

1. L'assegnazione dinamica intraperiodale con congestione da spillback. Parte prima: modelli

Lorenzo Meschini, Giuseppe Bellei*, Guido Gentile*, Natale Papola**

* Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

1.1. Introduzione

In un recente lavoro (Bellei, Gentile, Papola, 2004) abbiamo proposto una nuova formulazione nel continuo dell'assegnazione alle reti di trasporto con dinamica intraperiodale (WDDTA, Within-Day Dynamic Traffic Assignment), in cui l'equilibrio di utente viene formulato come un problema di punto fisso nei profili temporali dei flussi entranti d'arco. In quella sede si dimostra che, estendendo al caso dinamico il concetto di mappa di carico della rete (NLM, Network Loading Map), non è necessario introdurre esplicitamente nel WDDTA il caricamento dinamico (CDNL, Continuous Dynamic Network Loading) per garantire la congruenza fra flussi e tempi di percorrenza. Sulla base di tale approccio è stato possibile elaborare algoritmi di assegnazione efficienti, la cui complessità è pari a quella dei corrispondenti algoritmi statici moltiplicata per il numero degli intervalli temporali introdotti. Un'altra importante caratteristica di tale modello è di non essere basato sull'aciclicità temporale, ossia la proprietà per cui un veicolo entrato su un arco in un dato intervallo ne esce non prima dell'intervallo successivo o, in maniera equivalente, la proprietà per cui lo stato della rete in un certo intervallo temporale dipende solo da quanto è avvenuto in intervalli precedenti. Ciò consente di definire intervalli temporali "lunghi" (5-10 min), così da risolvere problemi di notevoli dimensioni con tempi e risorse di calcolo ragionevoli, come illustrato in Gentile e Meschini (2003). Tale modello è infine in grado di rappresentare esplicitamente la formazione e la dispersione delle code; esso però non pone alcun vincolo alla loro lunghezza, che può superare quindi quella dell'arco.

A partire da tali risultati, in questo lavoro si propone un nuovo modello di offerta che consente di formulare il WDDTA con congestione da spillback.

Specificamente, considereremo l'interazione fra gli archi stradali a monte e quelli a valle di un'intersezione derivante da vincoli di capacità variabili nel tempo, imposti all'ingresso ed all'uscita degli archi, e tali che la lunghezza della coda non superi mai quella dell'arco.

Tale approccio è coerente con la definizione di spillback fornita in Adamo *et al.* (1999), secondo la quale lo spillback avviene quando uno stato di deflusso ipercritico, propagatosi all'indietro dalla sezione finale dell'arco a quella iniziale, o originatosi su quest'ultima, riduce la capacità di uscita degli archi a monte, influenzandone eventualmente gli stati di deflusso.

È bene evidenziare che in questo lavoro si rappresenta uno spillback che definiamo *educato*, ossia dove gli utenti diretti verso un arco in spillback non occupano l'intersezione, ma attendono sull'arco a monte finché non sono in grado di attraversarla completamente.

In questo lavoro il fenomeno della propagazione della congestione fra archi stradali contigui viene rappresentato mediante un modello delle prestazioni di rete (NPM, Network Performance Model) articolato in tre modelli in serie, ossia il *modello delle capacità in entrata d'arco*, il *modello delle capacità in uscita di arco*, il *modello del tempo di percorrenza d'arco a capacità in entrata variabile*.

1.2. Formulazione dell'assegnazione dinamica con spillback

Con riferimento ai modelli di deflusso macroscopici, pochi contributi presenti in letteratura affrontano e risolvono il problema di rappresentare lo spillback nel contesto del CDNL; fra questi citiamo il Cell Transmission Model di Daganzo (1994, 1995), ed il modello proposto in Adamo *et al.* (1999). Tali modelli soddisfano la regola FIFO e possono essere applicati a reti con origini e destinazioni multiple; essi tuttavia richiedono intervalli temporali "brevi" e, di conseguenza, algoritmi onerosi applicabili a reti di dimensioni limitate. Il Cell Transmission Model, in particolare, è coerente con la Teoria Semplificata delle Onde Cinematiche, ma richiede in aggiunta una fitta discretizzazione dello spazio. Il modello proposto in Adamo *et al.* (1999) ha un approccio *link-based*, ma prevede una discretizzazione temporale "ad eventi", per sua natura piuttosto complessa da implementare. In tali modelli la scelta del percorso è rappresentata in forma locale per mezzo di *coefficienti di ripartizione*, definiti su ciascun nodo di diversione e specificati per ciascuna destinazione. Di conseguenza, l'impiego di tali modelli nel contesto del WDDTA richiede che il calcolo dei profili temporali di tali coefficienti avvenga in maniera endogena; tuttavia, questi ultimi non sono un output immediato del modello di scelta del percorso (si veda Papageorgiu, 1990); ciò spiega in parte perché i modelli che affrontano il WDDTA con spillback seguono esplicitamente la traiettoria del flusso su ciascun cammino, come per esempio in Lo and Szeto (2002).

In questo lavoro si adotta un differente approccio, che consiste nell'ottenere

congiuntamente all'equilibrio: a) la congruenza fra tempi di percorrenza e flussi d'arco, propria del problema di caricamento dinamico; b) la congruenza fra le prestazioni di rete, non separabili a causa della propagazione della congestione fra archi contigui; c) la congruenza fra costi e flussi di percorso, propria dell'equilibrio di utente. Ciò si ottiene iterando, tramite un algoritmo a medie successive, un sistema di modelli i cui output risultano mutuamente congruenti solo all'equilibrio. Con questo approccio, il fenomeno dello spillback viene rappresentato semplicemente simulandone gli effetti sul modello di offerta, ossia evitando qualsiasi interazione con il modello di caricamento. In particolare, in base all'idea che le capacità in entrata ed in uscita d'arco siano una funzione dei flussi di arco correnti, il tempo di percorrenza d'arco diviene una funzione sia del profilo temporale del flusso entrante, sia del profilo temporale della capacità in uscita d'arco. La NLM carica i flussi di domanda lungo i cammini disponibili sulla base delle probabilità condizionate d'arco e li propaga in maniera consistente con i tempi di percorrenza d'arco, analogamente a quanto avviene nel modello di WDDTA presentato in Bellei, Gentile, Papola (2004).

In questo modo, è possibile includere la rappresentazione del fenomeno di spillback nel modello proposto in Bellei, Gentile, Papola (2004), nel quale il WDDTA viene formalizzato e risolto come un problema di punto fisso nei profili temporali dei flussi entranti d'arco. Tuttavia, al fine di ottenere una modellizzazione realistica del fenomeno di spillback, occorre assumere come variabile corrente del problema di punto fisso i profili temporali dei flussi di manovra al nodo, poiché essi concorrono a determinare la suddivisione della capacità disponibile ad un nodo fra gli archi a monte, come si vedrà nel dettaglio in seguito. La Fig. 1 illustra in maniera schematica la formulazione proposta.

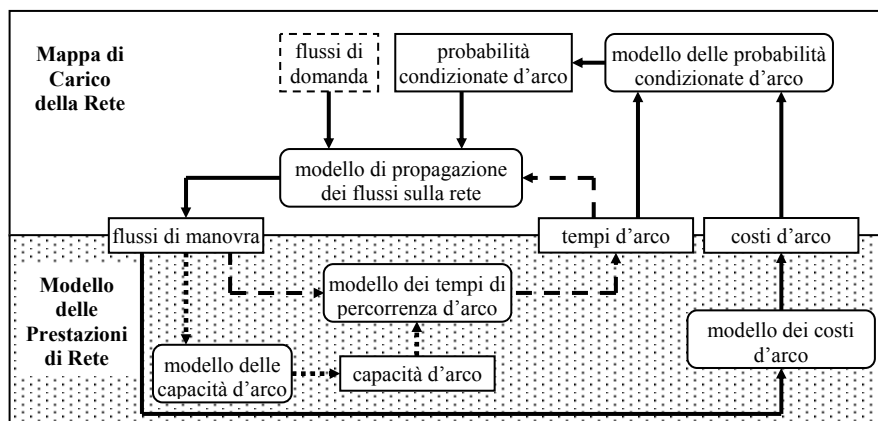


Fig. 1 - Schema della formulazione di punto fisso del WDDTA con spillback

Si noti che, in alternativa, il medesimo problema può essere visto come tre

problemi di punto fisso l'uno dentro l'altro, ciascuno deputato a garantire una delle tre congruenze a), b), c) identificate sopra. In particolare, il problema più interno coincide con il CDNL (identificato in Fig. 1 dalle frecce tratteggiate); il problema intermedio combina il CDNL con il modello delle capacità d'arco (frecce puntinate in Fig. 1) e garantisce la congruenza fra le prestazioni di rete; infine, il problema più esterno combina i due problemi precedenti con il modello di scelta del percorso (frecce a tratto pieno in Fig. 1) e garantisce l'equilibrio.

1.3. Modelli dinamici per le prestazioni di rete

Nell'illustrare il NPM si farà riferimento agli elementi generici della rete stradale (ossia nodi ed archi), mentre i centroidi, origini e destinazioni degli spostamenti, si ipotizzano connessi alla rete stradale mediante connettori di capacità illimitata.

Il generico arco è qui modellizzato in tre parti: un *bottleneck iniziale*, pensato come un arco di lunghezza infinitesima situato in corrispondenza della sezione iniziale dell'arco; un *bottleneck finale*, di lunghezza infinitesima, situato in corrispondenza della sezione finale dell'arco; un *arco di corsa*, situato fra la sezione iniziale e quella finale dell'arco.

Il *bottleneck iniziale* ha una capacità variabile nel tempo in funzione della presenza o meno di code che, propagandosi a monte lungo l'arco stesso, ne raggiungano la sezione iniziale generando condizioni di spillback. Esso assicura da un lato, che il flusso entrante sull'arco sia inferiore alla capacità propria dell'arco, dall'altro, che in qualsiasi istante il numero di utenti sull'arco non sia superiore a quanti ne possano essere fisicamente accolti. Chiaramente, una volta raggiunto l'equilibrio i flussi entranti d'arco correnti non eccedono le relative capacità in entrata proprio grazie ai vincoli sulla lunghezza delle code implicitamente imposti dal modello; tuttavia, questo non è in generale garantito in una qualsiasi fase intermedia della procedura risolutiva.

Il *bottleneck finale*, a capacità variabile nel tempo, modella l'effetto degli stati di deflusso ipercritici, definiti come *coda*, generati da una riduzione esogena della capacità alla fine dell'arco (per esempio a causa di un semaforo), oppure da condizioni di spillback verificatesi sugli archi a valle; le capacità in uscita d'arco sono ottenute, sulla base del principio di conservazione del flusso al nodo, come funzione delle capacità in entrata d'arco, dei flussi di manovra al nodo e della geometria dell'intersezione, espressa sinteticamente dalle capacità in uscita fisiche (proprie o ridotte esogenamente) degli archi.

L'*arco di corsa* modella la congestione dovuta all'interazione lungo l'arco dei veicoli che viaggiano in condizioni di deflusso ipocritiche; esso consiste in un canale omogeneo all'interno del quale le condizioni di deflusso sono determinate sulla base di una soluzione approssimata della Teoria Semplificata delle Onde Cinematiche, per un dato *diagramma fondamentale*.

Per semplicità, nel seguito si assume che il diagramma fondamentale associato al generico arco a , con nodo iniziale $TL(a)$, nodo finale $TL(a)$ e lunghezza L_a , abbia una forma triangolare come in Fig. 2, ove Q_a è la capacità fisica propria dell'arco, V_a è la velocità in condizioni di deflusso ipocritiche, e w_a è il valore assoluto dell'onda cinematica per gli stati di deflusso ipercritici. Tuttavia, l'estensione a modelli di deflusso più complessi può essere ottenuta sulla base dei metodi proposti in Gentile, Meschini, Papola (2004).

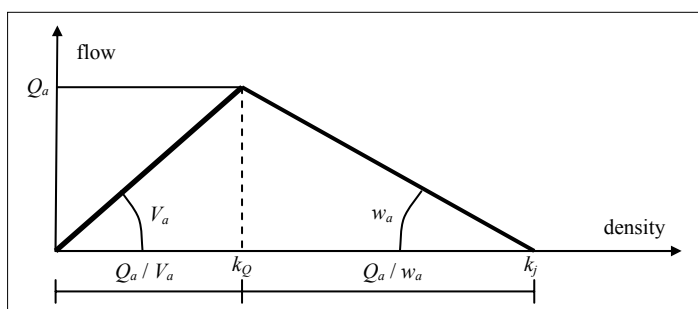


Fig. 2 - Diagramma fondamentale

In questo contesto, il NPM determina i profili temporali delle capacità in entrata d'arco, delle capacità in uscita d'arco ed infine dei tempi di percorrenza d'arco, per dati profili temporali dei flussi di manovra al nodo, come descritto nella Tab. 1.

Tab. 1 - Input ed output dei sotto modelli che costituiscono il NPM

modello	input	output
capacità in entrata d'arco (separabile)	profili dei flussi entranti d'arco profili dei flussi uscenti d'arco capacità fisiche d'arco	profili delle capacità in entrata d'arco
capacità in uscita d'arco (NON separabile)	capacità fisiche d'arco profili delle capacità in entrata d'arco profili dei flussi di manovra al nodo	profili delle capacità in uscita d'arco
tempi di percorrenza d'arco (separabile)	profili dei flussi entranti d'arco profili delle capacità in uscita d'arco	profili dei tempi di percorrenza d'arco

1.3.1. Modello delle capacità in entrata d'arco

Questo modello rappresenta l'effetto indotto sulla capacità in entrata di un arco da una coda generata sulla sezione finale dell'arco stesso a causa di una limitata capacità in uscita. Tale modello individua preliminarmente il profilo temporale del

massimo flusso entrante in grado di mantenere la coda non più lunga dell'arco stesso; quindi, confrontando tale profilo con il profilo corrente dei flussi entranti, determina gli intervalli nei quali di fatto avviene il fenomeno dello spillback, ed entro cui pone la capacità pari al massimo flusso entrante.

Ovviamente, se la coda fosse incompressibile (ed esistesse, cioè, un'unica densità ipercritica), qualsiasi stato di deflusso ipercritico nato sulla sezione finale dell'arco si propagherebbe istantaneamente alla sua sezione iniziale (risulterebbe infatti $w_a = \infty$, come si evince dalla Fig. 2 ponendo $k_j \equiv k_D$); allora, per ogni istante in cui la coda eccede la lunghezza dell'arco, la capacità in entrata risulterebbe pari al flusso uscente. Tuttavia, nella realtà gli stati di deflusso ipercritici presentano diverse densità (basti pensare al fenomeno dello "stop and go") e la loro velocità di propagazione non solo è finita, ma è anche sensibilmente più bassa della velocità critica. È possibile tenere conto di questi aspetti evitando di calcolare esplicitamente il profilo temporale della coda, operazione alquanto complessa, dal momento che la velocità e la densità dei veicoli in coda variano nel tempo in funzione del flusso uscente. Al contrario, sfruttando la soluzione analitica della Teoria Semplificata delle Onde Cinematiche nei flussi cumulati proposta da Newell (1993), questo modello identifica gli intervalli temporali in cui i potenziali stati ipercritici, retro propagatisi dalla la sezione finale dell'arco, ne raggiungono la sezione iniziale generando lo spillback.

Sia $G_a(\tau)$ la retro propagazione lungo tutto l'arco del profilo temporale dei flussi cumulati usciti $E_a(\tau)$, nell'ipotesi che esso sia ipercritico; $G_a(\tau)$ rappresenta il profilo temporale del massimo flusso cumulato in grado di entrare effettivamente sull'arco senza violarne i vincoli sulla lunghezza della coda, e coerentemente con la configurazione corrente dei flussi uscenti. Sulla base di Newell (1993) e Gentile, Meschini, Papola (2004) risulta in generale:

$$\begin{aligned}
 H_a(\tau) &= E_a(\tau) - L_a \cdot e_a(\tau) \cdot \left(\frac{1}{w_a(e_a(\tau))} - \frac{1}{v_a(e_a(\tau))} \right), \\
 u_a(\tau) &= \tau + \frac{-L_a}{w_a(e_a(\tau))}, \\
 G_a(\tau) &= \inf \{ H_a(\sigma) : u_a(\sigma) = \tau \},
 \end{aligned} \tag{1}$$

ove $u_a(\tau)$ è l'istante in cui l'onda cinematica con velocità negativa generata all'istante τ dal flusso uscente $e_a(\tau)$ ipotizzato ipercritico, raggiungerebbe la sezione iniziale; $H_a(\tau)$ è il flusso cumulato che si osserverebbe all'istante $u_a(\tau)$ su tale sezione; $w_a(\cdot)$ e $v_a(\cdot)$ esprimono rispettivamente la velocità dell'onda cinematica (che per stati di deflusso ipercritici è negativa) e la velocità veicolare in funzione del flusso uscente, ed hanno una forma che dipende dallo specifico diagramma fondamentale adottato. L'ultima formula nel precedente sistema di equazioni esprime il *principio di minimo di Newell-Luke*, riportato in Newell

(1993) e Daganzo (1997), il quale stabilisce che nel caso in cui più onde cinematiche raggiungono un punto allo stesso istante, lo stato di deflusso in base al quale risulta il minimo flusso cumulato domina gli altri. La soluzione del sistema (1) per il diagramma fondamentale adottato è immediata:

$$G_a(\tau) = E_a\left(\tau - \frac{L_a}{w_a}\right) + L_a \cdot Q_a \left(\frac{1}{w_a} + \frac{1}{V_a} \right), \quad (2)$$

ove $E_a(\tau)$ è il flusso cumulato uscito dall'arco a . Su questa base, la capacità in entrata $\mu_a(\tau)$ può essere posta pari a $dG_a(\tau)/d\tau$, se il vincolo di spillback è attivo (ossia quando $G_a(\tau)$ è non maggiore del flusso cumulato entrato $F_a(\tau)$), e pari alla capacità fisica propria Q_a in caso contrario:

$$\mu_a(\tau) = \begin{cases} \frac{dG_a(\tau)}{d\tau}, & \text{se } G_a(\tau) \leq F_a(\tau); \\ Q_a, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3)$$

Derivando l'equazione (2) si ottiene:

$$\frac{dG_a(\tau)}{d\tau} = e_a\left(\tau - \frac{L_a}{w_a}\right);$$

quindi, per il diagramma fondamentale proposto, l'equazione (3) diviene:

$$\mu_a(\tau) = \begin{cases} e_a\left(\tau - \frac{L_a}{w_a}\right), & \text{se } G_a(\tau) \leq F_a(\tau); \\ Q_a, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4)$$

Si noti che l'equazione (4) garantisce che la capacità in entrata sia sempre non maggiore della capacità fisica propria dell'arco, poiché la NLM produce flussi uscenti non maggiori di quest'ultima.

La Fig. 3 mostra graficamente come funziona il modello nel caso di un diagramma fondamentale triangolare: il profilo $G_a(\tau)$ si ottiene trasladando rigidamente il profilo $E_a(\tau)$ di $-L_a/w_a$ nel tempo e di $L_a \cdot Q_a \cdot (1/w_a + 1/V_a)$ nel valore. Quando $G_a(\tau)$ è al di sopra di $F_a(\tau)$, la coda è inferiore alla lunghezza dell'arco e quindi $\mu_a(\tau)$ viene posto pari a Q_a ; in caso contrario è presente spillback e $\mu_a(\tau)$ viene posto pari a $e_a(\tau - L_a/w_a)$.

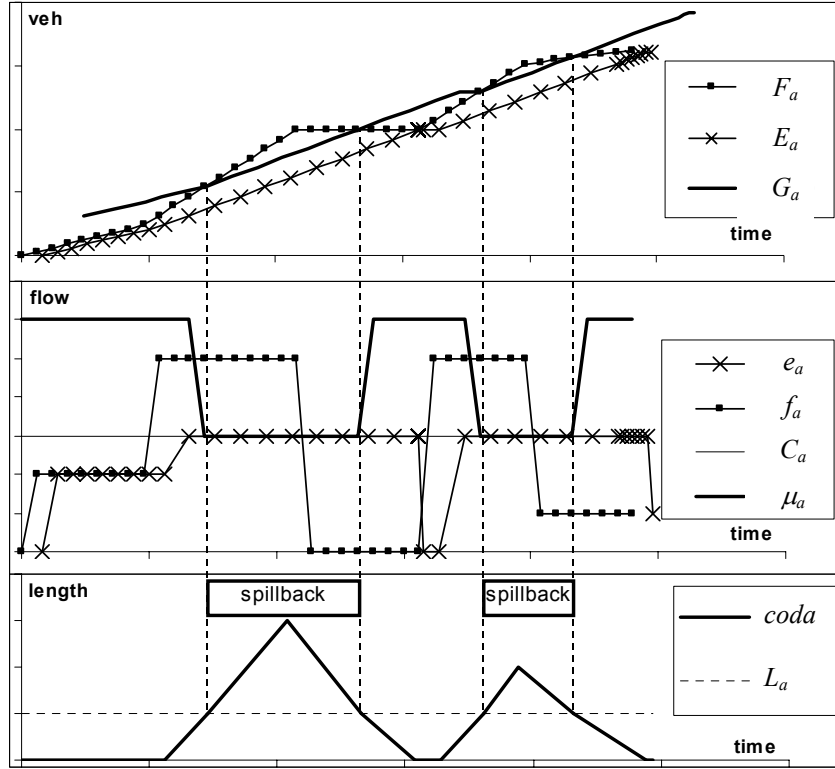


Fig. 3 - Determinazione del profilo temporale della capacità in entrata per dati flussi d'arco.

Poiché ovviamente risulta:

$$f_a(\tau) = \sum_{b \in BS(TL(a))} \varphi_{ba}(\tau), F_a(\tau) = \int_0^\tau f_a(t) \cdot dt,$$

$$e_a(\tau) = \sum_{b \in FS(HD(a))} \varphi_{ab}(\tau), E_a(\tau) = \int_0^\tau e_a(t) \cdot dt,$$

ove $f_a(\tau)$ è il flusso entrante all'istante τ e $\varphi_{ab}(\tau)$ è il flusso di manovra dall'arco a verso l'arco b all'istante τ , con $HD(a) = TL(b)$, è possibile esprimere in forma sintetica il modello delle capacità in entrata d'arco come di seguito indicato:

$$\mu = \mu(\varphi; \mathbf{Q}). \quad (5)$$

1.3.2. Il modello delle capacità in uscita d'arco

Con riferimento ad un dato nodo, questo modello determina i profili temporali delle capacità in uscita degli archi che ad esso afferiscono, sulla base delle capacità in entrata degli archi che da esso si dipartono e dei flussi di manovra locali. Ne risulta un modello non separabile rispetto allo spazio, poiché le capacità in uscita di tutti gli archi appartenenti alla stella in entrata di un nodo sono determinate in maniera congiunta, il quale risolve il problema di propagare sulla rete la congestione da spillback.

Al fine di semplificare l'esposizione si considerano preliminarmente solo due tipi di nodo: *nodi di confluenza* e *nodi di diversione*. In tal modo, i flussi di manovra sono espressi direttamente mediante i flussi entranti ed uscenti dagli archi.

Nel caso di *nodo di confluenza*, si pone il problema di suddividere la capacità disponibile $\mu_a(\tau)$ dell'arco a uscente dal nodo fra i flussi uscenti $e_b(\tau)$ degli archi $b \in BS(TL(a))$ della sua stella in entrata. Il linea di principio, si assume in questa sede che la capacità disponibile sia suddivisa fra tali archi in proporzione alla capacità fisica ridotta $C_b \leq Q_b$ di ciascuno di essi (benché la capacità fisica propria dei connettori si ipotizzi infinita, quella ridotta si assume finita). Tuttavia, alcuni di tali archi possono presentare un flusso uscente inferiore alla capacità loro assegnata. Per evitare che parte della capacità disponibile resti inutilizzata, la capacità residua viene suddivisa fra gli archi il cui flusso uscente è invece maggiore della capacità loro assegnata (ossia gli archi appartenenti all'insieme $B \subseteq BS(TL(a))$ definito di seguito). Su questa base, le capacità in uscita d'arco $\xi_b(\tau)$ sono definite dal seguente sistema:

$$\xi_b(\tau) = \begin{cases} \frac{C_b}{\sum_{c \in B} C_c} \cdot \left[\mu_a(\tau) - \sum_{c \in BS(TL(a)) \setminus B} e_c(\tau) \right], & \text{se } c \in B; \\ C_b, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (6)$$

$$B = \{b \in BS(TL(a)) : e_b(\tau) \geq \xi_b(\tau)\}. \quad (7)$$

L'insieme di separazione B che soddisfa entrambe le (6) e (7) può essere individuato a partire dall'insieme $BS(TL(a))$, sottraendo iterativamente a quest'ultimo gli archi per i quali la capacità in entrata determinata mediante la (6) è maggiore del flusso uscente (il che richiede al più $|BS(TL(a))|$ passi).

Ovviamente, se $\sum_b e_b(\tau) < \mu_a(\tau)$, non c'è spillback e $B = \emptyset$.

Nel caso di un *nodo di diversione*, si pone il problema di determinare la peggiore riduzione della capacità in uscita dall'arco a entrante al nodo, generata dalle capacità in entrata degli archi $b \in FS(HD(a))$ della stella in uscita dal nodo. In

particolare, se uno di tali archi è in spillback, ossia risulta $f_b(\tau) \geq \mu_b(\tau)$, al fine di rispettare sia la relativa capacità in entrata, sia la regola FIFO, occorre limitarne il flusso entrante cosicché il rapporto fra la capacità in entrata $\mu_b(\tau)$ e la capacità in uscita $\xi_a(\tau)$ dell'arco a sia pari al rapporto fra il flusso di manovra verso l'arco b e il flusso totale uscente dall'arco a :

$$\frac{\mu_b(\tau)}{\xi_a(\tau)} = \frac{f_b(\tau)}{e_a(\tau)}.$$

Se più di un arco $b \in FS(HD(a))$ è in spillback, la capacità in uscita $\xi_a(\tau)$ è quella più penalizzante. Se nessun arco è in spillback, la capacità in uscita è invece pari alla capacità fisica ridotta. In generale risulta quindi:

$$\xi_a(\tau) = \min \left\{ C_a, \mu_b(\tau) \cdot \frac{e_a(\tau)}{f_b(\tau)} \forall b \in FS(HD(a)) : f_b(\tau) \geq \mu_b(\tau) \right\}.$$

Prendendo ora in considerazione il generico nodo x che presenti sia confluenze che diversioni, occorre considerare esplicitamente i flussi di manovra nel modo seguente:

$$\xi_{ab}(\tau) = \begin{cases} \frac{C_a}{\sum_{c \in B(b)} C_c} \cdot \left[\mu_b(\tau) - \sum_{c \in BS(x) \setminus B(b)} \varphi_{cb}(\tau) \right], & \text{if } c \in B(b); \\ C_b, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad a \in BS(x), b \in FS(x),$$

$$B(b) = \{a \in BS(x) : \varphi_{ab}(\tau) \geq \xi_{ab}(\tau)\}, \quad b \in FS(x),$$

$$\xi_a(\tau) = \min \left\{ C_a, \xi_{ab}(\tau) \cdot \frac{e_a(\tau)}{\varphi_{ab}(\tau)} \forall b \in FS(x) : \varphi_{ab}(\tau) > \mu_b(\tau) \right\}, \quad a \in BS(x),$$

ove $\xi_{ab}(\tau)$ rappresenta il massimo flusso di manovra ammissibile dall'arco $a \in BS(x)$ all'arco $b \in FS(x)$.

Il modello delle capacità in uscita d'arco quindi può essere espresso mediante la seguente formulazione sintetica:

$$\xi = \xi(\varphi, \mu; C). \quad (8)$$

1.3.3. Modello dei tempi di percorrenza d'arco a capacità in uscita variabili

Una volta determinato il profilo temporale della capacità in uscita di ciascun arco, è possibile determinarne il profilo temporale del tempo di percorrenza mediante il modello non stazionario, macroscopico e *link-based* descritto di seguito.

Quando non è presente una riduzione di capacità alla fine dell'arco, il tempo di corsa $r_a(\tau)$ è in generale esprimibile in funzione del solo profilo temporale del flusso entrante d'arco (Meschini, Gentile, Papola, 2004). Tuttavia, nel caso particolare di diagramma fondamentale triangolare, il tempo di corsa è costante nel tempo e pari a L_a / V_a .

Con riferimento ad un bottleneck con una capacità in uscita variabile $\xi_a(\tau)$ e un tempo di corsa costante r_a , il problema consiste nel determinare, il profilo temporale dell'istante di uscita $t_a(\tau)$ per un dato profilo temporale del flusso entrante $f_a(\tau)$.

Tale problema può essere risolto individuando, innanzi tutto, il profilo temporale del flusso cumulato uscito, che risulta pari a:

$$E_a(\tau) = \min \left\{ F_a(\sigma - r_a) + \int_{\sigma}^{\tau} \xi_a(t) dt : \sigma \leq \tau \right\}, \quad (9)$$

ove $F_a(\tau)$ è il flusso cumulato entrato all'istante τ . Tale espressione ha il seguente significato. Quando non c'è coda, il tempo di percorrenza è pari al tempo di corsa; quindi, in base alla regola FIFO, il flusso cumulato uscito ad un dato istante τ è pari al flusso cumulato entrato all'istante $\tau - r_a$. Se invece è presente una coda nata all'istante σ , il flusso uscente segue, da quel momento fino all'esaurimento della coda, la forma del profilo temporale della capacità in uscita. Quindi, sulla base del già citato principio di minimo di Newell-Luke, il profilo temporale vero del flusso cumulato uscito all'istante τ è quello che presenta il minimo valore fra tutti i flussi uscenti che si verificherebbero se la coda fosse cominciata ad un qualsiasi istante precedente $\sigma \leq \tau$.

Successivamente, una volta noto $E_a(\tau)$, in base alla regola FIFO, il profilo temporale del tempo di percorrenza può essere determinato risolvendo la seguente equazione implicita:

$$E_a(t_a(\tau)) = F_a(\tau). \quad (10)$$

Si noti che, per la monotonicità dei tre profili coinvolti, la computazione numerica di $t_a(\tau)$ a partire da $E_a(\tau)$ and $F_a(\tau)$ è banale.

Nel caso di diagramma fondamentale triangolare, la Fig. 4 mostra l'interpretazione grafica del profilo del flusso cumulato uscito come l'involuppo inferiore di una famiglia di curve legate al profilo della capacità in uscita ed al

profilo del flusso cumulato entrato traslato in avanti nel tempo di r_a ; essa mostra anche il calcolo dell'istante di uscita sulla base dei profili dei flussi cumulati entrato ed uscito.

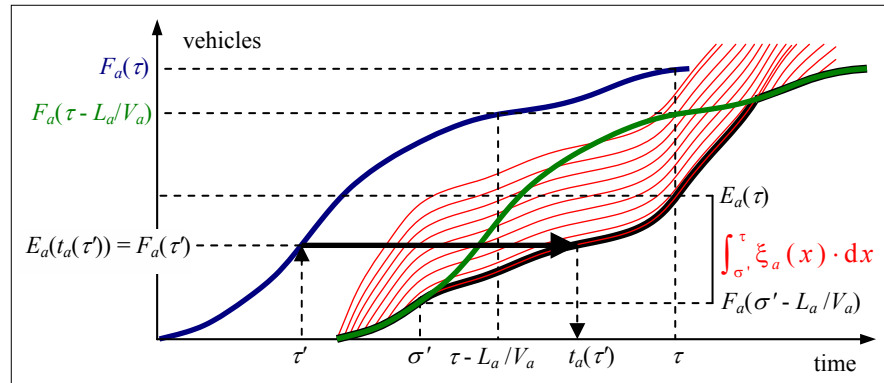


Fig. 4 - Bottleneck a capacità variabile nel tempo.

Si noti che il modello proposto è utilizzabile anche per i connettori; la capacità in uscita di un connettore di ingresso ad un centroide è infatti infinita, mentre quella di un connettore in uscita da un centroide si ottiene tramite il modello delle capacità in uscita d'arco.

Il modello dei tempi di percorrenza d'arco a capacità in uscita variabili può quindi essere sinteticamente espresso come:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}). \quad (11)$$

1.3.4. Il modello dei costi d'arco

Il costo d'arco per gli utenti entranti all'istante τ si assume pari a:

$$c_a(\tau) = \eta \cdot (t_a(\tau) - \tau) + m_a(\tau),$$

ove m_a è il profilo temporale del costo monetario ed η è il Valore del Tempo.

In forma sintetica risulta:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{t}). \quad (12)$$

1.4. Mappa di caricamento della rete e modello di equilibrio dinamico

1.4.1. Formulazione ad enumerazione implicita dei cammini dei modelli di scelta del percorso e di caricamento della rete

Nel seguito si richiama brevemente la formulazione ad enumerazione implicita dei cammini presentata in Bellei, Gentile, Papola (2004) e relativa sia alla scelta del percorso che alla propagazione dei flussi sulla rete degli utenti diretti verso la destinazione d . Essa si basa sui concetti di *probabilità condizionata d'arco* e *soddisfazione di nodo* di seguito definiti:

$p_a^d(\tau)$ è la probabilità di utilizzare l'arco a , condizionata all'essere giunti sulla nodo $TL(a)$ all'istante τ ;

$w_x^d(\tau)$ è il valore atteso della massima utilità percepita all'istante τ relativo ai cammini K_{xd} che collegano il nodo x a d .

Nel lavoro citato si dimostra che le seguenti espressioni delle soddisfazioni di nodo e delle probabilità condizionate d'arco sono coerenti con un modello di scelta del percorso di tipo Logit nel quale si considerino solo cammini efficienti:

$$w_x^d(\tau) = \theta \cdot \ln \left(\sum_{a \in FSE(x,d)} \exp \left(\frac{-c_a(\tau) + w_{HD(a)}^d(t_a(\tau))}{\theta} \right) \right), \quad (13)$$

$$p_a^d(\tau) = \exp \left(\frac{-c_a(\tau) + w_{HD(a)}^d(t_a(\tau)) - w_{TL(a)}^d(\tau)}{\theta} \right), \quad (14)$$

ove $FSE(x, d)$ è la stella in uscita efficiente del nodo x verso la destinazione d , $w_d^d(\tau) = 0$, e $p_a^d(\tau) = 0$ se $a \notin FSE(HD(a), d)$. La soluzione del sistema formato dalla (13) e dalla (14) costituisce il modello di scelta del percorso, che può essere espresso in forma compatta come:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{c}, \mathbf{t}), \quad (15)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{w}, \mathbf{c}, \mathbf{t}). \quad (16)$$

Il flusso di manovra dall'arco $a \in BS(x)$ verso l'arco $b \in FS(x)$ diretto verso d è dato dal flusso uscente $e_a^d(\tau)$ dell'arco a diretto verso d moltiplicato per la probabilità condizionata $p_b^d(\tau)$; quindi, sommando il contributo di ciascuna destinazione risulta:

$$\varphi_{ab}(\tau) = \sum_{d \in C} p_b^d(\tau) \cdot e_a^d(\tau). \quad (17)$$

Il flusso $f_a^d(\tau)$ entrante sull'arco a diretto verso d è dato dalla probabilità condizionata d'arco $p_a^d(\tau)$ moltiplicata per il flusso entrante al nodo $TL(a)$; quest'ultimo a sua volta è dato dalla somma dei flussi uscenti dagli archi appartenenti alla stella in ingresso efficiente $BSE(TL(a), d)$ del nodo $TL(a)$ verso d , e del flusso di domanda dal nodo $TL(a)$ verso d , che è nullo se $TL(a)$ non appartiene all'insieme dei centroidi C , ossia:

$$f_a^d(\tau) = p_a^d(\tau) \cdot [d_{TL(a)d}(\tau) + \sum_{b \in BSE(TL(a), d)} e_b^d(\tau)]. \quad (18)$$

A partire dal profilo temporale dell'istante di uscita dall'arco a , il flusso uscente dipende la profilo temporale del flusso entrante nel modo seguente:

$$e_a^d(t_a(\tau)) \cdot dt_a(\tau)/d\tau = f_a^d(\tau), \quad (19)$$

ove il termine $dt_a(\tau)/d\tau$ deriva dal fatto che il tempo di percorrenza varia nel tempo, cosicché gli utenti entrati sull'arco con un certo tasso, ne escono ad un tasso diverso, più alto se il tempo di percorrenza è in diminuzione, più basso in caso contrario (per i dettagli si veda Cascetta, 2001).

La soluzione del sistema di equazioni (17), (18) e (19) costituisce il modello di propagazione dei flussi sulla rete, che è sinteticamente espresso come segue:

$$\boldsymbol{\varphi} = \omega(\mathbf{p}, \mathbf{t}; \mathbf{d}). \quad (20)$$

1.4.2. Modello di equilibrio dinamico con spillback

Nei paragrafi precedenti sono stati sviluppati una sequenza di modelli matematici in grado di riprodurre la dinamica intraperiodale delle reti di trasporto stradale, incluso il fenomeno dello spillback. Tali modelli si prestano ad una formulazione di punto fisso del WDDTA con spillback come un sistema fra la NLM ed il NPM, così come illustrato in Fig. 5.

In analogia con il caso statico, la NLM è una relazione funzionale che consente di determinare, per date prestazioni d'arco, una configurazione dei flussi d'arco congruente con i flussi di domanda tramite il modello di scelta del percorso. Combinando le (15) e (16) con la (20) si ottiene la seguente formulazione della NLM ad enumerazione implicita dei cammini:

$$\boldsymbol{\varphi} = \omega(p(w(\mathbf{c}, \mathbf{t}), \mathbf{c}, \mathbf{t}), \mathbf{t}; \mathbf{d}). \quad (21)$$

Il NPM è la relazione funzionale fra i flussi di manovra ai nodi ed i tempi di

percorrenza, la quale può essere ottenuta combinando le (5), (8) e (11) come segue:

$$t = t(\varphi, \xi(\varphi, \mu(\varphi; Q); C)). \quad (22)$$

In tal modo, il WDDTA può essere formalizzato come un problema di punto fisso sostituendo nella NLM (21), le equazioni (22) e (12) costituenti il NPM.

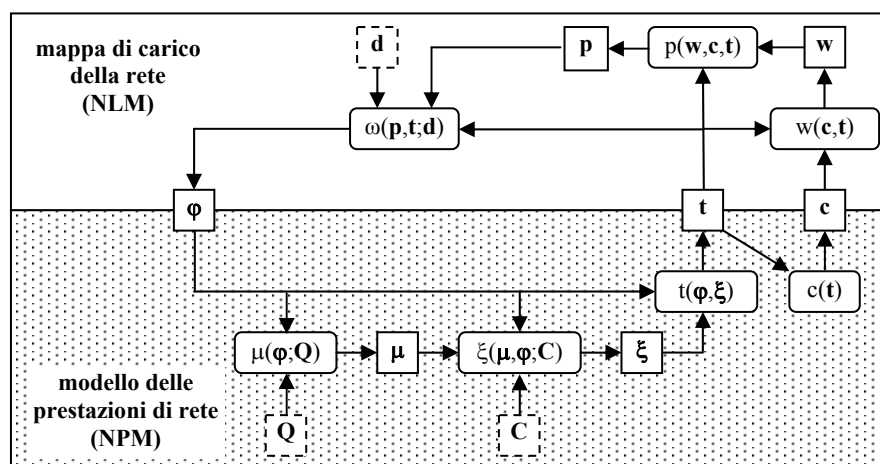


Fig. 5 - Variabili e modelli costituenti la formulazione di punto fisso del WDDTA con spillback.

Bibliografia

- Adamo V., Astarita V., Florian M., Mahut M., Wu J.H. (1999), "Modelling the spill-back of congestion in link based dynamic network loading models: a simulation model with application", in *Proceedings of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, ed. A. Ceder, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands.
- Bellei G., Gentile G., Papola N. (2004), "A within-day dynamic traffic assignment model for urban road networks", *Transportation Research B*, in stampa, disponibile online
- Cascetta E. (2001), *Transportation systems engineering: theory and methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Daganzo C.F. (1994), "The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with hydrodynamic theory", *Transportation Research B* 28, 269-287.
- Daganzo C.F. (1995), "The cell transmission model, part II: network traffic", *Transportation Research B* 29, 79-93.
- Daganzo C.F. (1997), *Fundamentals of transportation and traffic operations*, Pergamon, Oxford, UK, chapter 4.
- Daganzo C.F. (1998), "Queue spillovers in transportation networks with route choice" *Transportation Science* 32, 3-11.

- Gentile G., Meschini L. (2003), "A time-continuous implicit path formulation and algorithm for the Dynamic User Equilibrium problem", presentato all'*AIRO Winter 2003*, Champoluc, Italy.
- Gentile G., Meschini L., Papola N. (2004), "Macroscopic arc performance models with capacity constraints for within-day dynamic traffic assignment", *Transportation Research B*, accettato per la pubblicazione.
- Newell G.F. (1993), "A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I: general theory; part II: queuing at freeway bottlenecks; part III: multi-destination flows", *Transportation Research B* 27, 281-313.
- Papageorgiu M. (1990), "Dynamic modeling, assignment and route guidance in traffic networks", *Transportation Research B* 24, 471-495.
- Lo H.K., Szeto W.Y. (2002), "A cell-based variational inequality formulation of the dynamic user optimal assignment problem", *Transportation Research B* 36, 421-443.

Sommario

Si propone una nuova formulazione nel continuo dell'assegnazione alle reti di trasporto con dinamica intraperiodale, nella quale l'equilibrio è espresso come un problema di punto fisso nei profili temporali dei flussi di manovra ai nodi. Tale formulazione integra la rappresentazione dello spillback in una preesistente formulazione dell'assegnazione dinamica ad enumerazione implicita dei cammini che, pur rappresentando la formazione e la dispersione di code su reti stradali, consente che la lunghezza delle code ecceda quella degli archi. Al contrario, il modello proposto rappresenta la propagazione della congestione fra archi contigui mediante l'individuazione di capacità in entrata ed in uscita d'arco variabili nel tempo e tali da impedire che la lunghezza delle code ecceda quella dei relativi archi. Si introducono a tal fine una serie di modelli, non separabili rispetto allo spazio, in grado di rappresentare l'interazione fra i diversi elementi della rete.

Abstract

A new continuous formulation of within day Dynamic Traffic Assignment is proposed, where the equilibrium is expressed as a fixed point problem in terms of turning flow temporal profiles at nodes. This formulation integrates spillback modelling into an existing formulation of dynamic traffic assignment, based on implicit path enumeration, which is capable of representing explicitly the formation and dispersion of vehicle queues on the road network, but allows the queue length to overcome the arc length. The proposed model represents the propagation of congestion among contiguous road links through the identification of time varying arc exiting capacities such that each queue length does not exceed the corresponding arc length. To this end, a sequence of models spatially non separable and able to represent the interaction among the different network elements is introduced.