Jurnal Kajian Matematika dan Aplikasinya
VOLUME 3 NOMOR 2, July 2022
e-ISSN: 2722-7650. http://journal2.um.ac.id/index.php/jkma

PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF LINTASAN P_n

Ramdhan Fazrianto Suwarman[1,*], Nur Inayah[2], Yanne Irene[2]
[1] Universitas Negeri Malang
[2] UIN Syarif Hidayatullah Jakarta

Email : ramdhan.fazrianto.fmipa@um.ac.id (*R.F. Suwarman*), nur.inayah@uinjkt.ac.id *(N. Inayah)*, yanne.irene@uinjkt.ac.id *(Y. Irene)*
*****Corresponding Author

Abstract
A simple graph $G = (V, E)$ with n vertices and m edges is called graceful, if that graph G can be labeled with a bijection $f: V(G) \to \{1, 2, \dots, n\}$ and $g: E(G) \to \{1, 2, \dots, m\}$, with condition label on any edge equals the difference between the labels of the two endpoints. This study examined graceful labeling on path graph P_n for $n \geq 3$.

Keywords*: labeling, graceful, graph path*

Submitted: 02 February 2022; Revised: 17 March 2022; Accepted Publication: 03 April 2022;
Published Online: July 2022
DOI: 10.17977/um055v3i2p21-25

PENDAHULUAN

Teori graf bermula pada awal abad ke-18, ketika Euler melakukan pembuktian terhadap permasalahan melintasi Sungai Progel di sebelah Timur Kota Prussian Koningsberg (sekarang Kaliningrad) [1]. Teori graf merupakan cabang sains yang berkembang sangat pesar [2]. Teori graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-modelnya yang berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan riset operasi [3]. Teori graf juga banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, antara lain pada rute perjalanan, penjadwalan, dan jaringan listrik [4].

Secara khusus, pelabelan merupakan salah satu topik dalam teori graf. Secara umum, objek kajian dari pelabelan merupakan graf yang direpresentasikan oleh titik, sisi, dan himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan pertama kali dikenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), kemudian Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf cukup luas, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpnan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan, antara lain pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, pelabelan anti-ajaib, dan pelabelan total tak-beraturan [3].

Beberapa penelitian terkait pelabelan graceful telah dipublikasikan. Wijaya [5] mengkaji pelabelan konsekutif pada graf sikel dan graf bipartit komplit. Wulandari dan Wijaya yang mengkaji Pelabelan Kosekutif pada graf-graf pohon [6]. Husnul Hotimah mengkaji pelabelan graceful pada graf bipartisi lengkap [7]. Pada penelitian ini, pelabelan yang dibahas adalah pelabelan graceful pada graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$.

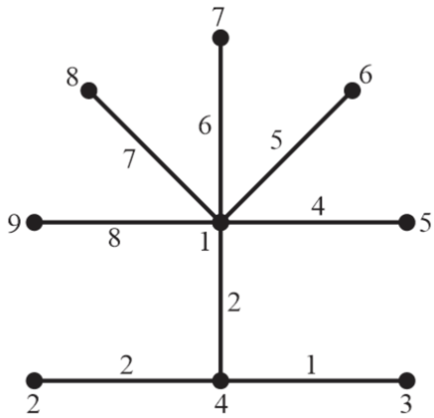
METODE

Definisi Pelabelan Graceful

Sebuah graf sederhana $G = (V, E)$ dengan n titik dan m sisi dikatakan graceful apabila graf G tersebut dapat dilabeli dengan pemetaan bijektif $f: V(G) \rightarrow (1, 2, \dots, n)$ dan $g: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, dengan kondisi label setiap sisi merupakan selisih antara label pada dua titik ujungnya.

Menurut [8], jika sebuah graf tree mempunyai sebanyak n titik dan $n - 1$ sisi, maka jika dapat melabeli setiap titik pada tree tersebut dengan $1, 2, 3, \dots, n$ dan setiap sisinya dengan $1, 2, 3, \dots, n - 1$ dengan kondisi label setiap sisi merupakan beda (selisih) dari dua titik ujungnya, maka graf tree tersebut dinyatakan sebagai graceful.

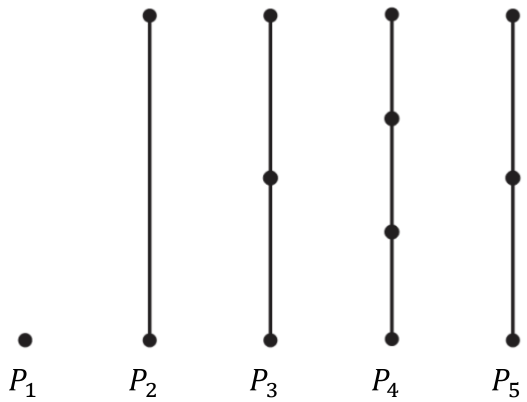
Contoh pelabelan graceful dari graf tree dengan jumlah 9 titik dapat dilihat pada Gambar 1. Pelabelan tersebut dilakukan dengan pelabelan titik $1, 2, 3, \dots, 9$ serta pelabelan sisi $1, 2, 3, \dots, 8$.



Gambar 1. Pelabelan graceful pada graf *tree*

Graf Lintasan

Merujuk [9], graf lintasan P_n merupakan graf terhubung sederhana yang terdiri dari path tunggal. Graf lintasan dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi. Graf lintasan P_n juga merupakan tree dengan 2 titik berderajat satu, serta $n - 2$ titik berderajat dua. Graf lintasan P_1 sama dengan graf lengkap K_1. Berikut merupakan contoh graf lintasan pada Gambar 2.

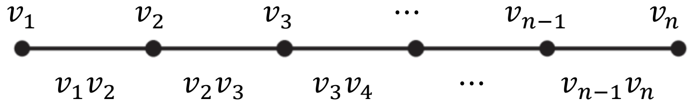


Gambar 2. Graf Lintasan

HASIL DAN PEMBAHASAN

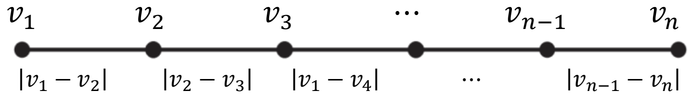
Pelabelan graceful pada graf lintasan P_n dengan n titik, maka pelabelan akan dilakukan dengan melabeli titik dengan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan melabeli sisi dengan $\{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$. Ketentukan yang harus dipenuhi dari pelabelan ini adalah label sisi merupakan selisih dari kedua titik ujungnya.

Jika kita misalkan label titik dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan label sisi antara titik v_i dan titik v_j adalah $v_i v_j$, maka kita dapat ilustrasikan seperti Gambar 3 di bawah ini:



Gambar 3. Pelabelan pada graf Lintasan P_n

Sehingga secara umum pelabelan graceful pada graf lintasan P_n dengan n titik dapat diilustrasikan pada Gambar 4 sebagai berikut:



Gambar 4. Pelabelan graceful pada graf Lintasan P_n

Teorema berikut menunjukkan bahwa graf lintasan P_n dapat dituliskan sebagai berikut:

Teorema 1. Graf lintasan $\boldsymbol{P_n}$ adalah graceful untuk $\boldsymbol{n}$ ganjil, dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$.

Definisi pelabelan titik v_i pada graf lintasan P_n untuk n ganjil diberikan oleh persamaan berikut:

$$f_1(v_i) = \begin{cases} n - \left(\dfrac{i-1}{2}\right) & , \quad i = 1, 3, 5, \dots, n \\ 1 + \left(\dfrac{i-2}{2}\right) & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, (n-1) \end{cases}$$

Kemudian pelabelan sisi akan berpola sebagai berikut:

$$f_1(v_i v_{i+2}) = |n - i|, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

<u>Bukti:</u>

Ambil sebarang i pada graf lintasan P_n dengan $i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Akan dibuktikan bahwa $f_1(v_i) - f_1(v_{i+1}) = |n - i|$ adalah benar.

Terdapat 2 (dua) kemungkinan pelabelan yang dapat terjadi, yaitu:

a. $f_1(v_i)$ dengan i genap dikurangi $f_1(v_{i+1})$ dengan i ganjil.
   Pada kasus ini maka,

$$\begin{aligned} f_1(v_i) - f_1(v_{i+1}) &= \left|\left[n - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right] - \left[1 + \left(\frac{(i+1)-2}{2}\right)\right]\right| \\ &= \left|\left[\frac{2n-i+1}{2}\right] - \left[\frac{2+i+1-2}{2}\right]\right| \\ &= \left|\frac{2n-i+1-i-1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2n-2i}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2(n-i)}{2}\right| \\ &= |n-i| \end{aligned}$$

b. $f_1(v_i)$ dengan i ganjil dikurangi $f_1(v_{i+1})$ dengan i genap.
   Pada kasus ini maka,

$$\begin{aligned} f_1(v_i) - f_1(v_{i+1}) &= \left|\left[1 + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right] - \left[n - \left(\frac{(i+1)-1}{2}\right)\right]\right| \\ &= \left|\left[\frac{2+i-2}{2}\right] - \left[\frac{2n-i-1+1}{2}\right]\right| \\ &= \left|\frac{i-2n+i1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2i-2n}{2}\right| \end{aligned}$$

$$= \left|\frac{2(i-n)}{2}\right|$$
$$= |i-n|$$
$$= |n-i|$$

Kemudian terlihat jelas bahwa label titik dan lebel sisi memenuhi pemetaan bijektif. Jadi, terbukti bahwa graf lintasan P_n dengan n ganjil merupakan graf graceful.

■

Teorema 2. Graf lintasan $\boldsymbol{P_n}$ adalah graceful untuk $\boldsymbol{n}$ genap, dengan $\boldsymbol{n \geq 3}$.

Definisi label untuk titik-titik dari graf lintasan P_n sebagai berikut:

$$f_2(v_i) = \begin{cases} n - \left(\dfrac{i-1}{2}\right) & , \quad i = 1, 3, 5, \dots, (n-1) \\ 1 + \left(\dfrac{i-2}{2}\right) & , \quad i = 2, 4, 6, \dots, n \end{cases}$$

Setelah label titik diperoleh, pelabelan sisi-sisinya akan berpola sebagai berikut:

$$f_2(v_i v_{i+2}) = |n-i|, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

<u>Bukti:</u>

Ambil sebarang i pada graf lintasan P_n dengan $i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Akan dibuktikan bahwa $f_2(v_i) - f_2(v_{i+1}) = |n-i|$ adalah benar.

Terdapat 2 (dua) kemungkinan pelabelan yang dapat terjadi, yaitu:

a. $f_2(v_i)$ dengan i genap dikurangi $f_2(v_{i+1})$ dengan i ganjil.

$$\begin{aligned} f_2(v_i) - f_2(v_{i+1}) &= \left|\left[n - \left(\frac{i-1}{2}\right)\right] - \left[1 + \left(\frac{(i+1)-2}{2}\right)\right]\right| \\ &= \left|\left[\frac{2n-i+1}{2}\right] - \left[\frac{2+i+1-2}{2}\right]\right| \\ &= \left|\frac{2n-i+1-i-1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2n-2i}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2(n-i)}{2}\right| \\ &= |n-i| \end{aligned}$$

b. $f_2(v_i)$ dengan i ganjil dikurangi $f_2(v_{i+1})$ dengan i genap.

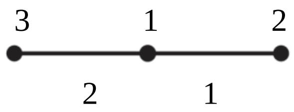
$$\begin{aligned} f_2(v_i) - f_2(v_{i+1}) &= \left|\left[1 + \left(\frac{i-2}{2}\right)\right] - \left[n - \left(\frac{(i+1)-1}{2}\right)\right]\right| \\ &= \left|\left[\frac{2+i-2}{2}\right] - \left[\frac{2n-i-1+1}{2}\right]\right| \\ &= \left|\frac{i-2n+i1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2i-2n}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2(i-n)}{2}\right| \\ &= |i-n| \\ &= |n-i| \end{aligned}$$

Kemudian terlihat jelas bahwa label titik dan lebel sisi memenuhi pemetaan bijektif. Jadi, terbukti bahwa graf lintasan P_n dengan n genap merupakan graf graceful.

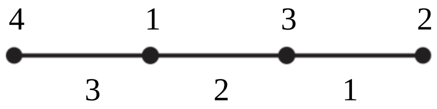
■

Contoh pelabelan graceful

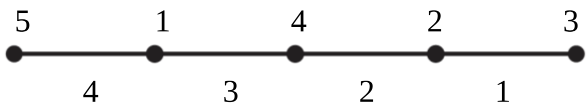
Gambar 5 berikut merupakan beberapa contoh pelabelan graceful pada graf lintasan P_n.



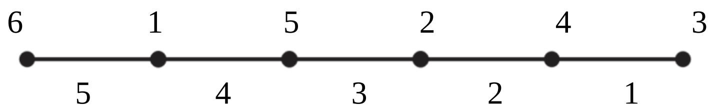
Pelabelan graceful pada graf lintasan P_3.



Pelabelan graceful pada graf lintasan P_4.



Pelabelan graceful pada graf lintasan P_5.



Pelabelan graceful pada graf lintasan P_6.

Gambar 5. Beberapa contoh pelabelan graceful pada graf lintasan P_n.

PENUTUP

Hasil utama dari penulisan ini adalah graf lintasan P_n untuk n ganjil dan n genap merupakan pelabelan graceful. Definisi pelabelan titik dan pelabelan sisi dapat dilihat pada Teorema 1 dan Teorema 2.

DAFTAR RUJUKAN

William Chen, *Discrete Mathematics*, akses: https://www.williamchen-mathematics.info/lndmfolder/dm17.pdf

Suryadi, H.S. *Teori Graf Dasar*, Gunadarma: Jakarta 1994.

Gafur, A. (2008). *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsekutif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit.*

Susmikanti, M. (2006). Komputasi Komponen Terhubung Dan Jalur Terpendek Dalam Algoritma Graf Paralel. *Prosiding Semiloka Teknologi Simulasi dan Komputasi serta Aplikasi.*

Wijaya, K. (2004). Pelabelan Konsekutif Pada Graf Sikel Dan Graf Bipartit Komplit. *Jurnal ILMU DASAR*, 5(1), 1-7.

Wulandari, D. (2002). *Pelabelan Konsekutif Pada Graf-graf Pohon*.

Hotimah, H. (2006). *Pelabelan Graceful pada Graf Bipartisi Lengkap Km, n* (Doctoral dissertation, University of Muhammadiyah Malang).

Hartsfield, N., & Ringel, G. (2013). *Pearls in graph theory: a comprehensive introduction*. Courier Corporation.

Weisstein, E. W. (2013). Graph Path. https://mathworld. wolfram. com/.

Amri, Z., & Harahap, T. H. (2017). Pelabelan Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf 8-Bintang dengan C3 untuk n Genap. EduTech: Jurnal Ilmu Pendidikan dan Ilmu Sosial, 3(2).