Universidad de Alcalá

MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA

Máster Universitario en Formación del Profesorado de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Presentado por:
Dª NOELIA ANDRÉS ORTIZ

Dirigido por:
Dr./D. ALBERTO YAGÜE GONZÁLEZ

Alcalá de Henares, a 23 de junio de 2022

Resumen

Este trabajo trata de exponer la estrecha relación que existe entre el arte de la papiroflexia y las matemáticas, así como las aportaciones que una ha incorporado en mejora de la otra, explicando resumidamente la trayectoria histórica de la primera. El empleo de papiroflexia puede ser un recurso de gran utilidad en la docencia de matemáticas, por ello se propone una variedad de actividades para trabajar en el aula diferentes contenidos del currículo de matemáticas de educación secundaria con el apoyo de esta técnica, con el objetivo de plantear nuevas formas de atender a los distintos procesos de aprendizaje que puede tener la diversidad de alumnado y de facilitar la comprensión de diferentes contenidos matemáticos.

Palabras clave: Papiroflexia, matemáticas, currículo, contenidos, alumnado

Abstract

This paper tries to expose the close relation between the art of origami and mathematics, as well as the contributions that one of them has incorporated to improve the other, explaining briefly the historical trajectory of origami. The use of origami can be a very useful resource in the teaching of mathematics, so in this document are proposed a variety of activities to work different contents of the mathematics curriculum in secondary education with the support of this technique, with the aim of proposing new ways of attending to the different learning processes that the diversity of students may have and of facilitating the understanding of different mathematical contents.

Key words: Origami, mathematics, curriculum, content, students

Índice

Introducción

En este Trabajo Fin de Máster se presenta una investigación sobre cómo el empleo de la técnica de papiroflexia puede ayudar a la explicación docente de contenidos matemáticos en la educación secundaria.

En primer lugar, se da una breve explicación sobre el origen de la papiroflexia y su desarrollo, además de la estrecha relación que mantiene con las matemáticas. En este sentido, se exponen algunas de las aportaciones que la primera disciplina ha generado sobre la otra, y viceversa.

Por otro lado, se ha investigado acerca de algunas experiencias docentes sobre el uso de papiroflexia a la hora de explicar matemáticas, destacando la labor del Centro Israelí de Origami.

Además, se incluyen algunas nociones básicas a tener en cuenta a la hora de practicar papiroflexia, por un lado, los materiales y herramientas más indicados para su práctica y, por otro lado, la simbología y terminología que se emplea a la hora de explicar papiroflexia en libros y diagramas, como apoyo para quien quiera replicar los diferentes modelos que existen.

En segundo lugar, se proponen diferentes actividades para trabajar en el aula. Especialmente las actividades se centran en contenidos relacionados con dos de los bloques del currículo de educación secundaria: “Números y álgebra” y “Geometría”.

En tercer lugar, se aporta la información recogida por una investigación que ha aplicado el origami en un curso de segundo de primaria para explicar conceptos de geometría plana a una alumna invidente obteniendo resultados muy positivos.

Al final del trabajo se pueden encontrar las conclusiones alcanzadas tras la realización del mismo, así como la bibliografía que ha servido de apoyo para su elaboración, además de algunos documentos consultados que pueden ser de interés para el lector.

Qué es la Papiroflexia

El arte de la papiroflexia, denominado originalmente con el término japonés "origami", se basa en la técnica de hacer figuras reconocibles utilizando únicamente papel plegado, el cual, tradicionalmente, debía ser un trozo de forma cuadrada (*Royo Prieto, J. I., 2002*).

Historia de la Papiroflexia

El origami es originario de Japón, generándose este término a partir de la unión de dos símbolos japoneses: "ori", que significa "doblar", y "kami", que significa "papel". Surgió precisamente tras la invención del papel en China, aproximadamente en el siglo I o II, sirviendo como entretenimiento de las clases altas, ya que eran las únicas que podían permitirse conseguir papel.

Aunque el papel se convirtió en un producto cada vez más accesible con el paso del tiempo, no fue hasta el periodo Tokugawa (1603 – 1867), conocido por la gran explosión cultural que acunó, cuando el origami se desarrolló en mayor medida, surgiendo la figura más popular en Japón, la grulla (zuru) a partir de la base de pájaro (este modelo se conoce comúnmente en España como "pajarita" (*Wang – Iverson, P., Lang, R. J., Yim, M., 2011*)), además de la publicación de dos de los libros referentes para este arte, los cuales recogen las primeras instrucciones de plegado: *Sembazuru Orikata* (Cómo plegar mil grullas) en 1797 y *Kan No Mado* (Ventana abierta a la estación de invierno) en 1845.

Un poco de historia sobre el papel de la papiroflexia en la península ibérica se comprende a raíz de la estancia de la cultura musulmana en la misma, quienes también practicaron el arte del origami, pero que no fue hasta finales del siglo XIX cuando Miguel de Unamuno, tras visitar la Exposición Universal de París de 1889, impulsó en gran medida esta técnica en el territorio hispano (*Royo Prieto, J. I., 2002*).

Aun con todo, el arte de la papiroflexia moderna se atribuye especialmente al japonés Akira Yoshizawa, considerado como una leyenda entre los maestros orientales de Origami.

Este reconocimiento se debe a que fue Yoshizawa el creador de la simbología en que se basan actualmente las instrucciones de plegado de los modelos (Sistema Yoshizawa – Randlett, 1956), la cual ha permitido una difusión de las distintas creaciones a nivel internacional gracias a que trasciende las dificultades del idioma (*Lang, R. J., 2003*).

Matemáticas y Papiroflexia

La papiroflexia, además de entretenimiento y arte, integra una gran cantidad de reglas matemáticas: solo hay que deshacer cualquiera de las figuras elaboradas mediante esta técnica para darse cuenta de que se obtiene un patrón de formas geométricas sobre una superficie plana (*Pérez, R., 2016*).

Durante los últimos años, el origami ha atraído la atención de científicos y matemáticos, quienes han comenzado a relacionar las “leyes de la naturaleza” que el arte del origami integra, lo cual ha promovido numerosos avances de esta técnica que se asientan sobre teorías o reglas matemáticas, en su mayoría accesibles, que no requieren un nivel mayor al que se obtiene en la educación secundaria. Tanto es así, que actualmente existen técnicas matemáticas y geométricas simples y codificadas con el objetivo de desarrollar estructuras deseadas en papiroflexia (*Lang, R. J., 2003*).

En este sentido, ambas disciplinas mantienen una relación bidireccional. Por un lado, el gran crecimiento que ha surgido en torno a la papiroflexia ha sido en gran parte promovido por la aplicación de numerosos métodos matemáticos de diseño, ya no solo a la hora de crear objetos matemáticos como poliedros o teselaciones, sino también a la hora de diseñar vehículos, objetos, mamíferos, etc (*Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, M. T., Royo, J. I.,*). En el otro lado, la versatilidad de la papiroflexia ha aportado cierto material de investigación dentro de la ciencia matemática, por ejemplo, en lo referente al álgebra, se puede mencionar la constructibilidad de puntos con papiroflexia (*Sorando, J. M., 2018*).

En suma, también ha servido como apoyo en distintos campos de la tecnología y de la ciencia, ya que, hoy en día, a la hora de diseñar estructuras que se pliegan y despliegan de forma eficiente, se han empleado técnicas originarias del origami, como por ejemplo en el caso de los airbags de los coches, el diseño de satélites o naves espaciales de manera que puedan ser lanzados de la forma más compacta posible, ensamblándose una vez lleguen a su destino, o en el caso de los stents que se introducen en las arterias o demás conductos obstruidos del cuerpo humano para conseguir ensancharlos (*Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, M. T., Royo, J. I.*, s.f.).

Un ejemplo de la bidireccionalidad que relaciona ambas disciplinas se puede apreciar dentro de la papiroflexia modular (que consiste en la representación de poliedros y figuras geométricas ensamblando piezas de papel plegado idénticas unas a otras) ya que, la papiroflexia por su parte brinda a las matemáticas modelos físicos de objetos matemáticos, así como la adquisición de conceptos matemáticos a través del plegado de dichos objetos. Por su parte, para poder diseñar poliedros de papiroflexia se necesitan resolver ciertos problemas de ámbito matemático, como, por ejemplo, cálculos trigonométricos sencillos (*Sorando, J. M., 2018*).

En la misma línea que lo expuesto en el párrafo anterior, hay muchos otros recursos que se pueden obtener a partir de la papiroflexia. Otro ejemplo es que, a través del origami, se pueden demostrar teoremas, como sucede con el de Pitágoras. Aunque un caso que ha llamado bastante la atención es el referente al problema de la trisección de un ángulo. Esta incógnita pertenece a uno de los tres problemas clásicos de la antigua Grecia, sin embargo, ya por ese entonces se podría haber averiguado a través de la papiroflexia, sin necesitar hacer más de cuatro pliegues. Sin ir más lejos, los pliegues que se realizan en la elaboración de una figura corresponden a operaciones geométricas básicas, como bisectrices o mediatrices.

Una de las bases sobre las que se asienta cada figura de papiroflexia es su "patrón de cicatrices", el cual se aprecia sobre el papel desplegado de la figura. El estudio de este patrón durante los últimos tiempos ha permitido desarrollar diferentes técnicas, ya que, pensando en la figura última que se desea elaborar, se puede diseñar el patrón de cicatrices que se necesitará para obtenerla. La cuestión es que, en muchas ocasiones, para poder diseñarlo, es necesario resolver problemas matemáticos de cierta complejidad. (*Iranzo Sanz, J. Á., 2018*).

Papiroflexia como recurso didáctico en el aula de Matemáticas

Desde el punto de vista didáctico, trabajar la papiroflexia en el aula aumenta la motivación del alumnado y les involucra en la tarea de forma activa, a la vez que les permite desarrollar habilidades como la precisión y la visión espacial.

Además, una vez obtenida la figura deseada, los alumnos y las alumnas pueden manipularla, es decir, mediante la experimentación, pueden estudiar las características y propiedades que integra, ya sean ciertos conceptos geométricos o no geométricos (*Iranzo Sanz, J. Á., 2018*).

Entre algunas de las ventajas que ofrece el trabajo con origami en el aula se pueden destacar las siguientes (*Blanco García, C., Otero Suárez, T., 2005*):

- Permite al docente de matemáticas desarrollar diferentes contenidos, no solo conceptuales, sino de procedimientos. También es de gran utilidad como herramienta pedagógica, ya que ayuda al desarrollo de la psicomotricidad y la psicomotricidad fina, además de la percepción espacial, como ya se mencionó anteriormente.
- Ayuda al desarrollo de la destreza manual de quien lo practica, así como a la exactitud en la realización del trabajo y a la precisión manual.
- Relaciona la ciencia matemática con otras ciencias, como, por ejemplo, las artes.
- Promueve la creatividad del alumno, ya que le ofrece la posibilidad de desarrollar sus propios modelos y de investigar las conexiones que la disciplina de la papiroflexia mantiene con las matemáticas.

Actualmente en España son varios los docentes que emplean la práctica del origami en el aula, aunque pertenecen mayoritariamente al ámbito de la Educación Primaria. Un ejemplo de ello es la experiencia recogida por María Luisa Barasona, profesora titular del Centro de Magisterio Sagrado Corazón, y David Gutiérrez, profesor sustituto interino de la Universidad de Córdoba, tras el uso de origami para la adquisición de competencias relacionadas con el área de la geometría y visión espacial. Barasona y Gutiérrez describen que se han ayudado, principalmente, del uso del origami modular con el objetivo de elaborar distintas figuras poliédricas. La experiencia ha consistido en que, a lo largo de varias sesiones se han ido planteando actividades dirigidas a la evaluación y al desarrollo de la percepción espacial del conjunto de estudiantes. Los resultados obtenidos a partir del empleo de origami en el aula concluyen han sido gratificantes tanto para los docentes implicados como para el conjunto de alumnos. En suma, los estudiantes han expresado que este tipo de sesiones más “manuales” les han parecido más satisfactorias.

A nivel global, el COI (Centro Israelí de Origami) ha creado el término “Origametria”, compuesto por las palabras origami y geometría, con la finalidad de definir su original programa para enseñar geometría curricular ayudándose del arte de la papiroflexia, que en un principio se ha impartido a estudiantes de primaria, pero cuyo propósito pretende expandirlo a las escuelas de educación secundaria. Este programa inició su andadura a principios de los 90, ideado fundamentalmente como una herramienta que ayudase en el desarrollo de habilidades de aprendizaje del alumnado y en mejorar su autoestima y su sentimiento de logro, a la vez que desarrollan sus habilidades motoras, su percepción espacial, el pensamiento lógico y secuencial, la coordinación ojo – mano y habilidades de focalización y concentración mientras adquieren contenidos relacionados con principios de geometría básica.

Ya entrados los años 2000, se realizaron algunas modificaciones al programa fruto de la experiencia docente vivida en los años anteriores, entre las que destaca la renovación de todo el profesorado dedicado a esta práctica, entrenando a otros nuevos que tuvieran experiencia en matemáticas, ya que, la otra modificación importante consistía en que el origami debía integrarse dentro del currículo de geometría, ya que las pruebas realizadas concluían que la mejora en la percepción espacial y la comprensión de la geometría entre alumnos que habían participado en las pruebas en comparación con alumnos ajenos al programa era significativamente notable (*Lang, R. J., 2009*).

El COI estructura las lecciones de Origametria de la siguiente manera:

Para comenzar, recomienda escoger un tema específico de geometría sobre el que se quiera trabajar, basándose en los requisitos del currículo nacional para cada grado.

El segundo paso es encontrar un modelo de origami que, en su secuencia, se centre en el tema elegido. Un ejemplo sería escoger un modelo que presente diferentes polígonos, triángulos isósceles o bisecciones.

Mientras el alumnado va plegando el modelo, la tarea del docente encargado será detenerse después de cada nuevo paso para revisar si se pueden reconocer nuevos ejemplos del tema elegido o si son iguales o distintos a los ejemplos ya identificados anteriormente.

Algo curioso es que uno de los principios sobre los que se asienta el programa Origametria es nunca revelar la identidad del modelo final durante el plegado, sino que forme parte de la conclusión de la lección. De esta forma, se consigue centrar la atención de los alumnos en la geometría presente en cada paso, evitando que lo vean como una “antena”, por ejemplo, a la vez que se deja vía libre a su imaginación.

Como esquema, Lang explica en el libro “Origami^4. Fourth International Meeting of Origami, Science, Mathematics, and Education” el proceso de identificación de la siguiente manera:

- Visión geométrica: se refiere a la comprensión del tema a través del plegado.
- Exploración: es decir, la búsqueda continua durante el proceso de plegado.
- Propiedades y contexto: consiste en el proceso de estudio del tema de diferentes maneras, usando el modelo final o mientras se está construyendo.

- Resumen de la lección: para finalizar, se debe comprobar si cada uno de los alumnos han adquirido los conocimientos geométricos enseñados en cada sesión en particular. En especial, se recomienda verificar la comprensión de los conceptos por parte de aquellos alumnos que presentan un nivel más bajo o necesidades especiales.

  Por último, se permite a los alumnos llevarse el modelo que han plegado, lo cual a modo simbólico representa una herramienta de motivación para el aprendizaje futuro.

Por otro lado, Christine E. Edison describe en uno de los capítulos del libro "Origami[5]. Fifth International Meeting of Origami, Science, Mathematics, and Education" (página 165) varios relatos, algunos en base a su propia experiencia, sobre los efectos positivos que el origami puede generar en los estudiantes.

Especialmente, el capítulo se centra en aquellos estudiantes pertenecientes a comunidades de bajos ingresos. Edison se dedicó a impartir docencia en escuelas públicas de secundaria en Chicago durante un tiempo, en las cuales la mayor parte del alumnado procedía de hogares inestables, con situaciones de cárcel o embarazo adolescente, por lo que su atención a la escuela era bastante baja, así como su asistencia a la misma.

Tras la introducción del origami en el aula para la explicación de geometría, la docente descubrió que esta herramienta había aumentado notablemente la participación de los estudiantes en la dinámica de la clase, además de que facilitó enormemente la comprensión de los contenidos. En suma, el empleo de origami no solo consiguió el interés del alumnado, sino que mejoró las interrelaciones de la clase y con la docente, situación contraria a la tensión y malas conductas que solían presentar durante las sesiones.

En la línea de lo anterior, Edison también describe que la influencia del origami para uno de sus alumnos con necesidades especiales fue una gran herramienta para que éste ganara confianza en sí mismo y en sus habilidades, además de para mejorar su integración en el grupo, ya que fue tal la destreza que demostró en esta técnica que fue capaz de acompañar a su profesora a diferentes grupos a enseñar lo aprendido a los demás compañeros.

Materiales y Herramientas

La papiroflexia más estricta determina que las únicas herramientas necesarias para diseñar un modelo son las propias manos, y el único material, una hoja de papel. Sin embargo, en la práctica es importante tener en cuenta que algunas otras herramientas pueden facilitar mucho el proceso de elaboración, como pueden ser una regla y unas tijeras o un cutter en el momento de cortar el papel. En ocasiones, por ejemplo a la hora de elaborar modelos de insectos algo complicados, hay quien se ayuda de un par de pinzas de punta fina. Por otro lado, cualquier objeto duro y liso (como una regla de madera, una cuchara o la misma uña del pulgar) puede ser útil a la hora de pulir los pliegues.

En el momento de escoger el papel con el que se va a realizar la técnica, hay que considerar la gran variedad de tipos de papel que son adecuados para el arte del origami. El papel de origami tradicional se puede encontrar en diferentes lugares de venta de artesanía, y viene recortado en cuadrados con uno de los lados de algún color brillante, lo cual es esencial para aquellos pliegues que utilizan dos colores diferentes.

No obstante, si se desean otro tipo de formas como triángulos o rectángulos de proporciones determinadas este material se deberá preparar cortándolo como se desee. Para estos casos, se recomienda comprar otros tipos de papeles más baratos y moldeables, como los paquetes de papel bond. Otra opción se puede encontrar utilizando papel de envolver, especialmente aquel que contenga el reverso de aluminio.

Un detalle importante a tener en cuenta es que cuando se corte el papel para obtener las formas deseadas esto debe hacerse con estricta exactitud, es decir, en el caso de triángulos equiláteros que cada esquina contenga 60º, o en el caso de los rectángulos que cada esquina quede perfectamente cuadrada. Esto es porque el origami es un arte en el cual los pequeños errores que puedan cometerse en un principio se van acrecentando notablemente a lo largo del proceso de plegado, por lo que, si las piezas iniciales no tienen las formas o dimensiones indicadas, no se conseguirá alcanzar el diseño planeado (Lang, R. J., 1988).

Simbología y terminología de la Papiroflexia

Como ya se ha apuntado anteriormente, el origami tiene un lenguaje propio de palabras y símbolos, cada uno de ellos referido a un significado específico. No obstante, hay que tener en cuenta que en algunas secuencias de diseño más complicadas pueden existir variaciones en los símbolos.

A continuación, se indican algunas concepciones previas al listado de símbolos y terminología. Una de ellas es que, cuando se realiza un solo pliegue en una hoja de papel, este puede doblarse en dos direcciones. Bien, pues cuando el pliegue sobresalga recibirá el nombre de “pliegue de montaña”, mientras que, por el contrario, si el pliegue queda hundido recibirá el nombre de “pliegue valle”. Estas concepciones son algo básico a conocer porque todo el arte del origami se basa en diferentes combinaciones de pliegues de montaña y valle.

A la hora de elaborar cualquier modelo, se verá que los pliegues de montaña y valle suelen verse en grupos de tres o cuatro pliegues. A estos grupos de pliegues se les denomina como “pliegues combinados”, y forman el tercer concepto básico que integra el arte de la papiroflexia.

Otra de las cosas que suelen indicarse en las instrucciones de cada modelo de papiroflexia es el caso de aquellos pliegues que requieren papel de dos colores, blanco en un lado y de color por el reverso. Para indicar el lado coloreado del papel se suele usar un sombreado. Otros modelos deberían realizarse con papel del mismo color en ambos lados, pero dado que el papel que se suele comercializar para la papiroflexia suele venir en dos tonos, suele indicarse al comienzo del plegado qué lado del papel debe estar boca arriba para poder obtener una figura predominantemente coloreada.

Para terminar, se desea recordar que la mejor forma de aprender es “hacer”, para poder dominar un “pliegue inverso”, por ejemplo, lo mejor es practicar haciendo muchos pliegues inversos. Por otro lado, como también se ha apuntado a lo largo de este documento, cuando uno practica el origami siguiendo las instrucciones de algún libro bien estructurado podrá comprobar que la combinación de pliegues y modelos de papiroflexia se va complicando de manera progresiva, por lo que se recomienda trabajar despacio y comparar continuamente el modelo que se va creando con los dibujos de la explicación, y, si algún término de las instrucciones no se comprende bien, buscar su primera aparición y ver cómo se realizó en ese caso (*Lang, R. J., 1988*).

Fuente: Kadsahara, K., Takahama, T., *Papiroflexia <<Origami>> para expertos*, 2000.

Propuestas para trabajar el currículo de matemáticas en educación secundaria a través de la papiroflexia

Como ya se ha comentado a lo largo del trabajo, uno de los objetivos principales era investigar y proponer prácticas empleando origami que permitiesen al docente explicar o evaluar a sus alumnos en cuanto a algunos contenidos del currículo de educación secundaria.

Aunque en la fecha en la que se concluye este trabajo de investigación ya se han publicado el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria y el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establen la ordenación y las enseñanzas mínimas de Bachillerato, el presente trabajo se ha elaborado utilizando como referencia la información recogida en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato debido a dos razones, principalmente: la primera es que es el Real Decreto de currículo que se ha encontrado en vigor durante el curso 2021 – 2022, y, en segundo lugar, debido a que en el momento de la realización del trabajo aún no han sido publicados los decretos de currículo autonómicos que concretan los RD 217/2022 y 243/2022. Es por esto, que la misma investigación se ha apoyado también en el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

La información recogida en los próximos apartados contiene diferentes actividades que se pueden practicar en el aula para trabajar una variedad de contenidos curriculares relacionados con los bloques: Números y álgebra y Geometría.

Por otro lado, también se trabajan de manera transversal contenidos pertenecientes al Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas del RD 1105/2014 de 26 de diciembre de 2015, como pueden ser: la planificación del proceso de resolución de problemas, el uso del lenguaje apropiado, buscar regularidades, reflexionar sobre los resultados y la confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultas propias del trabajo científico.

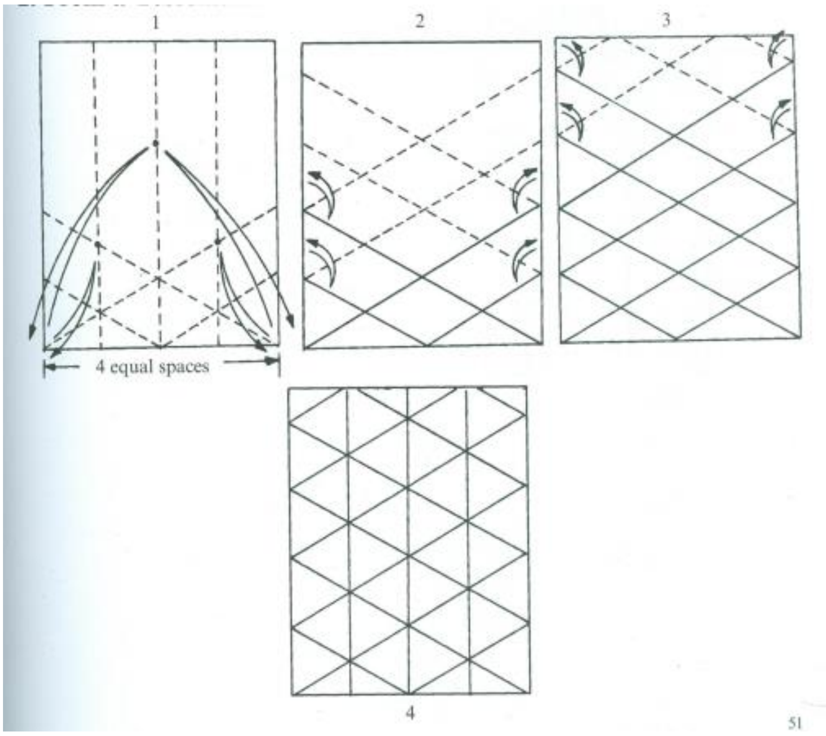
Números y álgebra

Operaciones con fracciones. Teselado

Nivel educativo	1º y 2º ESO, 3º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Razón y proporción. Bloque Geometría – Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
Criterios de Evaluación	1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relaciones con la vida diaria. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Propia

A través de la combinación y repetición de pliegues se pueden elaborar figuras de gran atractivo por sus múltiples simetrías, como ocurre en el caso de las teselaciones, figuras que contienen la repetición de un mismo motivo a lo largo y ancho de una hoja de papel, es decir, cubriendo completamente una superficie plana, de manera que no queden espacios ni tampoco se superpongan unas figuras con otras. Para crear modelos de teselaciones algo más avanzados se pueden utilizar varias capas de papel. Esto permite que, una vez plegadas, se puedan apreciar interesantes efectos visuales si se miran al trasluz o si se coloca un foco de luz detrás de las capas (*Sorando, J. M.*, s. f.).

Para este ejercicio, se emplea un modelo de teselado sencillo, cuya elaboración se mostrará al alumnado para que lo puedan repetir, con las instrucciones que se muestran en la siguiente imagen y en una hoja DIN A4 en blanco por ambas caras:



Fuente: Gurkewitz, R., Arnstein, B., *Multimodular origami polyhedra. Archimedeans, buckyballs, and duality*, 2003

Una vez ya tengan finalizados sus teselados, se pueden compartir opiniones con el alumnado acerca de lo que ven, es decir, triángulos equiláteros semejantes. Una vez tengan esto claro, se pueden realizar las siguientes actividades dependiendo del nivel en el que se esté trabajando la actividad:

Para niveles de 1º y 2º ESO:

- Colorea de un mismo color 18 de los triángulos. ¿Qué fracción del total de triángulos de tu teselado representan los triángulos coloreados? ¿Podrías simplificar esa fracción?
- Ahora, elige un nuevo color y colorea 5 triángulos más. Expresa ahora en forma de fracción cuántos triángulos del total están coloreados. ¿Entonces, cuál es la fracción que expresa el total de triángulos que están sin colorear?

Para nivel de 3º ESO:

En este caso, se comenzaría explicando que, con esta actividad de papiroflexia se ha obtenido un teselado regular con un solo tipo de polígono regular (el triángulo equilátero).

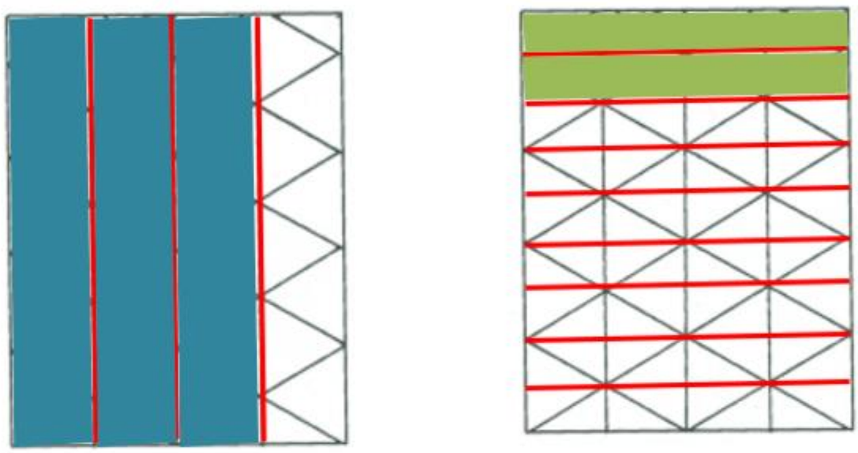
Para este nivel se propone que los alumnos investiguen y manipulen, con el apoyo de papel y lápiz si lo necesitan, acerca de las siguientes cuestiones:

- ¿Obtendrías un teselado regular empleando pentágonos regulares?
- ¿Con qué otros tipos de polígonos regulares se obtendría un teselado regular? ¿Puedes explicar la razón que lo justifica?

El objetivo que se persigue con esta actividad es, por un lado, que el alumnado llegue a la conclusión de que los únicos polígonos regulares con los que se puede formar un teselado regular son: cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, y, por otro lado, que deduzcan que eso es debido a que para formar un teselado regular se debe cumplir la condición de que, en cualquiera de sus vértices, la suma de los ángulos interiores de los polígonos que tienen ese vértice en común debe ser igual a 360º, por lo que se deduce que el polígono regular empleado para crear dicho teselado debe cumplir que sus ángulos interiores sean divisores de 360º (cuadrado: 90º; triángulo equilátero: 60º; hexágono regular: 120º).

Para niveles de 1º y 2º ESO:

Ahora imagina que tu patrón de cicatrices tuviera los siguientes aspectos:



Fuente: Elaboración propia

- ¿Cuál es la proporción coloreada en cada uno de los casos?

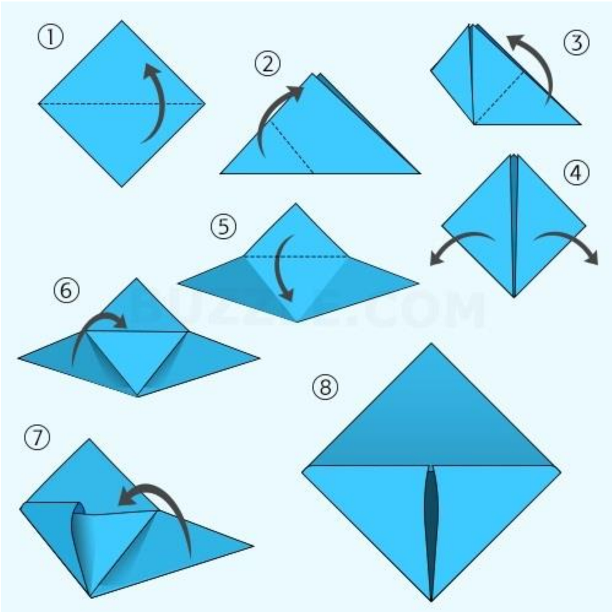
- Ahora ayúdate del reverso de tu teselado, al que llamaremos “patrón de cicatrices” para recrear ambos gráficos en él. ¿Podrías averiguar que porción del gráfico queda sin colorear, o, si por el contrario, quedaría completamente coloreado? Expresa en forma de fracción la solución que alcances.

Marcapáginas

Nivel educativo	4º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
Criterios de Evaluación	3. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades. 4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	3.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas. 4.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Propia

Aunque a simple vista pueda no verse una clara relación, el origami y la lectura tienen mucho en común, y son actividades que pueden beneficiar a los adolescentes de diferentes maneras. Ya se ha mencionado a lo largo de este documento los numerosos efectos positivos que puede reportar practicar origami, pero también cabe mencionar que, su práctica, puede ser un buen hábito si se desea ejercitar la memoria y la comprensión, además de que aporta relajación. En este aspecto, se han realizado investigaciones acerca de los beneficios de practicar papiroflexia con estudiantes con déficit de atención o con problemas de hiperactividad, los cuales han obtenido resultados bastante positivos, habiendo conseguido mejorar la capacidad de lectura (*Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, M. T., Royo, J. I.*, s.f.).

En esta actividad se propone que los alumnos elaboren un marcapáginas a través de papiroflexia, con las instrucciones que a continuación se detallan y que el docente deberá ir indicándoles. Para elaborar esta figura se partirá de un papel cuadrado de 15cmX15cm.



Fuente: Docenteca, Mayo 2017

Mientras elaboran la figura, dependiendo del nivel educativo en el que se aplique, pueden irse haciendo preguntas adecuadas a dicho nivel. En este caso, se proponen los siguientes problemas para los alumnos de 4º de la ESO:

- Imagina que el triángulo que obtienes al finalizar el paso 1 es un triángulo isósceles de altura igual a 12 cm y cuyo perímetro mide 36 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de sus lados?

Con esta actividad lo que se busca es que los estudiantes apliquen sus conocimientos para plantear y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 36 \\ x^2 = 12^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \end{cases}$$

- Para elaborar un marcapáginas para libros convencionales (por ejemplo, unos 14 cm de ancho X 21 cm de largo) hemos necesitado partir de un cuadrado de papel de 15 cm de largo y 15 cm de ancho. ¿Podrías elaborar un marcapáginas para minilibros (cuyas medidas son 4,5 cm X 6cm)? ¿Cuáles serían las dimensiones del cuadrado de papel que usarías como partida en ese caso?

Los alumnos deberían deducir que bastaría partir de un cuadrado de 5 cm X 5cm para elaborar un marcapáginas para minilibros.

Generalizando el teorema de Haga

Nivel educativo	3º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.
Criterios de Evaluación	2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	2.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los "n" primeros términos, y las emplea para resolver problemas,
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Rubio, J. P., 2005

El proceso de plegado durante la papiroflexia se basa muchas veces en la bisección sucesiva de segmentos y ángulos. Al practicar, se aprecia rápidamente que dividir segmentos o ángulos en 2, 4, 8, 16 o, en general, en 2^n partes iguales es muy sencillo de realizar, y además es más sencillo que tener que trazar su mediatriz o bisectriz con regla y compás, tarea que, además, se complicaría bastante si por ejemplo un ángulo no fuera accesible.

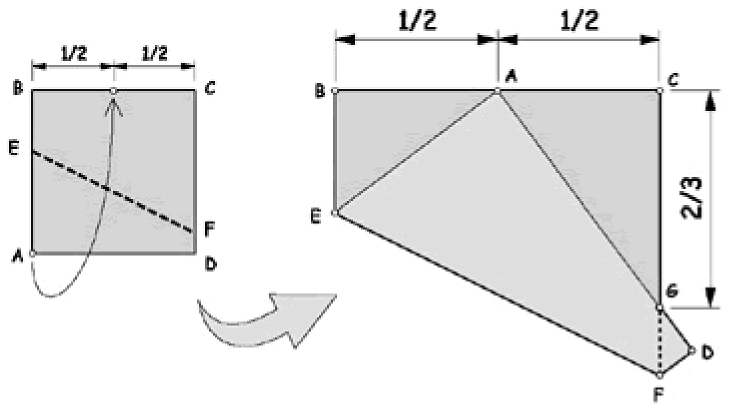
Sin embargo, la papiroflexia no solo trata de bisecciones, sino que muchos modelos, por ejemplo, poliedros o cajas, precisan de trisecciones o divisiones entre otros números naturales de segmentos y ángulos.

El "primer Teorema de Haga", enunciado originalmente por el Dr. Koji Fusimi y completado posteriormente por Kazuo Haga con el "segundo" y "tercer" Teorema de Haga, demuestran la trisección exacta del lado de un cuadrado o bien, con algunas operaciones adicionales, de cualquier segmento.

Es interesante mostrar al conjunto de alumnos este modelo básico de papiroflexia ya que es una herramienta que les puede ser muy útil no solo para elaborar otros modelos en clase, sino también para que puedan aplicarlo si deciden practicar papiroflexia por su cuenta.

A continuación, se presentaría al alumnado el primer Teorema de Haga:

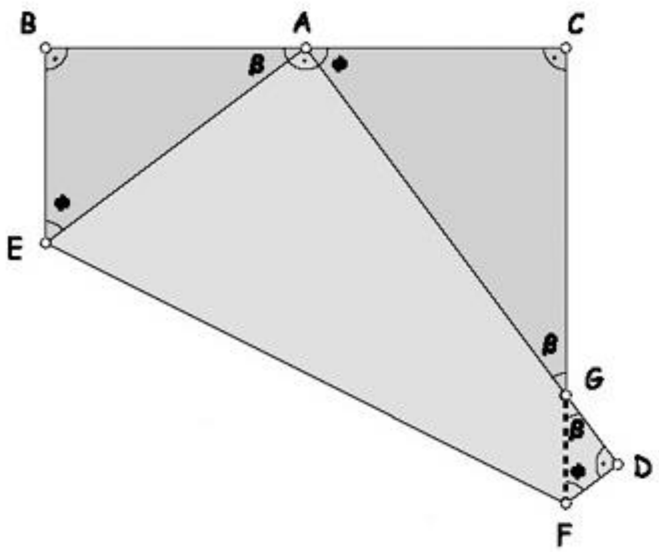
Dado un cuadrado de vértices ABCD, plegándolo sobre sí mismo de tal forma que el vértice A alcance el punto medio del lado BC, entonces el lado AD cortará al lado CD en un punto G cuya distancia con C va a ser igual a las dos terceras partes del lado del cuadrado.



Fuente: Rubio, J. P., 2005

La idea es poder deducir el paso a paso de la demostración del primer Teorema de Haga uniendo indicaciones del docente y aportaciones de los alumnos. Por lo que, una vez hayan plegado el papel, se podrían plantear preguntas al alumnado del tipo:

- ¿Puedes apreciar si se alguno de los triángulos que se han formado es semejante a los demás?
- ¿Qué tienen en común los triángulos BEA, CAG y DFG?
- ¿Cómo explicas que B, C y D sean ángulos de 90º exactos?



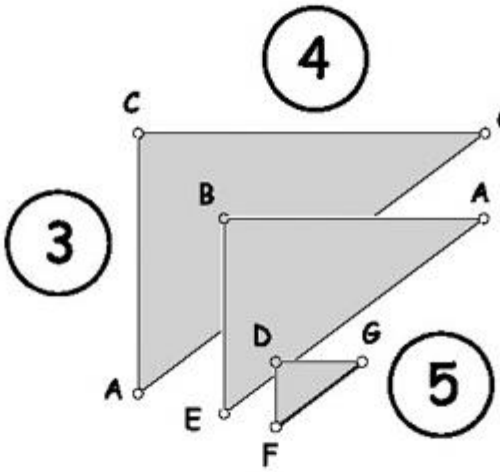
Fuente: Rubio, J. P., 2005

Una vez aclarado entre todos que los tres triángulos son semejantes y que los ángulos B, C y D tienen exactamente 90º debido a que corresponden con los vértices del cuadrado original, se pueden plantear estas otras preguntas:

- ¿Qué más razones de semejanza encuentras entre los triángulos CAG y DGF? ¿Y en el caso de los triángulos BEA y CAG?

En el caso de los triángulos CAG y DGF, además son semejantes debido a que comparten el mismo ángulo común G. En cuanto a los triángulos BEA y CAG, además de ser ambos triángulos rectángulos, tienen ángulos complementarios en el vértice común A.

A continuación, se continúa con la demostración, una vez más tratando de hacer partícipes a los estudiantes durante el proceso. Para ello, se van a definir como triángulos rectángulos con lados de longitudes relativas 3, 4 y 5, terna pitagórica que los egipcios empleaban para construir las pirámides en la antigüedad.



Fuente: Rubio, J. P., 2005

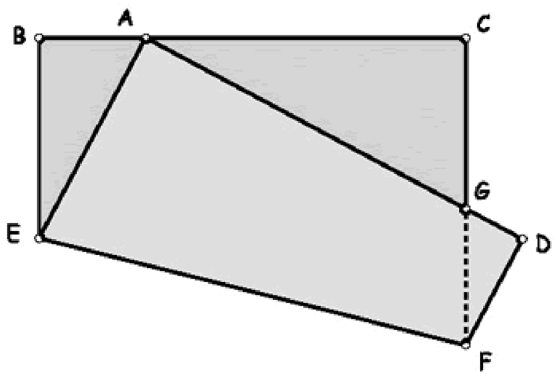
Como Juan Pedro Rubio explica, si se hace unitario al lado para poder simplificar los cálculos no perdiendo la generalidad perseguida, se observa que BA: ½ (la mitad de un lado del cuadrado inicial), mientras que BE + EA= 1 (un lado del cuadrado). Por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras se pueden averiguar las longitudes de los tres lados del triángulo BEA de la siguiente manera:

$(BE)^2 + (1/2)^2 = (1 – BE)^2$, obteniendo BE = 3/8, BA = 4/8 y EA= 5/8.

Por tanto, se deduce que los lados del triángulo BEA son proporcionales a 3, 4 y 5 respectivamente, así como para CAG y DFG como consecuencia de su semejanza con BEA.

Ahora ya se puede apreciar con claridad la demostración del Teorema de Haga: observando la semejanza del triángulo BEA, las longitudes halladas de sus lados, a la par que se observa el triángulo CAG se deduce que CG es a BA como AC es a EB, es decir, CG/(1/2) = (1/2)/(3/8), resolviendo que CG = 2/3, como se pretendía demostrar.

Una vez el alumnado ya haya asimilado esta información sobre la trisección del lado de un cuadrado, la idea es dejarles trabajar solos sobre las siguientes cuestiones:

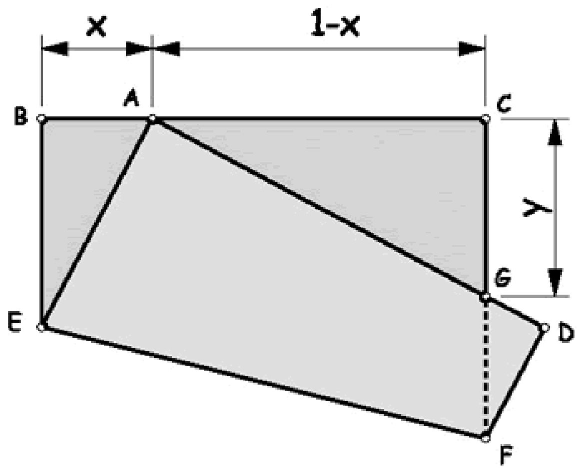


Fuente: Rubio, J. P., 2005

- Si se llevase el vértice A hasta un punto genérico del lado BC, no necesariamente al punto medio, ¿es posible que haya una relación sencilla entre BA y CG? ¿tendrá dicha relación alguna aplicación práctica?
- Divide un cuadrado en 7 partes iguales.

  Para contestar a estas preguntas, el alumnado deberá alcanzar la generalización del Teorema de Haga de la siguiente manera:

  Por un lado, se denominará "x" a la distancia entre B y A, y, por otro lado, se denominará "y" a la distancia comprendida entre los puntos C y G:



Fuente: Rubio, J. P., 2005

Donde x será cualquier valor comprendido entre 0 y 1.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso de la demostración expuesta del Teorema de Haga: BA = x, BE + EA = 1, por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo BEA: $(BE)^2 + x^2 = (1 – BE)^2$, es decir: $BE = (1 – x^2)/2 = (1 – x)(1 + x)/2$. Como los triángulos BEA y CGA son semejantes, se deduce que:

$$CG/(1 – x) = 2x/(1 – x)(1 + x), \text{ de donde: } CG = 2x/(1 + x)$$

Por lo tanto, la relación entre "x" e "y" será: $y = 2x/(1 + x)$

Para poder aplicar en la práctica esta relación, en primer lugar, se puede apreciar que es x es fácilmente construible, por lo que lleva a imaginar sucesivas bisecciones como se ha ilustrado en la demostración del Teorema de Haga. En este sentido, se puede decir formalmente que el lado BC puede dividirse en un número de partes iguales que sea potencia de 2, pudiendo llevar el vértice A a cualquiera de las marcas producidas en el proceso. En otras palabras, son fácilmente construibles los números x de la forma $x = n/2^r$, siendo "n" y "r" números naturales, siendo $n<2^r$. Tras operar la anterior relación, resulta:

$$y = 2n/(2^r + n)$$

Al ser el denominador igual a $2^r + n$, unido a las restricciones enunciadas, se aprecia que es cualquier número natural excepto el cero, siendo la descomposición de cualquier número natural (excluido el cero) en la forma $z = 2^r + n$ es inmediata.

Por esta razón, se expone ahora un método que permite dividir el lado del cuadrado en un número arbitrario de partes iguales:

- Se toma como "z" al número de partes iguales en que se desee dividir el lado CD del cuadrado (por ejemplo, z = 7).
- Se denomina 2^r a la máxima potencia de 2 menor que z. (Con el ejemplo anterior sería $2^r = 4$).
- A continuación, se llama "n" a la diferencia entre z y 2^r , de forma que $z = 2^r + n$. (Siguiendo el ejemplo, n = 3).
- En este paso, se procede a dividir, mediante sucesivas bisecciones, el lado BC en 2^r partes iguales. Una vez concluido este paso, se lleva el vértice A a la división número n, contando desde el vértice B.
- En este punto, se pliega el cuadrado haciendo coincidir el vértice C con G, y se deshace el pliegue anterior

Como resultado se obtendrá un rectángulo. Al lado CD se le ha "restado" un segmento de longitud n/z, y la nueva longitud será igual a $2^{r/z}$. Mediante sucesivas bisecciones se divide este segmento en 2^r partes iguales.

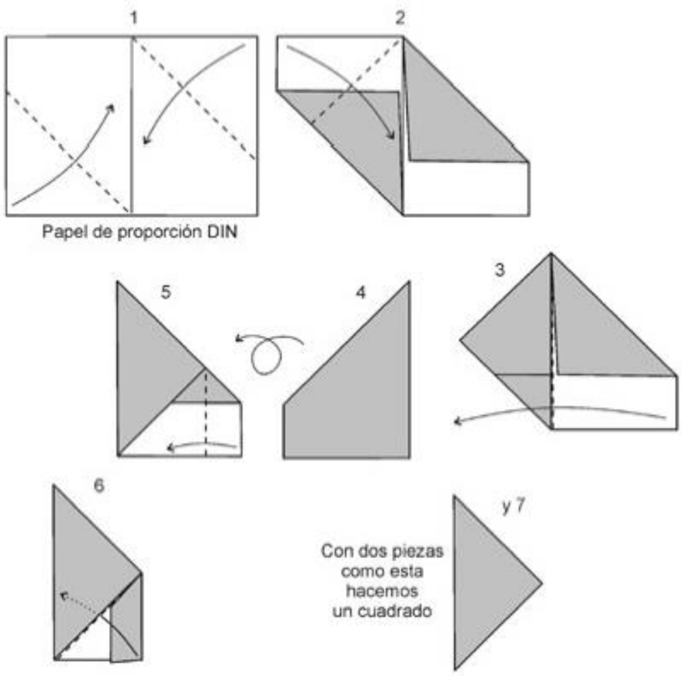
Demostrando identidades matemáticas con papiroflexia

Nivel educativo	2º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Operaciones. Jerarquía de las operaciones. Iniciación al lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Operaciones con expresiones algebraicas, Identidades.
Criterios de Evaluación	6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Garrido, B., 2007.

Otra de las posibilidades que ofrece la papiroflexia es la de poder demostrar identidades matemáticas a través de su manipulación. En esta actividad, se pretende demostrar geométricamente:

$$b^2 – a^2 = (b – a)(b + a)$$

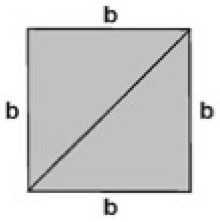
Y, una vez que los estudiantes entiendan la identidad y hayan manipulado ellos mismos el material, proponerles una tarea. El material necesario serán dos piezas de papel triangulares que se obtienen rápidamente siguiendo el siguiente diagrama:



Fuente: Garrido, B., 2007

A continuación, se irá realizando cada paso junto al alumnado a la vez que el docente irá aportando las explicaciones necesarias.

Para demostrar la identidad, el primer paso es construir un cuadrado de lado b haciendo coincidir las hipotenusas de las dos piezas triangulares que se obtuvieron al comienzo de la actividad, tal y como se ve en la siguiente imagen:

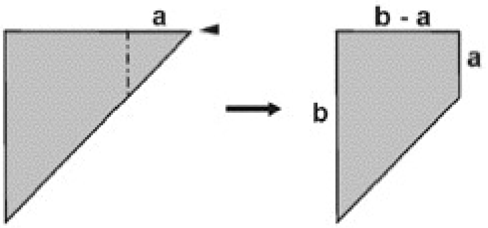


Fuente: Garrido, B., 2007

En este punto se podría plantear al alumnado las siguientes preguntas:

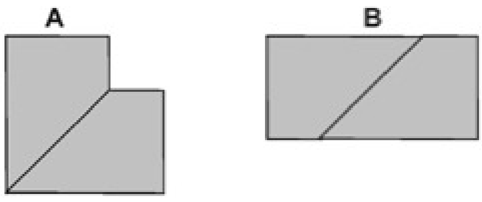
- ¿Cuál sería el área del cuadrado formado?
- ¿Y el área de cada uno de los triángulos?

En el siguiente paso, se va a proceder a plegar una esquina de iguales dimensiones en cada uno de los triángulos, tal y como se aprecia en la siguiente imagen:



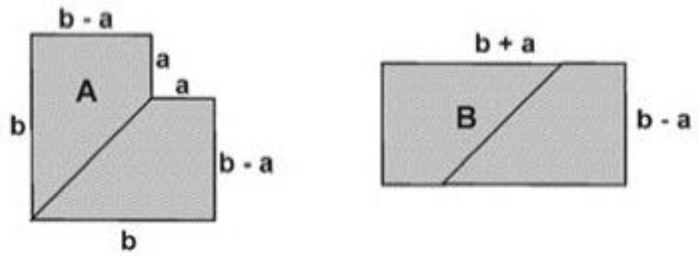
Fuente: Garrido, B., 2007

Una vez finalizados ambos pliegues, los trapecios obtenidos se pueden colocar de dos maneras, como se observa en la figura A y en la figura B:



Fuente: Garrido, B., 2007

Lo que se puede apreciar es que la figura A procede del cuadrado inicial de lado b, cuya área era igual a b^2, pero restándole un cuadrado de superficie igual a a^2. Por su parte, en la figura B se aprecia que se ha formado un rectángulo. Analizando los valores de los lados de ambas figuras se puede observar lo siguiente:



Fuente: Garrido, B., 2007

Es decir, las figuras A y B tienen exactamente la misma superficie, ya que están formadas a partir de las mismas piezas, por lo que queda demostrada gráficamente la igualdad perseguida:

$$b^2 – a^2 = (b – a)(b + a)$$

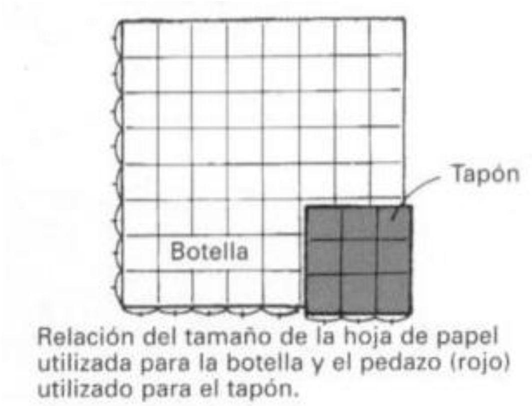
Geometría

Las proporciones son importantes

Nivel educativo	2º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Criterios de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Áreas y volúmenes.
Criterios de Evaluación	4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. 6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. 6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Propia

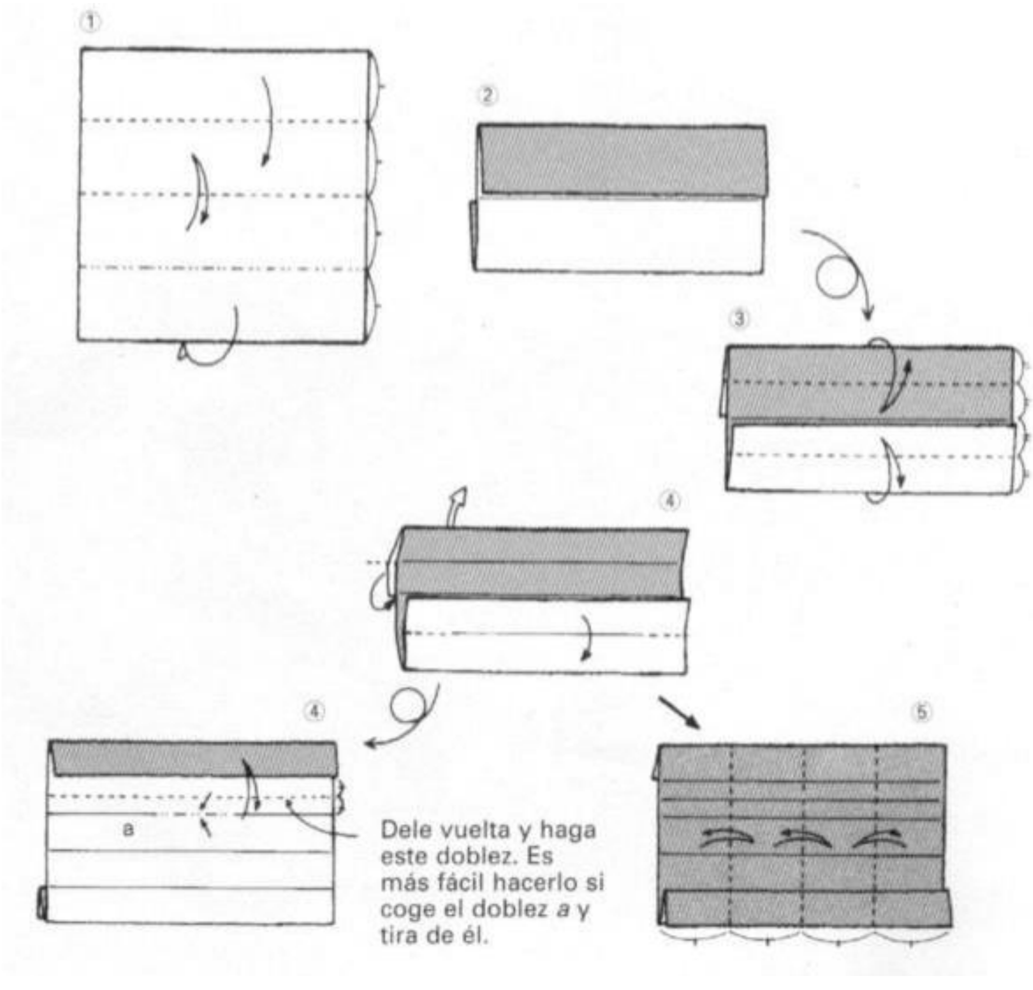
A continuación, se propone elaborar durante una sesión de clase la Botella de David Grill, para posteriormente resolver algunas cuestiones matemáticas sobre sus posibilidades de elaboración.

Se partirá de una hoja que contenga la siguiente relación de tamaños:

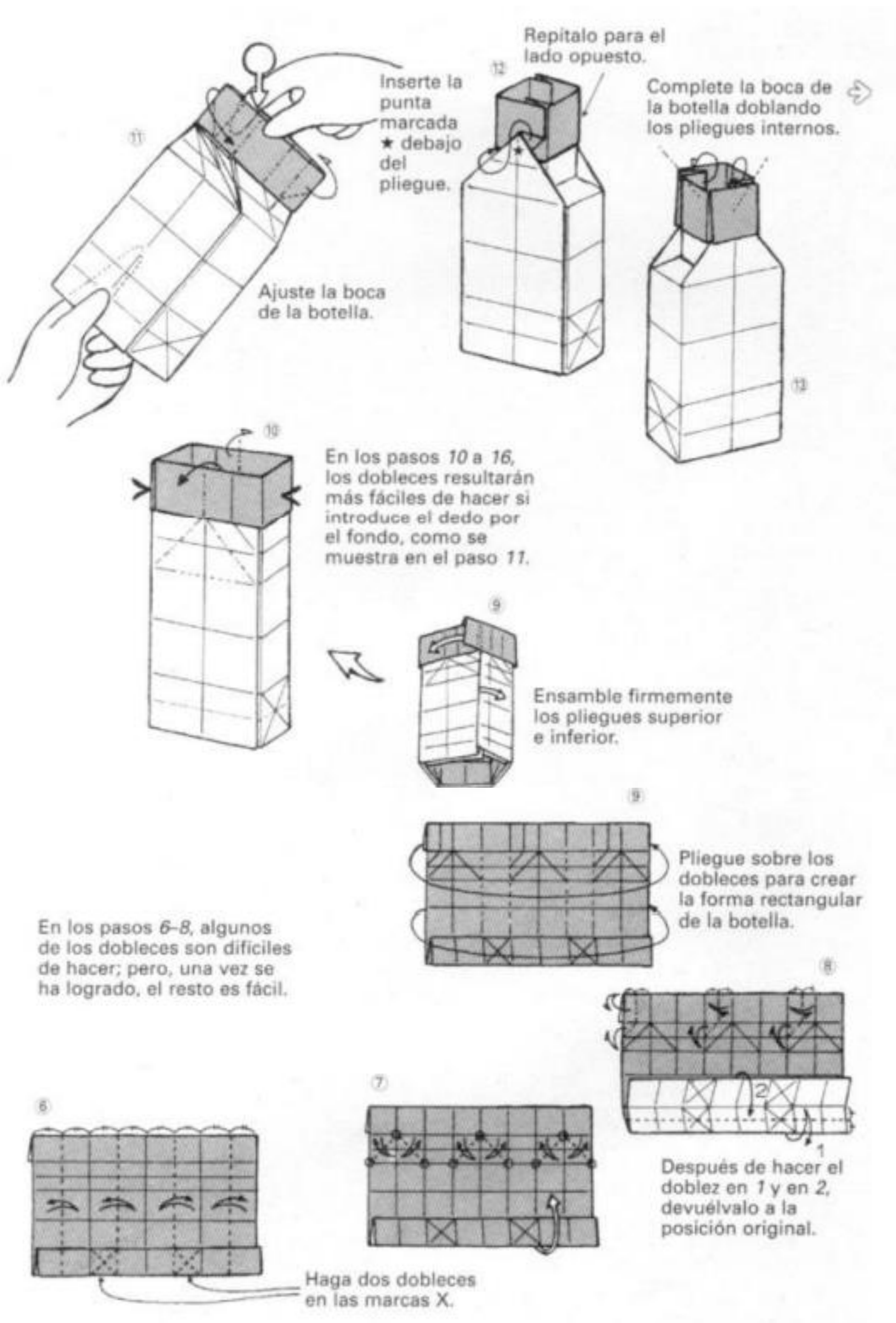


Fuente: Kasahara, K., Takahama, T., 2000.

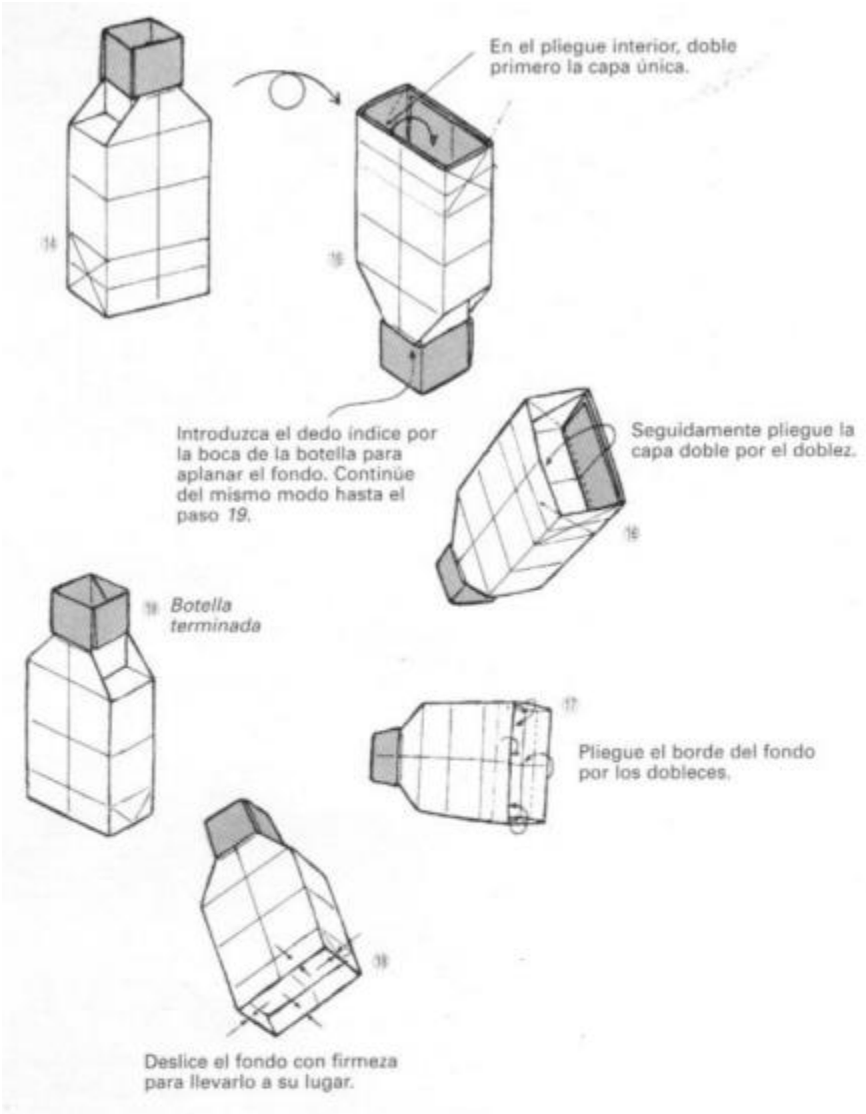
Y las indicaciones que se deben seguir son las siguientes:



Fuente: Kasahara, K., Takahama, T., 2000.



Fuente: Kasahara, K., Takahama, T., 2000.



Fuente: Kasahara, K., Takahama, T., 2000.

Una vez los alumnos hayan finalizado la elaboración de la figura, se podrían realizar preguntas como las siguientes:

- ¿Qué tamaño debería tener el trozo de color rojo inicial para que la botella final sea proporcional si se toma una hoja de papel para el cuerpo de la botella de dimensiones 16cm x 16 cm?
- ¿Podrías calcular el volumen de la botella obtenida sin tener en cuenta el tapón?
- Si quisieras meter dentro de la botella una rosa hecha con papiroflexia, ¿qué dimensiones debería tener como máximo?

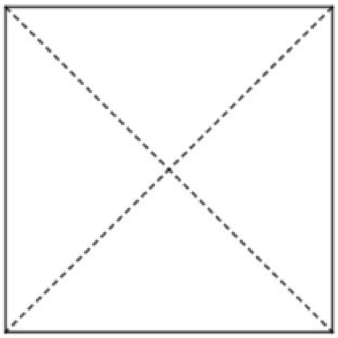
Estrella mágica

Nivel educativo	1º y 2º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Construcciones geométricas sencillas: mediatriz y bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triangulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
Criterios de Evaluación	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	1.1 Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Royo, J. I., s.f.

A continuación, se explica el proceso para elaborar, a través de la papiroflexia, un octógono regular. La idea es ir haciendo preguntas al alumnado durante todo el proceso para que practiquen contenidos de geometría y, una vez se haya obtenido el octógono, deslizar todos sus módulos de manera que formen una "estrella mágica" que podrán llevarse a su casa o regalar a quien quieran.

El material requerido para esta tarea son 8 papeles cuadrados. Su tamaño recomendado es el comprendido entre 7,5 cm hasta 10 o 15 cm. Para hacer más atractiva la estrella final se pueden emplear papeles de diferentes colores (*Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, M. T., Royo, J. I.,*).

Cada uno de los módulos se obtiene realizando la misma técnica, por lo que, como comienzo, se debe plegar el cuadrado de forma que se tracen sus dos diagonales:

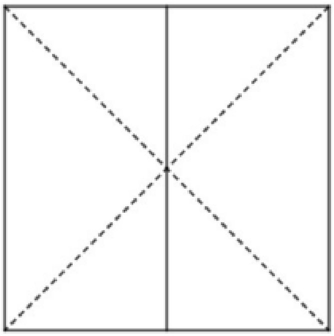


Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA

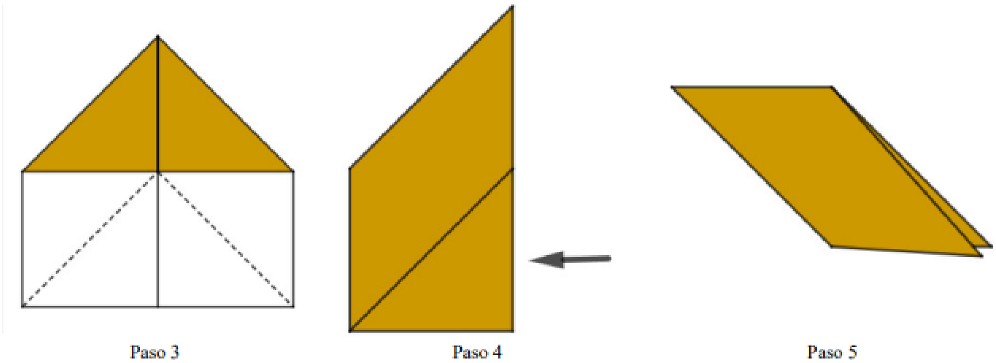
Se plantea al alumnado la siguiente pregunta:

- Calcula el perímetro de la figura y su área tomando con una regla las medidas que necesites.
- ¿Cómo obtendrías la mediatriz de uno de los lados? Pliega tu cuadrado por la mitad y vuelve a desplegarlo.

Este paso se visualizaría así:



Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA



Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA

Tras trazar la mediatriz, se deberá guiar a los alumnos para que continúen elaborando el primer módulo según los pasos que se especifican en el anterior diagrama, parando en cada paso para hacer algunas cuestiones de la forma siguiente:

Una vez realizado el paso 3:

- Calcula el perímetro total de la figura.
- ¿Cuál sería su área? Especifica bien las operaciones que has desarrollado para obtenerlo.

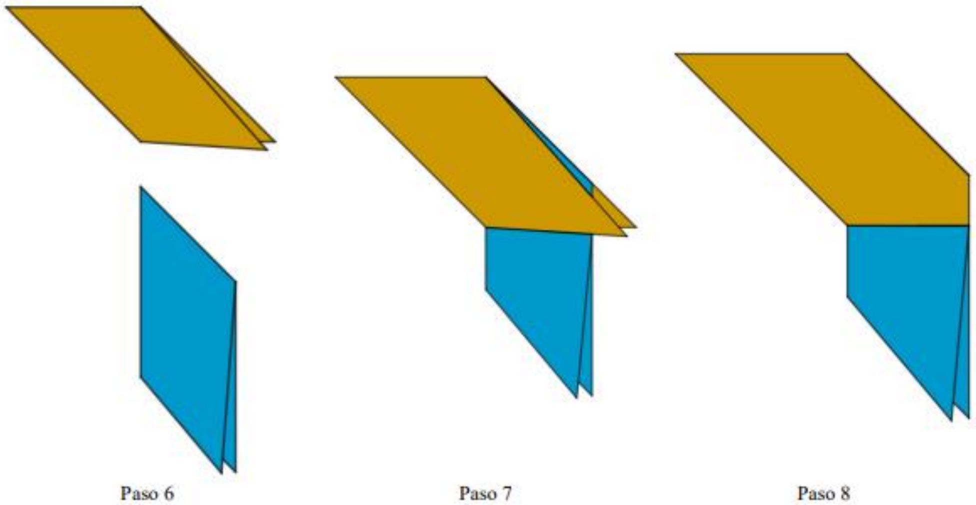
Una vez realizado el paso 4:

- ¿Qué figura has obtenido?
- Calcula su perímetro y su área total.

Una vez realizado el paso 5, con el cual se obtiene el módulo final:

- Calcula el área de esta figura.

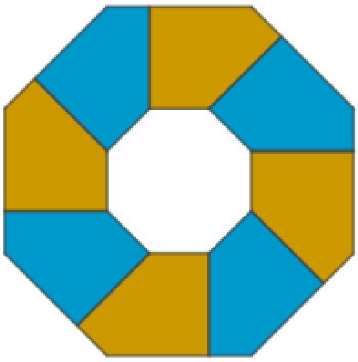
Ahora se procederá a formar el octógono regular uniendo los módulos de la siguiente manera:



Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA

Para unir las piezas como especifica el paso 6 es necesario girar un poco la segunda pieza. Durante el paso 7 se debe introduce la parte fija entre las lengüetas de la otra pieza. El último paso consiste en doblar los dos pequeños triángulos finales de las lengüetas sobre la pieza que se introdujo para sujetarla.

Para unir todos los módulos se repetirá este proceso, obteniendo finalmente el octógono regular:



Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA

En este punto, se puede pedir al alumnado que contesten a las siguientes cuestiones:

- Calcula ahora el perímetro total de la figura obtenida.
- ¿Cuál sería su área total?

Por último, se indicará a los alumnos que, con cuidado, vayan apretando cada pieza hasta conseguir la estrella de ocho puntas que se aprecia en la siguiente imagen:

Fuente: XVI FERIA DE LA CIENCIA

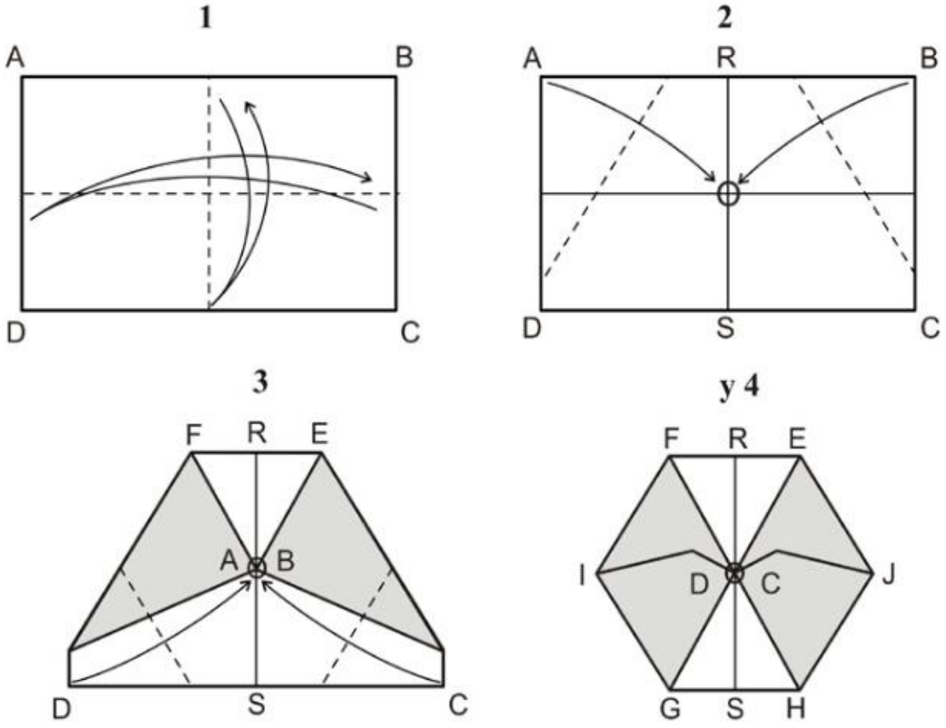
Consiguiendo un hexágono regular

Nivel educativo	Multinivel
Contenidos curriculares trabajados	Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Razón entre longitudes y áreas.
Criterios de Evaluación	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Garrido, B., 2011.

Como ya se ha ido explicando a lo largo del documento, la práctica de papiroflexia es una herramienta muy útil en la docencia de matemáticas, permitiendo al estudiante manipular, explorar e investigar una variedad de propiedades geométricas de las figuras que construyen, e incluso generar demostraciones empleando el lenguaje matemático adecuado.

La actividad que se plantea en esta ocasión pretende que los alumnos más jóvenes alcancen deducciones a través de la investigación de la figura que van a obtener, mientras que a los alumnos de niveles superiores se les pedirá que demuestren esas relaciones que los pequeños son capaces de deducir.

Para elaborar la figura se debe seguir el diagrama que se aprecia a continuación:



Fuente: Garrido, B., 2011

Una vez hayan obtenido se propone la siguiente cuestión:

Para niveles de 1º y 2º ESO:

- ¿Qué condición crees que debe cumplir la figura obtenida en el paso 4 para conseguir que la figura final forme un hexágono regular?

Para niveles de 3º y 4º ESO:

- Determina la relación que debe existir entre el lado mayor y el menor del rectángulo inicial de partida para conseguir que el hexágono final obtenido sea regular.

La solución a estas cuestiones se basa en que, para que la figura final sea un hexágono regular se debe cumplir que los triángulos FEO y GHO sean equiláteros. En este sentido, el lado menor del rectángulo inicial deberá ser igual al doble de la altura de estos triángulos equiláteros.

Al construir la figura, también se puede observar que el lado mayor del rectángulo inicial debe medir el perímetro de uno de los triángulos equiláteros.

La relación entre los lados mayor y menor del rectángulo de partida es la misma que la relación que hay entre el perímetro de un triángulo equilátero y dos veces la altura del mismo.

Denominando "a" al lado de un triángulo equilátero y "h" a su altura, al aplicar el Teorema de Pitágoras se cumple: $a^2 = h^2 + a^2 /2^2$, de donde se obtiene: $a = (2h\sqrt{3})/3$. Por lo tanto, el valor de la relación entre los lados del rectángulo de papel AB/BC será igual a $3a/2h = 3·(2h\sqrt{3})/3·2h$, cuyo resultado es $\sqrt{3}$.

Demostración del Teorema de Pitágoras

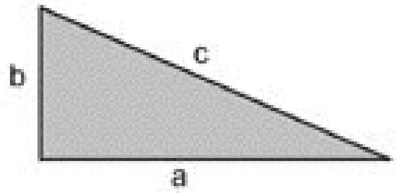
Nivel educativo	2º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica.
Criterios de Evaluación	3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Garrido, B., 2005.

Es generalmente conocido que, a día de hoy, existen más de 1000 demostraciones que explican el Teorema de Pitágoras, lo cual denota que es uno de los teoremas que más han llamado la atención a lo largo de la historia.

También son varias las demostraciones que justifican este teorema a través de la técnica de la papiroflexia, basándose principalmente en pruebas geométricas clásicas.

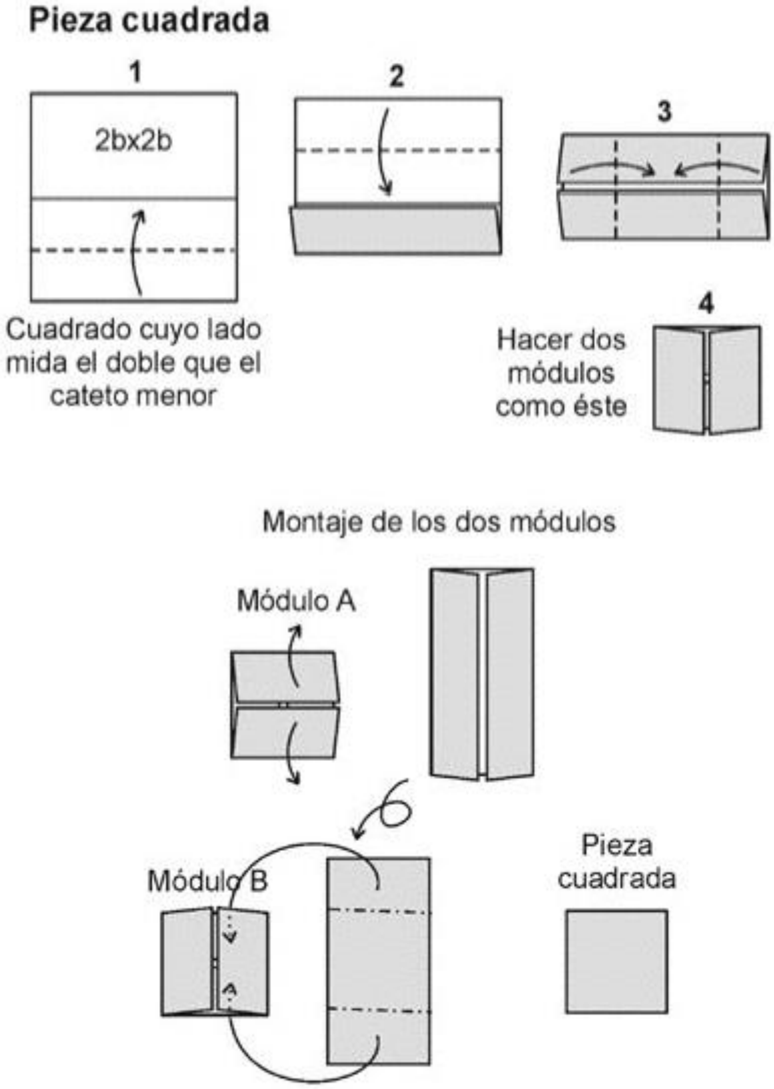
Belén Garrido, en su artículo *Papirodemostración del Teorema de Pitágoras*, publicado en divulgaMAT el 1 de noviembre de 2005, explica que ha ideado una demostración "papirofléxica" del Teorema de Pitágoras basándose en la demostración matemática del mismo, propuesta por el matemático inglés Henry Perigal, y empleando un puzle de cuatro piezas trapezoidales elaboradas con origami, ideado por Jean Jonson.

Para poder demostrar en el aula el Teorema de Pitágoras a través de este modelo de papiroflexia, de tomará un triángulo rectángulo cualquiera y se construirá un puzle de cinco piezas: una de ellas cuadrada y las otras cuatro serán trapezoidales iguales.



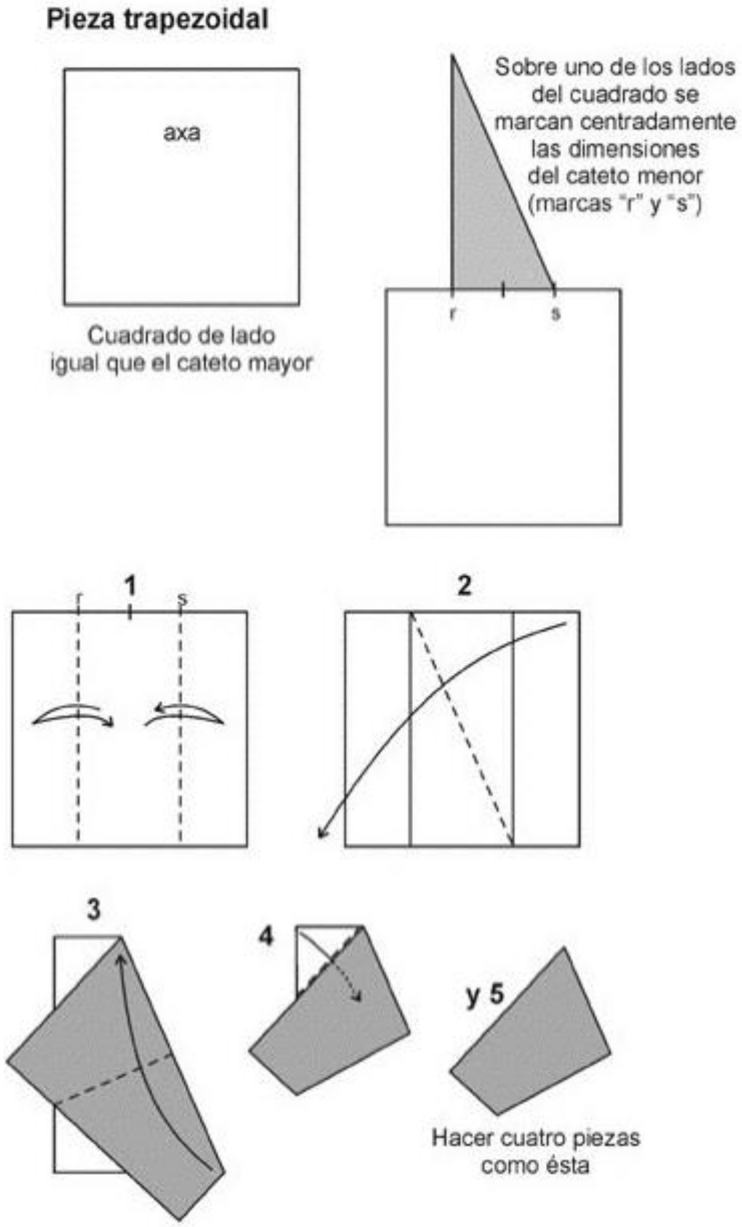
Fuente: Garrido, B., 2005.

Para obtener la pieza cuadrada se deben seguir los siguientes pasos:



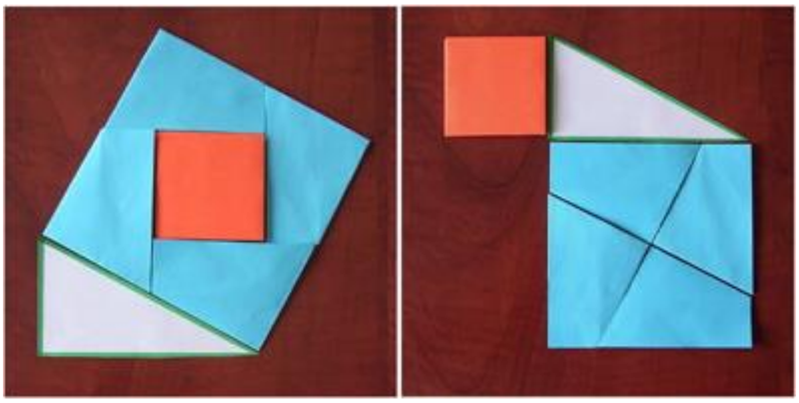
Fuente: Garrido, B., 2005.

En el caso de las cuatro piezas trapezoidales el diagrama a seguir es el que se aprecia a continuación:



Fuente: Garrido, B., 2005.

Por último, se mostrará al alumnado la demostración del Teorema de Pitágoras al colocar las piezas, permitiendo que ellos mismos manipulen los diferentes módulos:



Fuente: Garrido, B., 2005.

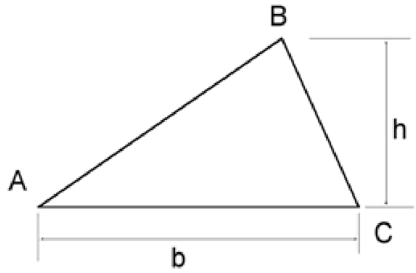
Demostración de la fórmula que determina el área de un triángulo

Nivel educativo	1º ESO
Contenidos curriculares trabajados	Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.
Criterios de Evaluación	2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado para expresar el procedimiento seguido en la resolución.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Basado en Pérez, A., 2005.

En esta ocasión, se persigue que el alumnado comprenda el sentido geométrico que permite calcular el área de un triángulo, a la vez que practique la descomposición de una figura en otros polígonos regulares.

La fórmula a demostrar, por tanto, es la del área de un triángulo ABC cualquiera a través de la papiroflexia, es decir:

Área = (base (b) x altura (h)) / 2



Fuente: Perez, A., 2005.

Partiendo de un triángulo de papel similar al de la anterior imagen, se realizará el proceso de plegado según se indica en el siguiente diagrama, para dejar marcadas las diferentes dobleces:

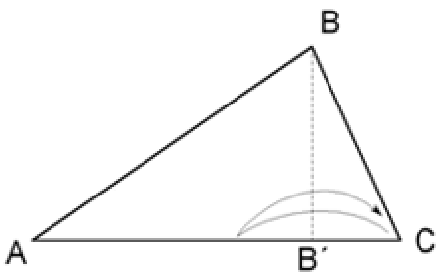


Fig 2

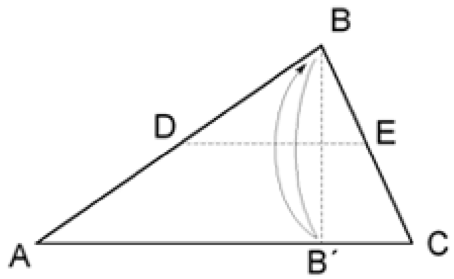


Fig 3

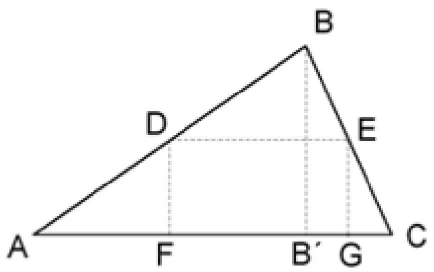


Fig 4

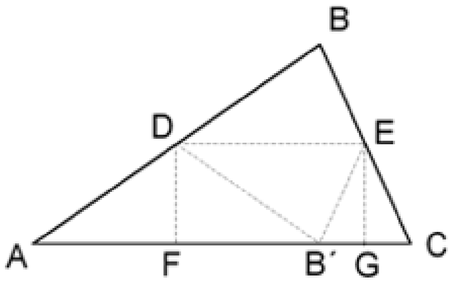


Fig 5

Fuente: Perez, A., 2005.

A continuación, se ha distinguido con diferentes colores cada uno de los triángulos que componen la figura inicial, para que se visualice mejor el proceso de plegado:

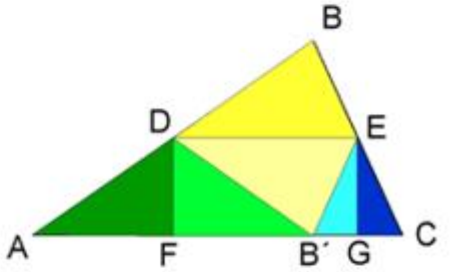


Fig. 6

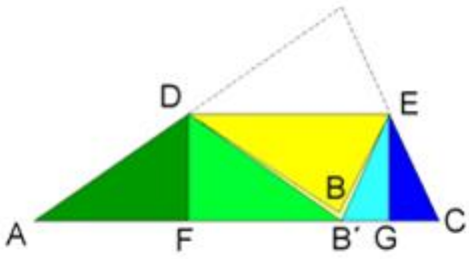


Fig. 6-Am

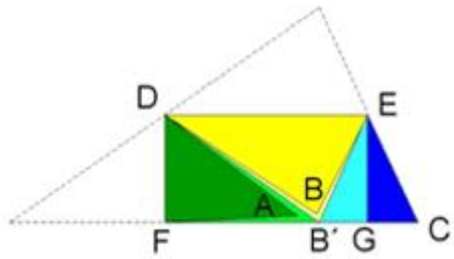


Fig. 6-Ve

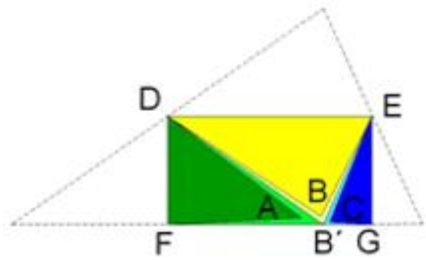


Fig. 6-Az

Fuente: Perez, A., 2005.

Ahora, se propone plantear al alumnado lo siguiente:

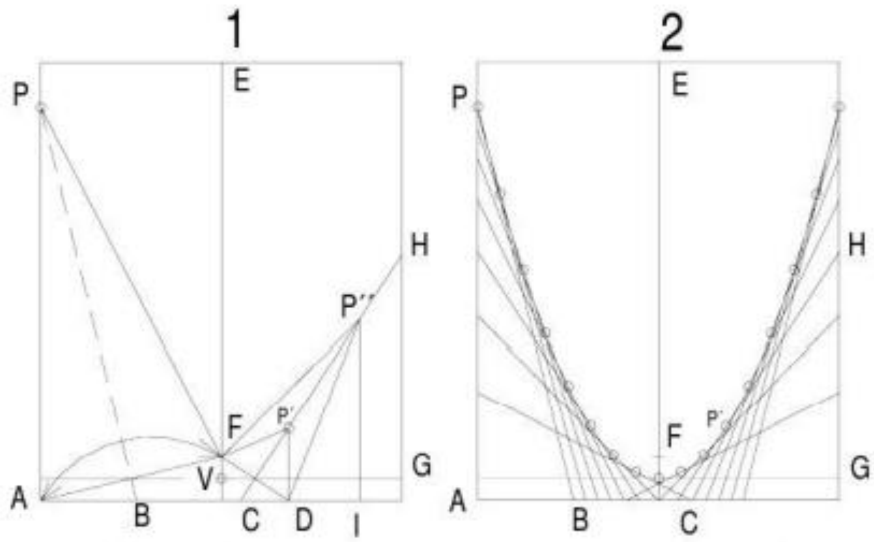
- Con la figura plegada que has obtenido, y fijándote en las uniones de cada uno de los vértices de los triángulos que han formado el rectángulo, demuestra que la fórmula del triángulo es la mencionada al comienzo de la actividad.

Parábola

Nivel educativo	1º Bachillerato. Matemáticas I
Contenidos curriculares trabajados	Cónicas. Parábola. Ecuación y elementos.
Criterios de Evaluación	5. Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando sus ecuaciones reducidas y analizando sus propiedades métricas.
Estándares de Aprendizaje Evaluables	5.1. Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana así como sus características.
Competencias Clave trabajadas	Competencia matemática, conciencia y expresiones culturales, competencias sociales y cívicas, aprender a aprender.
Fuente	Propia

En niveles más altos, también se puede animar a los alumnos a realizar cuestiones quizás menos atractivas y más laboriosas, pero que les pueden ayudar a profundizar y comprender mejor ciertos contenidos. En este punto, es recomendable que el alumnado ya tenga unas concepciones básicas sobre el tema a tratar.

Dado que la parábola es la cónica cuyos puntos toman la misma distancia de un mismo punto denominado foco, situado en su eje EF, que de una recta denominada directriz:



Fuente: de la Peña, J., 2001.

La idea es trabajar con los alumnos y alumnas sus propiedades y forma de construcción.
Se propone ir indicando los pasos que a continuación se especifican para poder obtener todos a la vez la figura final mediante plegados como envolvente de sus tangentes:

- Para comenzar, partiendo de una hoja rectangular, se tomará un punto contenido en la directriz (A, D, etc.) y se unirá con el punto F (foco).
- A continuación, se procede a trazar la mediatriz de AF, DF, etc (PB, CH, etc.).
- El siguiente paso es trazas las normales a la directriz por A, D, etc. (AP, DP', etc).
- Ahora, se puede hallar el punto (P, P', etc.) de intersección de esas normales, así como los pliegues mediatrices (PB, CH, etc.).
- Ahora las rectas PB, P'C, etc. son tangentes a la parábola en los puntos P, P', etc.

Se puede plantear a los estudiantes:

- Explica el procedimiento que se ha seguido y comprueba las propiedades implícitas que se han trabajado en cada uno de los pasos.
- Si se tuviese en cuenta que la ecuación de esta parábola fuese: $y = 2x^2$, ¿podrías hallar las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz?

Una educación más inclusiva

Para ir finalizando este trabajo, se considera necesario recordar que una educación lo más inclusiva posible para todos es aún un área reciente dentro del ámbito educativo. Este problema va desde docentes que no tienen la suficiente formación en atención a la diversidad del alumnado hasta la falta de estructura de algunos centros para considerarse como entornos inclusivos.

Garantizar una inclusión efectiva nace de conseguir una interacción entre todos los presentes en el aula y de garantizar procesos de enseñanza y aprendizaje que respeten las limitaciones y potencialidades de todo el alumnado, con o sin discapacidad.

Por la parte de la enseñanza de las matemáticas es cierto que los retos pueden ser mayores, ya que en la educación tradicional prevalecen aquellas metodologías pensadas solo para lo que se llama alumno "normal", aunque esta no sea en absoluto la palabra más acertada para denominarlo, consiguiendo de esta forma que alguna diversidad de alumnado se quede al margen de estas metodologías o materiales didácticos de las matemáticas.

En este sentido, es común tratar de involucrar a aquellos alumnos de necesidades especiales en las matemáticas tradicionales, mientras que, por el contrario, quizás una acción más acertada consistiría en centrar la didáctica en las diferentes formas de procesar la información que puede tener cada alumno.

En el caso de alumnos invidentes, el reto de aprender matemáticas se complica considerablemente, especialmente cuando se trata de contenidos relacionados con la geometría plana, dado el grado de abstracción de las representaciones en el plano para un alumno de estas características, ya que la visualización es la mayor herramienta que utiliza la enseñanza para impartir este tipo de contenido.

El trabajo en el cual se ha recogido esta información desarrolló una investigación con una alumna de segundo de primaria. Las matemáticas en general, y la geometría en particular, impartidas en secundaria son, evidentemente, de una dificultad mucho superior a lo trabajado en dicho proyecto, no obstante, lo que se pretende exponiendo esta experiencia es abrir una puerta a la búsqueda de alternativas que ayuden al alumnado de estas características durante la etapa de la ESO.

Las actividades realizadas en esta investigación emplearon el origami en su manera tradicional, con la diferencia de que añadieron un relieve conseguido con pegamento caliente a lo largo del contorno de cada figura, para así facilitar el reconocimiento de las figuras producidas por la alumna invidente. Una vez la hubo reconocido, se le explicaron su nombre y características. Según explica la investigación, mediante la manipulación, la alumna fue capaz de poder distinguir si las medidas de los diferentes lados eran similares o si eran distintos, además de distinguir el número de lados de cada figura, comprender el significado de lados paralelos y la representación de ángulos rectos, esto último se consiguió marcando cada uno de éstos en el cuadrado una vez más, con pegamento caliente (Barbosa, T. N., dos Santos, R., 2018).

Conclusiones

Cuando se comenzó este trabajo y la investigación sobre el tema, el título mismo podría haberse considerado la principal preguntar a responder a lo largo del trabajo: ¿Matemáticas y Papiroflexia? Esto se debe a que supuso un reto desde el principio, ya que no se tenían unos grandes conocimientos acerca de la materia, aunque sí un gran interés.

En este aspecto, el proyecto ha contestado de sobra a esa pregunta y ha permitido ampliar en gran medida los conocimientos acerca del tema. No solo la relación tan estrecha que ambas disciplinas mantienen, así como las magníficas aportaciones que se han hecho la una a la otra, consiguiendo de esta manera mejorarse mutuamente, sino las aplicaciones que esta técnica ha generado extrapolando estas aportaciones a ámbitos mucho más grandes como la inspiración que ha supuesto el arte de la papiroflexia para crear materiales del área aeroespacial, sanitario y tecnológico a gran escala.

Tras la investigación se ha demostrado que la papiroflexia es un arte asequible y no demasiado complicado que se puede aprovechar en multitud de aspectos: en la ciencia, en la mejora de la habilidad de lectura de niños con problemas de déficit de atención o hiperactividad, en la mejora de habilidades motoras y de visión espacial y, por supuesto, en la divulgación de las matemáticas, así como supone una herramienta de gran utilidad para poder explicarlas y mejorar la asimilación de multitud de contenidos del currículo de secundaria.

En suma, también hay investigaciones que posicionan la papiroflexia como una alternativa muy eficiente a la hora de explicar contenidos relacionados con la geometría a alumnos con discapacidad visual, lo cual se debería seguir investigando para así dar respuesta a este sector de alumnado invidente para el cual el aprendizaje de una asignatura como es matemáticas les supone un esfuerzo enorme dados los métodos de enseñanza tradicionales que a día de hoy imperan.

Referencias bibliográficas

Barasona, M. L., Gutiérrez, D. (2015). *Experiencia docente del uso del origami para la mejora del análisis y visión espacial*. [Aula de Encuentro, nº 17, volumen 2. Páginas 113-126]. Disponible en:
https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/ADE/article/view/2661/2130

Barbosa, T. N., dos Santos, R. (2018). *O uso do origami adaptado para o ensino das formas geométricas planas a uma aluna com deficiencia visual*. [Tangram. Revista de Educaçäo Matemática]. Disponible en:
https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/8333/4468

Blanco, C., Otero, T. (2005). *Geometría con papel (papiroflexia matemática)*. [sctm05]. Disponible en:
http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3tf/1/cblanco.pdf

Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, T., Royo, J. I. *Papiroflexia*. [Marzo, mes de las matemáticas]. Disponible en:
https://marzomates.webs.ull.es/papiroflexia/

Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, T., Royo, J. I. *Papiroflexia. Estrella mágica*. [Marzo, mes de las matemáticas]. Disponible en:
http://marzomates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2021/02/Estrellamagica.pdf

Camiña, S., Castro, M., Otero, M. T., Pérez, T., Royo, J. I. *Papiroflexia. Marcapáginas*. [Marzo, mes de las matemáticas]. Disponible en:
http://marzomates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2021/02/Marcapagina.pdf

Decreto 48/2015, de 14 de mayo, *del Consejo de Gobierno*, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Disponible en:
http://www.madrid.org/wleg_pub/secure/normativas/contenidoNormativa.jsf?opcion=VerHtml&nmnorma=8934#no-back-button

Engel, P. (1089). *Origami from Angelfish to Zen*. Dover Publications [ISBN 0486281388].

Garrido, B. (2005). *Papirodemostración del Teorema de Pitágoras*. [divulgaMAT]. Disponible en:
https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=7981:14-papirodemostraciel-teorema-de-pitras&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Garrido, B. (2007). *Identidades matemáticas y papiroflexia*. [divulgaMAT]. Disponible en:
https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8632:22-identidades-matemcas-y-papiroflexia&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Garrido, B. (2011). *Problemas Orisangaku: Papiroflexia y matemáticas*. [divulgaMAT]. Disponible en:
https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=12541:37-problemas-orisangaku-papiroflexia-y-matematicas&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Gurkewitz, R., Arnstein, B. (2003). *Multimodular Origami Polyhedra. Archimedeans, Buckyballs, an Duality*. Dover Publications.

Hull, T. (2006). *Project origami. Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters, Ltd. [ISBN 1568812582].

Iranzo, J. Á. (2018). *Papiroflexia: las matemáticas del papel*. [HERALDO]. Disponible en:
https://www.heraldo.es/noticias/sociedad/2018/11/14/papiroflexia-las-matematicas-del-papel-1277177-310.html

Kasahara, K., Takahama, T. (2000). *Papiroflexia <<origami>> para expertos*. EDAF. [ISBN 9788441406865].

Lang, R. J. (1988). *The complete book of origami. Step – by – Step Instructions in Over 1000 Diagrams*. Dover. [ISBN 0486258378]

Lang, R. J. (2009). *Origami^4. Fourth International Meeting of Origami, Science, Mathematics, and Education*. A K Peters, Ltd. [ISBN 9781568813462]

Lang, R. J. (2012). *Origami Design Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art*. CRC Press. [ISBN 9781439867747]

Octógono modular convertible en estrella. [XVI FERIA DE LA CIENCIA]. Disponible en: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2018/archivos/material/poligonos/octogono_estrella.pdf

(2017). Origami: Señaladores de papel, ¡divertidísimos y sencillos! [DOCENTECA]. Disponible en: https://www.docenteca.com/Publicaciones/352-origami-senialadores-de-papel-divertidisimos-y-sencillos.html

De la Peña, J. (2001). *MATEMATICAS Y PAPIROFLEXIA*. Asociación española de papiroflexia. [ISBN 8460721698]

Pérez, A. (2005). *Demostración de la fórmula que proporciona el área de un triángulo*. [divulgaMAT]. Disponible en: https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=7974:7-demostracie-la-fla-que-proporciona-el-a-de-un-triulo&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Pérez, R., (2016). *Las matemáticas escondidas en el arte del origami*. [El Confidencial]. Disponible en: https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2016-02-13/las-matematicas-escondidas-en-el-arte-del-origami_1151347/

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). *Boletín Oficial del Estado, 3 Sec. I.*, de 03 de enero de 2015, 169 a 546. Disponible en: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. (2022). *Legislación consolidada. Ministerio de Educación y Formación Profesional, <<BOE>> núm 76*, de 30 de marzo de 2022. Disponible en: https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/dof/spa/pdf

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. (2022). *Legislación consolidada. Ministerio de Educación y Formación Profesional, <<BOE>> núm 82*, de 06 de abril de 2022. Disponible en: https://www.boe.es/boe/dias/2022/04/06/pdfs/BOE-A-2022-5521.pdf

Royo, J. I., (2002). *Matemáticas y papiroflexia.* Disponible en: https://www.ehu.eus/joseroyo/pdf/sigma.pdf

Rubio, J. P. (2005). *División del lado del cuadrado en partes iguales. Teoremas de Haga*. [divulgaMAT]. Disponible en: https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=7972:5-divisiel-lado-del-cuadrado-en-partes-iguales-teoremas-de-haga&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Rubio, J. P. (2005). *Generalización del primer teorema de Haga*. [divulgaMAT]. Disponible en: https://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=7973:6-generalizaciel-primer-teorema-de-haga&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Sorando, J. M. (2018). *Papiro_mates: Matemáticas y origami*. Disponible en: https://matematicasentumundo.es/ARTE/papiromates.htm

Sorando, J. M. (2018). *Papiro_mates: Teselaciones*. Disponible en: https://matematicasentumundo.es/ARTE/papiromates7.htm

Wang – Iverson, P., Lang, R. J., Yim, M. (2011). *Origami^5. Fifth International Meeting of Origami, Science, Mathematics, and Education*. CRC Press. [ISBN9781439873502].