Uryasev (2002): “Conditional Value-at-Risk for general loss distributions”, *Journal of Banking and Finance*, 26(7), pp.1443-71.

Romano, C. (2002): “Calibrating and simulating copula functions: an application to the Italian stock market”, *Quaderno CIDEM* No. 12/2002, CIDEM, Università di Roma “La Sapienza”, Roma.

Tasche, D. (2004): “The single risk factor approach to capital charges in case of correlated loss given default rates”, Working paper.

Vasicek, O. (1987): “Probability of loss on loan portfolio”, Working paper, KMV Corporation.

Vasicek, O. (2002): “Loan portfolio value”, *RISK*, 12.

Wehrspohn, U. (2003): “Generalized Asset Value Credit Risk Models and Risk Minimality of the Classical Approach”, working paper.