

# Um estudo sobre o uso de fases geométricas em sistemas bidimensionais via dimensões extras

Mateus Ryan Carmo Costa<sup>(1)</sup>, Everton Cavalcante<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Universidade Estadual da Paraíba; Patos, PB, Brasil;  
mateus.costa@aluno.uepb.edu.br

<sup>(2)</sup>Universidade Estadual da Paraíba; Campina Grande, PB, Brasil;  
everton@servidor.uepb.edu.br

1

**Resumo:** As fases geométricas são um conceito que surge com o efeito de mudança de fase em uma função de onda aparentemente causado pelo potencial vetor magnético, sendo observadas pela primeira vez por Aharonov e Bohm em 1959, desde então, esta fase tem sido observada nas mais diversas descrições de sistemas quânticos em especial na descrição de defeitos topológicos de sólidos. Neste artigo, veremos como modelos de dimensões extras como o de Kaluza-Klein podem oferecer um novo ferramental para a caracterização de tais defeitos topológicos. Será demonstrado como este conceito oferece uma modelagem física para o comportamento de férmions que interagem com os defeitos topológicos cônicos existentes em alótropos do carbono (grafeno, fulereno...). Por fim serão demonstradas as fases de Aharonov-Anandan que podem ser encontradas ao realizar o transporte paralelo de forma adiabática em torno dos defeitos, além de uma breve discussão sobre a implementação da descrição do fulereno na computação quântica holonômica.

**Palavras-Chave:** Kaluza-Klein; Fases geométricas; Grafeno; Fulereño.

**Resumo:** Geometric phases are a concept that arises with the effect of phase change in a wave function apparently caused by the magnetic vector potential, being observed for the first time by Aharonov and Bohm in 1959, since then, this phase has been observed in the most diverse descriptions of quantum systems in particular in the description of topological defects of solids. In this article, we will see how extra-dimensional models such as the Kaluza-Klein model can offer a new tool for the characterization of such topological defects. It will be demonstrated how this concept offers a physical modeling for the behavior of fermions that interact with topological defects existing in carbon allotropes (graphene, fullerene...). Finally, the Aharonov-Anandan phases that can be found when performing the adiabatic parallel transport around the defects will be demonstrated, as well as a brief discussion on the implementation of the fullerene description in holonomic quantum computing.

**Palavras-Chave:** Kaluza-Klein; Geometric phases; Graphene; Fullerene.

## 1 Introdução

Do século passado aos dias atuais a física teve grandes avanços, da construção de áreas completamente novas, ao refinamento das teorias clássicas, porém, o santo Graal desta ciência se manteve o mesmo desde a formulação da teoria da relatividade e da mecânica quântica, uma teoria unificada. A unificação diz respeito a duas características principais: a união dos escopos da mecânica quântica e da relatividade geral, e uma descrição conjunta das forças fundamentais da natureza. Foi iniciada então uma verdadeira busca Arturiana pela teoria de tudo, com diversas hipóteses e modelos propostos. Dentre eles, um dos primeiros foi o de Kaluza-Klein, com uma ideia de união das forças fundamentais inovadora para época, o uso de dimensões extras para a unificação do eletromagnetismo e a gravidade além de uma generalização entre conceitos de relatividade e mecânica quântica[9].

O uso de dimensões extras é uma prática controversa do ponto de vista experimental apesar de comum em teorias físicas, no campo de altas energias, as teorias de cordas são uma das proposições modernas para unificação. Esta utiliza do conceito de dimensões adicionais para propor um universo composto em sua base por filamentos de energia, cordas, que formam a realidade por meio de modos normais de oscilação [3]. A controvérsia está na praticidade da experimentação para comprovação de tal hipótese, a teoria base propõe que além das quatro dimensões em que a relatividade geral já atua, existem ainda sete outras dimensões espaciais extras. Acredita-se que as cordas só seriam observadas na escala do comprimento de Planck ( $\approx 10^{-35}$  m). O que implica em escalas energéticas ainda hoje inviáveis para verificação (ou não) desses modelos.

Contudo, em sistemas onde a escala de energia é reduzida, e as condições de contorno podem ser bem definidas, tais como as condições usuais de sistemas pesquisados pela a área da matéria condensada, modelos de dimensões extras podem ser aplicados como ferramentas úteis para a descrição de diversos fenômenos.

Um dos que podemos chamar de ramos modernos da matéria condensada é o estudo ostensivo das fases geométricas e suas diversas manifestações em sistemas quânticos. Ela é definida como uma fase adicional na função de onda, e ganha o nome de geométrica pela característica da dependência única em um valor  $\alpha$  que parametriza a característica do sistema que a causou

[4, 5].

$$\Psi' = e^{i\vartheta(\alpha)}\Psi;$$

$$\vartheta(\alpha) = \int_C i \langle \psi^\mu | \frac{\partial}{\partial \alpha} | \psi^\nu \rangle d\alpha \quad (1)$$

Esta fase aparece em diversas ocasiões em sistemas quânticos. Exemplos gerais são mudanças adiabáticas no sistema, onde  $\alpha$  é o parâmetro que reflete esta mudança [12]. No efeito Aharonov–Bohm a própria fase se manifesta como consequência do potencial vetor magnético em que a partícula está submetida:  $\vartheta(\alpha) = \frac{iq}{\hbar} \int_C \vec{A}(\alpha) \cdot d\vec{a}$  [1, 4]. Mais especificamente na matéria condensada a fase aparece na dinâmica de vários tipos de férmions nas proximidades dos defeitos na rede [27].

A pesquisa dos materiais criados por estruturas cristalinas de carbono tem movido boa parte dos esforços da área, suas características únicas e possibilidades de aplicação ostensiva na engenharia são o que motiva a tentativa de compreensão de seus comportamentos [13, 15, 31]. A descrição de tais materiais em essência podem envolver defeitos topológicos, onde os mais diversos modelos são utilizados para isto, incluindo como já dito anteriormente o uso de fases geométricas, como por exemplo o uso de fases de Berry para a descrição de deslocamentos no grafeno [20].

O grafeno é a primeira estrutura cristalina bidimensional já encontrada [15], e tem algumas particularidades em seu comportamento, suaves deformações no grafeno geram campos de gauge com descrição similar a campos eletromagnéticos. De forma que a descrição destes campos pode ser assimilada a de campos unificados utilizando um modelo de agregação de forças fundamentais [2]. O modelo de Kaluza-Klein é proposto como não só uma descrição possível para tal característica do grafeno como também para outra forma cristalina do carbono como será visto posteriormente, sendo uma forma realizável para a descrição de sistemas bidimensionais com defeitos topológicos.

Veremos como dinâmicas quase-estáticas de férmions de Dirac neste modelo recuperam o conceito de fases geométricas e resultados promissores com aplicações em portas lógicas da computação quântica holonômica.

## 2 Kaluza-Klein e o modelo de dimensões extras

A unificação da gravitação e da força eletromagnética possivelmente deve passar por uma teoria unificada de campos escalares que tanto obedecem às leis da relatividade geral; tais como a equação de curvatura, quanto às equações de Maxwell do eletromagnetismo. Do ponto de vista clássico, as equações que definem a dinâmica dessas forças fundamentais são quase idênticas, dadas as proporções e fontes, elas têm o mesmo comportamento. Porém, o que torna a gravidade especial é de que sua característica originária é a mesma que determina a inércia dos objetos ao serem atraídos por seu campo. A simples presença da massa na lei de gravitação universal faz com que campos gravitacionais possam ser representados como entes geométricos seguindo o princípio da equivalência de Einstein.

Kaluza [14] e Klein [16] propuseram uma solução para a unificação por meio da proposição de uma dimensão extra do tipo espaço com uma condição de compactação, a periodicidade da dimensão extra. De forma que um elemento de linha infinitesimal na presença de um campo de escalar Abelian  $\phi$  seria descrito por [2, 9]:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (dy + A_\nu dx^\nu)^2 \quad (2)$$

Os indicies em grego implicam nas mesmas quatro dimensões usuais do espaço tempo de Minkowski, o termo  $A_\nu$  é o potencial vetor eletromagnético, enquanto a coordenada  $y$  se refere a dimensão extra. Nestas condições, a variedade topológica  $M$  do espaço formado pelas 5 dimensões é descrita pelo produto das quatro dimensões usuais com a extra:  $M = M_4 \times S^1$ . Tendo a assinatura:  $(-, +, +, +, +)$  [9]. Vemos que o elemento de linha proposto apresenta um termo de deformação extra comparado ao usual descrito pela relatividade geral, provendo assim tanto a equação de geodésica quanto a equação de força de Lorentz.

A generalização para um campo  $B_\nu$  não-Abeliano para este elemento de linha segundo [6] é dada por:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dy + \kappa B_\nu dx^\nu)^2 \quad (3)$$

Onde  $\kappa$  é conhecida como constante de Kaluza. Este termo pode obviamente sofrer alterações usuais a transformações de coordenadas e escolha de sistemas com menos dimensões espaciais.

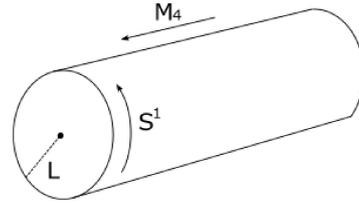


Figura 1: Representação do espaço formado por  $M_4 \times S^1$ .

A condição de compactação faz com que a quinta dimensão (Variedade  $S^1$ ) tenha um aspecto circular e um raio  $L$ , por esta característica e a visualização do espaço formado pelo produto entre as variedades, muitas vezes esta condição de compactação é referenciada como "Condição cilíndrica" [26]. Sob esta condição, qualquer campo escalar possui da propriedade da periodicidade em torno da dimensão  $y$ , de forma que:  $\phi(x_\mu, y) = \phi(x_\mu, y + 2\pi R)$ , assim como na realidade, a métrica deste espaço e potenciais vetores eletromagnéticos, etc. Este atributo faz com que estas entidades físicas possam ser expandidas em série de Fourier em torno de  $y$  [2, 9, 26].

$$g(x_\mu, y) = \sum_{l=0, \pm 1, 2, \dots} g_{\mu\nu l}(x_\mu) e^{\frac{ily}{L}};$$

$$\phi(x_\mu, y) = \sum_{l=0, \pm 1, 2, \dots} \phi_l(x_\mu) e^{\frac{ily}{L}};$$

$$A_\mu(x_\mu, y) = \sum_{l=0, \pm 1, 2, \dots} A_{\mu l}(x_\mu) e^{\frac{ily}{L}} \quad (4)$$

Recuperamos então os entes quadri-dimensionais como modos destas séries. Fatores como os campos escalares  $\phi_n(x_\mu)$  formam uma torre de infinitos valores,

comumente conhecidos como espectros de Kaluza-Klein ou torres de Kaluza-Klein [26].

Traçando um paralelo com a Teoria quântica de campos (TQC) podemos expressar a equação de onda para um campo escalar neste modelo de dimensões extras.

$$(\square_4 + \frac{l^2}{L^2})\phi_l(x_{\mu l}) \equiv (\partial_\mu^2 + \frac{l^2}{L^2})\phi_l(x_{\mu l}) = 0 \quad (5)$$

Assim como esperado, para o modo zero ( $\phi_0$ ), esta equação de onda representa objetos sem massa (graviton, fóton e dilaton). Mas para modos diferentes de zero, a massa das partículas é definida por:  $m_l = \frac{|l|}{L}$ , ou seja, é definida pelo raio da dimensão periódica e os coeficientes da torre de KK [26]. O mesmo resultado pode ser obtido ao calcular a ação de Einstein-Hilbert.

Sob certas condições (partículas de spin-2), não só a massa pode ser definida em torno dos coeficientes das torres de KK como também a carga elétrica, que é definida por:  $e_l = \frac{l\kappa\sqrt{2}}{L}$ . Assim, o modelo de Kaluza-Klein não só pode ser solução das equações de campo de Einstein, como também resolver as equações de Maxwell. A quinta dimensão compactada extrai as fontes de ambas as forças fundamentais da natureza, sendo a primeira forma de unificação vista na física. Com estas relações de massa e cargas elétricas, os números sugerem que o raio da quinta dimensão está na escala de Plank, em torno de  $10^{-35}$  metros. O que explica o porque não podemos notar sua existência nas experimentações corriqueiras [9].

As torres de KK por si só podem se provar um desafio, qualquer tentativa de reduzir seu espectro a um numero finito gera inconsistências [10], daí vem a necessidade de teorias modernas como a teoria das cordas, ou super cordas, que mostram um comportamento mais acretivo, principalmente no que diz respeito a modelos de altas energias.

Porem, no geral, o que a teoria de Kaluza-Klein, nos mostra que em um modelo penta dimensional com a condição cilíndrica de compactação para a dimensão extra, é operacionalmente indistinguível do modelo usual de quatro dimensões [9]. Assim, pode ser integrado a diversos sistemas físicos como solução particular de problemas multidimensionais.

### 3 Defeitos topológicos e fases de sistemas bidimensionais

Como já foi mencionado, boa parte dos esforços atuais no estudo das estruturas cristalinas formadas pelo carbono passa pela descrição do comportamento de espinores que realizam um transporte paralelo em torno de defeitos topológicos nestas estruturas. O resultado, é que a função de onda que os descreve sofre uma mudança de fase, ganha uma fase geométrica similar a descrita pela equação (1).

O grafeno é uma estrutura bidimensional que tem seus átomos organizados em formato de colmeia. Hexágonos ligados em uma estrutura de tamanho indefinido em um mesmo plano [2]. O fulereno por sua vez é um poliedro formado por doze anéis pentagonais e treze hexagonais de carbono [6]. Devido suas estruturas atômicas, ambas as estruturas tem seu Hamiltoniano dominado pelos pontos de Fermi (ou pontos-K). Que são nomeados  $K_+$  e  $K_-$ .

Uma das técnicas de introdução a defeitos topológicos nestas moléculas é a chamada "Cortar e Colar", que consiste remover uma das treliças dos hexágonos no caso do grafeno e a recolocar em um dos seus vizinhos, formando um heptágono. Esta técnica é conhecida como processo de Volterra [17], e o defeito gerado na estrutura é chamado de declinação [2]. Este defeito topológico pode ser explicado por dois campos de gauge fictícios:

$$\oint \omega_\mu dx^\mu = -\frac{\pi}{6}\sigma^z \quad (6)$$

$$\oint A_\mu dx^\mu = \frac{\pi}{2}\tau^y \quad (7)$$

A equação (6) que descreve o primeiro campo  $\omega_\mu$ , está relacionada ao deficit angular dos cones formados quando o espinor viaja paralelamente ao defeito [30], o termo  $\sigma^z$  é a matriz de Pauli dos spins. Esta equação define as propriedades elásticas da declinação.

Já na equação (7), que representa um campo não-abeliano  $A_\nu$ , temos a representação do fluxo do spin-K, a junção dos dois pontos de Fermi, o termo  $\tau^y$  é a matriz padrão de Pauli para os pontos-K do espinor [2]. Especificamente no fulereno, esta característica descreve a indução de um campo de gauge devido a um monopolo magnético fictício no centro da molécula [6].

Apesar da descrição da segunda equação ser possível utilizando outras abordagens [11], existem esforços para a criação de uma abordagem que utiliza o modelo de dimensões extras de Kaluza e Klein para definir a transição de fase, utilizando uma abordagem geométrica para determinar o segundo fluxo quântico da equação (7).

#### 3.1 Grafeno

O transporte paralelo de um espinor no defeito de uma folha de grafeno produzido pelo processo de Volterra é análogo ao efeito Aharonov-Bohm. De forma que é possível realizar uma descrição geométrica deste efeito. Uma solução utilizando o modelo de Kaluza-Klein é utilizar transformações de gauge na métrica descrita por (3), de forma que para este problema em específico, descrevemos uma unidade de linha como [2]:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \eta^2 \rho^2 d\varphi^2 + (dy + \frac{n\Omega}{2}\rho d\varphi)^2 \quad (8)$$

Onde  $\eta$  está relacionado com o deficit ou excesso do angulo correspondente ao setor angular do defeito, e  $n_\Omega$  o numero de seções que podem ser removidas ou inseridas na camada de grafeno pelo processo de Volterra. Este deficit causado pela declinação em uma camada única de grafeno pode ser facilmente calculado por:  $\eta = 1 - \frac{n_\Omega}{6}$ .

Para estudar a dinâmica de partículas sem massa no grafeno é necessário usar uma abordagem similar a partículas em um espaço tempo curvo na TQC. Logo, é preciso traçar um tensor de métrica e desenvolver a equação de Dirac para este sistema. O tensor de métrico é definido por:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab} \quad (9)$$

Sendo  $e_\mu^a(x)$  e  $e_\nu^b(x)$  conhecidos como tetradas. Que são tensores que conectam os espaços no princípio de equivalência. Os índices com letras gregas são referentes as coordenadas espaço-temporais ( $\mu = t, \rho, \varphi, y$ ) e os

índices em latim aos referenciais locais ( $a = 0, 1, 2, 3$ ).  $\eta_{ab}$  por sua vez é o usual tensor de Minkowski. Também são definidas as coordenadas  $\hat{\theta}^a$ ;  $\theta^0 = dt, \theta^1 = d\rho, \theta^2 = \eta\rho d\varphi, \theta^3 = dy + \frac{n_\Omega}{2}\rho d\varphi$ . Logo:

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta\rho & 0 \\ 0 & 1 & \frac{n_\Omega}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta\rho} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{n_\Omega}{2\eta} & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Portanto as coordenadas em  $\hat{\theta}$  podem ser descritas por:  $\hat{\theta}^a = e_\mu^a(x)dx^\mu$ .

Usando a derivada covariante do princípio de gauge, equação de Dirac pode ser descrita em um termo geral por:

$$i\gamma^\mu[\partial_\mu + \frac{i}{4}\omega_{\mu ab}(x)\Sigma^{ab}]\psi_l = 0 \quad (11)$$

Onde  $\Sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$ , as matrizes de Dirac obedecem a relação:  $\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\eta^{ab}$ , pertencem ao referencial local, e correspondem as matrizes padrões do espaço tempo de Minkowski. Segundo Gusynin [7] é possível construir matrizes de Dirac  $2 \times 2$  com as matrizes de Pauli  $\tau^i$  e  $\sigma^i$  que atuam nos pontos de Fermi, como as matrizes a seguir:

$$\gamma^i = -i\tau^2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (12)$$

Esta representação das matrizes de Dirac é chamada de Weyl ou quiral.

Uma vez que o termo  $\omega_{\mu ab}$  obedece a estrutura da equação de Maurer-Cartan [19, 21]:

$$d\hat{\theta}^a + \omega_b^a \wedge \hat{\theta}^b = 0 \quad (13)$$

Podemos então obter as componentes não nulas da primeira forma de  $\omega_b^a$ :

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = -\omega_{\varphi 2}^1(x) = \eta d\varphi;$$

$$\omega_1^3 = -\omega_3^1 = -\omega_{\varphi 3}^1(x) = -\frac{n_\Omega}{2}d\varphi \quad (14)$$

Assim, é possível escrever a equação de Dirac para a dinâmica de partículas sem massa na folha de grafeno:

$$i\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} \right) \Psi + i\frac{\gamma^2}{\eta\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - i\gamma^2 \frac{n_\Omega}{2\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$+ i\gamma^3 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{n_\Omega}{4\eta\rho} \gamma^0 \gamma^5 \Psi = 0 \quad (15)$$

A função de onda  $\Psi$  tem o mesmo formato da primeira equação de (1), de forma que a escrevemos como:  $\Psi = e^{i\vartheta} \Psi^0$ . Uma vez que estamos trabalhando com o modelo de dimensões extras, também é possível expandir  $\Psi^0$  em torno de  $y$  assim como as equações (4), adicionando apenas  $2\pi$  ao termo da exponencial, sendo assim, obtemos a seguinte forma reduzida da equação (15):

$$i\gamma^0 \frac{\partial \Psi_l^0}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial \Psi_l^0}{\partial \rho} + i\frac{\gamma^2}{\eta\rho} \frac{\partial \Psi_l^0}{\partial \varphi} + \frac{2\pi l}{L} \frac{n_\Omega}{2\eta} \gamma^2 \Psi_l^0$$

$$- \frac{2\pi l}{L} \gamma^3 \Psi_l^0 = 0 \quad (16)$$

Os dois últimos (que possuem o termo de massa  $\frac{l}{L}$ ) termos são referentes a partículas massivas dos modos diferentes de zero no modelo de KK, como a intenção é o estudo de férmions sem massa, estes termos podem ser ignorados fazendo  $l = 0$ . Ou seja, sendo  $\Psi_l^0(t, \rho, \varphi) \equiv \psi_l^0(t, \rho, \varphi)$ , com a descrição desta equação de Dirac, utilizando o fator de fase de Dirac, e a fase geométrica de Aharonov-Anandan [24, 25], obtemos o seguinte termo para a fase geométrica deste sistema:

$$\psi_l = e^{i\vartheta} \psi_l^0$$

$$\vartheta = \pi \left( 1 - \frac{n_\Omega}{6} \right) \Sigma^3 - \pi \frac{n_\Omega}{2} \Sigma^2 \quad (17)$$

O termo  $\Sigma^3$  é a matriz geradora de rotação do spinor de Dirac no plano  $\varphi\rho$  em torno do cone de declinação. Já a matriz  $\Sigma^2$  é a matriz de rotação no plano formado pela componente radial e a dimensão extra.

## 3.2 Fulereno

A descrição do fullereno em um modelo de dimensões extras compartilha toda a metodologia para o desenvolvimento da descrição do grafeno. A ideia do defeito de declinação permanece, e técnica de descrever seu comportamento via equação de Dirac também. A principal diferença entre o modelo de dimensões, no grafeno, é utilizada as coordenadas polares  $\rho$  e  $\varphi$  para o modelo de dimensões  $(2+1)$ . O problema do fullereno continua sendo bidimensional, porém, serão utilizadas as coordenadas esféricas  $\varphi$  e  $\theta$ . De forma que a métrica de Kaluza-Klein (3) é descrita como:

$$ds^2 = V_f^2 dt^2 - R^2 d\theta^2 - \eta^2 R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$- (dy + \frac{n_\Omega}{2} R \sin \theta d\varphi)^2 \quad (18)$$

Para manter a mesma relação  $\hat{\theta}^a = e_\mu^a(x)dx^\mu$ , são mudados os coeficientes  $e$  (19) do tensor de métrica:

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} V_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta R \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & \frac{n_\Omega}{2} R \sin \theta & 1 \end{pmatrix};$$

$$e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{V_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta R \sin \theta} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{n_\Omega}{2\eta} & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

As componentes não nulas de  $\omega_b^a$  pela relação de Maurer-Cartan são:

$$\omega_{\varphi 2}^1(x) = \omega_{\varphi 1}^2(x) = -\eta \cos \theta;$$

$$\omega_{\varphi 3}^1(x) = \omega_{\varphi 1}^3(x) = -\frac{n_\Omega}{2} \cos \theta \quad (20)$$

Novamente, com todos estes termos e as mesmas matrizes quirais citadas podemos escrever a equação de Dirac para o comportamento de férmions sem massa neste sistema. Assim como utilizar as mesmas técnicas das equações (1) e (4) para reduzir a equação de Dirac para a seguinte forma:

$$i\frac{\gamma^0}{V_f}\frac{\partial\psi_l}{\partial t} + i\frac{\gamma^1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{2}\right)\psi_l + i\frac{\gamma^2}{\eta R\sin\theta}\frac{\partial\psi_l}{\partial\varphi}$$

$$- \frac{n_\Omega}{4\eta R}\cot\theta\gamma^0\gamma^5 + \frac{2\pi l}{L}\frac{n_\Omega}{2\eta}\gamma^2\psi_l - \frac{2\pi l}{L}\gamma^3\psi_l \quad (21)$$

Vemos novamente os últimos termos como massivos segundo o modelo de dimensões extras, o processo para obter a fase geométrica é basicamente o mesmo, de forma que a descrevemos como:

$$\vartheta = \int \left( \frac{\eta\cos\theta}{2}\Sigma^3 - \frac{n_\Omega}{4}\cos\theta\Sigma^2 \right) d\varphi$$

$$= \pi\eta\cos\theta\Sigma^3 - 3\pi(1-\eta)\cos\theta\Sigma^2 \quad (22)$$

Este resultado é extremamente similar ao obtido para o grafeno, porém ainda é possível simplificar as funções trigonométricas presentes nele. Levando em conta que a dimensão do defeito topológico  $\rho = R\theta$  é muito menor que o raio da molécula, podemos utilizar a seguinte aproximação:  $\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \approx 1$ . Assim retornamos a forma de fase de Aharonov-Anandan:

$$\psi_l = e^{i\pi\eta\Sigma^3 - 3\pi i(1-\eta)\Sigma^2}\psi_l^0 \quad (23)$$

Cavalcante [6] também mostra como é possível a partir deste resultado de fase, sob certas condições de energia e temperatura, podemos descrever a fase como uma matriz de holonomia, que pode ser utilizada na engenharia de portões quânticos para computadores desta categoria. Várias são as tentativas de utilização de fases geométricas para este propósito [22, 29]. A descrição para o fullereno por meio de dimensões extras demonstra mais um dos candidatos a criação de portões quânticos.

## 4 Considerações Finais

Modelos de dimensões extras são extremamente populares na física de altas energias, entretanto, sua utilização na matéria condensada vem se estabelecendo aos poucos. Foi demonstrado que tal ferramental pode ser utilizado na descrição da mistura dos pontos de Fermi das formas cristalinas do carbono, grafeno e fullereno, onde o modo zero da torre de Kaluza-Klein pode fornecer uma descrição apropriada a mudança de fase sofrida pelas funções de onda ao serem transportados em torno de defeitos topológicos. Se feito adiabaticamente, as fases encontradas neste modelo correspondem a fase de Aharonov-Anandan.

Além destes aspectos, a implementação do modelo de dimensões extras ao fullereno abre a discussão sobre a implementação de portões quânticos com base nos defeitos topológicos deste sólido. Apesar da dificuldade de implementação, a criação da matriz de Holonomia com uma aproximação razoável possibilita tal debate.

Como um todo, o ferramental de dimensões extras se mostra eficiente e plenamente utilizável para a descrição de defeitos em sólidos, é possível que no futuro hajam ainda mais aplicações em diferentes estruturas, portando um conceito de altas energias para um campo mais vasto de aplicações.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil, por meio do programa de iniciação científica PIBIC/CNPq-UEPB.

## Referências

- [1] Yakir Aharonov and D. Bohm. Aharonov, y. bohm, d significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *phy. rev.* 115, 485-491. *Physical Review - PHYS REV X*, 115:485–491, 08 1959.
- [2] K. Bakke, A. Yu. Petrov, and C. Furtado. A kaluza–klein description of geometric phases in graphene. *Annals of Physics*, 327(12):2946–2954, dec 2012.
- [3] James Bedford. An introduction to string theory, 2011.
- [4] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [5] Arno Bohm, Ali Mostafazadeh, Hiroyasu Koizumi, Qian Niu, and Josef Zwanziger. *The Geometric Phase in Quantum Systems: Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics*. 04 2003.
- [6] Everton Cavalcante and Claudio Furtado. Quantum holonomy based in a kaluza–klein description for defects in c60 fullerenes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18(10):2150163, jun 2021.
- [7] AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics. *International Journal of Modern Physics B*, 21(27):4611–4658, oct 2007.
- [8] Ashok Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. WORLD SCIENTIFIC, 2008.
- [9] M. J. Duff. Kaluza-klein theory in perspective, 1994.
- [10] M.J. Duff, C.N. Pope, and K.S. Stelle. Consistent interacting massive spin-2 requires an infinity of states. *Physics Letters B*, 223(3):386–390, 1989.
- [11] Jose Gonzalez, F Guinea, and María AH Vozmediano. The electronic spectrum of fullerenes from the dirac equation. *Nuclear Physics B*, 406(3):771–794, 1993.
- [12] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2nd edition, apr 2004.
- [13] Sumio Iijima. Carbon nanotubes: past, present, and future. *Physica B: Condensed Matter*, 323(1):1–5, 2002. Proceedings of the Tsukuba Symposium on Carbon Nanotube in Commemoration of the 10th Anniversary of its Discovery.
- [14] Th. Kaluza. On the unification problem in physics. *International Journal of Modern Physics D*, 27(14):1870001, oct 2018.
- [15] M.I. Katsnelson and K.S. Novoselov. Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. *Solid State Communications*, 143(1):3–13, 2007. Exploring graphene.

- [16] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, 37:895–906, 1926.
- [17] Maurice Kléman. Points, lignes, parois dans les fluides anisotropes et les solides cristallins. 1977.
- [18] Paul E Lammert and Vincent H Crespi. Topological phases in graphitic cones. *Physical review letters*, 85(24):5190, 2000.
- [19] A Macias and H Dehnen. Dirac field in the five-dimensional kaluza-klein theory. *Classical and Quantum Gravity*, 8(1):203, 1991.
- [20] A. Mesaros, D. Sadri, and J. Zaanen. Berry phase of dislocations in graphene and valley conserving decoherence. *Phys. Rev. B*, 79:155111, Apr 2009.
- [21] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [22] Jiannis Pachos and Paolo Zanardi. Quantum holonomies for quantum computing. *International Journal of Modern Physics B*, 15(09):1257–1285, apr 2001.
- [23] Palash B. Pal. Dirac, majorana, and weyl fermions. *American Journal of Physics*, 79(5):485–498, may 2011.
- [24] Murray Peshkin. Force-free interactions and non-dispersive phase shifts in interferometry. *Foundations of physics*, 29(3):481–489, 1999.
- [25] Murray Peshkin and Harry Jeannot Lipkin. Topology, locality, and aharonov-bohm effect with neutrons. *Physical review letters*, 74(15):2847, 1995.
- [26] M. Shifman. Large extra dimensions becoming acquainted with an alternative paradigm. *IJMPA*, 25, 07 2009.
- [27] S C Tiwari. Topological defects, geometric phases, and the angular momentum of light, 2007.
- [28] Gerardo Torres del Castillo. An introduction to the kaluza-klein formulation. 06 2019.
- [29] Vlatko Vedral. Geometric phases and topological quantum computation. *International Journal of Quantum Information*, 01(01):1–23, 2003.
- [30] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. IE-Wiley, 1972.
- [31] E. L. Wolf. Graphene: A new paradigm in condensed matter and device physics. *MRS Bulletin*, 39(10):910–911, Oct 2014.