

# *1. L'assegnazione dinamica intraperiodale con congestione da spillback. Parte seconda: algoritmi ed applicazioni*

*Lorenzo Meschini\*, Giuseppe Bellei\*, Guido Gentile\*, Natale Papola\**

\* Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

## **1.1. Introduzione**

In questo lavoro vengono presentati gli algoritmi e le applicazioni relativi ai modelli illustrati nella "Parte prima: modelli" presentata in questa stessa sede, cui nel seguito si farà riferimento come Parte Prima. Tali algoritmi implementano un nuovo modello dinamico delle prestazioni di rete finalizzato alla soluzione del problema dell'assegnazione dinamica intraperiodale (WDDTA, Within-day Dynamic Traffic Assignment) con congestione da spillback, nel quale cioè si rappresenti la propagazione della congestione tra archi contigui. Successivamente, vengono presentati una serie di casi di studio, tali da evidenziare le caratteristiche e le proprietà sia del nuovo modello dinamico delle prestazioni di rete, sia del modello di assegnazione con spillback. Infine, allo scopo di valutare l'efficacia e l'efficienza del modello di assegnazione e degli algoritmi proposti, viene illustrata l'applicazione ad un caso reale, i cui risultati sono posti a confronto con quelli ottenuti mediante un modello di caricamento dinamico con spillback consolidato (il Cell Transmission Model di Daganzo, 1994 e 1995), con quelli ottenuti mediante il modello di assegnazione dinamica senza spillback presentato in Bellei, Gentile, Papola (2004), e con i dati reali rilevati.

## **1.2. Algoritmi risolutivi**

In questa sezione vengono presentati gli algoritmi che risolvono i modelli dinamici costituenti il modello di prestazione di rete (NPM, Network Performance Model) e descritti nella sezione 1.3 della Parte Prima; si rimanda invece a Bellei,

Gentile, Papola (2004) per gli algoritmi relativi alla soluzione sia della NLM, sia del problema di punto fisso dell'equilibrio.

Al fine di implementare il modello matematico proposto, si suddivide il periodo di analisi in  $n$  intervalli temporali identificati dalla successione di istanti  $(\tau^0, \dots, \tau^i, \dots, \tau^n)$ . Per convenzione, si assume  $\tau^{-1} = -\infty$  e  $\tau^{n+1} = \infty$ .

In seguito, si assume di poter approssimare il generico profilo temporale  $x_j$  mediante una funzione o costante o lineare a tratti e definita sulla base dei valori che essa assume sugli istanti individuati in precedenza; risulta cioè, rispettivamente:

$$x_j(\tau^0) = x_j^0, \quad x_j(\tau) = x_j^i, \quad \tau \in (\tau^{i-1}, \tau^i], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$x_j(\tau^0) = x_j^0, \quad x_j(\tau) = x_j^{i-1} + (\tau - \tau^{i-1}) \cdot (x_j^i - x_j^{i-1}) / (\tau^i - \tau^{i-1}), \quad \tau \in (\tau^{i-1}, \tau^i], \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

In particolare, i profili temporali dei flussi e delle capacità si assumono costanti a tratti, mentre quelli delle altre variabili si assumono lineari a tratti.

Si ipotizza inoltre che lo stato della rete all'istante  $\tau^0$  sia noto; senza perdita di generalità, si assume che la rete sia inizialmente scarica.

La procedura seguente illustra un metodo per calcolare la capacità in entrata di un qualsiasi arco  $a \in AS$  che non sia un connettore, sulla base del modello delle capacità in entrata d'arco descritto nella sezione 1.3.1 della Parte Prima.

```

for each  $a \in AS$ 
   $F_a^0 = 0$ 
   $E_a^0 = 0$ 
   $H_a^0 = L_a \cdot Q_a \cdot (1/w_a + 1/V_a)$ 
  for  $i = 1, \dots, n$ 
     $F_a^i = F_a^{i-1} + f_a^i \cdot (\tau^i - \tau^{i-1})$ 
     $E_a^i = E_a^{i-1} + e_a^i \cdot (\tau^i - \tau^{i-1})$ 
     $H_a^i = E_a^i + L_a \cdot Q_a \cdot (1/w_a + 1/V_a)$ 
  next  $i$ 
next  $a$ 
for each  $a \in AS$ 
   $G_a^0 = 0$ 
   $H_a^{-1} = 0$ 
   $j = 0$ 
  for  $i = 1, \dots, n$ 
    do until  $\tau^{j-1} + L_a/w_a < \tau^i \leq \tau^j + L_a/w_a$ 
       $j = j+1$ 
    loop
     $G_a^i = H_a^{j-1} + (H_a^j - H_a^{j-1}) \cdot (\tau^i - \tau^{j-1} - L_a/w_a) / (\tau^j - \tau^{j-1})$ 
    if  $G_a^i > F_a^i$  and  $G_a^{i-1} > F_a^{i-1}$  then

```

```

         $\mu_a^i = Q_a$ 
    else
         $\mu_a^i = (G_a^i - \min\{G_a^{i-1}, F_a^{i-1}\}) / (\tau^i - \tau^{i-1})$ 
    end if
next i
next a

```

La procedura seguente illustra un metodo per calcolare la capacità in uscita degli archi appartenenti alla stella in entrata del generico nodo  $x$  che non sia un centroide, sulla base del modello delle capacità in uscita d'arco descritto nella sezione 1.3.2 della Parte Prima.

```

for  $i = 1, \dots, n$ 
  for each  $x \in N \setminus C$ 
    for each  $b \in FS(x)$ 
       $B = BS(x)$ 
      return 1
       $CB = 0, FB = 0$ 
      for each  $c \in BS(x)$ 
        if  $c \in B$  then
           $CB = CB + C_c$ 
        else
           $FB = FB + \varphi_{cb}^i$ 
        end if
      next c
      for each  $a \in BS(x)$ 
        if  $a \in B(b)$  then
           $\xi_{ab}^i = C_a / CB \cdot (\mu_b^i - FB)$ 
        else
           $\xi_{ab}^i = C_b$ 
        end if
        if  $\varphi_{ab}^i < \xi_{ab}^i$  then
           $B(b) = B(b) \setminus a$ 
          goto 1
        end if
      next a
    next b
    for each  $a \in BS(x)$ 
       $\xi_a^i = C_a$ 
      for each  $b \in FS(x)$ 
        if  $\xi_{ab}^i \leq \varphi_{ab}^i$  and  $\xi_a^i > \xi_{ab}^i \cdot e_a^i / \varphi_{ab}^i$  then
           $\xi_a^i = \xi_{ab}^i \cdot e_a^i / \varphi_{ab}^i$ 
        end if
      next b
    next a
  next x
next i

```

```

    next b
  next a
next x
next i

```

La seguente procedura identifica un metodo per calcolare l'istante di uscita dal generico arco  $a$ , sulla base del modello dei tempi di percorrenza d'arco descritto nella sezione 1.3.3 della Parte Prima. La Fig. 1 illustra graficamente tale metodo.

```

for each  $a \in AS$ 
   $E_a^0 = 0$ 
   $j = 1$ 
   $F_a^{n+1} = F_a^n$ 
  for  $i = 1, \dots, n$ 
    do until  $\tau^{j-1} - L_a / V_a < \tau^i \leq \tau^j - L_a / V_a$ 
       $j = j + 1$ 
    loop
     $E_a^i = F_a^{j-1} + (F_a^j - F_a^{j-1}) \cdot (\tau^i - \tau^{j-1} - L_a / V_a) / (\tau^j - \tau^{j-1})$ 
  next i
  for  $i = 1, \dots, n$ 
     $TE = E_a^{i-1} + \xi_a^i \cdot (\tau^i - \tau^{i-1})$ 
    if  $E_a^i > TE$  then
       $E_a^i = TE$ 
    end if
  next i
   $E_a^{n+1} = E_a^n$ 
   $j = 1$ 
   $t_a^0 = \tau^0 + L_a / V_a$ 
  for  $i = 1, \dots, n$ 
    do until  $E_a^{j-1} < F_a^i \leq E_a^j$ 
       $j = j + 1$ 
    loop
    if  $E_a^j > E_a^{j-1}$  then
       $t_a^i = \tau^{j-1} + (F_a^i - E_a^{j-1}) \cdot (\tau^j - \tau^{j-1}) / (E_a^j - E_a^{j-1})$ 
      if  $t_a^i < \tau^i + L_a / V_a$  then
         $t_a^i = \tau^i + L_a / V_a$ 
      end if
    else
       $t_a^i = \tau^i + L_a / V_a$ 
    end if
  next i
next a

```

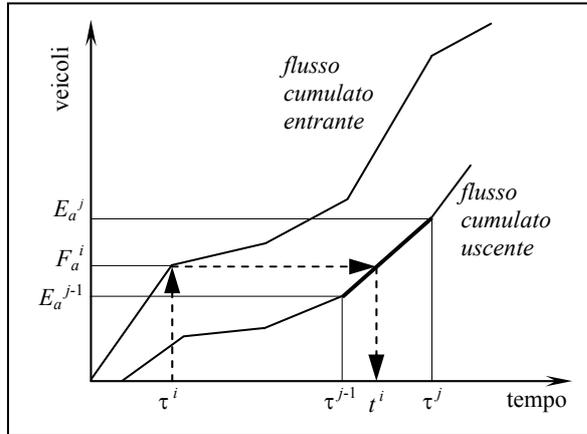


Fig. 1 - Istante di uscita nel caso di flussi cumulati entranti ed uscenti lineari a tratti.

### 1.3. Esempi numerici

Allo scopo di analizzare il comportamento del modello proposto, si esamineranno tre semplici esempi la cui soluzione è intuitiva e che possono essere risolti anche in forma chiusa. In tali esempi si considerano 100 intervalli temporali da 60 sec; per tutti gli archi si assume la velocità libera  $V = 20$  m/s, la velocità dell'onda cinematica ipercritica  $w = 0.25 \cdot V$ , la capacità fisica in ingresso  $Q = \infty$ .

I primi due esempi fanno riferimento alla rete rappresentata in Fig. 2.

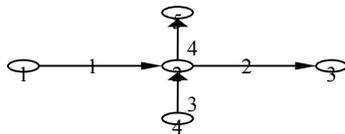


Fig. 2 - La rete del primo e del secondo esempio.

Nel primo esempio si assume che le capacità fisiche in uscita siano:  $C_1 = C_3 = 2000$  veh/h,  $C_2 = C_4 = 900$  veh/h; si assume inoltre che la domanda sia costante durante i primi 33 minuti di simulazione e siano quindi:  $d_{13} = 1200$  veh/h,  $d_{43} =$

400 veh/h,  $d_{45} = 600$  veh/h. La Fig. 3, che pone a confronto l'output ottenuto mediante il modello con spillback presentato in questa sede con l'output ottenuto mediante il modello senza spillback presentato in Bellei, Gentile, Papola (2004), evidenzia la sensibile differenza fra i risultati sia in termini di flussi che di tempi di percorrenza. Senza spillback, la congestione è limitata all'arco 2 e non si propaga a monte; il tempo di percorrenza degli altri archi resta quindi costante e pari a quello minimo, mentre il tempo dell'arco 2 cresce fino alla fine della domanda, poiché il relativo flusso entrante non è limitato. Ne consegue che il tempo di percorrenza dal nodo 4 al nodo 3 (archi 3 e 2) diventa molto alto, mentre gli utenti diretti dal nodo 4 al nodo 5 (archi 3 e 4) non incontrano congestione e viaggiano alla velocità libera. Con lo spillback, al contrario, il tempo di percorrenza sull'arco 2 presenta un limite superiore, poiché la congestione viene trasferita a monte non appena la coda raggiunge la sezione iniziale dell'arco; da quel momento, il flusso entrante sull'arco 2 scende al valore del flusso uscente, ossia 900 veh/h. Poiché il flusso uscente dall'arco 3, che al più risulta pari a  $d_{43}$ , è minore di  $C_2 \cdot C_4 / (C_1 + C_4) = 450$  veh/h, l'arco 3 non viene condizionato dallo spillback, e la congestione si propaga interamente sull'arco 1 (si veda la sezione 1.3.2 della Parte Prima). Ne consegue che il tempo di percorrenza dal nodo 4 al nodo 3 è molto più basso di quello calcolato in precedenza, poiché la maggior parte della coda si sviluppa ora sull'arco 1 e solo in parte sull'arco 2.

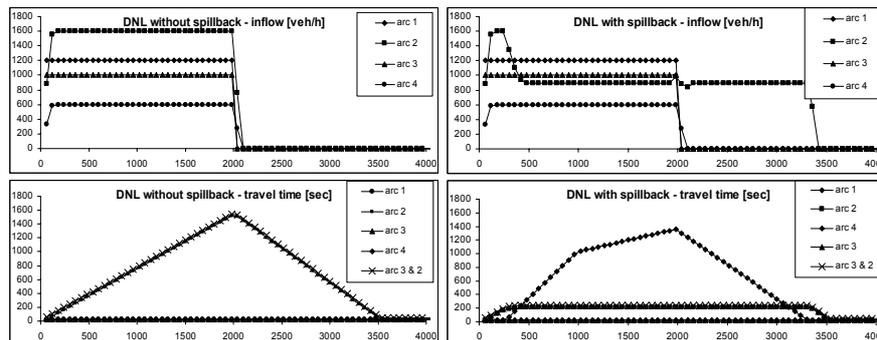


Fig. 3 - Output del primo esempio.

Nel secondo esempio si assume che la domanda  $d_{43}$  cresca fino a 600 veh/h. L'output dei due modelli con e senza spillback è rappresentato in Fig. 4. Questo esempio è molto simile al precedente ad esclusione di  $d_{43}$  che ora è maggiore di  $C_2 \cdot C_4 / (C_1 + C_4)$ . Quindi (si veda la sezione 1.3.2 della Parte Prima), la congestione dall'arco 2 si propaga a monte su entrambi gli archi 1 e 3, il cui tempo di percorrenza aumenta sensibilmente. Di conseguenza, anche il flusso diretto dal nodo 4 al nodo 5, pur non utilizzando l'arco 2, subisce ritardo. Chiaramente, il modello senza spillback non è in grado di rappresentare tale effetto.

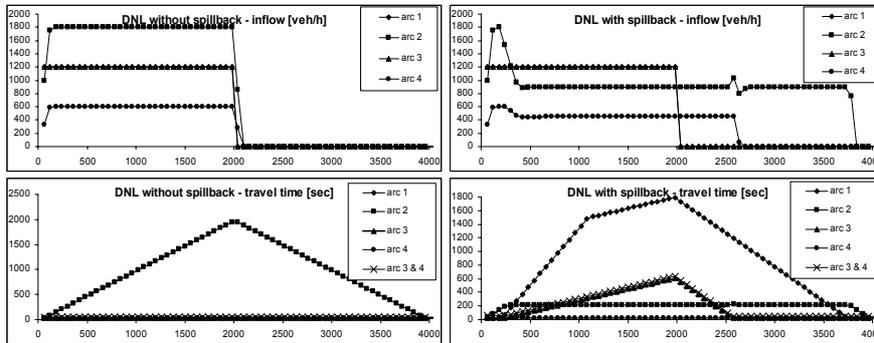


Fig. 4 - Output del secondo esempio.

Nel terzo esempio si considera la rete di Braess rappresentata in Fig. 5 con lo scopo di mostrare l'effetto dello spillback sulla scelta del percorso. Si assume che le capacità fisiche ridotte siano:  $C_1 = C_5 = 2000$  veh/h,  $C_2 = C_3 = C_4 = 1000$  veh/h; si assume inoltre che la domanda sia costante durante i primi 33 minuti di simulazione e sia quindi:  $d_{14} = 2300$  veh/h.

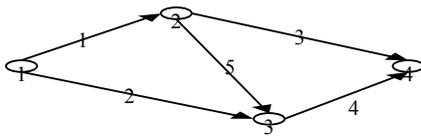


Fig. 5 - La rete del terzo esempio.

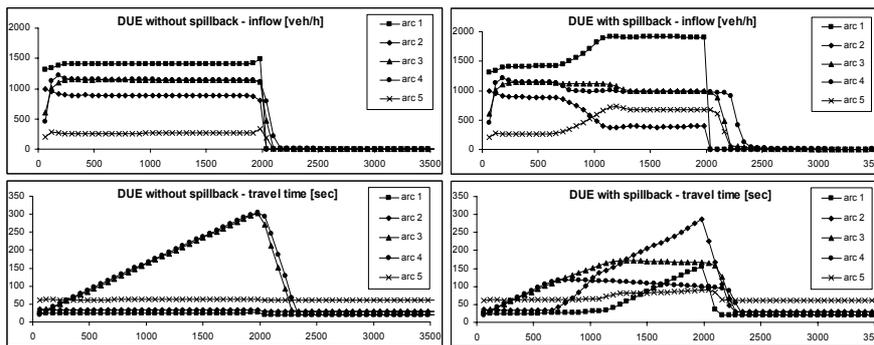


Fig. 6 - Output del terzo esempio.

L'output dei due modelli con e senza spillback è rappresentato in Fig. 6. Senza spillback, la congestione è localizzata solo sugli archi 3 e 4, cosicché il cammino 1-5-4 è poco utilizzato a causa dell'elevato tempo di percorrenza dell'arco 4. Tuttavia, se si rappresenta lo spillback, la congestione si propaga sugli archi 1 e 2 dagli archi 3 e 4, il cui tempo di percorrenza, a meno di una crescita iniziale, resta costante; di conseguenza, il cammino 1-5-4 risulta ora competitivo e quindi utilizzato, poiché è più lungo ma bypassa la coda che ora si sviluppa sull'arco 2.

#### 1.4. Applicazione ad un caso reale e confronto con il Cell Transmission Model

L'applicazione numerica presentata di seguito è stata condotta su un tratto della tangenziale ovest di Mestre lungo circa 10 km e fortemente congestionato; tale tratto, comprendente una delle due carreggiate e 5 svincoli intermedi, è schematizzato in Fig. 7.

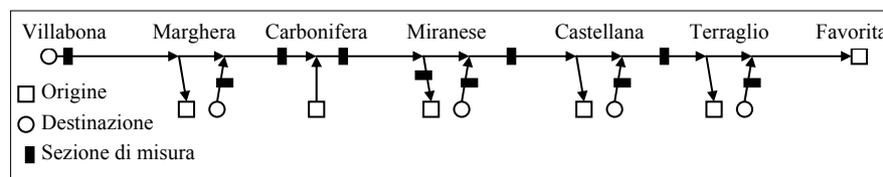


Fig. 7 – Rappresentazione schematica del tratto di tangenziale simulato

La relativa matrice dinamica degli spostamenti, nota per un giorno specifico, è costituita da 19 profili temporali di domanda costanti a tratti su 288 intervalli da 300 sec (24 h). Relativamente a tale tratta ed allo stesso giorno sono inoltre noti i profili temporali dei flussi, delle densità e delle velocità rilevati sulle 10 sezioni evidenziate in Fig. 7.

L'assegnazione è stata condotta con tre modelli differenti: il modello senza spillback presentato in Bellei, Gentile Papola (2004), il modello con spillback presentato in questa sede, ed il Cell Transmission Model presentato in Daganzo (1994) e (1995); l'utilizzo di quest'ultimo è stato possibile poiché il problema per sua natura non presenta scelta del percorso.

Con riferimento ai primi due modelli, il grafo è costituito da 27 archi di lunghezza variabile; il periodo di analisi, pari a 24 ore, è stato opportunamente suddiviso in 288 intervalli da 300 sec. Con riferimento al Cell Transmission Model, il grafo che rappresenta la rete è costituito da 167 celle lunghe 50 m; di conseguenza, il medesimo periodo di analisi è necessariamente suddiviso in 34560 intervalli da 2.5 sec. Il diagramma fondamentale adottato per entrambi i modelli è triangolare, con  $V = 80$  km/h,  $w = 0.25 \cdot V$ ,  $Q_c = C_c = 3600$  veh/h sulla carreggiata principale e  $Q_r = C_r = 1900$  veh/h sulle rampe..

I due flussogrammi di Fig. 8, calcolati il primo dal modello con spillback, il

secondo da quello senza, relativamente all'intervallo temporale di massima congestione, evidenziano immediatamente la differenza delle due soluzioni in termini di propagazione della congestione sulla rete. Contrariamente al modello con spillback infatti, il modello senza spillback non è in grado di propagare a monte la congestione che nell'ora di punta nasce in corrispondenza dello svincolo Miranese e che nella realtà giunge fin quasi alla barriera Villabona.

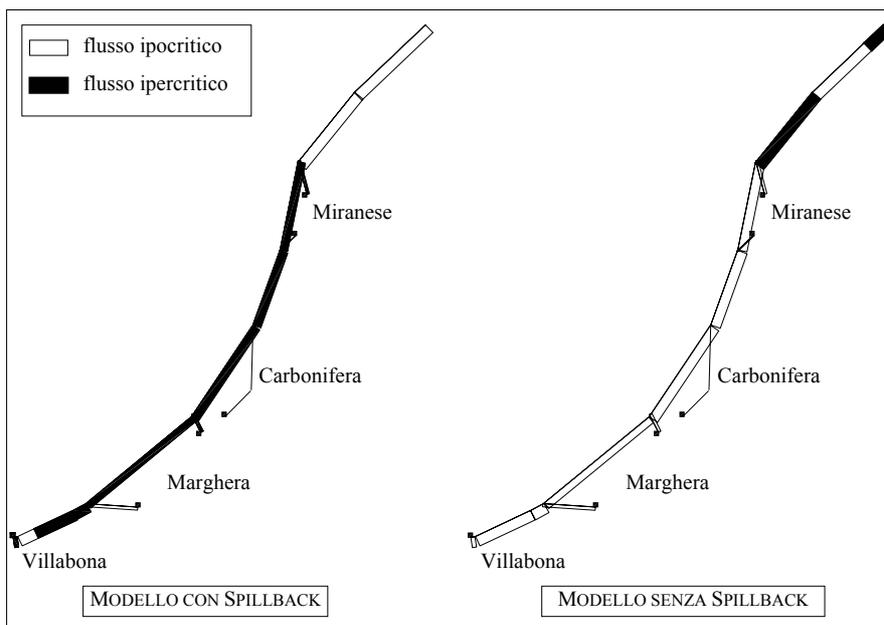


Fig. 8 – Flussogramma per l'intervallo 9,40 - 9,45 del mattino che evidenzia la capacità di propagazione della congestione mostrata dal modello con spillback rispetto a quello senza spillback.

A conferma di quanto appena visto, la Fig. 9 riporta i profili temporali rilevati e calcolati del flusso e della velocità di percorrenza, relativi all'ora di punta del mattino ed a due differenti sezioni a monte del punto in cui nasce la congestione. Tali profili evidenziano che il modello con spillback presentato in questa sede fornisce risultati paragonabili a quelli di un modello consolidato come il Cell Transmission Model, e maggiormente aderenti alla realtà rispetto al modello senza spillback, non tanto in termini di flusso, quanto soprattutto in termini di velocità e quindi di tempi di percorrenza.

Con riferimento all'efficienza dei modelli proposti, il Cell Transmission model ha richiesto 12 secondi ed 1 iterazione per eseguire l'assegnazione, il modello senza spillback ha richiesto 12 sec e 104 interazioni per raggiungere l'equilibrio, il modello con spillback ha richiesto 27 sec e 235 iterazioni per raggiungere l'equilibrio (tutte le prove sono state eseguite su un PC con processore da 1.8 GHz). Il Cell Transmission Model risulta dunque nettamente più rapido nella

soluzione del problema; questo dipende in parte dal fatto che questa particolare istanza, che di fatto è un caricamento dinamico, non richiede di iterare tale modello. È presumibile che nella soluzione di un equilibrio dinamico con scelta del percorso, per la quale occorre iterare anche il Cell Transmission Model, i risultati in termini di efficienza cambino.

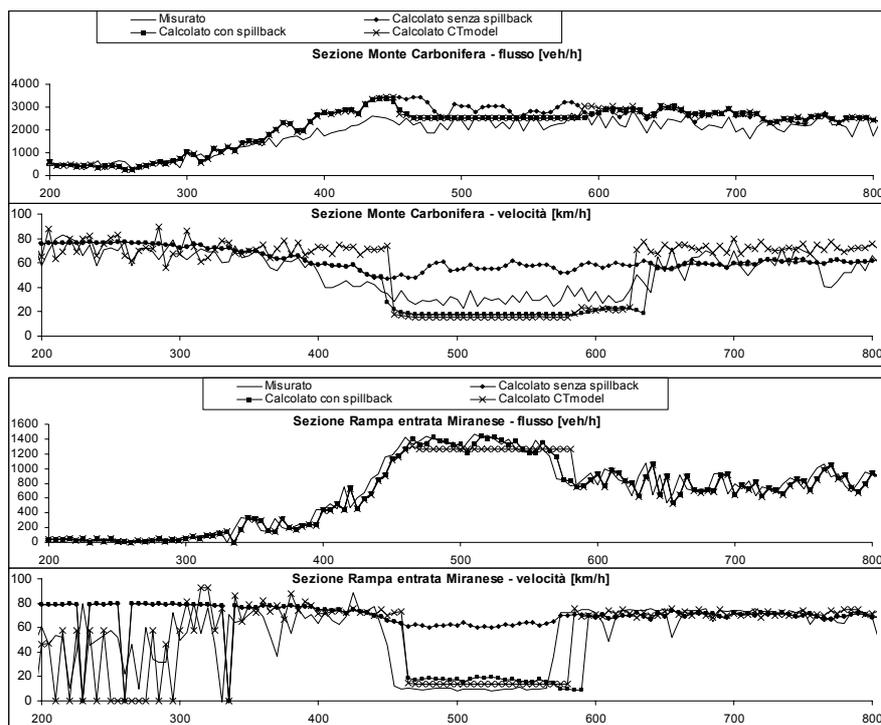


Fig. 9 - Confronto dei profili temporali di flusso e velocità su due diverse sezioni

### 1.5. Conclusioni

Il modello proposto è stato applicato a diverse reti elementari così da verificarne l'efficacia sia in termini assoluti sia rispetto al modello di assegnazione dinamica senza spillback; i risultati confermano che il modello si comporta in maniera conforme alle aspettative, ed evidenziano inoltre il notevole ruolo che può giocare lo spillback nella configurazione dei flussi di equilibrio.

L'applicazione del modello proposto ad un caso reale che presenta un'elevata congestione (la tangenziale ovest di Mestre) ha evidenziato che il modello fornisce risultati che in termini di aderenza alla realtà sono soddisfacenti e paragonabili a

quelli forniti dal Cell Transmission Model, e sono ovviamente superiori a quelli forniti dal modello senza spillback.

Il confronto in termini di efficienza fra il modello proposto ed il Cell Transmission Model evidenzia che per il futuro occorre, da un lato, migliorare la convergenza del nuovo algoritmo proposto; dall'altro, confrontare entrambi gli algoritmi su reti reali in cui vi sia anche scelta del percorso.

### **Bibliografia**

- Bellei G., Gentile G., Papola N. (2004), "A within-day dynamic traffic assignment model for urban road networks", *Transportation Research B*, in stampa, disponibile online
- Daganzo C.F. (1994), "The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with hydrodynamic theory", *Transportation Research B* 28, 269-287.
- Daganzo C.F. (1995), "The cell transmission model, part II: network traffic", *Transportation Research B* 29, 79-93.
- Gentile G., Meschini L., Papola N. (2004), "Macroscopic arc performance models with capacity constraints for within-day dynamic traffic assignment", *Transportation Research B*, accettato per la pubblicazione.

### **Sommario**

In questo lavoro vengono presentati gli algoritmi relativi ai modelli illustrati nella prima parte di questo lavoro, presentata in questa stessa sede. Inoltre, si presentano alcune applicazioni per evidenziare la rilevanza che la rappresentazione dello spillback assume nel contesto dell'assegnazione dinamica, ed un'applicazione ad un caso reale in cui si confronta il modello con altri metodi di simulazione dinamica esistenti.

### **Abstract**

In this paper we present the algorithms related to the models expounded in the first part of this work, presented in this publication. Moreover, we present some numerical applications in order to underline the relevance of spillback modelling in the context of within day dynamic traffic assignment, as well as an application to a real case where the model is compared with other existing dynamic simulation methods.