



Cognição Matemática no Ensino Superior: análise de uma atividade investigativa

Karina Alessandra Pessoa da Silva¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Jader Otavio Dalto²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma investigação com o intuito de evidenciar aspectos da linguagem matemática e como se relacionam com a cognição matemática no desenvolvimento de uma atividade investigativa em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. A cognição matemática é compreendida como processos pelos quais indivíduos compreendem ideias matemáticas e as atividades investigativas como essencialmente abertas e pouco estruturadas, em que é possível abordar temas ou situações de interesse dos alunos, mobilizando conhecimentos de diferentes naturezas. A atividade que analisamos foi desenvolvida por um grupo de estudantes do curso de Tecnologia em Alimentos e as discussões que empreendemos são subsidiadas pelos signos produzidos na comunicação dos resultados para a turma, nos registros presentes no relatório final e em um esquema elaborado pelo grupo considerando o desenvolvimento da atividade investigativa. Por meio da variedade de signos produzidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade, inferimos aspectos relativos às representações presentes na comunicação da qual se fez necessária, primordialmente a representação gráfica para associar conhecimentos matemáticos da disciplina aos conhecimentos sobre o fenômeno em estudo. Pela comunicação fica evidente a cognição matemática do grupo investigado quando relatam suas ações para a escolha da temática, para o ajuste de curvas aos dados coletados empiricamente, para a obtenção da solução para o problema e para as argumentações utilizadas para responder aos questionamentos da professora e de outros alunos na sala com o intuito de refinar o modelo matemático construído.

Palavras-chave: Cognição Matemática; Atividades Investigativas; Cálculo Diferencial e Integral; Tecnologia em Alimentos.

Mathematical Cognition in Higher Education: an analysis of an investigative activity

ABSTRACT

In this article, we present an investigation to highlight aspects of mathematical language and how they relate to mathematical cognition in the development of an investigative activity in a Differential and Integral Calculus 1 course. Mathematical cognition is understood as processes by which individuals understand mathematical ideas and investigative activities as essentially open and poorly structured, in which it is possible to address

Submetido em: 21/11/2021

Aceito em: 10/02/2022

Publicado em: 12/08/2022

¹ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Endereço para correspondência: Av. dos Pioneiros, 3131 - Jardim Morumbi, Londrina - PR, <http://orcid.org/0000-0002-1766-137X> E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br

² Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Endereço para correspondência: Av. Alberto Carazzai, 1640 - Vila Seugling, Cornélio Procópio - PR, 86300-000. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7684-2480> E-mail: jaderdalto@utfpr.edu.br

themes or situations of interest to students, mobilizing knowledge of different natures. The activity we analyzed was developed by a group of students from the Food Technology course and the discussions we undertake are supported by the signs produced in the communication of results to the class, in the records present in the final report and in a scheme prepared by the group considering the development of investigative activity. Through the variety of signs produced by the students in the development of the activity, we inferred aspects related to the representations present in the communication, which was necessary, primarily the graphical representation to associate mathematical knowledge with knowledge about the phenomenon under study. Through communication, the mathematical cognition of the investigated group is evident when they report their actions to choose the theme, to adjust curves to empirically collected data, to obtain a solution to the problem and to the arguments used to answer the teacher's questions and from other students in the classroom in order to refine the constructed mathematical model.

Keywords: Mathematical Cognition; Investigative Activities; Differential and Integral Calculus; Food Technology.

Cognición Matemática en la Educación Superior: análisis de una actividad investigadora

RESUMEN

En este artículo presentamos una investigación con el fin de resaltar aspectos del lenguaje matemático y cómo se relacionan con la cognición matemática en el desarrollo de una actividad investigativa en una disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. La cognición matemática se entiende como procesos mediante los cuales los individuos comprenden ideas matemáticas e investigativas como esencialmente abiertas y poco estructuradas, en las que es posible abordar temas o situaciones de interés para los estudiantes, movilizando conocimientos de distinta índole. La actividad que analizamos fue desarrollada por un grupo de alumnos de la asignatura de Tecnología de los Alimentos y las discusiones que realizamos se sustentan en las señales producidas en la comunicación de resultados a la clase, en los registros presentes en el informe final y en un esquema elaborado por considerando el grupo el desarrollo de la actividad investigativa. A través de la variedad de signos producidos por los estudiantes en el desarrollo de la actividad, se infirieron aspectos relacionados con las representaciones presentes en la comunicación lo cual fue necesario, principalmente la representación gráfica para asociar el conocimiento matemático de la disciplina con el conocimiento sobre el fenómeno en estudio. A través de la comunicación, la cognición matemática del grupo investigado se hace evidente cuando informa de sus acciones para elegir el tema, ajustar las curvas a los datos recolectados empíricamente, obtener una solución al problema y a los argumentos utilizados para responder a las preguntas del docente y de otros estudiantes en el aula para perfeccionar el modelo matemático construido.

Palabras clave: Cognición matemática; Actividades de investigación; Cálculo diferencial e integral; Tecnología de los Alimentos.

INTRODUÇÃO

Cognição Matemática pode ser considerado como um campo recente de pesquisa que tem por objetivo compreender os processos pelos quais indivíduos compreendem ideias matemáticas (GILMORE; GÖBEL; INGLIS, 2018). Por ser um campo de pesquisa interdisciplinar, tem como bases a Psicologia, Educação e Neurociências, não se resumindo a apenas uma delas e lança mão de diversas estratégias metodológicas de pesquisa, como pesquisas experimentais, neuroimagem, pesquisas interventivas.

Nas últimas décadas, o número de investigações realizadas nesta área tem aumentado significativamente e, com isso, os trabalhos desenvolvidos têm mostrado importantes

contribuições para a elucidação dos processos envolvidos na compreensão das ideias matemáticas. Grande parte dos trabalhos têm focado em aspectos da cognição numérica e aritmética, sendo poucos aqueles desenvolvidos com ideias matemáticas mais avançadas, como as da álgebra. Embora haja teorias que mostram que humanos (e outros animais) possuem habilidades numéricas sem o uso de alguma representação, muitas pesquisas com crianças investigam o papel da representação numérica no desenvolvimento de habilidades matemáticas. Por exemplo, o Modelo de Código Triplo do processamento numérico (DEHAENE, 1992) postula que números podem ser mentalmente representados por três diferentes códigos que se interconectam: *código auditório verbal*, que se utiliza da linguagem natural (por exemplo, “quarenta e sete”, “novecentos”); *código visual arábico*, que se utiliza dos algarismos para se referir aos números (p. ex. 47, 900) e *código de magnitude analógica*, que se refere ao senso numérico (p. ex, perceber que há cerca de 47 pessoas em um fila).

Aspectos relacionados à linguagem têm sido tema de interesse de pesquisas em Educação Matemática, cujos resultados têm mostrado o importante papel desta para a aprendizagem de matemática. A linguagem é um importante meio de aprendizagem, utilizada para fins não apenas comunicativos de ideias matemática, mas também para a construção das mesmas (PREDIGER; ERATH; OPITZ, 2019), uma vez que ideias e conceitos matemáticos não são acessíveis diretamente por algum dos sentidos, sem uso de alguma representação – palavras, símbolos, desenhos, gráficos, esquemas (PEIRCE, 2005; PREDIGER; ERATH; OPITZ, 2019; GILMORE; GÖBEL; INGLIS, 2018; MORGAN et al., 2014). Assim, neste trabalho investigamos aspectos da linguagem matemática e como se relacionam com a cognição matemática no desenvolvimento de uma atividade investigativa. A seguir, apresentamos algumas abordagens da literatura da área acerca desta temática.

REVISÃO DE LITERATURA

Ao se observar uma aula de matemática, é fácil de se perceber que palavras e símbolos matemáticos formam apenas uma parte da comunicação que ocorre na aula. Nos últimos anos, investigações sobre linguagem e matemática passaram a se preocupar menos com palavras ou símbolos matemáticos e mais com meios de comunicação em geral. Tal fato também se deve ao reconhecimento do papel do ambiente social na aprendizagem, no ensino

e no fazer matemática. Nesta perspectiva, a comunicação face a face ganhou espaço nas investigações o que levou ao reconhecimento da importância do discurso nas aulas de matemática (MORGAN et al., 2014).

É a linguagem que possibilita o acesso e a comunicação dos objetos matemáticos que não são acessíveis sem o intermédio das representações. Esta dualidade entre objetos matemáticos e suas representações implica na necessidade de não se confundir o objeto matemático com as formas em que o mesmo pode ser representado (DUVAL, 2000, 2006). Por outro lado, há pesquisadores em Educação Matemática que se opõem a esta visão, de modo que consideram que a matemática é uma atividade totalmente discursiva, sendo os objetos matemáticos constituídos do número total de formas utilizados para serem comunicados (SFARD, 2008 apud MORGAN et al., 2014), ou seja, não existem objetos matemáticos sem alguma representação. Estas distinções levam ao seguinte questionamento: a linguagem é o meio pelo qual se tem acesso parcial e limitado ao pensamento matemático dos alunos ou é a comunicação por si só o objeto de estudo? (MORGAN et al., 2014).

Seja qual for a posição epistemológica adotada diante da discussão apresentada, em ambas a linguagem tem um papel crucial na aprendizagem. Baseadas na premissa de que a linguagem que usamos determina nossa experiência com o mundo, Morgan et al. (2014) realizaram uma revisão sistemática de literatura em Educação Matemática sobre linguagem e, na discussão apresentada, uma das categorias é análise do desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes. De acordo com os autores, muitas pesquisas têm se debruçado em investigar aspectos representacionais das ideias matemáticas – a forma como alunos se refere aos objetos, seja de forma simbólica, usando a língua natural ou de outra maneira – como evidências da compreensão que têm das ideias matemáticas. Nesta direção, pesquisas na área de semiótica têm oferecido meios sofisticados para investigação entre os signos utilizados na representação dos objetos matemáticos e o significado matemático (MORGAN et al., 2014).

Na semiótica peirceana, desenvolvida por Charles Peirce, o signo é tratado como uma relação entre três elementos — objeto, signo (ou representámen) e interpretante. Nesta relação triádica, o signo estabelece mediação entre objeto e interpretante. O interpretante consiste no resultado da relação entre signo e objeto, criado na mente de um intérprete (pessoa) (PEIRCE, 1972). A ação própria do signo é determinar um interpretante, pois “É só na relação com o interpretante que o signo completa sua ação como signo”

(SANTAELLA, 2007, p. 37). O processo de geração de interpretantes constitui a semiose (PEIRCE, 2005) e é por meio desse processo que se pode inferir sobre a atribuição de significado para o objeto. A semiose, segundo Nöth (2008), faz com que o signo tenha um efeito cognitivo sobre o intérprete e, com isso, gere novos signos num processo de geração *ad infinitum*.

O signo não é o objeto, ele está no lugar do objeto e só o representa de acordo com certa forma e capacidade (PEIRCE, 2005). Com isso, se faz necessário considerar os diferentes signos utilizados e produzidos para evidenciar o significado atribuído ao objeto. Para Santaella (2008),

A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo — seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou mero sentimento de alegria, raiva... uma ideia, ou seja lá o que for — porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro) (SANTAELLA, 2008, p. 58-59).

Assim, subsidiados em D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 112), podemos considerar que “uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribui de maneira específica com alguns aspectos do objeto”. Com isso, a representação (ou signo) estando no lugar do objeto, pode não revelar o objeto na sua totalidade, mas apenas em alguns de seus aspectos e “uma única representação nunca pode ser suficiente para construir cognitivamente de maneira eficaz um objeto matemático” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 169).

Na literatura existem pesquisas (ALMEIDA; SILVA, 2017, BALDAQUIM; SILVA, 2018; LEIVAS, 2019) que revelam a potencialidade que atividades investigativas no que compete ao uso e produção de variedade de signos para representar objetos e é sob essa lente que realizamos nossa investigação. Entendemos que atividades investigativas são “abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e [...] apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 29).

Defronte de uma atividade investigativa em que os alunos escolhem uma situação a ser investigada “criam suas próprias questões, elaboram hipóteses, planejam e executam

ações, validam (ou não) tanto essas ações quanto as respostas encontradas para as questões, bem como comunicam e justificam os resultados da investigação para os demais alunos da turma, quiçá para outros interessados externos à comunidade universitária” (SILVA; VERTUAN, 2018, p. 504). Na comunicação dos resultados, a linguagem matemática pode se fazer presente e possibilitar indícios de compreensão de ideias matemáticas, pois a

comunicação implica essencialmente o desenvolvimento de uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais esses resultados são acessíveis de que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados, quanto da adequação desta representação para a situação em estudo. Nessa ação, o aluno necessita expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos, apresentar e justificar suas escolhas baseadas em argumentos racionalmente fundamentados, reconhecer que a situação requer alguma subjetividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 19).

Hall e Lingefjård (2017, p. 443) assinalam que as “representações matemáticas, como diagramas, histogramas, funções, gráficos, tabelas e símbolos, podem facilitar a compreensão de conceitos matemáticos abstratos ou fenômenos descritos em termos matemáticos”. Neste contexto, de análise das representações realizadas pelos alunos, bem como os argumentos utilizados para justificar seus usos que nos debruçamos em evidenciar aspectos da linguagem matemática e como se relacionam com a cognição matemática no desenvolvimento de uma atividade investigativa.

ENCAMINHAMENTOS DE NOSSA INVESTIGAÇÃO

Na matriz curricular do curso de Tecnologia em Alimentos de uma universidade federal do Paraná, no primeiro semestre letivo, é ofertada a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real (Cálculo). Os conteúdos da ementa desta disciplina são: sistema de números reais, funções, limite, continuidade, derivada, diferenciais, integral e aplicações na tecnologia de alimentos.

Entre as atividades abordadas no curso, temos solicitado que os alunos desenvolvam atividades investigativas cujas temáticas estejam associadas a aplicações no curso de Tecnologia em Alimentos. De forma geral, os alunos, reunidos em grupos, coletam dados empíricos e fazem uma abordagem matemática.

No primeiro semestre do ano letivo de 2018, os temas escolhidos pelos sete grupos formados pelos 23 alunos que concluíram a disciplina foram: estabilidade do Brix na

fermentação de cana-de-açúcar (grupo 1), variação de temperatura no preparo de brigadeiro para diferentes marcas de leite condensado (grupo 2), consumo e produção de leite no Paraná (grupo 3), influência do ácido láctico do leite condensado para o preparo de doces (grupo 4), análise de solubilidade e rentabilidade de achocolatado em pó (grupo 5), desidratação da batata tipo palito após a fritura em tempos diferentes (grupo 6), pudim com textura cremosa e homogênea (grupo 7).

Todas as atividades foram desenvolvidas sob orientação da professora da disciplina (uma das autoras deste artigo) e apresentadas para a turma no final do período letivo. A apresentação dos resultados das atividades investigativas ocorreu durante duas horas-aula no dia 09 de julho de 2018 e teve como objetivo compartilhar resultados com os outros colegas de sala que fizeram questionamentos e preencheram uma ficha de avaliação. A atividade investigativa que teve melhor avaliação entre os pares, considerando tanto a temática quanto a abordagem matemática foi a do grupo 1 – estabilidade do Brix na fermentação de cana-de-açúcar –, desenvolvida por três estudantes que no texto referenciamos por nomes fictícios – Adriano, Fábio e Hugo. É sob essa atividade que nos debruçamos em nossa investigação.

Para inferirmos sobre aspectos da linguagem matemática e como se relacionam com a cognição matemática no desenvolvimento de uma atividade investigativa, utilizamos registros escritos do relatório entregue pelos alunos e de questionamentos que foram realizados no acompanhamento da atividade, gravações em áudio e vídeo da apresentação em sala de aula. As gravações foram realizadas com o consentimento dos alunos da turma e transcritas na íntegra para posterior análise. Para nossa investigação fizemos um recorte das transcrições das discussões realizadas na apresentação do grupo 1. Porventura, alunos que realizaram questionamentos durante apresentação são designados por Aluno ou Aluna.

As informações coletadas por meio dos instrumentos supracitados serviram de dados para nossa investigação. Considerando aspectos e implicações da pesquisa qualitativa, nos apoiamos em uma análise interpretativa em que pesquisadores têm como objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, o que implica em ser ele, o pesquisador, o principal instrumento da pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

RESULTADOS E ANÁLISE

Os alunos do grupo 1 escolheram investigar o problema *Após quanto tempo de fermentação é possível obter 6°Bx?* No entanto, esse problema só se configurou com a desistência dos alunos em investigar um primeiro tema, visto que não tinham os equipamentos necessários para realizar a coleta de dados empíricos. Na apresentação em sala de aula justificaram a escolha da temática e do problema a ser investigado:

Hugo: *A gente queria investigar a perda de água da carne quando colocada para assar, até nos reunimos em uma tarde, mas a nossa balança não era analítica então não conseguimos perceber muita variação. E lá na casa do Fábio tem moenda e os equipamentos para medir o brix.*

Prof: *Mas o brix serve para que?*

Fábio: *Para fazer cachaça é importante manter o brix até um valor que se estabiliza, é a destilação que acontece para chegar na cachaça. A gente fez a destilação e depois fizemos o teste para ver se o álcool retirado pegava fogo. Usamos duas amostras aqui e as duas amostras destiladas pegaram fogo, concluindo que a fermentação ocorreu como esperado.*

Adriano: *Vocês sabem que a fermentação acontece com bactérias né, a gente usou fermento biológico.*

Fábio: *Isso, mas quando pega fogo não é mais cachaça só sobra o álcool mesmo. E a gente pesquisou, conversei com meu pai que trabalha com destilação, tiramos dúvidas com alguns professores que conhecem o assunto e vimos que o brix tem de ficar em seis graus, se estabilizando para a gente não perder a destilação para cachaça [risos]. Um grau Brix (1°Bx) é igual a 1g de açúcar por 100g de solução, ou 1% de açúcar [lendo o slide].*

Defronte da impossibilidade de se produzir dados quantitativos para investigar uma primeira problemática de interesse do grupo, uma mudança significativa se fez importante para iniciar a atividade investigativa. O grupo percebeu que a variação de massa, utilizando a balança que tinham acesso, era ínfima e não seria possível inferir sobre a desidratação da carne no processo de preparo. Com isso, ideias matemáticas associadas à relação de dependência entre massa e tempo de preparo se fizeram presentes. Todavia, considerando equipamentos de posse de um dos integrantes do grupo uma nova temática se fez presente.

Nesta etapa de definição do tema e justificativa, elementos da língua natural constituem-se majoritariamente como responsáveis pelo processo inicial da atividade investigativa, cujo foco é a definição do problema a ser investigado. Cabe ressaltar, ainda, a importância da comunicação entre os membros do grupo e outras pessoas (o pai de um deles, p. ex.) para que o problema pudesse ser definido.

A partir da formulação de um problema, há a necessidade de definição de metas para sua resolução e, em alguns casos, a coleta de dados empíricos, a definição de hipóteses, a formulação de previsões e a apresentação de explicações e respostas para a situação (SILVA;

VERTUAN, 2018). Considerando as especificidades da temática investigada a coleta de dados empíricos foi realizada pelos alunos na casa de um dos integrantes que possuía os equipamentos necessários para fazer a leitura do grau Brix de uma mistura de caldo de cana-de-açúcar (500 ml) e fermento biológico (4,0 g), conforme mostra a Figura 1 presente no relatório entregue pelos alunos.

Figura 1 – Equipamentos utilizados na coleta de dados



Fonte: Relatório dos alunos.

Para a fermentação, os alunos reservaram a mistura em um recipiente plástico. O acompanhamento, bem como a análise e produção de dados relativos ao grau brix medido com a ajuda do refratômetro, ocorreram de 8 em 8 horas, obtendo os valores conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Variação do grau Brix de acordo com o tempo

Tempo (horas)	0	8	16	24	32	40	48	56
---------------	---	---	----	----	----	----	----	----

Grau Brix (Bx)	14,8	12,6	10,6	9,2	8,2	7,4	6,9	6,5
----------------	------	------	------	-----	-----	-----	-----	-----

Fonte: Relatório dos alunos.

Nesta etapa, o problema, anteriormente expresso em língua natural, começa a ser representado a partir de outra maneira, a tabela, o que possibilitou uma nova representação, a gráfica, com o uso de um software. Por meio da transformação de representações – da língua natural para a tabular – já há indícios de informações matemáticas que permitiriam fazer uma análise em linguagem matemática. Os alunos, então, realizaram a transformação da representação tabular para a gráfica mediada por um software:

Fábio: *Durante esses três dias a gente coletou os dados e vimos que conforme o tempo passava a quantidade de brix ia diminuindo, a gente começou ficar preocupado, porque estava se aproximando de seis e a gente não sabia quanto tempo mais podíamos deixar destilando.*

Adriano: *Mas a diminuição não é sempre a mesma, então não podia ser uma reta.*

Hugo: *Mas daí a gente pensou que podíamos usar aquele software que a professora usou e nos ensinou em uma das aulas, como era o nome?*

Fábio: *Espera [passando um slide], aqui curve expert. Pelo software a gente conseguiu vários modelos que trazemos aqui e já vamos falar porque escolhemos o que escolhemos.*

De acordo com a fala de Adriano, ao representar o problema por meio de uma tabela, foi percebido pelo grupo que o comportamento do grau brix não diminuía de forma linear, portanto, não podendo ser representado por uma reta. O uso da tabela para representar a situação possibilitou a compreensão deste aspecto do comportamento dos dados da situação. É evidente que os alunos disponibilizaram uma atenção para relacionar o fenômeno com um possível objeto matemático, considerando o interesse e a necessidade implementada com a atividade investigativa no contexto da disciplina de Cálculo. A tabela corresponde a um signo que possibilitou aos alunos inferirem sobre um possível objeto matemático e que possibilita “estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro” (PEIRCE, 2005, p. 61). O que podemos evidenciar é que língua natural e representação tabular se articulam para expressar ideias matemáticas dos alunos.

Embora os entendimentos e percepções dos alunos dessem indícios à uma discussão que levava em consideração uma função, esses somente se efetivaram quando os alunos fizeram uso de um software para ajustar aos dados uma curva. Segundo Hall e Lingefjård

(2017, p. 444), “percepção é a definição psicológica usada para descrever como você interpreta o que experimenta e o processo de percepção transforma suas experiências em informações compreensíveis e gerenciáveis”. O referido software apresenta um conjunto de ajustes de curvas para os dados numéricos, porém há necessidade de escolha para aquele que melhor se ajusta e representa o fenômeno em estudo. Essa escolha precisa estar subsidiada em conhecimentos matemáticos e do fenômeno pelos alunos, pois envolvem “processos conceituais que traduzem os atributos visuais em questão, tais como quantidades, escalas e símbolos para conceitos relevantes” (HALL; LINGEFJÄRD, 2017, p. 444). Os alunos justificaram suas escolhas conforme transcrição a seguir:

Fábio: *A gente queria a primeira função que coincidiu certinho com os pontos, mas a professora perguntou o que acontecia com a função quando o tempo ia para o infinito [se referindo à uma função polinomial].*

Adriano: *Daí calculamos, fizemos o gráfico em outro programa lá e calculamos o limite, não ficou muito convincente.*

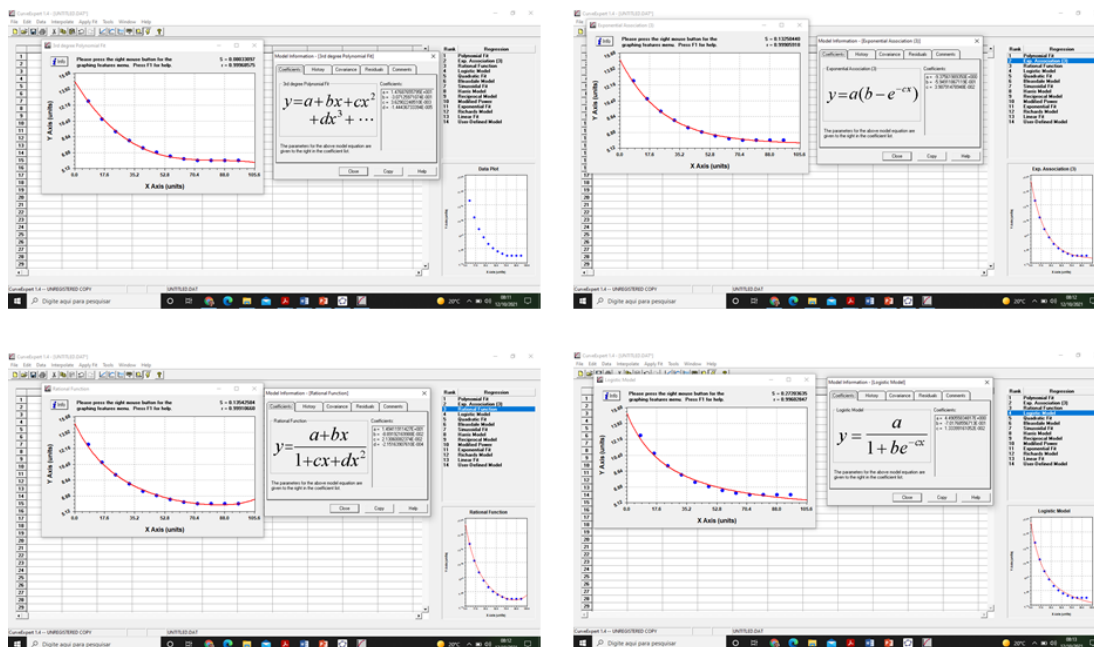
Hugo: *Pegamos essa segunda que é exponencial né? E vimos que dava certo essa porque também calculamos o limite. Analisamos as outras duas debaixo [apontando para o slide]. Mesmo que essa quarta também é boa, ficamos com a segunda.*

Fábio: *Ficamos com a segunda ao invés da quarta por conta do limite. Nesta [apontando para a expressão algébrica] o limite vai para 5,52 e, na outra, nós calculamos o limite e vai para 4,49. Eu fiquei preocupado porque poderia acontecer de que na próxima coleta já teria passado de seis. A gente considerando esse modelo da exponencial o seis chegava antes, já o outro que... espera... logístico... o seis demoraria mais tempo. A gente analisou esses dois e fizemos contas para saber quando chegava seis primeiro.*

A escolha por ajuste de curvas que leva em consideração o fenômeno investigado denota que os alunos estão cientes do que se espera no desenvolvimento da atividade investigativa. Ao analisarem as diferentes representações gráficas para o estudo do grau Brix nos permite inferir que os alunos não aceitaram de imediato aquela que parecia a melhor para o software por meio da intervenção da professora e também pela representação gráfica do objeto matemático. Fenômeno e uma matemática para o fenômeno passaram a se inter-relacionar de forma que consistem em objetos de estudo. Em sendo um objeto, o fenômeno necessita de uma variedade de representações para que os alunos consigam estabelecer relações matemáticas. Assim, “uma única representação nunca pode ser suficiente para construir cognitivamente de maneira eficaz um objeto matemático” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 169). Na Figura 2 apresentamos os ajustes de curva que os alunos utilizaram para a escolha do modelo matemático que melhor representava a solução: $B(t) =$

$9,35e^{-0,04t} + 5,52$ em que B representa o valor do grau Brix, em função do tempo t em horas.

Figura 2 – Ajustes de curva utilizados pelos alunos na escolha do modelo matemático



Fonte: Slides da comunicação dos alunos.

De posse de representações para o estudo do fenômeno, os alunos partiram para a solução do problema. Para isso, poderiam igualar a representação algébrica a 6 e realizar os tratamentos matemáticos. No entanto, o que de fato fizeram foi utilizar a tecnologia, mais especificamente o software GeoGebra e analisar intersecções gráficas, conforme explicações realizadas pelo grupo:

Adriano: Na verdade usamos o GeoGebra.

Aluna: A gente também usou. Vocês usaram a função constante seis para ajudar?

Fábio: Usamos para ver o ponto de intersecção. Fizemos tudo junto, as duas funções que era exponencial, opa do tipo exponencial... e a logística.

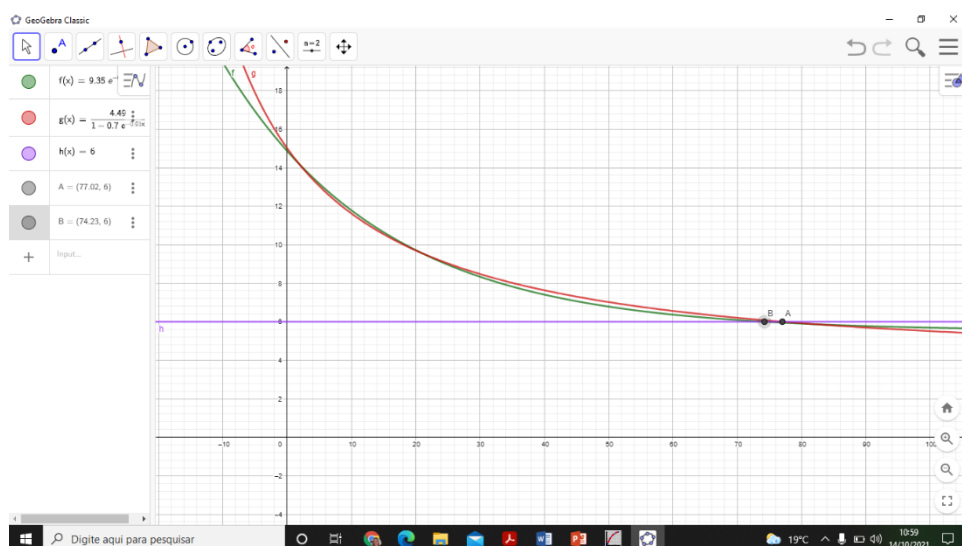
Prof: Muito interessante essa análise gráfica!

Adriano: A gente se baseou em uma aula que tivemos mais a ajuda da professora com o GeoGebra.

Mesmo que os alunos tenham feito o uso do software GeoGebra para chegar a uma solução para o problema – 74,23 horas para atingir o valor de 6 graus Brix –, isso não denota uma limitação dos conhecimentos matemáticos. Trata-se de procedimentos que utilizaram

para chegar ao objetivo: responder o problema. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23), o “aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vistas a atingir um objetivo”. Além disso, se basearam em aulas da própria disciplina, como destaca Adriano “A gente se baseou em uma aula que tivemos mais a ajuda da professora com o GeoGebra”. De fato, “o uso do computador para ensinar/aprender Matemática requer conhecimento, uma vez que é preciso saber o que, exatamente, se deseja que o computador faça” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 31). Na Figura 3 é apresentada a representação gráfica de dois dos modelos analisados juntamente com a função $f(x) = 6$.

Figura 3 – Representações gráficas feitas no GeoGebra e solução para o problema



Fonte: Slide da comunicação dos alunos.

Os alunos finalizaram a apresentação dos resultados da atividade investigativa e foi aberta uma discussão em que professora e outros alunos da sala poderiam fazer questionamentos:

Prof: *Vocês acham que essa atividade pode ajudar na compreensão de conceitos matemáticos?*

Hugo: *Sim, com certeza.*

Prof: *Por quê?*

Fábio: *Com a prática do experimento e depois a aplicação do cálculo, houve uma melhor compreensão de todos seja na importância da aplicação de cálculos em um determinado problema e na utilização dos conceitos utilizados, onde teve uma melhora no entendimento(sic) matemático do grupo como um todo.*

Adriano: *Eu gostei de fazer essa abordagem mesmo que tenha dado muito trabalho. A gente se reuniu, coletou dados. Queríamos fazer a da carne com o churrasco [risos] aproveitamos o churrasco, mas vimos que não tínhamos equipamentos. A gente deu um jeito com as coisas que o Fábio tem na casa dele.*

Fábio: *Até meu pai quis entender o modelo [risos] mas desistiu [risos].*

Prof: *E o que aconteceria se o Brix fosse um valor menor?*

Fábio: *Ao invés de cachaça teríamos álcool puro.*

Prof: *Alguém tem alguma pergunta?*

Aluna: *Mas o modelo tem de parar no seis, certo? E vai parar a destilação?*

Fábio: *Na verdade não, se ficar dentro do recipiente não. Tem de mudar de recipiente e fazer tratamentos, inserindo alguns ingredientes, porque o processo continua. Essas que a gente apresentou do preparo do mosto e da destilação são duas delas.*

Prof: *Boa questão Aluna. Como vocês representariam no modelo esse parar no seis como a Aluna considerou?*

Adriano: *A gente não pensou nisso, professora.*

Prof: *Alguém da sala tem alguma sugestão?*

Aluno: *Depois das 74 horas?*

Prof: *Isso, como a gente representa no modelo que sempre vai ser seis depois desse tempo?*

Aluna: *Parece o que aconteceu com o nosso [se referindo ao trabalho que desenvolveram] vai ser sempre uma reta [gesticulando com a mão a representação da função constante].*

A professora aproveitou a abordagem do Aluno para fazer questionamentos tentando refinar o modelo matemático que representaram. Mesmo que os alunos de antemão não tinham uma solução para essa “nova” representação, uma aluna da sala retoma o estudo de sua atividade investigativa para associar ao que estava sendo questionado. D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 105) destacam que enquanto professores devemos convidar “os nossos alunos a refletir sobre as implicações semióticas do que propomos”, possibilitando uma reestruturação da expressão algébrica que representa o objeto estudado. Para isso, outros questionamentos são realizados:

Prof: *Lembram da função que muda de sentença quando altera o domínio?*

Fábio: *Hummm, função definida por partes.*

[professora acena positivo com a cabeça]

Fábio: *A gente pode arrumar?*

Prof: *Podem arrumar sim. Todos da sala concordam?*

Aluna: *Se o Fábio disse que nesse processo para. Na verdade, o modelo poderia terminar aí né professora? Porque depois vai para outro procedimento.*

Prof: *O que o grupo acha?*

Adriano: *Não sei se entendi bem.*

Fábio: *Adriano, a Aluna está sugerindo que nosso modelo vai até as setenta e quatro horas e pouco lá e depois fica em outro recipiente para os outros procedimentos que agora não são de destilação.*

Adriano: *Sim. Mas daí o que a gente faz?*

Prof: [interrompendo] *O modelo de vocês é descritivo do processo e não possibilita fazer previsões depois de passar esse tempo.*

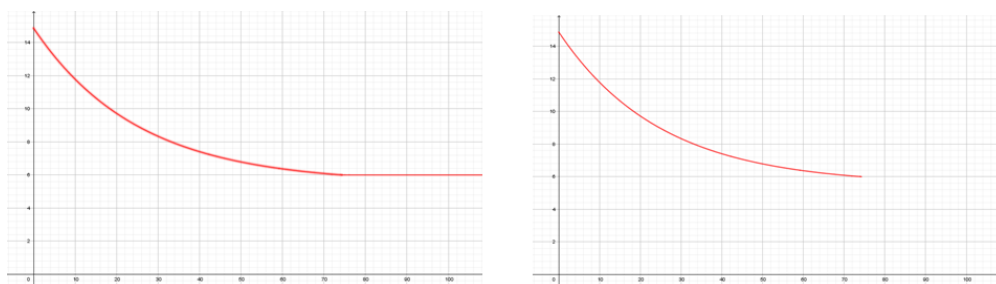
Adriano: *Mas está certo?*

Prof: *Os encaminhamentos estão muito bons!*

Neste trecho, evidencia-se a importância da comunicação como um todo na aula de matemática, o que denota que não apenas representações e símbolos matemáticos estão relacionados com a cognição matemática, mas sim todo o ambiente social de aprendizagem na sala de aula (MORGAN et al., 2014). Com a comunicação, o grupo fez argumentações que puderam “convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais esses resultados são acessíveis de que a solução apresentada é razoável e é consistente” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 19).

No relatório final entregue pelos alunos, o grupo 1 apresentou duas representações gráficas que subsidiaram o que foi discutido em sala de aula com relação à função definida por duas sentenças – $B(t) = \begin{cases} 9,35e^{-0,04t} + 5,52 & \text{se } 0 \leq t \leq 74,23 \\ 6 & \text{se } t > 74,23 \end{cases}$ – e o modelo descritivo que considerava um domínio limitado – $B(t) = 9,35e^{-0,04t} + 5,52$ para $0 \leq t \leq 74,23$ –, conforme mostra a Figura 4. O que podemos evidenciar é que na abordagem para a situação investigada há o favorecimento de várias representações para o objeto matemático. D’Amore, Pinilla e Iori (2015, p. 112), afirmam que “uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribui de maneira específica com alguns aspectos do objeto”.

Figura 4 – Representações gráficas representando os modelos matemáticos do grupo

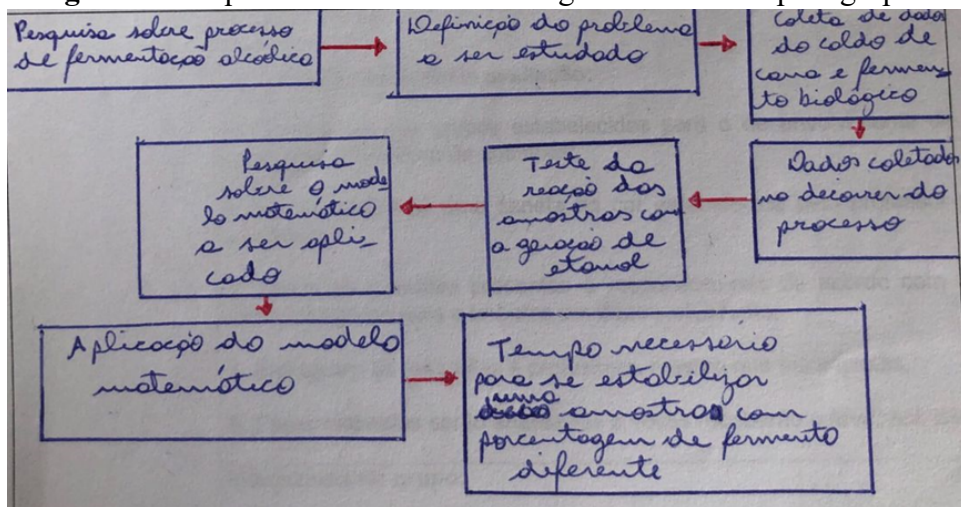


Fonte: Relatório entregue pelo grupo de alunos.

A professora, ao final das apresentações, solicitou a cada grupo que representasse, por meio de um esquema, os encaminhamentos da atividade investigativa. Esse procedimento, de certo modo, dá indícios do entendimento dos alunos com relação à

atividade que escolheram investigar. Na Figura 5 é apresentado o esquema feito pelo grupo 1.

Figura 5 – Esquema da atividade investigativa elaborada pelo grupo 1



Fonte: Registro feito pelo grupo 1.

No esquema do grupo 1 fica evidente ações que os alunos realizaram para o desenvolvimento da atividade investigativa. O que podemos conjecturar é que os alunos compreenderam e esquematizaram tais ações, aproximando-as daquelas próprias caracterizadas por Silva e Vertuan (2018). A partir de uma proposta de investigação aberta – escolheram uma situação do contexto do curso para ser investigada – os alunos pesquisaram informações sobre o fenômeno, definiram o problema, realizaram a coleta de dados empíricos, fizeram uso de representações tabular, gráficas e algébricas, aplicaram o modelo para obter uma resposta para o que se propuseram a investigar.

Os alunos representaram no esquema as ações a partir da temática que desenvolveram as abordagens matemáticas, todavia, há de se considerar que ações de escolhas do tema também foram realizadas pelo grupo e antecederam o primeiro quadro do esquema. Analisar temáticas que podem ser abordadas sob um viés matemático consiste em uma antecipação dos conhecimentos matemáticos que podem ser utilizados para o desenvolvimento da atividade ou uma limitação do acesso a equipamentos que permitiriam a coleta de dados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho relatamos e analisamos aspectos da linguagem matemática, a partir da semiótica peirceana, e como se relacionam com a cognição matemática no desenvolvimento

de uma atividade investigativa desenvolvida por alunos da disciplina de Cálculo em um curso superior de Tecnologia em Alimentos. Considerando Cognição Matemática como uma área interdisciplinar de investigação que busca compreender os processos por meio dos quais sujeitos compreendem ideias e conceitos matemáticos, focamos nossa análise em aspectos relacionados à linguagem e à representação das ideias matemáticas relatadas pelos alunos na comunicação de sua atividade investigativa, pois partimos do princípio de que objetos matemáticos não são diretamente acessíveis, necessitando de alguma forma de representação para que possam ser comunicados.

Em situação de ensino e de aprendizagem de matemática, a forma como as ideias matemáticas vão sendo representadas ao longo do desenvolvimento de uma atividade investigativa dão indícios de alguns dos processos relacionados à cognição matemática. Por meio da comunicação evidenciamos a cognição matemática de um dos sete grupos que desenvolveram as atividades investigativas quando relatam suas ações para a escolha da temática, para o ajuste de curvas aos dados coletados empiricamente, para a obtenção da solução para o problema e para as argumentações utilizadas para responder aos questionamentos da professora e de outros alunos na sala com o intuito de refinar o modelo matemático construído.

Na experiência relatada, inicialmente a situação foi representada somente com elementos da língua natural e, conforme a investigação avançava, novas informações foram sendo obtidas e novas representações foram utilizadas. Após a coleta experimental de informações acerca do grau brix da solução, os alunos representaram estas informações por meio de uma tabela, o que possibilitou que fosse observado uma tendência de comportamento do decréscimo do grau brix: *a diminuição não é sempre a mesma, então não podia ser uma reta* (aluno Adriano), o que, por sua vez, os motivou à uma nova forma de representação destas informações, com o uso do software Curve Expert.

Embora o software utilizado tenha fornecido de maneira automática diferentes possibilidades de curvas que se ajustavam aos dados coletados pelos alunos, foi necessário que o grupo escolhesse, a partir da situação, qual das opções fornecidas pelo software melhor se ajustaria aos dados e as características próprias da situação: *Pegamos essa segunda que é exponencial né* (aluno Hugo). Para a escolha da segunda opção, os alunos utilizaram o conceito de limite de uma função, uma vez que, como a situação inicial determinava que o

grau brix da solução deveria ser 6, então o limite da função que melhor representaria a situação deveria ser próximo de 6: *ficamos com a segunda ao invés da quarta por conta do limite [...] o limite vai para 5,52* (aluno Fábio).

Após a obtenção da resposta para a questão, a comunicação na sala de aula, mediada pela professora, possibilitou um refinamento da expressão algébrica que representava a situação em estudo. Nesta etapa do desenvolvimento da atividade, verifica-se que novas representações foram obtidas e estas, associadas a todas as outras anteriormente utilizadas e ao ambiente social de aprendizagem da sala de aula, favoreceram a construção cognitiva do objeto em estudo, conforme afirmam D'Amore, Pinilla e Iori (2015).

A investigação aclara alguns aspectos da linguagem matemática e como se relacionam com a cognição matemática na apresentação de uma atividade investigativa por um dos grupos de alunos da turma. Trata-se de um resultado parcial da investigação, pois não realizamos um acompanhamento dos alunos do grupo *in loco* da criação de suas próprias questões, do encaminhamento para a elaboração das hipóteses, do planejamento e execução de ações, discussões sobre a validação (ou não) das respostas encontradas que são etapas próprias de uma atividade investigativa, como asseveram Silva e Vertuan (2018). Em se tratando de cognição matemática, o acompanhamento dos empreendimentos para a estruturação de cada uma dessas etapas é relevante e se configura numa possibilidade de pesquisa futura.

Entendemos também que nossas análises são restritas a um grupo de três alunos que findaram com sucesso a atividade investigativa ao olhar dos próprios colegas de sala, visto que tiveram a melhor avaliação entre os pares. Considerar o estudo sobre a cognição matemática de uma turma de alunos permitiria traçar um perfil em relação à implementação de uma atividade investigativa ancorada em uma mesma temática, por exemplo, de forma que ações poderiam convergir.

O que podemos aclarar é que pesquisas que versam sobre atividades investigativas e cognição matemática constituem um contexto profícuo para discussões no âmbito da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 31, p. 202-219, 2017.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BALDAQUIM, M. J.; SILVA, K. A. P. Registros de Representação Semiótica Mobilizados em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Revista Acta Scientiae**, v. 20, p. 451-467, 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos, Telmo Mourinho Baptista. 2.ed. Porto: Porto Editora, 1994.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2015.

DEHAENE, S. Varieties of numerical abilities. **Cognition**, n. 44, p. 1-42, 1992.

DUVAL, R. Basic issues for research in Mathematics Education. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Eds.). **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. v. 1. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, p. 55-69.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. **Education Studies in Mathematics**, v. 1-2, n. 61, p. 217-233, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GILMORE, C.; GÖBEL, S. M.; INGLIS, M. **An Introduction to Mathematical Cognition**. New York: Routledge, 2018.

HALL, J.; LINGEFJÄRD, T. **Mathematical Modeling**: applications with GeoGebra. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2017.

LEIVAS, J. C. P. Geometria Euclidiana e do Taxi: um problema concreto e os Registros de Representações Semióticas. **Revista de Educação Matemática**, v. 16, n. 22, p. 252-269, 2019.

MORGAN, C. et al. Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. **ZDM Mathematics Education**, n. 46, p. 843-853, 2014.

NÖTH, W. **Panorama da semiótica**: de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. de 2000. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEIRCE, C. S. **Semiótica e Filosofia**: textos escolhidos. São Paulo: Cultrix, 1972.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PREDIGER, S.; ERATH, K.; OPITZ, E. M. The Language Dimension of Mathematical Difficulties. In: FRITZ, A.; HAASE, V. G.; RÄSÄNEN, P. (eds). **International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: from the laboratory to the classroom**. Cham: Springer International Publishing AG, 2019, p. 437-455.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2008.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior. **Ciência & Educação** (UNESP), v. 24, p. 501-516, 2018.