Eğitim ve Bilim

Cilt 47 (2022) Sayı 209 413-441

Orijinal Makale

Matematik Öğretmenlerinin Kümeler Konusunda Temel Kavramlara İlişkin Uzmanlık Alan Bilgilerinin İncelenmesi *

Nurullah Yazıcı [1], Mustafa Albayrak [2]

Öz

Bu araştırmanın amacı kümelerde temel kavramların öğretimine ilişkin matematik öğretmenlerinin "Öğretim için Matematik Bilgisi" (ÖMB) modeli kapsamında uzmanlık alan bilgilerini incelemektir. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden bütüncül tek durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubu, 2016-2017 eğitim öğretim yılında Akdeniz Bölgesi'nde bir ilimizdeki farklı liselerden ölçüt örnekleme yoluyla seçilen farklı öğrenim durumuna, mesleki deneyime ve kümeler konusunu öğretim tecrübesine sahip 18 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Araştırma verileri yarı-yapılandırılmış görüşme, gözlem ve doküman analizi teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen verilerin çözümlenmesinde betimsel analiz, içerik analizi, sürekli karşılaştırma teknikleri ile her bir veri toplama aracına özel veri analiz yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Araştırma bulgularında öğretmenlerin kendilerine yöneltilen sorulara yazdıkları gerekçelerin daha çok "kısmen doğru açıklama" ve "yanlış açıklama" şeklinde sınıflandırıldığı belirlenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmenlerin "Küme, Evrensel Küme, Sonsuz Küme" ve "Eşit Küme" kavramlarına yönelik yüzeysel bilgilere sahip oldukları tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin yöneltilen sorulara tatmin edici matematiksel açıklamalar getirmekten ziyade kavramın özelliklerinden hareketle genel bir matematik bilgisi ile açıklamalar yaptıkları da belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler

Matematik öğretmeni
Kümelerde temel kavramlar
Uzmanlık alan bilgisi

Makale Hakkında

Gönderim Tarihi: 04.12.2019
Kabul Tarihi: 04.01.2022
Elektronik Yayın Tarihi: 04.02.2022

DOI: 10.15390/EB.2022.9256

* Bu makale Nurullah Yazıcı'ın Mustafa Albayrak danışmanlığında yürüttüğü "Matematik öğretmenlerinin öğretim için matematik bilgisi: Kümelerde temel kavramların analizi" başlıklı doktora tezinden üretilmiştir.

[1] Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, yazicinurullah@gmail.com
[2] Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, albayrak1957@gmail.com

Giriş

Eğitim sisteminin etkililiğinin, sistemin odak noktasında bulunan öğretmenlerin (Aksoy, 2013; Bursalıoğlu, 2021) niteliğini arttırmakla mümkün olabileceği düşünülmektedir. Çünkü öğretmenler, öğretim programından okula kadar, eğitim sisteminin tüm öğeleri içerisinde etkisi en fazla olan öğedir ve bir eğitim sistemi, bünyesindeki öğretmenler kadar iyidir (Kavcar, 2002). Bundan dolayıdır ki öğrenci başarılarını uluslararası boyutta karşılaştırabilme ve inceleyebilme imkânı tanıyan PISA (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) ve TIMMS (Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması) sınavlarının elde edilen düşük seviyede başarı sonuçları, birçok ülkeyi eğitim sistemlerindeki eksiklikleri öğretmenlerin sahip oldukları nitelikler ile ilişkilendirmelerine neden olmuştur (Gürlen, Demirkaya ve Doğan, 2019; Simola, 2005). Çünkü öğretmenlerin niteliği, öğrencilerin öğrenmesini etkileyen en önemli etkendir (Darling-Hammond, 2006; Ferguson, 1991; Olson, 2008; Wenglinsky, 2004). Bundan dolayı eğitim sisteminin asli öğesi olan öğretmenlerimizin sahip olması gereken yeterliliklerin neler olması gerektiği ve bu yeterliliklerin arttırılmasına yönelik neler yapılması gerektiğine dair birçok çalışma yapılmıştır (Andrews, 2012; Başkan, 2001; Caspersen, 2013; Connel, 2009; Kim, 2013; Lee ve Lee, 2020; Omare, Imonjeb ve Nyagah, 2020; Qin ve Bowen, 2019; Schmidt, Houang ve Cogan, 2011). Bu çalışmaları incelediğimizde, öğretmenlerin alan bilgileri, alanına özgü öğretebilme becerileri (pedagojik bilgi), teknolojiyi kullanma becerileri ile tutum ve duyarlılıklarının ön plana çıktığı görülmektedir. Ayrıca, tarih boyunca öğretmenlerin sahip olması gereken yeterliliklerin, öğretim becerileri, konu alan bilgisi becerisi ve genel öğretim becerisi şeklinde değişim gösterdiği de bilinmektedir (Begle, 1979; Shulman, 1986). Bu bağlamda, eğitim ve öğretimin etkin ve değişken bir yapıya sahip olması da düşünüldüğünde, öğretmenlerin sahip olması gereken yeterliliklerin (konu alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, tutum, davranış, değer, vb.) sürekli olarak araştırılması ve geliştirilmesinin kaçınılmaz olduğu düşünülmektedir (An, Kulm ve Wu, 2004; Ball ve McDiarmid, 1990; Baştürk, 2009; Şişman, 2009).

Kümeler Konusunun Matematik Eğitimindeki Yeri ve Önemi

Matematiğin aksiyomatik yapısı ve ispat mantığının inşa edilmesinde "küme" kavramının etkili olmasından dolayı, kümeler konusunun öğretimi matematik eğitimi açısından önemlidir (Gavalas, 2005; Uğurel ve Moralı, 2010; Yücesan, 2011). Sayılar konusunun öğretimi (N, Z, Q, R) bunun en bariz örneğidir. Bu sayı kümeleri arasındaki birbirinin alt kümesi olması veya birbirini kapsaması şeklinde ilişkiler ancak kümeler konusunun öğretimiyle öğrencilere kazandırılabilir (Özdemir, 2015). Ayrıca mantık ve önerme konusu kavramlarından "ve, veya, ya da" gibi kavramlar, olasılık kavramlarından "deney, örnek uzay, olay" ve "olayın çıktısı" kavramları ve temel geometri kavramlarından "nokta, doğru, düzlem" kavramları kümeler konusu ile doğrudan ilişkilidir (Bayazıt ve Aksoy, 2010). Küme kavramına ilişkin öğrencilerle yapılan araştırmalarda, öğrencilerin temel kavramlara ilişkin öğrenme zorlukları yaşadıkları ve yüzeysel anlamalara sahip olduğu görülmektedir (Baki ve Mandacı Şahin, 2004; Gür, 2009; İpek, Albayrak ve Işık, 2009; Kolar ve Čadež, 2012; Linchevski ve Vinner, 1988; Uğurel ve Moralı 2010; Zehir, Işık ve Zehir, 2008). Bu araştırmalarda, kümelerdeki kavramlara ilişkin öğrenci yanılgılarının genellikle yanlış seçilen etkinliklerden, küme kavramının eksik ve hatalı tanımlanmasından ve küme kavramının doğasından kaynaklanan yanılgılar olduğu ifade edilmiştir. Özellikle sonsuzluk kavramının doğasından kaynaklanan zorluklar gerek öğretmenlerin gerekse öğrencilerin bu konuda güçlükler yaşadıklarını göstermektedir (Cheung, Rubenson ve Barner, 2017; Fischbein, 2001; Hannula ve Pehkonnen, 2006; Monaghan, 2001). Sonsuzluk kavramına ilişkin Fischbein'in (2001) şu ifadesi de epistemolojik nedenlerden kaynaklanan bu zorluğa dikkat çekmektedir: "Aklımızın kavrayamadığı, hatta imkânsız bulduğu şey, gerçek sonsuzdur. Dünyanın sonsuzluğu, bir doğru üzerindeki noktaların sayısının sonsuzluğu, gerçek sayıların sonsuzluğu vb." (s. 309). Nitekim, Uğurel, Bukova-Güzel ve Kula (2010) da öğretmenlerin "dünyadaki tüm ağaçların yaprak sayısı sonsuz elemanlıdır" şeklindeki hatalı örneklerinin, sonsuz küme kavramına ilişkin yanılgılara sebep olabilecek matematiksel yanlışlıklar içerdiğini ifade etmişlerdir. Evrensel küme kavramına ilişkin, Yazıcı ve Kültür (2017) yaptıkları çalışmada öğretmenlerin evrensel kümenin her şeyi içinde barından çok büyük bir küme olması şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduklarını gözlemlemişlerdir. Öğretmenlerin sahip oldukları bu tür yanılgıların öğrenci öğrenmesini de olumsuz etkileyeceği yapılan çalışmaların sonuçlarında görülmektedir (Chick, Pham ve Baker, 2006; Yazıcı ve Kültür, 2017). Nitekim öğrencilerde kavram yanılgılarının gelişmesine neden olan etkenler arasında tercih edilen pedagojik yaklaşımların, öğretim modelleri ve materyallerin etkin rol oynadığı bilinmektedir (Simon, Tzur, Heinz ve Kinzel, 2004; Tanner ve Jones, 2003). Ayrıca, öğrencilerin herhangi bir kavrama ilişkin cevaplarını analiz edebilmek için öncelikle öğrencilerin cevaplarının doğru ya da yanlış olduğuna karar verebilmek gerekir. Daha sonraki aşamada ise, öğrencilerin yanılgılarını ve yanılgı kaynaklarını tespit etmek gelmektedir (Boz, 2004). Başka bir ifadeyle öğrencilerin hata yapma ya da yanılgıya düşme durumuna karşı öğretmenlerin de uzmanca yaklaşım ortaya koyması gerekmektedir (Bingölbali ve Özmantar, 2014). Bu minvalde yapılan bazı çalışmalarda "ortak özellik, sonsuz küme, boş küme, eleman" ve "alt küme" kavramlarına ilişkin öğrencilerin de öğrenme zorlukları yaşadıkları gözlenmiştir (Demir, 2012; Gür, 2009; Özdeş ve Kesici, 2015). Bu çalışmalarda öğrencilerin "sonsuz küme" kavramı için "elemanları sayamayacağımız kadar çoktur" ifadesine sıklıkla başvurdukları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin özellikle alt küme-kapsama ilişkisindeki eksiklikten kaynaklanan, sayı kümelerine yönelik öğrenme zorluklarına sahip oldukları da belirlenmiştir. Baki ve Mandacı Şahin'e (2004) göre küme kavramı matematikteki soyut kavramlardandır ve öğrencilerin soyut kavramların öğreniminde öğrenme güçlükleri yaşayacakları aşikârdır (Senemoğlu, 2000). Bu sebeple ders içi öğretim sürecinde öğrencinin zihninde yer edecek şekilde somut ifade veya örnekler kullanılarak, öğrencinin öğrenmede yaşayabileceği güçlükler azaltılabilir veya giderilebilir (Baykul, 2016).

Öğretmenin Alan Bilgisi

Etkin öğretim için gerekli olan alan bilgisi kavramı, öğretmenin, öğretimini yaptığı alana ve öğretim programına özgü konu ve kavram bilgisi olarak düşünülebilir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016). Alan bilgisi, Shulman'a (1986) göre, "öğretmenin zihnindeki bilginin miktarı ve bu bilgilerin organize edilmesi" (s. 9) olarak tanımlanmaktadır. Alan bilgisi, öğretim sürecindeki konuya özgü tanımları, özellikleri, sembolleri, algoritmaları ve örneklerin seçimini içeren yetkinliklerdir (Davis, 2003; Grossman, Wilson ve Shulman, 1989; Shulman, 1987, 2004). Dolayısıyla öğreteceği konuya ilişkin yeterince alan bilgisine sahibi olmayan öğretmenlerin, öğrenme sürecine de katkısının düşük olacağı beklenmektedir (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Çünkü öğretmenin alan bilgisi, konuya özgü anahtar kavram ve kurallarda yeterliğin yanı sıra, problem çözme yöntem ve stratejilerini de içerisinde barındırır (Toluk Uçar, 2011). Bununla birlikte, öğrenciye öğretici ve düşündürücü sorular sorma, öğrenci öğrenmelerini değerlendirme, öğrenme etkinliklerinin seçimi vb. birçok öğretim etkinliği, öğretmenin öğreteceği konuya ilişkin konu alan bilgisine bağlıdır (Ball ve McDiarmid, 1990; Even, 1993). Bu bakımdan konuya özgü yeterince bilgi sahibi olmayan öğretmenler, öğretim esnasında konuya özgü kavramları yanlış ifade etmekte ve konuya uygun öğretim tekniklerini yeterince kullanamamaktadırlar (Suh, 2005). Bu bağlamda, öğretmenin sahip olması gereken alana özgü pedagoji bilgisinin de alan bilgisine bağlı olduğu düşünüldüğünde (McDiarmid, Ball ve Anderson, 1989), konu alan bilgisinin öğretim sürecinde öğretmene kılavuzluk etmede olmazsa olmaz gerekliliklerden olduğu ifade edilebilir (Karal Eyüboğlu, 2011). Dolayısıyla, öğretmenlerin alan bilgisindeki yetersizliklerin alana özgü pedagojik bilgilerini kullanma sürecini de olumsuz yönde etkileyeceği söylenebilir (Even, 1993; Küçükahmet, 2008; Suh, 2005; Yazıcı ve Kültür, 2017). Nitekim öğretmenlerin matematik bilgilerinin yetersizliğinin bir sonucu olarak (Borko ve Putnam, 1996; Richardson, 1996), sınıf içi öğretim sürecindeki öğretimsel açıklamalarının çoğunlukla anlamadan ziyade ezbere dayalı olması da (Arslan Kılcan, 2006; Henningsen ve Stein, 1997) bu sonucu destekler niteliktedir.

Öğretim için Matematik Bilgisi Modeli ve Bileşenleri

Shulman (1986) tarafından ortaya koyulan, öğretime özel alan bilgisi kavramı ve alan bilgisi ile öğretim pratikleri arasındaki ilişkilendirmeler, öğretmen bilgisine ilişkin birçok araştırmaya yön vermiştir (Ball, Hill ve Bass, 2005; Ball vd., 2008; Cochran, DeRuiter ve King, 1993; Gess-Newsome, 1999; Hurrell, 2013; Kind, 2009). Yapılan bu araştırmaların neticesinde Rowland Dörtlü Bilgi modeli, Fennema ve Franke bilgi modeli, Grossman öğretmen bilgi modeli ve Tamir modeli gibi öğretmenlerin öğretime ilişkin sahip olması gereken bilgileri sınıflandıran farklı bilgi modelleri ortaya çıkmıştır (Carpenter, Fennema ve Franke, 1996; Grossman, 1990; Rowland, Huckstep ve Thwaites, 2005; Tamir, 1988). Bu bağlamda Shulman'ın (1986) "Pedagojik Alan Bilgisi" (PAB) modelini temel alarak yalnızca matematik eğitimi alanına özgü şekilde geliştirilen modellerden biri de "öğretim için matematik bilgisi" (ÖMB) modelidir (Ball vd., 2008). Ball ve diğerleri (2008), ÖMB modeli ile öğretmenlerin matematik öğretim sürecinde sınıf içi uygulama ve görevlerine odaklanarak, bu uygulamalar için gerekli olan matematik bilgisinin kapsamını belirlemeye çalışmışlardır. Matematik alan bilgisini öğretim sürecinde kullanabilmenin öneminden hareketle, "öğretim" kavramını detaylandırarak, matematik öğretim sürecinde öğretmenlerin yaptıkları her şeyi öğretim sürecinin bir parçası olarak değerlendirmişlerdir. Yani, öğrencilere tanım ve kavramları açıklayabilmek, öğrencilerin çözümlerine yorum getirebilmek, öğrencilerden gelebilecek neden-niçin sorularına tatminkâr cevaplar verebilmek, sınıf ve öğrenci düzeyine uygun matematiksel görevleri belirleyebilmek, öğrencilere ödev vermek, öğrencileri değerlendirmek ve öğrenci çalışmalarına ilişkin velilerle iletişim halinde olmak gibi matematiksel faaliyetlerin "öğretim" için gereken bilgi ve beceriler içerisinde olduğunu belirtmişlerdir. ÖMB modeline ilişkin bileşenler Şekil 1'de gösterilmiştir (Ball vd., 2008).

KONU ALAN BİLGİSİ			PEDAGOJİK ALAN BİLGİSİ		
Genel Alan Bilgisi	Uzmanlık Alan Bilgisi	Kapsamlı Alan Bilgisi	Alan ve Öğrenci Bilgisi	Alan ve Öğretme Bilgisi	Alan ve Müfredat Bilgisi

Şekil 1. ÖMB Modeli

Öğretmenin Uzmanlık Alan Bilgisi Nedir?

Konu Alan Bilgisi kavramını Ball ve diğerleri (2008) öğretmenin, etkin bir öğretim yapabilmesi amacıyla öğreteceği konuya ilişkin gerekli bilgilerin bütünü olarak ele almışlardır. Konu Alan bilgisi bileşeni de kendi içerisinde "Genel Alan Bilgisi, Uzmanlık Alan Bilgisi" ve "Kapsamlı Alan Bilgisi" şeklinde üç alt bileşenden oluşmaktadır. Bu alt bileşenlerden -bu araştırmada incelenen- Uzmanlık Alan Bilgisi (UAB), içerisinde pedagojik bilginin olmadığı ve matematik öğretmeninin matematiksel ifade, işlem ya da kavramları "Neden?" ve "Niçin?" şeklinde gerekçe ile ifade edebileceği matematiksel bilgi olarak düşünülebilir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016; Ball vd., 2008). Öğretmenlerin ders içi öğretim sürecinde icra ettikleri temel matematiksel faaliyetler için bir gereklilik olan UAB, genel alan bilgisini tamamlayıcı nitelikte bir bileşendir (Hill, Schilling ve Ball, 2004). UAB bileşeni, matematik öğretmenlerinin dışında kimselerin sahip olmasının beklenmediği, "öğretim" için gerekli bilgi ve becerileri içermektedir. Örneğin, basamak değeri kavramı için modellemeye başvurarak yüzlük kart kullanabilme, matematiksel terimleri doğru ve öğrenciler tarafından anlaşılır şekilde tanımlayabilme ve çözüm yollarını daha anlaşılır hale getirebilme UAB kapsamındaki becerilerdir (Thames ve Ball, 2010). Yine bir matematik öğretmeninin, öğrencilerin neden sorularına tatminkâr açıklamalar getirmesi UAB gerektiren becerilerdir. Örneğin "4" ile bölünebilme kuralının, neden bir sayının son iki rakamının "4" ile bölünebilmesi durumunda geçerli olduğuna imkân tanıyan matematiksel düşünceye açıklık getirebilme UAB'dir (Hill vd., 2004). Bunlara ek olarak, belirli matematiksel durumlara yönelik örnek/temsil bulma, sınıf içi etkinlikleri daha kolay veya daha zor olacak şekilde düzenleme, ilginç ve rutin olmayan sorular sorabilme ve matematiksel denklikleri ve aralarındaki ilişkileri inceleme UAB kapsamında öğretmenin sahip olması gereken görev ve sorumluluklardandır (Ball vd., 2008). Bu görev ve sorumlulukları incelediğimizde, UAB'nin öğretim dışındaki amaçlar için özel olarak ihtiyaç duyulmayan bir bilgi türü olduğu söylenebilir.

Matematik eğitiminde, birçok öğrenme alanına temel oluşturan kümeler alt öğrenme alanına ilişkin kavramların öğretimi, matematiğin aksiyomatik yapısının ortaya konmasında ve ispat mantığının şekillenmesinde önemlidir. Dolayısıyla bir matematik öğretmeninin, kümeler alt öğrenme alanına ilişkin kavramların öğretiminde derinlemesine bilgi ve beceri kazanmış olması, öğretim süreci için gereklidir. Yapılan çalışmalarda da kümelerde temel kavramlara ilişkin hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin zorluklar yaşadıkları görülmektedir (Demir, 2012; Gür, 2009; Kolar ve Čadež, 2012;

Uğurel vd., 2010; Uğurel ve Moralı 2010; Yazıcı ve Kültür, 2017). Bu ifadeyi destekler nitelikte, öğretmenlerin öğretim için matematik bilgilerinin incelendiği araştırmalarda, özellikle "UAB" ile "Alan ve Öğretim Bilgisi (AÖtB)" bileşenlerine ilişkin öğretmenlerin eksikliklerinin olduğu ve de öğretmenlerin yapmış oldukları kavramsal hataları öğrencilerin de yapmış olduğu tespit edilmiştir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016; Kar, 2014; Miheso-O'Connor Khakasa ve Berger, 2016; Li, 2011; Speer, King ve Howell, 2015). Ayrıca öğretmenlerin, "Kümelerde Temel Kavramlar" konusuna ilişkin öğrencilerin neden sorularına tatminkâr açıklamalar verebilmesi, UAB kapsamında incelenen öğretim vasıflarından olması nedeniyle önemlidir. Bu nedenle, matematik öğretmenlerinin "Kümelerde Temel Kavramlar" konusuna ilişkin öğretim sürecindeki matematiksel bilgilerinin incelenmesinin, matematik öğretimi açısından gereklilik arz ettiği düşünülmektedir. Bununla birlikte, sadece matematik öğretmenlerinin sahip olması beklenen bir bilgi ve beceri olan UAB'nin incelenmesiyle, "Kümelerde Temel Kavramlar" konusuna ilişkin öğretmenlerin, öğretime ilişkin bilgilerindeki eksikliklerin/zenginliklerin belirlenmesi de gereklilik olarak düşünülmektedir. Bunun için araştırmanın problemi, "Matematik öğretmenlerinin kümelerde temel kavramların öğretimi için uzmanlık alan bilgilerinin durumu nedir?" şeklinde oluşturulmuştur.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin, "ortak özellik, topluluk, küme, evrensel küme, sonlu-sonsuz küme, alt küme" ve "eşit küme" kavramlarına ilişkin hatalarının olduğu görülmüştür (Cheung vd., 2017; Demir, 2012; Fischbein, 2001; Gür, 2009; Hannula ve Pehkonnen, 2006; İpek vd., 2009; Kolar ve Čadež, 2012; Linchevski ve Vinner, 1988; Monaghan, 2001; Özdeş ve Kesici, 2015; Uğurel ve Moralı 2010; Zehir vd., 2008). Bununla birlikte, öğretmenlerin de ifade edilen kavramlara ilişkin hatalarının ve eksikliklerinin olduğu da tespit edilmiştir (Chick vd., 2006; Uğurel vd., 2010; Yazıcı ve Kültür, 2017). Bu minvalde, yapılan bu araştırmada, "Küme, Evrensel Küme, Sonsuz Küme, Boş Küme, Alt Küme" ve "Eşit Küme" kavramları incelenmiştir.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu araştırma, matematik öğretmenlerinin kümelerde temel kavramlara ilişkin uzmanlık alan bilgilerinin ayrıntılı veriler toplanarak derinlemesine incelenmesi amacıyla nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseniyle yürütülmüştür. Durum çalışması, çalışılan olguyu kendi gerçekliği içerisinde sistematik ve çok yönlü olarak derinlemesine inceleme fırsatı olan ve ortaya çıkan durumu betimlemeye imkân tanıyan araştırma desenidir (Cohen, Manion ve Morrison, 2007; Creswell, 2012; Yin, 2017). Bununla birlikte durum çalışması, araştırmacının zaman içerisinde sınırlandırılmış durumları gözlem, görüşme, görsel-işitsel kayıt, doküman ve raporlar ile detaylandırarak derinlemesine analiz edilmesini sağlayan bir yöntemdir (Creswell, 2012; Patton, 2002).

Bu araştırmada, öğretmenlerin sahip olduğu uzmanlık alan bilgilerinin durumu, kümelerde temel kavramlara ilişkin yapılmış olan araştırmaların sonuçları bağlamında; "Küme, Evrensel Küme, Sonsuz Küme, Boş Küme, Alt Küme" ve "Eşit Küme" kavramlarıyla sınırlandırılmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu, 2016-2017 eğitim öğretim yılında Akdeniz Bölgesi'nde bir ilimizde farklı liselerde görev yapmakta olan ve ölçüt örnekleme yoluyla seçilen farklı öğrenim durumuna, mesleki deneyime ve kümeler konusunu öğretim tecrübesine sahip 18 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Bu öğretmenler arasından, gönüllülük esası kıstas alınmak üzere, üç öğretmenin Kümeler konusuna ilişkin iki haftalık ders içi öğretim süreci video ve ses kaydı ile takip edilmiştir. Ayrıca bu üç öğretmen belirlenirken heyecan vb. sebeplerle dersin aksamaması için öğretmenlik meslek deneyimleri on yıl ve üzeri olan öğretmenler tercih edilmiştir. Araştırmada video ve ses kaydı yapılan öğretmenlerin isimleri yerine ÖV1, ÖV2 ve ÖV3; video ve ses kaydı yapılmayıp da sadece yarı yapılandırılmış görüşme yapılan öğretmenlerin isimleri yerine Ö1, Ö2, Ö3, …, Ö15 şeklinde kodlar kullanılmıştır. Çalışma grubunda yer alan öğretmenlere ait bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Görüşme ve Gözlem Yapılan Öğretmenlere İlişkin Demografik Bilgiler

Öğretmenin Kodu	Cinsiyet	Öğretmenlik Meslek Tecrübesi	Eğitim Durumu	Kümeler Konusu Tecrübesi
ÖV1	Erkek	15 yıl	Lisans	7 yıl
ÖV2	Kadın	12 yıl	Lisans	8 yıl
ÖV3	Kadın	15 yıl	Lisans	7 yıl
Ö1	Erkek	10 yıl	Lisans	4 yıl
Ö2	Erkek	2 yıl	Lisans	Hiç anlatmadı
Ö3	Erkek	10 yıl	Lisans	1 yıl
Ö4	Kadın	8 yıl	Yüksek Lisans	3 yıl
Ö5	Kadın	5 yıl	Yüksek Lisans	2 yıl
Ö6	Erkek	6 yıl	Doktora	5 yıl
Ö7	Kadın	2 yıl	Doktora	Hiç anlatmadı
Ö8	Erkek	5 yıl	Lisans	Hiç anlatmadı
Ö9	Kadın	12 yıl	Doktora	5 yıl
Ö10	Kadın	15 yıl	Lisans	1 yıl
Ö11	Kadın	15 yıl	Lisans	6 yıl
Ö12	Erkek	20 yıl	Lisans	2 yıl
Ö13	Erkek	15 yıl	Lisans	5 yıl
Ö14	Kadın	12 yıl	Yüksek Lisans	6 yıl
Ö15	Kadın	6 yıl	Lisans	3 yıl

Verilerin Toplanması

Araştırmada veri toplama aracı olarak, araştırmacılar tarafından hazırlanan Öğretim için Küme Bilgisi Testi'nin (ÖKBT) UAB bileşenine yönelik hazırlanmış bölümü ve "Ders Gözlem Formu (DGF)" kullanılmıştır. Bu aşamada, içeriğin oluşturulmasında, doküman incelemesinden yararlanılmıştır.

ÖKBT ve UAB Boyutu

ÖKBT açık uçlu sorulardan oluşacak şekilde, yarı-yapılandırılmış görüşme formatına uygun olarak hazırlanmıştır. ÖKBT'nin hazırlanma aşamalarında, ÖMB Modeli ve "Küme" kavramı alanında uzman beş öğretim üyesi ve altı matematik öğretmeni ile çalışılmıştır. İlk olarak, ÖMB Modeli alanında uzman (uzmanlardan biri araştırmacılar arasından olmak üzere) iki öğretim üyesi ile ÖMB Modelinin bileşenleri detaylı incelenerek, her bir bileşenin sahip olması gereken bilgi türü belirlenmiştir. Ayrıca, altı matematik öğretmeni ve üç öğretim üyesiyle bir arada öğrencilerin "Küme" kavramlarına yönelik anlayışları, algıları, kavram yanılgıları, öğrenme stratejileri, kalıcı öğrenmeleri için seçilmesi gereken temsiller, materyal seçimi vb. konularda beyin fırtınası tekniğiyle görüşmeler yapılarak soru havuzu oluşturulmuştur. Devamında "Küme" kavramı alanında uzman öğretim üyeleri ile sorular üzerinde fikir birlikteliği sağlanmıştır. Son olarak ÖMB Modelinin bileşenlerine uygun olacak şekilde ÖKBT hazırlanmıştır. Esas uygulama yapılmadan önce hazırlanan ÖKBT Akdeniz bölgesinde bir ilimizde görev yapan 10 matematik öğretmenine pilot uygulama amacıyla uygulanmıştır. Bunun için, öğretmenlerin mesleki deneyimleri, eğitim durumları ve "Küme" kavramının anlatıldığı altıncı sınıf ve dokuzuncu sınıf eğitim kademelerinde ders öğretim yılları dikkate alınarak, farklı eğitim kademelerindeki öğretmenlerin araştırmaya dâhil edilmesi sağlanmıştır. Ardından bu öğretmenlerin teste yazmış oldukları cevaplar ve test hakkındaki düşünceleri ve araştırmacı izlenimleri sonucunda ÖKBT'nin son hali oluşturulmuştur. Bu araştırmada ÖKBT'nin UAB boyutu üzerinden veriler toplanmıştır.

Araştırmada UAB bağlamında verileri toplamak için aşağıdaki sorulardan yararlanılmıştır. UAB'ye ilişkin hazırlanan aşağıdaki sorularda, Ball ve diğerlerinin (2008), araştırmanın giriş kısmında ortaya koyduğu görev ve sorumluluklardan faydalanılmıştır. Etkin öğretim için UAB'de vurgulanan, salt kavramsal bilginin bulunması değil; bu bilgilerin sınıf içi öğretim sürecindeki öğretmenlik görevlerinde yeterince kullanılabilmesidir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016; Ball vd., 2008). Nitekim

UAB'de, herhangi bir kuralı ya da özelliği doğrudan uygulamak değil; kuralın yapılmasına imkân veren matematiksel fikrin ne olduğunu bilmek ve bu bilgi doğrultusunda öğrencilerin neden sorusuna tatminkâr cevap verebilme yeterliliği öne çıkmaktadır. Bu nedenle, öğrencilerin neden ve niçin sorularına cevap verebilme, matematiksel açıklamalar yapabilme ve belirli amaçlara yönelik temsil/örnek seçebilme doğrultusunda aşağıdaki sorular tasarlanmıştır. Bununla birlikte öğretmenlerden beklenilen cevapların içeriği de yine aşağıda belirtilmiştir:

Soru 1: "Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasına gerek yoktur." ifadesi altında öğretmenlere "Bora isimli bir öğrenci üzerinden, "1, a, Ankara, Japonya, Mayıs, Salı" elemanları arasında ortak bir özellik bulunmadığını ve bu yüzden bu elemanların bir küme oluşturmayacağını iddia etmiştir." şeklinde bir iddia yöneltilmiştir. Öğretmenlerin Bora'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Öğretmenler burada kümelerde birleşim işlemi veya "küme" kavramının sezgisel tanımı üzerinden iddiaya açıklık getirebilirlerdi.

Soru 2: "Tek elemanlı bir küme evrensel küme oluşturabilir." ifadesi altında öğretmenlere "Esin isimli bir öğrenci üzerinden, tek elemanlı bir kümenin evrensel küme oluşturmayacağı" şeklinde bir iddia yöneltilmiştir. Öğretmenlerin Esin'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Öğretmenler burada "evrensel küme" tanımı üzerinden hareketle evrensel kümenin üzerinde çalışılan kümeye göre değişebileceğini dolayısıyla evrensel kümenin eleman sayısının çok fazla olmasına gerek olmayacağı şeklinde iddiaya açıklık getirebilirlerdi.

Soru 3: "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısı sonlu bir küme belirtir." ifadesi altında öğretmenlere "Ali isimli bir öğrenci üzerinden, yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısının sonsuz küme belirttiği" şeklinde bir iddia yöneltilmiştir. Öğretmenlerin Ali'nin iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Öğretmenler burada sonlu küme kavramı üzerinden yani sonlu kümenin belirli sınırları olduğundan ve bir doğal sayı ile ifade edildiğinden hareketle veya örneği somut hale getirerek "kendi çevremizdeki yaprak sayısını sayabildiğimiz gibi sınırlı olan yeryüzündeki yaprak sayısını da sayabiliriz" şeklinde örneklerle iddiaya açıklık getirebilirlerdi. Ayrıca öğretmenlerin "…saymakla bitmez şeklinde nitelendirdiğimiz şeylere sonsuz diyemeyiz" (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2016) ifadesi doğrultusunda da iddiaya açıklık getirmeleri beklenmekteydi.

Soru 4: "Boş küme, her kümenin alt kümesidir." ifadesi altında öğretmenlere "Elif isimli bir öğrenci üzerinden, boş kümenin her kümenin alt kümesi olmadığı" şeklinde bir iddia yöneltilmiştir. Öğretmenlerin Elif'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Öğretmenler burada "boş küme" ve "alt küme" kavramlarının tanımlarından hareketle yani "boş kümede yer alıp da elemanı olan herhangi bir kümede yer almayan eleman olmaz" şeklinde örneklerle iddiaya açıklık getirebilirlerdi.

Soru 5: "A ve B kümelerinin eşit küme olabilmesi için $A \subset B$ ve $B \subset A$ olmalıdır." ifadesi altında öğretmenlere "Serra isimli bir öğrenci üzerinden, "Negatif doğal sayılar kümesi ile negatif asal sayılar kümesinin birbirlerine eşit olmayacağı" şeklinde bir iddia yöneltilmiştir. Öğretmenlerin Serra'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Öğretmenler burada "sadece bir tane boş küme olduğu" (Nesin, 2008) teoremi ve "boş kümenin her kümenin alt kümesi" olduğu özelliğinden hareketle iddiaya açıklık getirebilirlerdi. Öğretmenlerin burada ifade etmemesi gereken "boş kümenin elemanları olmadığı için kıyaslanamayacak kümeler oldukları" ifadesidir. Aşağıdaki Şekil 2'de, görüşme esnasında öğretmenlerin uzmanlık alan bilgilerini analiz etmek amacıyla hazırlanan sorulardan birinin görseline yer verilmiştir.

Soru 4: Elif isimli bir öğrenci, "*Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmadığını iddia etmektedir*". Elif'in iddiası için aşağıda verilen uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız.

Elif'in iddiası;		
A. Doğrudur ( )	B. Yanlıştır ( )	C. Emin Değilim ( )
Gerekçeniz:	Gerekçeniz:	Sizi tam olarak neyin muallakta bıraktığını açıklayınız.

Şekil 2. UAB'ye yönelik hazırlanan sorulardan birisi

Ders Gözlem Formu

ÖMB Modelinin bileşenlerinin içeriği doğrultusunda, araştırmacının öğretim sürecinde ders işlenişi ile ilgili izlenimlerini kayıt altına almak amacıyla "Ders Gözlem Formu" hazırlanmıştır. DGF'de araştırmacının gerektiğinde açıklamalar yazması amacıyla forma açıklama kısımları eklenmiştir. DGF'nin oluşturulmasında Ball ve diğerlerinin (2008) "Content Knowledge for Teaching – What makes it special?" adlı çalışmadan ve Aslan-Tutak ve Köklü'nün (2016) ÖMB'ye yönelik hazırladıkları kitap bölümünden yararlanılmıştır. DGF hazırlanırken ÖKBT'nin UAB bileşeni ile karşılaştırma yapılacağı için ÖKBT'yle tutarlı olacak şekilde oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda DGF, UAB'nin altı göstergesine göre hazırlanmıştır. Bu göstergeler şu şekildedir:

1. Matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların nedenlerini ortaya koyabilme,
2. Belirli bir matematiksel noktaya dikkat çekmek için örnekler/temsiller bulma,
3. Etkinlikleri hem kolay hem de zor olabilecek biçimde düzenleyebilme,
4. Konuya özgü üretken matematiksel sorular sorabilme,
5. Ders kitaplarındaki matematiksel içeriği derse uyarlayabilme,
6. Öğrencilerin öneri veya çözümlerini hızlı bir şekilde değerlendirebilmedir.

DGF'nin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları uzman incelemesi ile sağlanmıştır. Bunun için ÖMB'nin bileşenlerine ilişkin göstergeler iki alan uzmanının incelenmesine tabi tutularak eklenmesi ve çıkarılması gereken bileşenler belirlenmiştir. DGF'de bulunan ifadelerde, uzmanların eksik buldukları yönler tamamlanarak gözlem formuna son hali verilmiştir.

Doküman İncelemesi

Doküman incelemesi, "araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsar" (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada hem veri kaynağı hem de diğer veri toplama araçlarını desteklemek amacıyla kullanılan dokümanlar, dokuzuncu sınıf matematik ders kitapları, öğretim programı, öğretmen kılavuz kitapları, "Kümeler" konusunda alanda yapılmış çalışmalar ve öğrencilerin ders notlarından oluşmaktadır. Bu şekilde doküman incelemesi yapılmasıyla UAB'nin gerektirdiği bilgi düzeyindeki sorulara basamak oluşturmak amaçlanmıştır. Yani "Kümeler" konusunda temel kavramlara ilişkin öğretmenlerin UAB düzeyleri hangi sorularla daha iyi belirlenebilir sorusuna cevap verilmek istenmiştir. İlk olarak "Küme, Evrensel Küme, Sonsuz Küme, Boş Küme, Alt Küme" ve "Eşit Küme" kavramları analiz birimi şeklinde seçilerek bu birimlere ilişkin alandaki çalışmalar ve kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Ardından ders ve öğretmen kılavuz kitaplarında bahsi geçen kavramlara ilişkin tanımlamalar incelenerek içerik analizine tabi tutulmuştur. Bu şekilde her bir kavrama ilişkin alandaki çalışmalar, matematik ders kitapları ve öğretmen kılavuz kitapları birlikte incelenerek anahtar kelimeler oluşturulmuştur. Küme kavramı için "ortak özellik", evrensel küme kavramı için “tek eleman”, sonsuz küme kavramı için “yaprak sayısı”, boş küme ve eşit küme kavramları için ise “alt küme kavramıyla ilişkilendirme” şeklinde anahtar kelimeler belirlenmiştir. Bu aşamaya biri ÖMB alanında ikisi matematik eğitimi alanında uzman üç uzman araştırmacı katılmıştır. Bu araştırmada doküman analizi, elde edilen verilerin analiz aşamasında verilerin karşılaştırılmasında veri toplama araçlarını desteklemek amacıyla da kullanılmıştır. Doküman analizi yapılırken elde edilen veriler sürekli birbirleriyle karşılaştırılarak ve uzman incelemesine tabi tutularak inandırıcılık arttırılmaya çalışılmıştır.

Verilerin Analizi

Araştırmada nitel verilerin analizinde betimsel analiz, içerik analizi, sürekli karşılaştırma teknikleri ile her bir veri toplama aracına özel veri analiz yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Bu doğrultuda araştırmada öncelikli olarak, öğretmenlerin ÖKBT testi doğrultusunda hazırlanan açık uçlu sorulara yazdıkları cevapların hangi temalar altında verilmesi gerektiği belirlenmiştir. Bunun için doküman incelemesi ve içerik analizinden yararlanılmıştır. İçerik analizi sonucu araştırmaya katılan öğretmenlerin yazdıkları cevaplar kodlanarak hangi temalar altında sunulması gerektiği tespit edilmiştir. Daha sonra yazılan cevapların “doğru, yanlış” olduğunu ya da yazılan açıklamaların “doğru açıklama, kısmen doğru açıklama” ya da “yanlış açıklama” olup-olmadığını belirlemek için cevaplara ilişkin kısa kelimelerden veya cevaplarda en çok ortaya çıkan ifadelerden analiz birimleri belirlenmiştir.

Betimsel analiz yapılırken, Yıldırım ve Şimşek’e (2008) göre, elde edilen veriler araştırmacı tarafından daha önce belirlenen tema ve kodlara göre yorumlanır ve görüşme yapılan kişilerin görüşleri doğrudan alıntılarla yazılır. Araştırmada elde edilen verilerin analizinde yüzde, frekans teknikleri kullanılarak belirlenen tema ve kodlar altında bulgular sunulmuştur. Ayrıca video ve ses kaydı yapılan öğretmenlerin ders içi öğretim süreçleri transkript edilerek ÖKBT verileri ile sürekli olarak karşılaştırılmıştır. Coffey ve Atkinson’a (1996) göre veri analiz sürecinin kapsamlı ve sistematik bir şekilde yürütülmesi gerekmektedir. Bununla birlikte, analiz sürecini yapılan her araştırma için geçerliliğini koruyacak standart bir süreç haline getirmenin de mümkün olamayacağını belirtmektedirler. Araştırmada UAB’ye ilişkin veriler, araştırmacı tarafından önceden belirlenen UAB içeriğinde bulunan “Matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların “Neden?” ve “Niçin?” şeklinde gerekçelerini ortaya koyabilme” göstergesi doğrultusunda analiz edilmiştir. Çünkü genel alan bilgisi ile UAB arasındaki ayırımı belirleyecek bilginin özünde matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların “Neden” ve “Niçin” sorularını cevaplayabilmek vardır (Hill ve Ball, 2009). Bu araştırma için UAB bileşenine yönelik elde edilen verilerin analiz şeması Tablo 2’de görülmektedir.

Tablo 2. UAB Bileşenine Yönelik Elde Edilen Verilerin Analiz Süreci

Temalar	Kodlar	Veri Analiz Süreci
Matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların "Neden?" ve "Niçin?" şeklinde gerekçelerini ortaya koyabilme	Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasına gerek yoktur. Tek elemanlı bir küme evrensel küme oluşturabilir. Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısı sonlu bir küme belirtir. Boş küme, her kümenin alt kümesidir. A ve B kümelerinin eşit küme olabilmesi için $A \subset B$ ve $B \subset A$ olmalıdır.	Birinci Aşama Bu aşamada öğretmenlere yöneltilen beş sorunun her birine verilen cevaplar ilk olarak "Doğrudur, Yanlıştır" ve "Emin değilim" şeklinde yüzde-frekans teknikleri ile analiz edilmiştir. İkinci Aşama Bu aşamada öğretmenlerin sorulara ilişkin yazdıkları gerekçeler, "Yanlış açıklama, Kısmen Doğru Açıklama, Doğru açıklama" ve "Fikrim Yok" şeklinde sınıflandırılarak herhangi bir puanlama yapılmadan analiz edilmiştir.

Veri analiz sürecini ÖKBT'de yer alan örnek soru üzerinden inceleyecek olursak;
Ali isimli bir öğrenci, "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısının sonsuz küme" belirttiğini iddia etmektedir. Ali'nin iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız.
Öncelikle belirlenen tema altında, "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısı sonlu bir küme belirtir." ifadesine ilişkin öğretmenlerin cevapları "Doğrudur, Yanlıştır" ve "Emin değilim" şeklinde analiz edilmiştir. Daha sonra öğretmenlerin bu iddiaya ilişkin bir gerekçe ortaya koymaları istenmiş ve aşağıdaki şekilde herhangi bir puanlama yapılmadan öğretmenlerin gerekçeleri analiz edilmiştir. Bu kısımda MEB (2016) ders kitapları referans olarak alınmıştır.

- Ö1: Ağaçların yaprak sayısı yeryüzü ile sınırlandığı için sonlu kümedir. (Doğru açıklama)
- Ö2: İnsanın ömrü yaprak sayılarının saymaya kifayet edemeyeceği için sonsuz küme olarak kabul edilir. (Yanlış açıklama)

"Matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların "Neden?" ve "Niçin?" şeklinde gerekçelerini ortaya koyabilme" göstergesine ilişkin veriler iki aşamada analiz edilmiştir. İlk aşamada öğretmenlere yöneltilen beş soruya ilişkin temalar hazırlanmıştır. Hazırlanan bu temalar altında öğretmenlerin cevapları analiz edilmiştir. Araştırma bulguları, hazırlanan temalar altında başlıklar yazılarak sunulmuştur. Bunun için öğretmenlerin, kendilerine yöneltilen beş sorunun her birine verdikleri cevaplar öncelikle "Doğrudur, Yanlıştır" ve "Emin değilim" şeklinde sınıflandırılmış ve bu veriler yüzde-frekans teknikleri ile analiz edilmiştir. İkinci aşamada ise, öğretmenlerden verdikleri cevaplara ilişkin, "Neden doğru? Neden yanlış?" veya "Neden emin değilim?" şeklinde gerekçeler yazmaları istenmiştir. Öğretmenlerin yazdıkları gerekçeler, "Yanlış açıklama, kısmen doğru açıklama, doğru açıklama" ve "Fikrim yok" şeklinde sınıflandırılarak herhangi bir puanlama yapılmadan değerlendirilmiştir. Bu şekilde veri analizi yapılmasındaki amaç, ÖKBT'de yer alan sorulara ilişkin doğru cevap veren öğretmenlerin gerekçelerinin de doğru olarak yazılıp-yazılmadığını tespit edebilmektir. Öğretmenlerin alıntılarına yer verilirken, araştırmaya sadece ÖKBT uygulanarak katılan öğretmenlerden her bir kategoriye ilişkin sadece iki öğretmenin alıntıları ile iktifa edilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır. Araştırmaya hem ÖKBT hem de ders içi öğretim süreçleri video ve ses kaydı yapılarak katılan öğretmenlere (ÖV1, ÖV2 ve ÖV3) yönelik alıntıların tamamına ayrı olarak yer verilmiştir. Ayrıca bu öğretmenlerin ders içi öğretim süreçlerine yer verilirken yalnızca kavrama ilişkin eksikliklerin olduğu öğretim süreçlerine ilişkin kesitler yazılmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmada güvenirlik, araştırmacının yaptığı gözlemin güvenirliği ve araştırmanın her aşamasının detaylı bir biçimde ortaya konulmasıyla doğrudan ilişkilidir (McMillan ve Schumacher, 2010). Bu amaçla çok sayıda veri toplama yöntem ve tekniğinin birbirlerini takviye ve telafi edici biçimde kullanıldığı veri çeşitlemesi yaklaşımı, araştırmacının "sistematik hata" yapma olasılığını en aza indirmek amacıyla bu araştırma kapsamında benimsenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Yapılan bu araştırmada görüşme, gözlem ve doküman incelemesi olmak üzere üç çeşit veri toplama yöntemi kullanılarak araştırmanın geçerlilik ve güvenirliği arttırılmaya çalışılmıştır. Bunun için ÖKBT testi doğrultusunda öğretmenlerle görüşme yapılmıştır. Bununla birlikte öğretmenlerin ders anlatımlarını kayıt altına alarak değerlendirmek amacıyla doğal ve yapılandırılmamış bir biçimde kümeler konusu süresince gözlem yapılmıştır. Araştırmada görüşme tekniğine ilave olarak gözlem tekniğinin kullanılması, öğretmenlerin görüşme sorularına yazdıkları cevaplar ile sınıf içi davranışları arasında tutarlılığının belirlenmesi amaçlıdır.

Araştırmanın güvenilirliğini belirlemek için kodlayıcılar arası uyumdan faydalanılmıştır. Araştırmada elde edilen veriler iki araştırmacı tarafından yukarıda belirtilen temalar doğrultusunda "fikrim yok, yanlış açıklama, kısmen doğru açıklama, doğru açıklama" ve "doğrudur, yanlıştır, emin değilim" şeklinde kodlanmıştır. Kodlanan verilerin tutarlılığı, iki araştırmacı tarafından aynı kodun kullanıldığı durumlar "Görüş Birliği", farklı kodların kullanıldığı durumlar ise "Görüş Ayrılığı" olarak işaretlendikten sonra Miles ve Huberman (1994) tarafından geliştirilen "Güvenirlik=Görüş Birliği/ (Görüş Birliği+Görüş Ayrılığı)" formülü kullanılarak belirlenmiştir. Miles ve Huberman'a (1994) göre iyi bir güvenirlik için kodlayıcılar arası uyum güvenirliğinin en az %80 düzeyinde olması gerekmektedir. Tarafımızdan yapılan bu araştırmada kodlama güvenirliği %81,4 bulunduğu için araştırma güvenilir kabul edilmiştir.

Bulgular

ÖKBT doğrultusunda öğretmenlerle yapılan görüşmelerde "Kümelerde Temel Kavramlara" ilişkin uzmanlık alan bilgilerini incelemek amacıyla beş soru sorulmuş ve öğretmenlerden sorulara, "Neden?" ve "Niçin?" şeklinde gerekçelerini belirtecek şekilde detaylı olarak cevap yazmaları istenmişti. Ulaşılan bulgular Tablo 2'deki kodlara göre sırayla yazılmıştır. Ayrıca DGF ile takip edilen öğretmenlerin ders içi öğretim süreçleri transkript edilerek, yazılı cevapların ardından yalnızca bir öğretmene ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Bu bağlamda;

Soru 1: "Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasına gerek yoktur." ifadesi doğrultusunda öğretmenlere: "Bora isimli bir öğrenci, "1, a, Ankara, Japonya, Mayıs, Salı" elemanları arasında ortak bir özellik bulunmadığını ve bu yüzden bu elemanların bir küme oluşturmayacağını iddia etmiştir. Bora'nın iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız." şeklinde soru sorulmuştur. Bu soru için, öğretmenlerin yazmış olduğu cevaplara yönelik ulaşılan sonuçlar Tablo 3'de belirtilmiştir.

Tablo 3. Bora'nın İddiasına Yönelik Öğretmenlerin Yazdıkları Cevaplar Doğrultusunda Ulaşılan Sonuçlar

	Frekans (f)	**Yüzdelik (%)**
Doğrudur	6	33
Yanlıştır	11	61
Emin Değilim	1	6

Tablo 3'de görüldüğü üzere, öğretmenlerin yarıdan fazlası iddianın yanlış olduğunu ifade etmişken; öğretmenlerin altısı iddianın doğru olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin biri, iddianın doğru ya da yanlışlığına yönelik herhangi bir cevap yazmayarak "emin değilim" seçeneğini işaretlemiştir. Hâlbuki öğretmenlerin Bora'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Bora'nın iddiası için "doğrudur" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö5: Elemanlar arasında ortak bir özellik bulunmadığından bu elemanlarla bir küme oluşturamayız.

Ö6: Aynı özelliğe sahip nesneler topluluğu bir küme belirtir.

Ö8: Çünkü bu elemanlarla bir topluluk oluşturacak şekilde belirli ve ortak ayırt edici bir özellik yoktur.

Ö11: Genel olarak yerleşmiş küme tanımına göre benzer özellik taşıyan elemanlar küme olabilir.

Gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerin "Küme" kavramına yönelik tanımlamalarından kaynaklanan yanlış açıklamalar oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte öğretmenler, Bora'nın iddiasına yönelik yazdıklarında "Neden?" ve "Niçin?" ifadelerine yönelik gerekçe belirten yanıtlar yazmamışlardır.

Bora'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerden bazılarının gerekçeleri şu şekildedir;

Ö2: Ortak bir özellik görülmüyor, fakat küme oluşturmaz demek yanlıştır. Küme tanımında geçen iyi tanımlanmış olmanın neye göre yapıldığı önemlidir.

Ö3: Kümenin bütün elemanları arasında ortak bir özellik olma zorunluluğu yoktur.

Ö4: Belirtilen nesnelerin, bir küme oluşturabilmeleri için, ortak özelliklerinin olması şartı yoktur. Ortak özellik şartı, kümenin ortak özellik yöntemiyle gösterilebilmesi için vardır.

Ö13: Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik bulunması gerekmez. Elemanların net olarak ifade edilmesi yeterlidir.

Gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerin iddianın yanlış olduğunu fark ettikleri belirlenmiştir. Bununla birlikte, öğretmenlerden yalnızca Ö2 ve Ö13'ün, Bora'nın iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdığı tespit edilmiştir. Ö3 ve Ö4'ün açıklamaları incelendiğinde gerekçeden ziyade, bir kavrama yönelik özellikleri ifade ettikleri belirlenmiştir.

Ders içi öğretim süreçlerini içeren video ve ses kayıtları alınarak katılan üç öğretmeninin her biri Bora'nın iddiasına yönelik farklı cevaplar yazmışlardır. Bora'nın iddiası için;

ÖV1: Yanlıştır. Kümenin elemanları farklı varlıklardan olabilir. Sadece kümenin gösteriminde ortak özellik yöntemi kullanılamaz.

ÖV2: Doğrudur. Elemanlar arasında ortak özellik yok. En azından ilk bakışta yok. Ama uzun cümleler yazılarak ortak bir özellik bulunup küme oluşturulabilir.

ÖV3: Emin değilim. 1, a ve Ankara elemanları arasında ortak özellik bulunur ama diğer üç elemandan emin değilim. Bu nedenle küme oluştura bilir de oluşturmayabilir de.

Yazılan ifadeler incelendiğinde, yalnızca ÖV1'in Bora'nın iddiasının yanlış olduğunu fark ettiği, fakat iddianın "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair açıklama yazamadığı belirlenmiştir. ÖV2 ve ÖV3 ise Bora'nın iddiasına yönelik hem doğru cevap hem de doğru açıklama yazamamıştır. Aşağıda ders içi öğretim süreci video ile gözlem yapılan öğretmenlerden ÖV1'in ortak özellik yönteminin öğretimini yaptığı dersten bir kesit transkript edilmiştir. Burada ÖV1'in iddiaya ilişkin ders içi öğretimde de neden ve niçini ortaya koyacak şekilde tatmin edici bir açıklama belirtmediği görülmektedir.

ÖV1: ….mesela A kümesi ne olsun? A kümesini 9/K sınıfının öğrencileri diyelim.

Peki bu kümeden ne anlıyoruz. 9/K sınıfındaki tüm öğrenciler değil mi?

ÖĞR: Evet.

ÖV1: Ne yaptık burada. 9/K sınıfındaki tüm öğrencilerin isimlerini yazmak yerine ortak özellik yöntemiyle kümeyi belirttik. Peki her kümeyi ortak özellikle yazabilir miyim? Mesela "Pazar, pazartesi, ocak, 1,2" elemanlarının kümesini nasıl yazarım?

ÖĞR: …hocam yazamayız., …bunlardan küme olmaz hocam., …küme değil hocam.

ÖV1: Niye yazamayalım. Ortak özellik yöntemiyle yazamayız ama liste yöntemiyle bu kümeyi yazabiliriz. Bir de bu elemanlar bir küme oluşturur. Niye? Çünkü kümenin elemanları birbirinden farklı türde elemanlar olabilir. Ortak özellik yöntemi sadece gösterimdir.

ÖV2 ve ÖV3 ise iddiaya yönelik hem doğru cevap hem de doğru açıklama yazamadıkları için diğer yanlış açıklama yazan öğretmenlerin benzer açıklamalarıyla iktifa edilerek bu öğretmenlerin ders içi öğretim süreçleri buraya yazılmamıştır.

Soru 2: "Tek elemanlı bir küme evrensel küme oluşturabilir." ifadesi doğrultusunda öğretmenlere: *"Esin isimli bir öğrenci, "Tek elemanlı bir kümenin evrensel küme oluşturmayacağını" iddia etmektedir. Esin'in iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız."* şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soru için, öğretmenlerin yazmış olduğu cevaplara yönelik ulaşılan sonuçlar Tablo 4'de belirtilmiştir.

Tablo 4. Esin'in İddiasına Yönelik Öğretmenlerin Yazdıkları Cevaplar Doğrultusunda Ulaşılan Sonuçlar

	Frekans (f)	**Yüzdelik (%)**
Doğrudur	2	11
Yanlıştır	16	89
Emin Değilim	0	0

Tablo 4'de görüldüğü üzere, Esin'in iddiası için öğretmenlerin çoğu iddianın yanlış olduğunu ifade etmişken; öğretmenlerin yalnızca ikisi iddianın doğru olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin hiçbiri, iddianın doğru ya da yanlışlığına yönelik herhangi bir cevap yazmayarak "emin değilim" seçeneğini işaretlememiştir. Hâlbuki öğretmenlerin Esin'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Esin'in iddiası için "doğrudur" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö8: İçerisinden eleman seçtiğimiz en geniş küme evrensel küme olduğu için tek elemanlı bir küme evrensel küme olamaz.

Ö10: Evrensel küme bulunabilecek en büyük kümeyi içine alan kümedir. Tüm kümeleri kapsayacak şekilde büyük olması gerektiği için tek elemanlı evrensel küme olamaz.

Gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerin "Evrensel Küme" kavramına yönelik tanımlamalarındaki eksikliklerden kaynaklanan yanlış açıklamalar yazdıkları tespit edilmiştir. Nitekim Ö10, evrensel küme kavramını açıklarken, evrensel kümenin evrende bulunan her şeyi kapsayan büyük bir küme olması gerektiği şeklinde evrensel kümenin tanımıyla örtüşmeyen yanlış açıklama yazmıştır. Ö8'in "içerisinden eleman seçtiğimiz en geniş küme" ifadesi evrensel kümenin tanımında yer alan "…üzerinde çalışılan…" (MEB, 2016) ifadesiyle örtüşmektedir. Fakat ifadenin devamında tek elemanlı bir kümenin evrensel küme olamayacağını yazması Ö8'in de evrensel kümeyi eleman sayısı çok fazla olan geniş bir küme olarak düşündüğünü göstermektedir. Dolayısıyla Ö8 ve Ö10, Esin'in iddiasına yönelik açıklamalarında, "Neden?" ve "Niçin?" ifadelerine yönelik yanlış gerekçe belirten cevaplar yazmışlardır.

Esin'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö3: Evrensel küme için elemanlarının 1'den çok olma zorunluluğu yoktur. İşleme giren başka küme ya da eleman yoksa tek eleman da evrensel küme oluşturabilir.

Ö4: Evrensel kümenin eleman sayısı 1'den büyük olmak zorunda değildir. Boş küme her kümenin alt kümesi olacağından tek elemanlı bir kümenin de alt kümesi olur. Dolayısıyla Ø ⊂ E olur. Örnek: E={1} ise Ø ⊂ E olur.

Ö7: Çünkü boş küme tüm yazacağımız kümelerin altında kalır ki; her küme kendisinin de alt kümesi olduğundan dolayı olabilecek tüm kümelerin alt kümesidir.

Ö9: Çünkü üzerinde çalıştığımız küme Ø ise ve mesela herhangi tek elemanlı kümeye {a} dersek, {a} kümesi üzerinde çalıştığımız Ø kümeyi içine alır.

Ö11: Tanımladığımız herhangi bir kümeyi kapsayabilecek bir küme evrensel küme olabilir. Kapsama eşit olma halini de ifade edeceğinden, boş kümeyi kapsayan tek elemanlı küme onun evrensel kümesi olabilir.

Öğretmenlerin yazdığı gerekçelerden, öğretmenlerin iddianın yanlış olduğunu fark ettikleri belirlenmiştir. Öğretmenlerden Ö3 ve Ö7'nin ifadeleri incelendiğinde, Esin'in iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdığı tespit edilmiştir. Ö7'nin ifadesine dikkat edildiğinde gerekçeden ziyade bir kavrama yönelik özellikleri ifade ettiği görülmektedir. Bununla birlikte Ö4, Ö9 ve Ö11'in açıklamaları incelendiğinde, Esin'in iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair gerekçe bildiren ifadelerinden dolayı doğru açıklama yaptıkları tespit edilmiştir.

Ders içi öğretim süreçleri video ve ses kayıtları alınan üç öğretmeninin tümü Esin'in iddiasına yönelik "yanlıştır" seçeneğini işaretledikleri tespit edilmiştir. Esin'in iddiası için;

ÖV1: Yanlıştır. Evrensel küme oluşturabilir. Üzerinde işlem yapılan kümeler yalnızca tek elemanlı olabilir.

ÖV2: Yanlıştır. Tek elemanlı bir küme evrensel küme olabilir. Örneğin Demir soyadlı bir ailenin tek bir çocuğu olduğunu düşünelim. E={x:x demir ailesinin çocukları}, A={x:x demir ailesinin sarışın çocukları}, B={y:y demir ailesinin esmer çocukları}

ÖV3: Yanlıştır. Çünkü incelenen duruma göre değiştiğinden tek elemanlı küme de evrensel küme olabilir.

Yazılan ifadeler incelendiğinde, öğretmenlerin Esin'in iddiasının yanlış olduğunu fark ettiği, fakat iddianın "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair tatmin edici açıklama yazamadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin hiçbirinin, "Ø" ve "evrensel küme" kavramını birlikte irdeleyerek açıklama yazmadıkları belirlenmiştir. ÖV2'nin yazdığı örnekte, E, A ve B kümeleri farklı şekilde ifade edilmiş olsalar dahi "*tek çocuklu bir ailenin hem esmer hem sarışın çocuğu olamayacağı için*" E kümesi A kümesiyle ya da E kümesi B kümesi ile eşit kümedir. Yani Esin'in iddiası için örnek olmayacağı dolaysıyla ÖV2'nin açıklamasının yanlış olduğu tespit edilmiştir. Aşağıda ders içi öğretim süreci video ile gözlem yapılan öğretmenlerden sadece ÖV3'ün evrensel küme ile ilgili öğretim yaptığı dersten bir kesit transkript edilmiştir. Burada ÖV3'ün iddiaya ilişkin ders içi öğretimde de neden ve niçini ortaya koyacak şekilde tatmin edici açıklama belirtmediği görülmektedir.

ÖV3: …Genelde en kolay örnek olarak verilen, insanları, ağaçları, hayvanları, bitkileri küme olarak alırsak dünyada yaşayan canlılar kümesi bu kümelerin evrensel kümesi olur. Peki şu kümeleri inceleyelim. A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} kümesi olsun. B kümesi ise doğal sayılar kümesi olsun. Peki bu iki kümeyi göz önüne alarak evrensel küme yazabilir misiniz?

ÖĞR: Yok hocam… Doğal sayılar kümesi olabilir hocam… Hocam reel sayılar kümesi…

ÖV3: Doğru. Reel sayılar kümesi bu iki kümenin evrensel kümesi olabilir. Rasyonel sayılar ile doğal sayılar kümesi de olabilir. O halde şunu diyebilir miyiz: Evrensel küme tek değildir.

İncelenen duruma göre değişir. Yani tek bir evrensel küme yoktur. Bir önceki örnekte "dünyada yaşayan canlılar" benim evrensel kümemdi. Şimdiki örnekte ise doğal sayılar kümesi veya reel sayılar kümesi benim evrensel kümem oldu…

ÖV3'ün ifadelerine bakıldığında verdikleri örneklerin hepsini eleman sayısı en geniş kümelerden seçerek verdiği görülmektedir. ÖV1 ve ÖV2'nin de ÖV3'e benzer şekilde ders içi öğretim sürecini sürdürdükleri yapılan video kaydından belirlendiği için ÖV1 ve ÖV2'nin ders içi öğretim süreçleri burada transkript edilmemiştir.

Soru 3: "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısı sonlu bir küme belirtir." ifadesi doğrultusunda öğretmenlere: *"Ali isimli bir öğrenci, "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısının sonsuz küme" belirttiğini iddia etmektedir. Ali'nin iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız."* şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soru için, öğretmenlerin yazmış olduğu cevaplara yönelik ulaşılan sonuçlar Tablo 5'de belirtilmiştir.

Tablo 5. Ali'nin İddiasına Yönelik Öğretmenlerin Yazdıkları Cevaplar Doğrultusunda Ulaşılan Sonuçlar

	Frekans (f)	Yüzdelik (%)
Doğrudur	3	17
Yanlıştır	13	72
Emin Değilim	2	11

Tablo 5'de görüldüğü üzere, Ali'nin iddiası için öğretmenlerin çoğu iddianın yanlış olduğunu ifade etmişken; öğretmenlerin üçü iddianın doğru olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin ikisi iddianın doğru ya da yanlışlığına yönelik "emin değilim" seçeneğini işaretlemiştir. Hâlbuki öğretmenlerden Ali'nin iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Ali'nin iddiası için "doğrudur" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö1: Bir an için zamanı durdursak ve yaprakları saymaya başlasak sonlu sayıda farklı yaprak sayabileceğimizi düşünebiliriz. Fakat doğada her an yapraklar yenilenmektedir. Yüzlercesi düşüp binlercesi yeşermektedir. Dolayısıyla sayamayız.

Ö3: Bütün elemanları numaralandırabilme şansımız yoktur. Son yaprak sayılsa bile yeni yapraklar çıkacaktır.

Ö11: Küme tanımına göre doğru kabul edilir. Sonlu kümedir. Ama gerçekte insanın ömrü yaprak sayılarını saymaya kifayet edemeyeceği için sonsuz küme olarak kabul eder.

Gerekçeler incelendiğinde, "Sonsuz Küme" kavramına yönelik tanımlamalarındaki eksikliklerden kaynaklanan yanlış açıklamalar oldukları tespit edilmiştir. Bununla birlikte Ö1 ve Ö3'ün ifadeleri kendi içinde çelişkili ifadeler barındırmaktadır. Çünkü Ö3'ün "son yaprak sayılsa bile" açıklamasında geçen "son yaprak" ifadesi tek başına iddianın sonlu küme olduğunu belirtmektedir. Aynı durumu Ö1'in açıklamasındaki "sonlu sayıda farklı yaprak" ifadesinde de görmek mümkündür. Bununla birlikte, "…saymakla bitmez şeklinde nitelendirdiğimiz şeylere sonsuz diyemeyiz" (MEB, 2016) açıklaması bağlamında, Ö11'in açıklamasının sonsuz kümenin tanımıyla örtüşmeyen yanlış açıklama olduğu tespit edilmiştir. Dolayısıyla Ö1, Ö3 ve Ö11, Ali'nin iddiasına yönelik açıklamalarında, "Neden?" ve "Niçin?" ifadelerine yönelik yanlış gerekçe belirten cevaplar yazmışlardır.

Ali'nin iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerden bazılarının gerekçeleri şu şekildedir;

Ö2: Yaprak sayısı sayılabilir bir özelliktir. Çok büyük bir sayı olabilir ama sonsuz değildir.

Ö8: Sonsuz bir sayı değil, bir kavramdır. Bu nedenle yeryüzündeki tüm ağaçların sayısı yine bir sayıdır ve sonsuz küme değildir.

Ö9: Yaprak sayısı her ne kadar sonsuz gibi görünse de nihayetinde sonludur. Belki bunu ifade edecek rakam olmasa da yine de sonludur.

Ö12: Sonuçta bu yaprak sayısı sonludur. Saymak çok zor ama bir doğal sayı ile ifade edilebilir.

Ö14: Ağaçların yaprak sayısı yeryüzü ile sınırlandığı için sonlu kümedir.

Gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerin iddianın yanlış olduğunu fark ettikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte Ali'nin iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair öğretmenlerden sadece Ö12 ve Ö14'ün doğru açıklama yazdığı sonucu belirlenmiştir. Ö12 ve Ö14, sonlu küme kavramının tanımında yer alan "bir doğal sayı ile ifade edilme" ve "sınırlı olma" ifadeleri doğrultusunda Ali'nin iddiasının yanlış olduğunu gerekçesiyle açıklamıştır. Buna karşın, Ö2, Ö8 ve Ö9 iddianın yanlış olduğunu fark etmelerine rağmen açıklamalarını yanlış gerekçelere dayandırmışlardır.

Ali'nin iddiası için "emin değilim" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin kendilerini neyin muallakta bıraktığına dair gerekçeleri şu şekildedir;

Ö13: Emin değilim. Sayılamayacak çoklukta elemanı olan kümeye sonsuz küme denir. Ağaç yaprakları sayamayacağımız kadar çoklukta. Ama bir kümenin var olması için illa ki elemanlarını bilmemiz gerekmiyor. Yani bu sayıyı hiçbirimiz bilmiyoruz diye o sayının olmadığını kabul etmek yanlış olur. Hem doğru hem yanlış gibi oldu.

Ö15: Matematiksel olarak dünyadaki tüm yaprakları oturup sayamayacağımız için sonsuz bir küme olur. Aslında bakış açımıza göre değişir. Biz öğrencilere sonsuz küme diye belirtiyoruz. Çünkü tüm yeryüzündeki yaprakları oturup sayabilirsek sonuçta dünya kadar bir sınırımız var. O yüzden emin değilim.

Yazılan ifadeler incelendiğinde, öğretmenlerin iddianın yanlış olduğuna dair kendi içinde tutarlı olmayan cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Ö13'ün "…bu sayıyı hiçbirimiz bilmiyoruz diye o sayının olmadığını kabul etmek yanlış olur." ifadesiyle, Ö15'in "…sonuçta dünya kadar bir sınırımız var." ifadesi bu durumu açıklar niteliktedir. Öğretmenlerin tutarlı olmayan cevap yazmalarının nedeni, "Sonlu ve sonsuz küme" kavramlarını tanımlamalarındaki hatalar ve bu iki kavramı birbirleriyle ilişkilendirerek tanımlama yapmamaları olduğu düşünülebilir.

Ders içi öğretim süreçleri video ve ses kaydına alınan öğretmenlerin tamamının Ali'nin iddiasına yönelik "yanlıştır" seçeneğini işaretledikleri tespit edilmiştir.

ÖV1: Yanlıştır. Yeryüzünde bulunan ağaçlar ve bu ağaçların yapraklarının bir sonu vardır. Çünkü sadece yeryüzünde olması bir sınırının olduğunu ve çok büyük bir sayı olmasına rağmen bir sonu olduğunu gösterir.

ÖV2: Yanlıştır. Ağaç yaprakları sayılabilir çokluktadır. Bu yüzden sonlu kümedir.

ÖV3: Yanlıştır. Sonludur, sayabiliriz çünkü. Ömrümüz belki de yetmese de. Çünkü dünya bellidir ve içinde yaşayan canlı ve cansız varlıklar, saymak istesek sayabiliriz.

Yazılan cevaplar incelendiğinde, öğretmenlerin Ali'nin iddiasının yanlış olduğunu fark ettikleri ve iddianın "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair tatmin edici açıklama yazdıkları tespit edilmiştir. ÖV1 ve ÖV3, "sonlu küme" kavramının tanımı dâhilinde "Sonlu kümelerin sınırları vardır ve bellidir." ifadesi doğrultusunda iddiaya açıklama yazmıştır. ÖV2'nin ise, sonlu kümelerin sayılabilir kümeler olması doğrultusunda iddiaya açıklama yazdığı tespit edilmiştir. Aşağıda ders içi öğretim süreci video ile gözlem yapılan öğretmenlerden ÖV3'ün "sonlu küme" ve "sonsuz küme" kavramları üzerinden öğretim yaptığı dersten bir kesit transkript edilmiştir. Burada ÖV3'ün iddiaya ilişkin ders içi öğretimde de (ÖKBT daha sonra uygulanmıştı) ağaçların yaprak sayısı örneğini verdiği görülmektedir.

ÖV3: …Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısını sayabilir misiniz?... Gökyüzündeki yıldızların sayısı mı fazladır yoksa bildiğimiz doğal sayılar mı fazladır?... Ne yaptığımızı sanırım az çok anladınız. Şimdi sonlu ve sonsuz küme kavramlarını inceleyelim. Sizce sonlu küme ne olabilir?

ÖĞR: Sayılacak kadar elemanı olması gerekir. Belli bir yere kadar olan demek.

ÖV3: Doğru. O halde bir kümenin elemanlarının sayısı bir doğal sayıya eşitse yani sayılabilir çoklukta ve sınırları belli ise bu kümeye sonlu küme denir. A={1,2,3,4,5} ise s(A)=5 olduğundan A kümesi sonludur.

ÖV1 ve ÖV2'nin de ÖV3'e benzer şekilde ders içi öğretim sürecini sürdürdükleri yapılan video kaydından belirlendiği için ÖV1 ve ÖV2'nin ders içi öğretim süreçleri burada transkript edilmemiştir.

Soru 4: "Boş küme, her kümenin alt kümesidir." ifadesi doğrultusunda öğretmenlere: *"Elif isimli bir öğrenci, "Boş kümenin her kümenin alt kümesi olmadığını iddia etmektedir." Elif'in iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız."* şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soru için, öğretmenlerin yazmış olduğu cevaplara yönelik ulaşılan sonuçlar Tablo 6'da belirtilmiştir.

Tablo 6. Elif'in İddiasına Yönelik Öğretmenlerin Yazdıkları Cevaplar Doğrultusunda Ulaşılan Sonuçlar

	Frekans (f)	**Yüzdelik (%)**
Doğrudur	0	0
Yanlıştır	18	100
Emin Değilim	0	0

Tablo 6'da görüldüğü üzere, Elif'in iddiası için öğretmenlerin tamamı iddianın yanlış olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerden Elif'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Elif'in iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö2: X bir küme olsun. Boş kümenin X'in alt kümesi olmadığını varsayalım. O halde boş küme X'de olmayan bir eleman içeriyor demektir. Bu da boş küme tanımıyla çelişir. O halde boş küme X'in alt kümesidir.

Ö4: Boş kümenin elemanı olmadığından, Ø her kümenin sıfır elemanlı alt kümesi olarak kabul edilir.

Ö9: Boş kümenin tanımı.

Ö10: Boş küme, hiçbir elemanı olmayan kümedir. Bu nedenle her kümenin alt kümesidir.

Ö13: Diyelim ki herhangi bir A kümesi olsun. Ve boş küme A'nın alt kümesi olmasın. Yani A'da olmayan bir eleman boş kümede bulunmalı ki A'nın alt kümesi olmasın. Ancak boş kümede hiç eleman olmadığı için böyle bir şey olmaz. Demek ki boş küme her kümenin alt kümesidir.

Ö14: Boş kümenin dahi alt kümesi yine kendisi olacağı için boş küme her kümenin alt kümesidir.

Ö15: Boş küme her kümenin alt kümesidir. Çünkü Ø={x:x ≠ x} olsun. A'da herhangi bir küme olsun. Ø ⊈ A kabul edelim. O halde Ø de A'ya ait olmayan en az bir eleman olması gerekir ki bu boş küme tanımı ile çelişir. O halde Ø ⊂ A ifadesi her zaman doğrudur.

Gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerden Ö4, Ö9 ve Ö10 gerekçeden ziyade "boş küme" ve "alt küme" kavramlarına ait bir özelliği ifade ettikleri; bu nedenle Elif'in iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte Ö2, Ö13, Ö14 ve Ö15'in açıklamaları incelendiğinde, Elif'in iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair gerekçe bildiren ifadelerinden dolayı doğru açıklama yazdıkları belirlenmiştir. Çünkü öğretmenlerin, boş küme ve alt küme kavramlarının tanımları doğrultusunda iddiayı açıkladıkları tespit edilmiştir.

Ders içi öğretim süreçleri video ve ses kaydı ile takip edilen üç öğretmeninin hepsinin Elif'in iddiasına yönelik "yanlıştır" seçeneğini işaretledikleri tespit edilmiştir.

ÖV1: Yanlıştır. Her kümenin bir boş küme olan alt kümesi vardır.

ÖV2: Yanlıştır. A kümesinde bulunan her eleman B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir. Alt kümenin bu tanımına göre boş kümede olup da B kümesinde olmayan eleman yoktur. Yani boş küme herhangi bir kümenin alt kümesi değildir denilebilecek elemana sahip değil. Bu yüzden boş küme her kümenin alt kümesidir.

ÖV3: Yanlıştır. Ø her kümenin alt kümesidir. Çünkü 1 tane alt kümesi vardır. ($2^0=1$)

Yazılan açıklamalar incelendiğinde, öğretmenlerin Elif'in iddiasının yanlış olduğunu fark ettiği, fakat iddianın "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair tatmin edici açıklama yazamadıkları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin hiçbirinin boş küme ve alt küme kavramlarının tanımlarını birlikte irdeleyerek açıklama yazmadıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte, ÖV1, ÖV2 ve ÖV3'ün gerekçeden ziyade "boş küme" ve "alt küme" kavramlarına ait bir özelliği ifade ettikleri bu nedenle Elif'in iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdıkları tespit edilmiştir.

Ders içi öğretim süreci video ile gözlem yapılan öğretmenlerden ÖV2'nin "boş küme" ve "alt küme" kavramlarına ilişkin öğretim yaptığı dersten bir kesit aşağıda transkript edilmiştir:

ÖV2: Elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme Ø ya da { } sembollerinden biri ile gösterilir. A= {Ø} veya A={{ }} kümeleri boş küme değildir.

…

ÖV2: …şimdi A={a,b,c,d}, B={a,b,d}, C={a,b,c,d,e} kümeleri arasındaki alt küme ilişkisini Venn şeması yardımıyla inceleyelim.

…

Yandaki şekle göre B⊂A ve A⊂C'dir. Aynı zamanda B⊂C'de yazılabilir…

Alt Kümenin Özellikleri

1. Her küme kendisinin alt kümesidir.

2. Boş küme her kümenin alt kümesidir.

3. …

Örnek: Şimdi B={a, b, c} kümesini ela alalım. Ve alt kümelerini yazalım…

Kaç tane alt kümesi oldu?...

Yukarıda ÖV2'nin iddiaya ilişkin ders içi öğretimde de "boş küme" ve "alt küme" kavramlarına detaylı açıklama belirtmediği ve kavramları birbirleriyle ilişkilendirmediği görülmektedir. Bununla birlikte alt kümenin özellikleri arasında boş kümenin her kümenin alt kümesi olduğuna yer verdiği tespit edilmiştir.

Soru 5: "A ve B kümelerinin eşit küme olabilmesi için A⊂B ve B⊂A olmalıdır." ifadesi doğrultusunda öğretmenlere: "Serra isimli bir öğrenci, "Negatif doğal sayılar kümesi ile negatif asal sayılar kümesinin birbirlerine eşit olmadığını" iddia etmektedir. Serra'nın iddiası için aşağıda yazılan uygun seçeneği işaretleyiniz ve gerekçesini açıklayınız." şeklinde bir soru sorulmuştur. Bu soru için, öğretmenlerin yazmış olduğu cevaplara yönelik ulaşılan sonuçlar Tablo 7'de belirtilmiştir.

Tablo 7. Serra'nın İddiasına Yönelik Öğretmenlerin Yazdıkları Cevaplar Doğrultusunda Ulaşılan Sonuçlar

	Frekans (f)	Yüzdelik (%)
Doğrudur	4	22
Yanlıştır	13	72
Emin Değilim	1	6

Tablo 7'de görüldüğü üzere, Serra'nın iddiası için öğretmenlerin çoğu iddianın yanlış olduğunu ifade etmişken; öğretmenlerin dördü iddianın doğru olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin yalnızca biri iddianın doğru ya da yanlışlığına yönelik "emin değilim" seçeneğini işaretlemiştir. Hâlbuki öğretmenlerden Serra'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyerek, "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğunu gerekçesiyle birlikte açıklamaları beklenmekteydi. Serra'nın iddiası için "doğrudur" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerin gerekçeleri şu şekildedir;

Ö4: Her iki küme de boş kümedir. Dolayısıyla elemanları yoktur. Eşit kümeler aynı elemanlardan oluşan kümelerdir. Verilen iki küme denk olabilir. Çünkü eleman sayıları birbirine eşittir. (Her ikisinin de eleman sayıları sıfırdır.)

Ö11: Negatif doğal sayılar kümesi={ }, Negatif asal sayılar kümesi={ } ise, kümelerin ikisi de boş kümedir. Yokluk gibidir yani. Mevcut olmayan elemanları neye göre kıyaslayıp eşit diyebiliriz. Yani var olan mevcut varlıklar arasında eşitlik aranır.

Ö14: Negatif doğal sayılar ve negatif asal sayılar kümesi olmadığından bu iki olmayan kümenin eşit olması da mümkün değildir.

Gerekçeler incelendiğinde, Ö4, Ö11 ve Ö14'ün açıklamaları "Boş kümenin elemanları olmadığı için kıyaslanamayacak kümeler oldukları" şeklindedir. Fakat eşit küme tanımında geçen "A⊂B ve B⊂A ise A=B" (MEB, 2016) ifadesi ve "Boş kümenin her kümenin alt kümesi" olduğu doğrultusunda "Ø⊄Ø" denilebilir ki, bu da herhangi iki boş kümenin eşit olduğu şeklinde yorumlanır. Hatta "sadece bir tane boş küme olduğu" (Nesin, 2008) teoreminden hareketle dahi, negatif doğal sayılar ve negatif asal sayılar kümesinin eşit kümeler olduğu ifade edilebilirdi. Dolayısıyla Ö4, Ö11 ve Ö14, Serra'nın iddiasına yönelik açıklamalarında, "Neden?" ve "Niçin?" ifadelerine yönelik yanlış gerekçe belirten cevaplar yazmışlardır. Serra'nın iddiası için "yanlıştır" seçeneğini işaretleyen öğretmenlerden bazılarının gerekçeleri şu şekildedir;

Ö2: Bu iki küme de boş küme olup birbirine eşittir.

Ö7: Negatif doğal sayı yoktur, bu yüzden böyle bir kümeye X dersek X=Ø olur. Negatif asal sayı da yoktur. Böyle bir kümeye de Y dersek Y=Ø olur. O halde X=Y olur.

Ö9: Negatif doğal sayı olmadığı gibi negatif asal sayı da yoktur. Dolayısıyla her iki boş kümedir. Birbirlerine eşittir.

Ö12: Aynı elemanlardan oluşan kümeler eşittir. Burada iki küme de boş olduğundan eşittir.

Ö13: Her ikisi de boş kümedir. Ve birbirine eşittir.

Öğretmenlerin yazdığı gerekçeler incelendiğinde, öğretmenlerin iddianın yanlış olduğunu fark ettikleri tespit edilmiştir. Bununla birlikte Serra'nın iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair öğretmenlerden sadece Ö7 ve Ö12'nin doğru açıklama yazdığı bulunmuştur. Ö7 ve Ö12 eşit küme tanımından yola çıkarak Serra'nın iddiasının yanlış olduğunu gerekçesiyle açıklamıştır. Dolayısıyla Ö7 ve Ö12'nin gerekçeleri doğru açıklama olarak sınıflandırılmıştır. Ö2, Ö9 ve Ö13'ün ise gerekçeden ziyade "boş küme" ve "eşit küme" kavramlarına ait bir özelliği ifade ettikleri bu nedenle Serra'nın iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin hiçbiri "negatif doğal sayılar kümesi ile negatif asal sayılar" kümesinin birbirlerinin alt kümesi oldukları doğrultusunda bu kümelerin eşit küme olacakları şeklinde açıklama yazmadıkları belirlenmiştir. Serra'nın iddiası için "emin değilim" seçeneğini işaretleyen Ö3 kendisini neyin muallakta bıraktığına dair herhangi bir gerekçe belirtmemiştir.

Ders içi öğretim süreçleri video ve ses kaydına alınan üç öğretmeninin ikisi Serra'nın iddiasına yönelik "yanlıştır" seçeneğini işaretlerken; yalnızca birinin iddianın doğru olduğu şeklinde işaretleme yaptığı tespit edilmiştir. Serra'nın iddiası için;

ÖV1: Doğrudur. İkisi de boş kümedir ama boş kümeler birbirine eşittir diyemeyiz.

ÖV2: Yanlıştır. Her iki küme de boş kümedir. Birbirine eşittir.

ÖV3: Yanlıştır. Çünkü her iki kümenin de elemanı yoktur. Boş kümedir ve eşittir.

Yazılan açıklamalar incelendiğinde, ÖV2 ve ÖV3'ün Serra'nın iddiasının yanlış olduğunu fark ettikleri fakat iddianın "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair tatmin edici açıklama yazamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. ÖV2 ve ÖV3'ün gerekçeden ziyade "boş küme" ve "eşit küme" kavramlarına ait bir özelliği ifade ettikleri bu nedenle Serra'nın iddiasının "Neden?" ve "Niçin?" yanlış olduğuna dair kısmen doğru açıklama yazdıkları tespit edilmiştir. ÖV1'in ise Serra'nın iddiasını doğru olarak işaretlediği bulunmuştur. ÖV1'in "…boş kümeler birbirine eşittir diyemeyiz" ifadesi "sadece bir tane boş küme olduğu" (Nesin, 2008) teoremiyle çeliştiği, dolayısıyla ÖV1'in gerekçesinin yanlış açıklama olduğu belirlenmiştir.

Aşağıda ders içi öğretim süreci video ile gözlem yapılan öğretmenlerden ÖV1'in "boş küme" ve "eşit küme" kavramlarına ilişkin öğretim yaptığı dersten bir kesit transkript edilmiştir. Burada ÖV1'in iddiaya ilişkin ders içi öğretimde de açıklama belirtmediği görülmektedir. Bu durumda ÖV1'in "boş küme" ve "eşit küme" kavramlarına ilişkin yeterince UAB'ye sahip olmadığı söylenebilir.

ÖV1: C={x:x>0 ve x negatif tam sayı}

Tahtada verilen C kümesini yorumlayalım. x öyle ki x hem negatif tam sayı olacak hem de sıfırdan büyük olacak. Bu küme ne oldu o zaman?

ÖĞR: Boş küme.

ÖV1: İşte boş kümenin tanımını vermişi olduk o zaman. Yani, elemanı olmayan kümeye boş küme denir.

ÖV1: …boş kümeyi nasıl gösteriyoruz?

Boş küme "{ }" veya "Ø" notasyonlarından biriyle gösterilir.

Peki s(Ø)=? Nedir diye sorsam hemen bilirsiniz.

Söyleyin.

ÖĞR: Sıfır hocam.

ÖV1: Doğru. Peki şuna ne dersiniz? A={Ø} ise A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

ÖĞR: Sıfır hocam. Hocam bir elemanlıdır.

ÖV1: Arkadaşlar bir elemanlıdır.

Niye A kümesinin içerisinde boş küme eleman olarak bulunuyor…

ÖV1: Şimdi eşit küme ile ilgili örnek yapalım.

A={x: 0<x<5, x∊Z}, B={x: x<6, x∊N} ise bu kümeleri liste yöntemiyle beraber yazalım. Önce siz yazın.

ÖĞR: Hocam yazdım. A={0,1,2,3,4,5}, B={1,2,3,4,5,6} olur.

Eleman sayıları aynı, eşit kümelerdir hocam.

ÖV1: A kümesi güzel doğru yazdın. A kümesinde x elemanlarını tam sayılardan seçtik değil mi? Tamsayılar neydi hatırlayalım…

B kümesinde eksikler var. Doğal sayılar neydi arkadaşlar?

Ben yazayım. N={0,1,2,3,4,5…} şeklinde sıfırdan başlayıp sonsuza kadar gidecek. B kümesinde sıfırı almadık, dolayısıyla sıfırı yazmamız gerekirdi. Bir de B kümesindeki işaret "<" küçüktür işareti. Yani "6" elemanını almayacağız. O halde B={0,1,2,3,4,5} oldu. A kümesi ile aynı.

Arkadaşlar eşit küme olması için eleman sayılarının aynı olması yeterli değil. Elemanlarının hepsi de birbirinin aynısı olacak…

Bulgular genel olarak yorumlandığında, öğretmenlerin sorulan sorulara genel olarak doğru cevaplar yazdıkları, fakat ifadelerin "Neden?" ve "Niçin?" bu şekilde olduğunu açıklamada yetersiz kaldıklarını ortaya koymaktadır. Başka bir ifadeyle, kümelerde temel kavramlara ilişkin öğretmenlerin, uzmanlaşmış alan bilgisinden ziyade kavramlara ilişkin özelliklerden hareketle gerekçeler yazdıkları görülmektedir. Özellikle evrensel küme, sonsuz küme ve boş küme kavramlarında bu durum ortaya çıkmaktadır. Bununla birlikte, öğretmenlerin kavramlara ilişkin yanlış tanımlamalar yapmalarının bir anlamda sonucu olabilecek şekilde, yanlış gerekçeler yazdıkları da görülmüştür. Nitekim UAB kapsamında bir neden belirtebilmek için kavramsal anlamanın gerçekleşmiş olması gereklidir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016). Örneğin, öğretmenlerin evrensel küme kavramı için "her şeyi kapsayan büyük bir küme olması gerektiği" şeklinde yanlış tanımlamalar yaptıkları ve sonsuz küme için "…saymakla bitmez şeklinde nitelendirdiğimiz şeylere sonsuz diyemeyiz" (MEB, 2016) açıklaması ile çelişen tanımlamalar yaptıkları gözlenmiştir. Boş küme kavramına öğretmenlerin alt küme kavramı ilişkilendirerek açıklamalar yazmadıkları belirlenmiştir. Bunun yerine "boş kümenin elemanları olmadığı için kıyaslanamayacak kümeler oldukları" şeklinde açıklamalar yazdıkları tespit edilmiştir. Aşağıda Tablo 8'de görüldüğü üzere, öğretmenlerin "matematiksel ifadelerin, işlemlerin ve kavramların "Neden?" ve "Niçin?" şeklinde gerekçelerini ortaya koyabilmelerine ilişkin" sorulan sorulara yazdıkları gerekçeler daha çok kısmen doğru açıklama ve yanlış açıklama şeklinde sınıflandırılmıştır.

Tablo 8. Matematiksel İfadelerin, İşlemlerin ve Kavramların "Neden?" ve "Niçin?" Şeklinde Gerekçelerini Ortaya Koyabilmelerine İlişkin Verilerin Dağılımı

	Yanlış Açıklama	Kısmen Doğru Açıklama	Doğru Açıklama	Fikrim Yok
Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasına gerek yoktur.	Ö5, Ö6, Ö8, Ö11, ÖV1, ÖV2, ÖV3	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö7, Ö9, Ö10, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15		-
Tek elemanlı bir küme evrensel küme oluşturabilir.	Ö8, Ö10, ÖV2	Ö1, Ö2, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö12, Ö13, Ö14, Ö15, ÖV1, ÖV3	Ö4, Ö9, Ö11	-
Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısı sonlu bir küme belirtir.	Ö1, Ö2, Ö3, Ö8, Ö9, Ö11, Ö13, Ö15	Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö10	Ö12, Ö14, ÖV1, ÖV2, ÖV3	-
Boş küme, her kümenin alt kümesidir.		Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10, Ö11, Ö12 ÖV1, ÖV2, ÖV3	Ö2, Ö13, Ö14, Ö15	-
A ve B kümelerinin eşit küme olabilmesi için A⊂B ve B⊂A olmalıdır.	Ö3, Ö4, Ö11, Ö14, ÖV1	Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö8, Ö9, Ö10, Ö13, Ö15, ÖV2, ÖV3	Ö7, Ö12	-

Tartışma ve Sonuç

ÖMB'deki konu alan bilgisi bileşenlerinden genel alan bilgisi (GAB), matematiğin yoğun olarak kullanıldığı alanlarda matematik ile uğraşan herkes tarafından kullanılan matematik bilgisidir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016). Araştırmada öğretmenlerin, UAB'yi belirlemeye ilişkin yöneltilen sorulara genel alan bilgisiyle yaklaşarak eksik cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Başka bir ifadeyle, öğretmenlerin derinlemesine matematiksel açıklamalar getirmekten ziyade matematikle uğraşan herhangi bir bireyin cevap verebileceği genel bir matematik bilgisi ile açıklamalar yaptıkları ve de çoğunlukla yanlış açıklamalar verdikleri tespit edilmiştir. Yapılan araştırmalarda da "Kümelerde Temel Kavramlara" ilişkin matematik öğretmen adaylarının, kavramsal öğrenmeleri gerçekleştirmedikleri ve kavramların formal tanımını yapmada zorlandıkları görülmektedir (Doruk ve Çiltaş, 2020; Fischbein ve Baltsan, 1999; Speer vd., 2015; Zehir vd., 2008). Yapılan bu araştırmada, öğretmenlerin "Küme, Evrensel Küme, Sonsuz Küme" ve "Eşit Küme" kavramlarına yönelik sahip oldukları hatalı ya da eksik bilgileri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

- Öğretmenlerin, küme kavramının tanımlanmasında kullanılan "iyi tanımlanmış" ifadesinden hareketle, kümeyi oluşturan nesnelerin ortak özelliğe sahip olması gerektiği şeklinde hatalı algılara sahip olduğu;
- Venn şeması ile gösterim yönteminde "kapalı bir eğri veya çokgen içerisinde gösterilme" ifadesine öğretmenlerin sınıf içi öğretim sürecinde yer vermedikleri;
- Kümenin elemanları arasında ortak bir özellik olmasının gerekmediğine dair tatminkâr açıklama yapamama (kümelerde birleşim özelliğinden hareketle cevap verememe);
- Evrensel kümenin üzerinde çalışılan duruma göre değişebileceğine tanımlamalarda yer vermeme;
- Sonsuz küme kavramını sonlu küme ile ilişkilendirmeden tek başına ele alarak açıklamaya çalışma;
- Alt küme konusunda, n elemanlı bir kümenin alt küme sayısını bulmak için kullanılan 2^n kuralına ilişkin "Neden 2^n?" olduğuna dair öğrencilere tatminkâr açıklamalar yapamama;
- "Eşit küme" kavramını "Alt Küme" kavramı ile ilişkilendirerek ($A=B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$) tanımlama yapmama şeklindedir.

Yukarıdaki sonuçlar, UAB kapsamında öğretmenlerin sınıf içi öğretimdeki görev ve sorumluluklarına ilişkin liste (Ball vd., 2008), DGF verileri ve soru ifadeleri bağlamında değerlendirildiğinde şunları söyleyebiliriz:

Öğretmenlerin "1, a, Ankara, Japonya, Mayıs, Salı" (Soru 1) şeklinde verilen elemanların, ortak özelliklere sahip olmadığı için, küme oluşturup-oluşturmadığı noktasında emin olamadıkları ve yanlış öğretimsel açıklamalar yaptıkları gözlenmiştir. DGF ile takip edilen öğretmenlerde de ortaya çıkan bu sonuç, öğretmenlerin aynı özelliğe sahip nesnelerin bir küme oluşturabileceği ya da küme oluşturulabilmesi için kümenin elemanları arasında belirli ve ortak bir özellik bulunması şartının gerekli olduğu şeklinde, yanılgılara sahip olduklarını göstermektedir. Benzer durum Linchevski ve Vinner (1988) ile Yazıcı ve Kültür'ün (2017) yaptıkları araştırmalarda, katılımcıların "nesnelerin bir araya gelerek küme oluşturabilmesi için nesneler arasında belirli bir özellik olması gerektiği" şeklinde ifade ettikleri yanılgılarında da görülmektedir. DGF ile öğretim süreci takip edilen ÖV2, nesnelerin ilk bakışta ortak özellik göstermese bile küme oluşturabileceğini ifade etmiştir. Fakat ÖV2'nin "…uzun cümleler yazarak, bir şekilde ortak özellik bulunabilir." şeklindeki açıklamaları, öğretimsel olarak yanlış açıklama yaptığını göstermektedir. Bu sonucun, ÖV2'nin iyi tanımlanmış nesneler topluluğunun ancak nesnelerin ortak özellik taşıması neticesinde küme oluşturabileceği şeklindeki yanlış algısından kaynaklandığı söylenebilir. Nitekim Demir'in (2012) yaptığı araştırmada, öğretmen ve öğrencilerin yazdıkları küme örneklerinin büyük çoğunluğunun "topluluk" ve "ortak özelliğe" göre oluşturulmuş küme örnekleri olması, öğretmen ve öğrencilerin "küme" kavramına ilişkin algılarının eğilimini göstermesi noktasında benzer sonuçlar taşımaktadır. Araştırmada, "Tek elemanlı bir küme evrensel küme oluşturabilir." (Soru 2) ifadesi bağlamında yalnızca üç öğretmenin, evrensel kümenin üzerinde çalışıldığı duruma göre, tek elemandan (sadece bir eleman) oluşabileceği şeklinde, öğretimsel olarak doğru açıklama yapabildikleri gözlenmiştir. Buna karşın diğer öğretmenlerin, evrensel kümenin her kümeyi kapsayan çok büyük bir küme olması gerektiği şeklinde öğretimsel olarak yanlış açıklamalar yaptıkları belirlenmiştir. DGF'de de bu sonucu destekler nitelikte, öğretmenlerin hiçbirinin, sınıf içi öğretim sürecinde boş küme ve evrensel küme kavramını birlikte irdeleyerek açıklama yazmadıkları tespit edilmiştir.

Araştırmada "Yeryüzündeki tüm ağaçların yaprak sayısının sonsuz bir küme oluşturacağı" (Soru 3) şeklindeki iddia için öğretmenlerin, sonsuz bir kümede "kümenin elemanlarının sayılamayacak kadar çok fazla sayıda olması" şeklindeki yanılgılarından kaynaklı yanlış açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Nitekim bu durumu özetler nitelikte, MEB'in (2016) sonsuz küme kavramı için ders kitabında (MEB, 2015) yer verdiği "Saymakla bitmez şeklinde nitelendirdiğimiz şeylere sonsuz diyemeyiz."(s. 19) ifadesi de öğretmenlerin yanılgılarını ortaya koymaktadır. Bu yanılgıya bazı ders kitaplarında "sayılmayacak kadar çok elemanı olan kümelere sonsuz küme denilir" (Karakuyu ve Bağcı, 2016, s. 15) şeklinde yazılan yanlış açıklamaların da neden olabileceği söylenebilir. Gür'ün (2009) yaptığı araştırmada öğrencilerin de "sonsuz küme" kavramı için "elemanları sayamayacağımız kadar çoktur" ifadesine sıklıkla başvurdukları belirlenmiştir. Gür'ün (2009) yaptığı araştırma ve yapılan bu araştırmanın bulgularından hareketle, öğretmenlerin ders içi öğretimde yaşadıkları zorlukların öğrencilerde de benzer şekilde ortaya çıkabileceği şeklinde yorumlanabilir. Bu durumu farklı bakış açısıyla incelediğimizde, öğretmenlerin öğretim sürecinde yaşadıkları zorlukların K-12 öğrenim yıllarının bir yansıması olabileceği veya lisans eğitimlerinde düzeltilmeden devam edegelen yanlış öğrenmelerin bir sonucu olabileceği yapılan bazı araştırmalarda ifade edilmiştir (Aslan-Tutak ve Adams, 2015; Browning, Edson, Kimani ve Aslan-Tutak, 2011; Jones, 2000). Başka bir ifadeyle, öğretmenlerin alan bilgisi bağlamında yaşadıkları zorlukların geçmiş öğrencilik deneyimlerinden ortaya çıktığı da düşünülebilir.

Araştırma kapsamında incelenen temel kavramlardan öğretmenlerin eksik ya da hatalı bilgilere sahip olduğu belirlenen diğer kavramlar ise "Eşit Küme" ve "Alt Küme" kavramlarıdır. Burada boş küme, eşit küme ve alt küme kavramlarına ilişkin hazırlanan soru ifadeleri birlikte irdelenmiştir (Soru 4, 5). Eşit kümeler için öğretmenlerin elemanları ve eleman sayıları birbirinin aynısı olan kümeler olması gerektiğini ifade ettikleri fakat hiçbir öğretmenin "Alt Küme" kavramı ile eşit küme kavramını ilişkilendirerek ($A=B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$) açıklama yapmadığı görülmüştür. Bu sonuç, DGF ile öğretim süreci takip edilen tüm öğretmenlerde de aynı şekilde tespit edilmiştir. Bu durumun nedeni öğretmenlerin ders içi öğretim sürecinde öğrencinin seviyesine uygun olması bağlamında matematiksel sembollerden ziyade sözel olarak ifade etmelerinden, ders kitabını ders içi öğretim sürecinde aktif olarak kullanmamalarından ya da kavrama ilişkin yüzeysel bilgilere sahip olmalarından kaynaklandığı düşünülebilir. Yazıcı ve Kültür'ün (2017) yaptıkları araştırmada da eşit küme kavramını doğru olarak tanımlama yapan öğretmenlerin hiçbirinin alt küme kavramı ile eşit küme kavramını ilişkilendirmediği sonucundan hareketle, ayrıca öğretmenlerin tanımlamalarında ders kitabını referans olarak almadığı da söylenebilir.

Araştırma kapsamında, ÖV1, ÖV2 ve ÖV3'ün ders içi aktiviteleri DGF ile izlenmiştir. Bu öğretmenlerin UAB düzeylerinin kısmen yeterli düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Özellikle UAB'nin bir göstergesi olan, öğretim sürecinde matematiksel ifadelerin, kuralların ve işlemlerin nedenini açıklamada, öğretimsel açıklamalar yapabilmede yetersiz oldukları gözlenmiştir. Bu sonucun ortaya çıkmasında, öğretmenlerin yüzeysel UAB'ye sahip olmaları sebebiyle kavramsal anlamalarının da eksik olmasının etkili olduğu düşünülmektedir. Nitekim ÖV1, ders içi öğretim sürecinde bir ton şekeri sonlu kümeye örnek olarak vermişken, bir sonraki örnekte insanın saç kıllarını sonsuz küme örneği olarak vermiştir. Fakat ÖV1, öğrencilerin, "Neden bir ton şeker sonlu küme iken, saç kılları sonsuz küme olsun?" şeklindeki sorularına öğretimsel açıklamalar verememiştir. Akabinde ise vermiş olduğu "şeker" ve "saç kılı" örneklerini değiştirerek sayı kümeleri üzerinden soyut örneklerle öğretim sürecini şekillendirmeye çalışmıştır. Bu sonucun, ÖV1'in sonsuz küme kavramını sonlu küme kavramı üzerinden (sezgisel tanımlama) değil de sayılamaz çokluktaki elemana sahip olan küme olarak tanımlamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısıyla ÖV1'in, sonlu ve sonsuz küme kavramlarına ilişkin öğretimsel açıdan tatminkâr açıklamalar yapamadığı söylenebilir. Bu bağlamda, sınıf içi öğretim sürecinde bir öğretmenin daha etkin matematik eğitimi yapabilmesi ve daha tutarlı öğretimsel açıklamalara yer verebilmesi için sahip olması gereken bilgi ve beceri türünün derinlemesine UAB olduğu söylenebilir.

Araştırma sonucunda, öğretmenlerin "Kümelerde Temel Kavramlara" ilişkin UAB bilgilerinde eksikliklerin olduğu tespit edilmiştir. Provasnik, Gonzales ve Miller'in (2009) yaptıkları çalışmada da benzer şekilde, öğretmenlerin "Kümelerde Temel Kavramlar" konusu kapsamında UAB'lerini belirlemeye yönelik hazırlanan soru maddelerine genel alan bilgisi ile yaklaşım sergiledikleri yani sadece kavramlara ilişkin tanımları kullandıkları gözlenmiştir. UAB, sınıf içi öğretim sürecinde matematik öğretmenlerinin, öğretime ilişkin birçok görev ve sorumlulukları icra edebilmek için sahip olması gereken bir bilgi ve beceridir (Ball vd., 2008; Speer vd., 2015; Thames ve Ball, 2010). Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin araştırma sonucunda ortaya konulan eksikliklerini telafi etmelerinin, öğrencilerin öğrenmesine katkı sağlayacağı aşikâr bir durumdur. Nitekim, öğreteceği bir kavram ya da konu hakkında yüzeysel bilgilere sahip olan öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenmesine katkılarının düşük olacağı (Ball vd., 2008; Thames ve Ball, 2010) beklenen bir sonuçtur.

Öneriler

Öğretmenlerin "Kümeler" konusunda temel kavramlara ilişkin sınıf içi öğretim sürecinde etkili bir matematik öğretimi yapabilmeleri yeterli düzeyde ve derinlemesine UAB'ye sahip olmalarıyla mümkün olabilecektir. Bu bağlamda öğretmenlerin hizmet içi eğitimlerinde bahsi geçen temel kavramlara ilişkin UAB'yi geliştirecek uygulamalara daha fazla zaman ayrılması; ayrıca alanda yapılmış bilimsel çalışma ve faaliyetlerden daha fazla yararlanması sağlanmalıdır. Bununla birlikte öğretmenlerin gerek lise matematik ders kitaplarından gerekse matematik alanında yazılan bilimsel kitaplardan daha fazla yararlanmalarının önü açılarak, "Kümeler" konusunda temel kavramlara ilişkin tanımlamalardan, örneklerden ve uygulamalardan UAB'nin gerektirdiği derinlemesine bilgiye erişimleri için bilgilendirici seminerler düzenlenmelidir.

UAB'ye ilişkin öğretmen adaylarının da "Kümeler" konusunda yeterince ve derinlemesine bilgi sahibi olamayabilecekleri öngörülerek lisans düzeyinde verilecek "öğretime" ilişkin derslerle bu eksiklikleri kapatabilecekleri düşünülmektedir. Bu kapsamda 2018 yılından itibaren eğitim fakültelerinde uygulanmaya başlanan müfredattaki "öğretime" yönelik derslerde, "Kümeler" konusunda belirlenen zorlukların giderilebileceği söylenilebilir. Bunun için öğretim derslerinin içeriği uygulamaya dayalı tasarlanarak, UAB bağlamında öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiler kazandırılabilir.

Matematik eğitimi alanındaki farklı konuları da kapsayacak şekilde, öğretmenlerin UAB düzeyini belirlemeye yönelik yeni araştırmalar yapılabilir. Bu şekilde yapılabilecek araştırma sonuçlarının öğretmenlere de ulaştırılması sağlanarak, UAB'ye ilişkin eksikliklerin giderilmesi önerilmektedir.

Kaynakça

Aksoy, E. (2013). *ABD (New York), Finlandiya, Singapur ve Türkiye'de öğretmen eğitimindeki dönüşümler (2000-2010)* (Yayımlanmamış doktora tezi). Ankara Üniversitesi, Ankara.

An, S., Kulm, G. ve Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the US. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 145-172. doi:10.1023/B:JMTE.0000021943.35739.1c

Andrews, S. L. (2012). *Impact of teacher qualification on student achievement at the elementary and middle school levels* (Doktora tezi). Walden University, Minneapolis.

Arslan Kılcan, S. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Aslan-Tutak, F. ve Adams, T. L. (2015). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education, 7*(3), 301-318.

Aslan-Tutak, F. ve Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 701-719). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Baki, A. ve Mandacı Şahin, S. (2004). Bilgisayar destekli kavram haritası yöntemiyle öğretmen adaylarının matematiksel öğrenmelerinin değerlendirilmesi. *Turkish Online Journal of Educational Technology, 3*(2), 91-104.

Ball, D. L. ve McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. W. R. Houston, M. Haberman ve J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* içinde (s. 437-449). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Hill, H. C. ve Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator, 29*(1), 14-17.

Ball, D. L., Thames, M. H. ve Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Başkan, G. A. (2001). Öğretmenlik mesleği ve öğretmen yetiştirmede yeniden yapılanma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 20*(20), 16-25.

Baştürk, S. (2009). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre fen edebiyat fakültelerindeki alan eğitimi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(3), 137-160.

Bayazıt, İ. ve Aksoy, Y. (2010). Öğretmenlerin fonksiyon kavramı ve öğretimine ilişkin pedagojik görüşleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 9*(3), 697-703.

Baykul, Y. (2016). *İlkokulda matematik öğretimi.* Ankara: Pegem Akademi.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature*. Washington, DC: Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.

Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F. (2014). *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (4. bs.). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Borko, H. ve Putnam, R. T. (1996). Learning to teach. D. C. Berliner ve R. C. Calfee (Ed.), *Handbook of educational psychology* içinde (s. 673-708). ABD: Prentice Hall International.

Boz, N., (2004). *Öğrencilerin hatasını tespit etme ve nedenlerini irdeleme*. 13th National Education Sciences Congress, İnönü University, Malatya.

Browning, C. A., Edson, A. J., Kimani, P. M. ve Aslan-Tutak, F. (2011). *Geometry and measurement content knowledge of preservice K-8 mathematics teachers: A synthesis of research*. Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Nevada, Reno.

Bursalıoğlu, Z. (2021). *Okul yönetiminde yeni yapı ve davranış* (21. bs.). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Carpenter, T. P., Fennema, E. ve Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20.

Caspersen, J. (2013). The valuation of knowledge and normative reflection in teacher qualification: A comparison of teacher educators, novice and experienced teachers. *Teaching and Teacher Education*, *30*, 109-119. doi:10.1016/j.tate.2012.11.003

Cheung, P., Rubenson, M. ve Barner, D. (2017). To infinity and beyond: Children generalize the successor function to all possible numbers years after learning to count. *Cognitive Psychology*, 92, 22-36.

Chick, H. L., Pham, T. H. ve Baker, M. (2006). Probing teachers' pedagogical content knowledge: Lessons from the case of the subtraction algorithm. *29th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 1, 139-146.

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A. ve King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education,* *44*(4), 263-272. doi:10.1177/0022487193044004004

Coffey, A. ve Atkinson, P. (1996). *Making sense of qualitative data: Complementary research strategies*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Cohen, L., Manion, L. ve Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. bs.). London: Routledge-Falmer.

Connel, R. (2009). Good teachers on dangerous ground: Towards a new view of teacher quality and professionalism. *Critical Studies in Education, 50*(3), 213-229.

Creswell, J. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Darling-Hammond, L. (2006). Constructing 21st-century teacher education. *Journal of Teacher Education, 57*(3), 300-314. doi:10.1177/0022487105285962

Davis, C. E. (2003). *Prospective teachers subject matter knowledge of similarity* (Doktora tezi). North Carolina State University, Raleigh.

Demir, G. (2012). *Küme kavramına ilişkin öğrenci, öğretmen algısı ve ders kitaplarında küme kavramının ele alınış biçimi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep.

Doruk, M. ve Çiltaş, A. (2020). Pre-service mathematics teachers' concept definitions and examples regarding sets. *International Journal of Psychology and Educational Studies, 7*(2), 21-36. doi:10.17220/ijpes.2020.02.003

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Ferguson, R. F. (1991). Racial patterns in how school and teacher quality affect achievement and earnings. *Challenge*, *2*(1), 1-35.

Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309-329.

Fischbein, E. ve Baltsan M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 1-22.

Gavalas, D. (2005). Conceptual mathematics: An application to education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(5), 497-516. doi:10.1080/00207390500063942

Gess-Newsome, J. (1999). Secondary teachers knowledge and beliefs about subject matter and their impact on instruction. J. Gess-Newsome ve N. G. Lederman (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge* içinde (s. 51-94). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press.

Grossman, P. L., Wilson, S. ve Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. M. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* içinde (s. 23-36). New York, NY: Pergamon.

Gür, H. (2009). 8. ve 9. sınıf öğrencilerinin kümeler konusundaki temel hataları ve kavram yanılgılarının belirlenmesi. *e-Journal of New World Sciences Academy Education Sciences, 4*(3), 678-694.

Gürlen, E., Demirkaya, A. ve Doğan, N. (2019). Uzmanların PISA ve TIMSS sınavlarının eğitim politika ve programlarına etkisine ilişkin görüşleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 52, 287-319. doi:10.21764/maeuefd.599615

Hannula, S. ve Pehkonnen, E. (2006). Infinity of numbers: A complex concept to be learnt?. S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz ve A. Mendezl (Ed.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2. cilt, s. 152-154). Merida: Universidad Pedagogica Nacional.

Henningsen, M. ve Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Hill, H. C. ve Ball, D. L. (2009). The curious — and crucial — case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71. doi:10.1177/003172170909100215

Hill, H. C., Schilling, S. G. ve Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(11). doi:10.14221/ajte.2013v38n11.3

İpek, A. S., Albayrak, M. ve Işık, C. (2009). Sınıf öğretmeni adaylarının küme kavramıyla ilgili algıları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(1), 221-230.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 20*(3), 109-114.

Kar, T. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin öğretim için matematiksel bilgisinin problem kurma bağlamında incelenmesi: Kesirlerle toplama işlemi örneği* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Karakuyu, E. ve Bağcı, O. (2016). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı.* Ankara: Dikey Yayıncılık.

Karal Eyüboğlu, I. S. (2011). *Fizik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgi (PAB) gelişimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Kavcar, C. (2002). Cumhuriyet döneminde dal öğretmeni yetiştirme. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 35*(1-2), 1-14.

Kim, Y. (2013). *Teaching mathematical knowledge for teaching: Curriculum and challenges* (Doktora tezi). The University of Michigan, ABD.

Kind, V. (2009). Pedagogical content knowledge in science education: Perspectives and potential for progress. *Studies in Science Education*, *45*(2), 169-204. doi:10.1080/03057260903142285

Kolar, V. M. ve Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 389-412. doi:10.1007/s10649-011-9357-7

Küçükahmet, L. (2008). Etkili öğretimin ilkeleri. *Türkiye Özel Okullar Birliği Dergisi, 3,* 28-35.

Lee, S. W. ve Lee, E. A. (2020). Teacher qualification matters: The association between cumulative teacher qualification and students' educational attainment. *International Journal of Educational Development*, *77*, 102218. doi:10.1016/j.ijedudev.2020.102218

Li, X. (2011). Mathematical knowledge for teaching algebraic routines: A case study of solving quadratic equations. *Journal of Mathematics Education*, *4*(2), 1-16.

Linchevski, L. ve Vinner, S. (1988). *The naive concept of sets in elementary teachers.* Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Veszprem, Hungary.

McDiarmid, G. W., Ball, D. L. ve Anderson, C. (1989). Why staying ahead one chapter just won't work: Subject-specific pedagogy. M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* içinde (s. 193-205). New York: Pergamon Press.

McMillan, J. H. ve Schumacher, S. (2010). *Research in education.* New Jersey, ABD: Pearson Education Inc.

Miheso-O'Connor Khakasa, M. ve Berger, M. (2016). Status of teachers' proficiency in mathematical knowledge for teaching at secondary school level in Kenya. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(2), 419-435.

Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2015). *Ortaöğretim matematik 9. sınıf ders kitabı* (3. bs.). Ankara: MEB Devlet Kitapları.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2016). Lise matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı. http://ttkb.meb.gov.tr/program2.aspx?islem=2&kno=215 adresinden erişildi.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 239-257. doi:10.1023/A:1016090925967

Nesin, A. (2008). *Matematiğe giriş I. Sezgisel kümeler kuramı*. İstanbul: Nesin Vakfı Yayınları.

Olson, J. K. (2008). The crucial role of the teacher. *Science and Children*, *46*(2), 45-49. https://www.proquest.com/openview/bb8d83a3c4ae1ee00e6d7cd3f8c181e7/1?cbl=41736&pq-origsite=gscholar adresinden erişildi.

Omare, E., Imonjeb, R. K. ve Nyagah, G. (2020). Teacher qualification, experience, capability beliefs and professional development: Do they predict teacher adoption of 21st century pedagogies?. *International Journal of Curriculum and Instruction, 12*(2), 639-670. http://ijci.wcci-international.org/index.php/IJCI/article/view/489/212 adresinden erişildi.

Özdemir, H. (2015). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının ortaöğretim 9. sınıf kümeler ünitesi öğretiminde öğrenci başarısına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Özdeş, H. ve Kesici, A. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin doğal sayılar konusundaki hata ve kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* *23*(3), 1277-1292. https://dergipark.org.tr/en/pub/kefdergi/issue/22598/241400 adresinden erişildi.

Patton, Q. M. (2002). *Qualitative evaluation and research methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Provasnik, S., Gonzales, P. A. ve Miller, D. C. (2009). *US performance across international assessments of student achievement: Special supplement to the condition of education 2009* (NCES 2009-083). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, US Department of Education, Washington, DC.

Qin, L. ve Bowen, D. H. (2019). The distributions of teacher qualification: A cross-national study. *International Journal of Educational Development*, *70*, 102084. doi:10.1016/j.ijedudev.2019.102084

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. *Handbook of Research on Teacher Education*, *2*(102-119), 273-290.

Rowland, T., Huckstep, P. ve Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Schmidt, W. H., Houang, R. ve Cogan, L. S. (2011). Preparing future math teachers. *Science*, *332*(6035), 1266-1267. doi:10.1126/science.1193855

Senemoğlu, N. (2000). *Gelişim öğrenme ve öğretim*. Ankara: Gazi Kitapevi.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (2004). *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning and learning to teach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Simola, H. (2005). The Finnish miracle of PISA: Historical and sociological remarks on teaching and teacher education. *Comparative Education, 41*(4), 455-470. doi:10.1080/03050060500317810

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. ve Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Speer, N. M., King, K. D. ve Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 105-122.

Suh, Y. (2005). *Pedagogical content knowledge development in teaching science: a case study of elementary school teacher in an urban classroom* (Doktora tezi). Columbia University, USA.

Şişman, M. (2009). *Eğitim bilimine giriş*. Ankara: Pegem Akademi.

Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and teacher education, 4*(2), 99-110.

Tanner, H. ve Jones, S. (2003). *Becoming a successful teacher of mathematics*. London, UK: Routledge Falmer.

Thames, M. H. ve Ball, D. L. (2010). What math knowledge does teaching require?. *Teaching Children Mathematics*, *17*(4), 220-229.

Toluk Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: Öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 2*(2), 88-102. https://dergipark.org.tr/en/pub/turkbilmat/issue/21564/231439 adresinden erişildi.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Ortaöğretim öğrencilerinin kümeler konusundaki öğrenmelerinin değerlendirilmesi-I. *Akademik Bakış Dergisi*, 22, 1-25.

Uğurel, I., Bukova Güzel E. ve Kula, S. (2010). Matematik öğretmenlerinin öğrenme etkinlikleri hakkındaki görüş ve deneyimleri. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 103-123.

Wenglinsky, H. (2004). The link between instructional practice and the racial gap in middle schools. *RMLE Online*, *28*(1), 1-13. doi:10.1080/19404476.2004.11658172

Yazıcı, N. ve Kültür, M. N. (2017). Matematik öğretmenlerinin kümeler ünitesinde yer alan temel kavramlara ilişkin matematiksel bilgilerinin incelenmesi. *Journal of Computer and Education Research*, *5*(9), 100-124.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (2017). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Yücesan, C. (2011). *Bilgisayar destekli öğretimin 6. sınıf kümeler konusunda öğrenci başarısına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Rize Üniversitesi, Rize.

Zehir, H., Işık, A. ve Zehir, K. (2008). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kümeler konusundaki kavramsal bilgi düzeyleri. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 3*(1-2), 61-75.