EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/Euler
DOI: https://doi.org/10.34312/euler.v10i1.14209
Juni 2022, Vol. 10, No. 1, Hal. 66-74

Analisis Gerak Partikel dalam Ruang Waktu Lengkung dengan Fungsi Green

Yamin Ismail[1], Abas Kaluku[2]

[1,2] Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia
**Penulis Korespondensi. Email: yamin09ismail@gmail.com*

Abstrak

Gerak partikel dalam ruang waktu lengkung sebagai generalisasi dari ruang waktu datar dengan metrik $g_{\mu\upsilon}$ gerak yang dimaksud dalam artikel ini adalah muatan skalar q, muatan listrik e dan massa partikel m akan menghasilkan medan yang dapat berperilaku sebagai sebuah zona radiasi gelombang elektromagnetik,dengan menerapkan persamaan Maxwell dalam fungsi Green gerak partikel direpresentasikan dalam bentuk percepatan dapat ditentukan.

Kata Kunci : Geodesik; Metrik; Partikel; Fungsi Green

Abstract

Motion of particle in curved spacetime as generalization of flat space-time with metric $g_{\mu\upsilon}$ the motion in this article is scalar charge q, electric charge e,and particle mass m will produce field that can have the behavior as a radiation zone of electromagnetic wave, by applying Maxwell equation on Green function motion of particle is represented in form of acceleration that can be determined.

***Keywords**: Geodesic*; *Metric*; *Particle*; *Green Function*

1. Pendahuluan

Analisis gerak merupakan kajian “primitif” yang tetap menarik untuk ditelaah. Ketertarikan ini disebabkan bahwa gerak itu sendiri tak luput dari intuitif kita yang secara fisis selalu direpresentasikan dalam ruang datar oleh vektor percepatan konstan dalam ruang-waktu lengkung tidaklah demikian, gerak partikel mempunyai sifat-sifat yang unik. Keunikan ini telah dianalisis dalam Teori Relativitas Umum yang dinyatakan dalam persamaan geodesik lengkung [1-3]. Jelaslah bahwa dalam ruang datar geodesiknya berupa garis lurus sedangkan dalam ruang-waktu lengkung geodesiknya berupa garis lengkung. Persamaan geodesik ini sama sekali tidak dipengaruhi oleh massa ataupun muatan partikel akan tetapi semata-mata disebabkan oleh kelengkungan ruang-waktunya [1, 3].

Gerak dalam ruang-waktu datar juga merupakan objek penelitian aktif para penyelidik sejak zaman Lorentz, Abraham hingga Poincare, Mereka menghasilkan turunan relativistik umum persamaan gerak dalam ruang Minkowsky datar. Pada tahun 1960 De Witt dan Brehme menghasilkan persamaan Dirac yang diperumum untuk ruang kurva lengkung, dan perhitungan dikoreksi oleh Hobbs beberapa tahun kemudian [4]. Dalam tahun 1997 gerak sebuah massa titik dalam ruang-waktu lengkung juga telah diselidiki oleh Milno, Sasaki dan Tanaka [5]. Mereka menurunkan persamaan gerak untuk menggambarkan percepatan partikel (yang tidak nol kecuali partikel dalam keadaaan diam). Persamaan gerak yang sama kemudian dihasilkan oleh Quinn dalam tahun 2000 yang menyatakan bahwa massa skalar tidak memerlukan kostanta gerak [6, 7].

Dalam penelitian ini kita akan menyusun kembali persamaan gerak partikel yang dipusatkan pada tiga dasar jenis partikel, yaitu muatan skalar q, muatan listrik e dan massa m titik yang

Submit: 12 Maret 2022, Diterima: 13 Mei 2022, Online: 15 Mei 2022

dikhususkan pada ruang-waktu latar belakang dengan metrik gab. Partikel ini bersama medan magnet akan memancarkan radiasi dalam zona gelombang. Radiasi energi terbuang, dan dari momentum anguler partikel kemudian menjalar menjadi sebuah reaksi radiasi. Sehingga garis dunianya tidaklah simpel yang digambarkan oleh persamaan geodesik dari ruang-waktu latar belakang. Radiasi yang dipancarkan dan bekerja langsung pada partikel akan menyebabkan gaya gerak pada partikel itu sendiri. Dalam ruang-waktu lengkung, reaksi radiasi yang terdiri dari komponen – komponennya secara langsung diasosiasikan dengan efek disipatif. Namun, efek disipatif tersebut terdiri dari komponen – komponen konsevatif yang justru tidak diasosiasikan dengan komponen energi atau transpor momentum anguler. Gaya gerak ini sebanding dengan muatan skalar q^2 dari interaksi Coulomb, sebanding muatan listrik dengan e^2 dan massa titik m^2 dari interaksi gravitasi Newtonian [8-11].

Perilaku gerak partikel dalam ruang-waktu lengkung dapat dianalisis dengan meninjau kedudukannya. Dengan demikian diperlukan Teori Bitensor untuk mengkonstruksi sistem koordinat yang satu ke koordinat tetangganya dalam menggambarkan kedudukan partikel menurut garis dunianya. Salah satu aplikasi yang utama adalah dengan menerapkan fungsi Green pada ruang-waktu lengkung [1, 4, 12]. Dan akhirnya menghitung skalar medan elektromagnet, medan gravitasi dekat garis dunia tersebut.

Jika partikel bergerak mengelilingi pusat muatan (yang mana diambil tetap) dan memancarkan radiasi terkecuali kita akan mengabaikan efek radiasi yang dipancarkan oleh muatan yang bergerak spiral. Efek ini haruslah dihitung dengan menggunakan persamaan gerak, dan aksi medan partikel itu sendiri harus dimasukkan. Jika radiasi menjalar keluar dan muatan bergerak masuk spiral, maka tentunya pembalik waktu harus invarian terhadap persamaan Maxwell. Ketika arah waktu khusus diambil sedemikian sepanjang semua penyelesaian yang mungkin akan memenuhi persamaan gelombang. Oleh sebab itu dibutuhkan penelaahan persamaan gerak partikel dalam ruang-waktu lengkung dan membandingkannya dengan gerak partikel dalam ruang-waktu datar. Telaah gerak yang dimaksud menentukan formulasi yang diperumum untuk percepatan partikel yang bergerak dalam ruang-waktu lengkung yang sedang memancarkan radiasi. Penelitian ini bermanfaat sebagai referensi dalam pengembangan fisika teoritik dan kosmologi untuk menelaah struktur, dinamika alam semesta.

2. Metode Penelitian

Metode penelitian ini sifatnya teoritik. Peneliti mengkaji gerak partikel yang memenuhi persamaan gelombang Maxwell dengan menerapkan vektor kerapatan arus, kemudian dengan mengasosiasikannya dengan fungsi green dalam ruang-waktu datar dan lengkung. Kedudukan partikel dalam ruang waktu lengkung dapat diselidiki dan dikembangkan pula dalam teori Bitensor dengan meninjau dua kedudukan titik dalam garis dunia partikelnya maka persamaan gerak partikel sebagai konsekuensi kelengkungan ruang-waktu tensor Ricci.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Reaksi Dalam Ruang-Waktu Datar

Muatan listrik dalam ruang-waktu datar menghasilkan vektor potensial listrik Aa yang memenuhi persamaan gelombang bersama – sama dengan syarat gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\partial_\mu A^\mu = -4\pi j^\mu \tag{1}$$

Dimana j^μ merupakan 4-vektor kerapatan arus muatan yang biasanya ditulis dalam suku- suku 4-dimensi. Di daerah tertentu kerapatan tersebut nol kecuali posisi partikel berada di titik tak hingga. Kita akan mengasumsikan partikel bergerak mengelilingi pusat muatan (yang mana diambil tetap) dan memancarkan radiasi terkecuali kita akan mengabaikan efek radiasi yang dipancarkan oleh muatan yang bergerak spiral. Efek ini haruslah dihitung dengan menggunakan persamaan gerak, dan aksi medan partikel itu sendiri harus dimasukkan. Jika radiasi menjalar keluar dan muatan bergerak masuk spiral maka tentunya pembalik waktu harus invarian terhadap persamaan Maxwell.

Ketika arah waktu khusus diambil sedemikian sepanjang semua penyelesaian yang mungkin akan memenuhi persamaan gelombang. Secara fisis kita memilih A^{α}_{ret} sebagai solusi yang retarded. Dengan memilih kebalikannya sebagai solusi lanjut (advanced solution) A^{α}_{adv} yang menghasilkan radiasi menjalar masuk dan muatan bergerak keluar menurut lintasan spiral. Dengan memilih superposisi linearnya menurut persamaan [2, 3, 7]:

$$A^{a}_{s} = \frac{1}{2}(A^{a}_{ret} + A^{a}_{adv}) \tag{2}$$

Invarian terhadap pembalik waktu. Persamaan di atas menunjukkan kombinasi dari radiasi yang datang "retarded" dan keluar "advanced" tanpa ada energi yang hilang dalam sistem, dan muatan tidak dipengaruhi oleh radiasi. Subskrips menunjukkan simetri, yang mana potensial vektor secara simetri bergantung pada masa sekarang dan lampau. Persamaan potensial (2) dianggap tidak ada gaya yang bekerja pada partikel dan memenuhi persamaan (1).

3.2 Teori Umum Bitensor

3.2.1. Geodesik

Dalam bagian ini kita akan mengkonstruksi sejumlah teori bitensor yakni fungsi tensor dari dua titik dalam ruang-waktu. Pertama adalah x' ditetapkan sebagai titik asal yang dipasangkan dengan indeks $\alpha'\beta'$. Kedua adalah x yag ditetapkan sebagai "titik medan" dan berpasangan dengan indeks α, β kita asumsikan bahwa x mempunyai $N(x')$ tetangga konveks normal dari x'. Ini adalah himpunan titik-titik yang dihubungkan ke x' oleh geodesik yang unik. Geodesik β yang menghubungkan titik x ke x' menurut relasi $z(\lambda)$, dalam hal ini λ merupakan parameter affin yang mempunyai jangkauan λ_0 hingga λ_1. Oleh karena itu kita memiliki $z(\lambda_0) = x'$ dan $z(\lambda_1) = x$. untuk titik z yang sebarang pada geodesik, kita memasangkan indeks λ, μ, v dan sebagainya. Vektor $t^{\mu} = \frac{dz_{\mu}}{d\lambda}$ adalah vektor tangennya yaitu yang selalu menyinggung kurva. Fungsi dunia Synge [2, 8, 9, 12] adalah fungsi skalar dari titik asal x' dan titik medan x. Fungsi ini didefinisikan sebagai:

$$\rho(x, x') = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_{\mu v}(z) t^{\mu} t^{v} d\lambda \tag{3}$$

Integral tersebut diatas dievaluasi pada geodesik C yang menghubungkan titik x ke x'. $p(x, x')$ invarian di bawah translasi $\lambda \rightarrow \lambda' = a\lambda + b$, dimana a dan b konstanta. Dalam geodesik kuantitas $\in \equiv g_{\mu v} t^{\mu} t^{v}$ adalah konstan. Dengan fungsi dunia pers (3.1) sama dengan ½$(\lambda - \lambda')^2$. Jika geodesik timelike maka λ berupa waktu proper τ. Akibatnya, $\in = -1$ dan $\rho = -\frac{1}{2}(\Delta\tau)^2$. Jika geodesik spacelike maka λ jarak proper s yang berakibat $\in = 1$ dan $\rho = \frac{1}{2}(\Delta s)^2$. Jika geodesik null maka $\rho = 0$. Secara umum, fungsi dunia adalah setengah jarak geodesik yang dikuadratkan antara titik x' dan x. Dalam ruang datar geodesik yang menghubungkan x' ke x adalah garis lurus dan tentunya $\rho = \frac{1}{2}\eta\alpha\beta(x - x')\alpha + (x - x')\beta$ dalam koordinat Lorentzian.

3.2.2. Turunan Fungsi Dunia

Fungsi dunia $\rho(x, x')$ dapat diturunkan terhadap argumen yang lain seperti $\rho\alpha = \frac{\partial\rho}{\partial x\alpha}$ turunan parsial terhadap x'. jelaslah bahwa $\rho\alpha$ mempunyai vektor dual terhadap operasi tensor tetap di titik x. tetapi skalar terhadap operasi tetap di x'. Serupa, bahwa $\rho\alpha$ adalah skalar di x tetapi vektor dual di x'. Kita misalkan $\nabla\beta\rho\alpha$ merupakan turunan kovarian terhadap x yakni hasil turunannya merupakan tensor. Ini adalah tensor rank 2 di x dan skalar di x'. Tensor ini simetri terhadap pertukaran indeksnya $\rho\alpha\beta = \rho\beta\alpha$.

3.2.3. Evaluasi Turunan Pertama

Kita dapat menghitung $\rho\alpha$ dengan menguji bagaimana ρ berubah – ubah ketika titik medan x bergerak. Dimisalkan titik medan yang baru adalah $x + \sigma x$ dan $\sigma\rho = \sigma(x + \sigma x),\ x') - \rho(x, x')$ yang berhubungan dengan variasi fungsi dunia. Kita misalkan $\beta + \sigma\beta$ adalah geodesik yang unik yang menghubungkan $x + \sigma x$ ke x' yang digambarkan oleh fungsi dunia dengan parameter λ yaitu $z_\mu(\lambda) + \sigma z_\mu(\lambda)$ dengan catatan bahwa $\sigma z(\lambda_0) = \sigma x' = 0$ dan $\sigma z(\lambda_1) = \sigma x$ dengan menggunakan prinsip variasi persamaan (3).

$$\delta\rho = \Delta\lambda \int_{\lambda 1}^{\lambda} \left[g_{\mu v} \frac{dz}{dx^{\mu}} \frac{dz}{dx^{v}} \delta\left(\frac{dz}{dx^{v}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x^{\lambda}} \frac{dz}{dx^{\mu}} \frac{dz}{dx^{v}} \delta z\lambda \right] d\lambda \tag{4}$$

dimana $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$, dengan mengintegrasikan suku pertama diperoleh

$$\delta\rho = \Delta\lambda \left[g_{\mu v} \frac{dz}{dx^{\mu}} \delta z^{v} \right] - \Delta\lambda \int_{\lambda 1}^{\lambda} \left[g_{\mu v} \frac{d^{z}}{dx^{2}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu v} \frac{dz}{dx^{v}} \frac{dz}{dx^{\lambda}} \right] \delta z^{\mu} d\lambda \tag{5}$$

Integral di atas lenyap karena $z_\mu(\lambda)$ memenuhi persamaan geodesik. Syarat di x nol variasi σx lenyap. Sehingga ruas kiri dapat diganti dengan

$$\rho_\alpha(x, x') = (\lambda_1 - \lambda_0) g_{\alpha\beta} t^{\beta}. \tag{6}$$

Dalam hal ini metrik dan vektor tangen dievaluasi di x. kita melihat bahwa $\rho(x, x')$ vektor tangen di x. jika persamaan di atas x diganti dengan $z_\mu(\lambda)$ pada $C\lambda_1$ dengan λ kita peroleh $\rho_\mu(z, x') = (\lambda - \lambda_0) g_{\alpha\beta} t_\beta$ vektor tangen yang diukur pada geodesik tersebut.

Menariknya, kita dapat menghitung beberapa harga fungsi dunia yang berubah di bawah perubahan titik asal. Di sini masing – masing variasi geodesik $\sigma z(\lambda_0) = \sigma x'$ dan $\sigma z(\lambda_1) = \sigma x = 0$ dan kita peroleh $\sigma\rho = -\Delta\lambda g\alpha'\beta, t\alpha'\Delta x\beta'$. Ini menunjukkan bahwa

$$\rho_\alpha(x, x') = -(\lambda_1 - \lambda_0) g_{\alpha'\beta'}\, t^{\beta'} \tag{7}$$

yang mana metrik dan vektor tangen dievaluasi di x'. kita melihat bahwa $\upsilon\alpha(x, x')$ mempunyai vektor tangen geodesiknya berharga negatif di x'. Menurut persamaan (7) kita memiliki $g_{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = (\Delta\lambda)2 g_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta = (\Delta\lambda)2\epsilon$ dan menurut persamaan (3) sama dengan 2ρ. Dari sini kita memiliki hubungan

$$g_{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 2\rho$$

atau serupa

$$g_{\alpha'\beta}\rho_{\alpha'}\rho_{\beta'} = 2\rho$$

Yang menghubungkan antara metrik dengan garis dunia. Hubungan ini sangatlah penting dalam teori relativitas untuk menyatakan hubungan metrik dalam ruang datar.

3.3 Pergeseran Paralel

3.3.1 Tetrad Pada Geodesik

Tetrad dapat diperoleh dengan mendefinisikan frame yang menghubungkan titik x ke x' dengan memperkenalkan basis ortonormal yang digeser paralel sepanjang geodesik. Indeks frame a, b mempunyai jangkauan dari 0 hingga 3 dan vektor frame mempunyai sifat

$$g_{\mu v} e^{\mu}_{a} e^{v}_{b} = \eta_{ab}, \frac{De^{\mu}_{a}}{d\lambda} = 0$$

Dimana η_{ab} metrik Minkowsky diag $(1, -1, -1, -1)$ (yang mana kita akan menggunakan frame untuk menurunkan dan menaikkan indeks). Lengkapnya kita memiliki hubungan berikut:

$$g^{\mu v} = \eta^{\alpha\beta} e_a^\mu e_b^v$$

Tetrad dualnya definisikan sebagai

$$e_\mu^a = \eta^{ab} g_{ab} e_b^v$$

Ini juga digeser paralel pada geodesik C. Hubungan yang lebih lengkap dalam suku suku tetrad dual lebih kompak dalam bentuk

$$g_{\mu v} = \eta_{ab} e_\mu^a e_v^b$$

Hal ini mudah untuk menunjukkan bahwa tetrad dan dualnya memenuhi $e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a$ dan $e_v^a e_a^\mu = \delta_v^\mu$.

3.3.2. Definisi dan Sifat-Sifat Pergeseran Paralel

Setiap medan vektor pada C disusun oleh basis e_μ^a sehingga $A^\mu = A^a e_\mu^a$ dan komponen frame vektornya diberikan oleh $A^a = A^\mu e_\mu^a$ jika A^μ digeser paralel pada geodesik, maka koefisien A^μ konstan. Komponen vektor tersebut di x dapat diungkapkan sebagai $A^\alpha = (A^{\alpha'} e_{\alpha'}^a) e_a^\alpha$ atau ditulis dalam bentuk [2, 5]:

$$A^\alpha(x) = g_{\alpha'}^\alpha(x, x') A^{\alpha'}(x')$$
$$g_{\alpha'}^\alpha(x, x') = e_a^\alpha(x) e_a^{\alpha'}(x')$$

jika dikalikan dengan $g_{\alpha'}^\alpha(x, x')$ persamaan di atas maka akan diperoleh

$$A^{\alpha'}(x') = g_\alpha^{\alpha'}(x, x') A^\alpha(x),$$
$$g_\alpha^{\alpha'}(x, x') = e_\alpha^a(x) e_a^{\alpha'}(x')$$

di mana $g_\alpha^{\alpha'}(x, x')$ invers dari $g_{\alpha'}^\alpha(x, x')$ dan memenuhi

$$g_{\alpha'}^\alpha g_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, g_\alpha^{\alpha'}$$
$$g_{\beta'}^\alpha = \delta_{\beta'}^{\alpha'}$$

untuk sembarang tensor vektor dual yang digeser paralel sepanjang geodesik $CA_\mu = A_a e_\mu^a$maka komponen frame $A_\mu = A_a e_\mu^a$ adalah konstan dan vektor dual di x dapat diungkapkan sebagai

$$A_\mu(x) = g_{\alpha'}^\alpha(x', x) A_{\alpha'}(x)$$

karena vektor-vektor basis digeser pada C, maka vektor tersebut memenuhi $e_{a;\beta}^\alpha \rho^\beta = 0$ di x dan $e_{a;\beta'}^{\alpha'} \rho^{\beta'} = 0$ di x' sehingga memenuhi sifat-sifat:

$$g_{\alpha';\beta}^\alpha \rho^\beta = g_{\alpha';\beta'}^\alpha \rho^{\beta'} = 0$$
$$g_{\alpha;\beta}^{\alpha'} \rho^\beta = g_{\alpha;\beta'}^{\alpha'} \rho^{\beta'} = 0$$

3.4 Sistem Koordinat

3.4.1. Koordinat Normal Riemann

Dimisalkan x' merupakan titik asal yang tetap dan sebuah tetrad $e_a^\alpha(x')$ kita dapat memasangkan ke titik tetangga x membentuk koordinat baru

$$\hat{x}^a = -e_{\alpha'}^a(x') \rho^{\alpha'}(x, x')$$

di mana $e_{\alpha\prime}^a = \eta^{ab} g_{\alpha\prime\beta\prime} e_b^{\beta\prime}$ adalah tetrad dual pada x'. Koordinat yang baru $\hat{x}^a$ disebut koordinat normal Riemann. Dua buah koordinat normal memenuhi hubungan $\eta_{ab}\hat{x}^a\hat{x}^b = 2\rho(x, x')$.

Jika menggeser titik x ke $x + \sigma x$ maka koordinat koordinat yang baru berubah menjadi $\hat{x}^a + \delta\hat{x}^a = -e_{\alpha'}^a \rho^{\alpha'}(x + \delta\hat{x}, x') = \hat{x}^a - e_{\alpha'}^a \rho_\beta^{\alpha'} \delta x^\beta$ sehingga diperoleh persamaan transformasi metrik sebagai:

$$d\hat{x}^a = -e^{\alpha'}_{\beta} e^{a}_{\alpha'} dx^{\beta}$$

Jelaslah bahwa transformasi koordinat ditentukan oleh $\frac{\partial \hat{x}^a}{\partial \hat{x}^\beta} = -e^{a}_{\alpha'}\rho^{\alpha'}_{\beta}$ dan bagi titik yang berimpit berlaku [2, 8, 10]

$$\left(\frac{\partial \hat{x}^a}{\partial \hat{x}^\alpha}\right) = e^{a}_{\alpha'}, \left(\frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial \hat{x}^a}\right) = e^{\alpha'}_{a}$$

menariknya, Jacobian dari persamaan (2.22) diberikan oleh $J = \sqrt{-g}\Delta(x, x')$ dimana g adalah determinan metrik koordinat asal dan $\Delta(x, x')$ determinan Vleck yang memaikan peranan penting dalam transformasi sistem koordinat.

3.4.2. Koordinat Normal Fermi

Misalkan γ kurva timelike yang direpresentasikan oleh hubungan parametrik $z_\mu(\tau)$. Misalkan γ garis dunia dari sebuah partikel dalam ruang-waktu lengkung. Garis dunia tersebut digambarkan oleh persamaan parametrik $z_\mu(\tau)$ yang mana τ disebut waktu proper. Vektor tangennya adalah $u_\mu = dz_\mu/d\tau$ dan percepatan partikelnya diberikan oleh $a_\mu = dz_\mu/d\tau$. Medan vektor u_μ dikatakan bertransformasi Remi-Walker pada γ [7, 11] apabila solusi vektor tersebut memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = u_v a^v v^\mu - u_v v^v a^\mu.$$

Persamaan diferensial di atas akan tereduksi menjadi persamaan geodesik jika u_μ. Operasi Fermi-Walker (FW) mempunyai sifat penting antara lain. Pertama, u_μ secara otomatis bertransformasi menurut FW sepanjang γ ortogonal terhadap a_μ. Kedua, jika vektor u_μ dan w_μ bertransformasi FW sepanjang γ maka perkalian dalamnya (*inner product*) adalah konstan pada γ.

3.5 Fungsi Green

3.5.1. Fungsi Green dalam Ruang-Waktu Datar

Untuk melihat persamaan (5) berlaku secara umum untuk ruang lengkung, secara matematis bahwa penyusunan kembali potensial retarded ke dalam singular simetri dan radiatif reguler dapat dibentuk oleh beberapa jenis fungsi Green yang diasosiasikan dengan persamaan (1) Eric Poisson [4] telah mengungkapkan solusi retarded persamaan gelombang sebagai

$$A^\alpha_{ret}(x) = \int G^\alpha_{+\beta'}(x, x')j^{\beta'}(x')dV'. \tag{8}$$

Fungsi Green retarded didefinisikan oleh $G^\alpha_{+\beta'}(x, x') = \delta^\alpha_{\beta'}\delta(t - t' - |x - x'|)/|x - x'|$. Di sini $x = (t, x)$ titik medan sembarang dan $x' = (t, x')$ titik sumbernya dan $dV' \equiv d4x'$. Dengan cara serupa, untuk solusi advanced ditulis:

$$A^\alpha_{adv}(x) = \int G^\alpha_{-\beta'}(x, x')j^{\beta'}(x')dV' \tag{9}$$

Fungsi Green advanced didefinisikan oleh $G^\alpha_{-\beta'}(x, x') = \delta^\alpha_{\beta'}\delta(t - t' + |x - x'|)/|x - x'|$. $G^\alpha_{-\beta'}(x, x')$ nol ketika x terletak di luar kerucut cahaya masa depan dari x', dan di titik ini $G^\alpha_{+\beta'}(x, x')$ tak terhingga. Dengan kata lain, $G^\alpha_{+\beta'}(x, x')$ berharga nol ketika x terletak di luar kerucut cahaya dari x', dan di titik ini $G^\alpha_{-\beta'}(x, x')$ tak terhingga. Fungsi Green retarded dan advanced memenuhi hubungan resiprok:

$$G^-_{\beta'\alpha}(x, x') = G_{\alpha\beta'}(x, x'). \tag{10}$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa fungsi Green retarded menjadi fungsi Green advanced jika x dan x' saling dipertukarkan. Dengan demikian kita dapat menuliskan fungsi Green tersebut sebagai fungsi singular yang diberikan oleh

$$G^{\alpha}_{S\beta'}(x,x') = \frac{1}{2}\left[G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x')\right] + \left[G^{\alpha}_{-\beta'}(x,x')\right] \tag{11}$$

dan fungsi Green radiatifnya diberikan adalah

$$G^{\alpha}_{R\beta}(x,x') = G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x') - G^{\alpha}_{S\beta}(x,x') =\rightleftarrows \frac{1}{2}\left[G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x')\right] - \left[G^{\alpha}_{-\beta'}(x,x')\right] \tag{12}$$

jelaslah bahwa fungsi Green singular simetri terhadap pertukaran indeks dan argumennya $G^{S}_{\beta'\alpha}(x,x') = G^{S}_{\alpha\beta'}(x,x')$. Sedangkan fungsi Green radiatif adalah antisimetri. Potensial

$$A^{\alpha}_{S}(x) = \int G^{\alpha}_{S\beta'}(x,x')j^{\beta'}(x')dV' \tag{13}$$

memenuhi persamaan gelombang dari persamaan (1) dan singular pada garis dunia, sedangkan potensial radiatif yang diberikan oleh

$$A^{\alpha}_{R}(x) = \int G^{\alpha}_{R\beta'}(x,x')j^{\beta'}(x')dV' \tag{14}$$

memenuhi persamaan homogen dan "berperilaku baik" ada garis dunia. Persamaan (12) mengimplikasikan potensial retarded di x dibentuk oleh peristiwa tunggal dalam ruang-waktu. Perpotongan garis dunia dan kerucut cahaya dan masa lampau dari x'. Titik ini disebut sebagai titik retarded nya yaitu nilai parameter waktu proper di titik retarded. Sama halnya kita tentukan bahwa potensial advanced pada persamaan (14) dibentuk oleh perpotongan garis dunia dan kerucut cahaya masa depan dari titik medan x. Titik ini kita namakan titik advanced yang diasosiasikan dengan x dan dinyatakan oleh $z(v)$ dimana v waktu advanced nilai parameter waktu proper di titik advanced. Dalam ruang waktu datar, potensial retarded di x bergantung pada keadaan gerak partikelnya di titik retarded $z(u)$ dalam garis dunia. Begitu pula dengan potensial advanced bergantung pada keadaan gerak di titik advancednya $z(v)$.

3.5.2. Fungsi Green dalam Ruang-Waktu Lengkung

Dalam ruang-waktu lengkung dengan tensor metrik $g_{\alpha\beta}$ persamaan gelombang untuk vektor potensial diberikan oleh

$$A^{\alpha} - R^{\alpha}_{\beta}A^{\beta} = -4\pi j^{\alpha}$$

Di mana $R^{\alpha}_{\beta}A^{\beta}$ adalah operator gelombang kovarian dan $R_{\alpha\beta}$ tensor Ricci syarat gauge Lorentz menjadi $A^{\alpha}A^{\beta}$ menyatakan turunan kovarian. Fungsi Green retarded dan advanced dapat didefinisikan untuk persamaan ini dan solusi persamaan (10) diambil dalam bentuk yang sama seperti dalam persamaan (13) dan (14), kecuali dV' diganti dengan $\sqrt{-g(x')}\ d^4x'$. Dalam ruang - waktu lengkung, potensial retarded di x bergantung pada keadaan partikel sebelum waktu retarded sedangkan potensial advanced keadaan partikel setelah waktu advancednya [4]. Struktur kausal dari fungsi Green sangatlah lengkap. Misalkan, dalam ruang waktu datar fungsi Green retarded hanya di pengaruhi oleh kerucut cahaya masa depan x' sedangkan dalam ruang-waktu lengkung fungsi Green dipengaruhi oleh "sisi" kerucut cahaya. Oleh karena itu, $G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x')$ tidaklah nol ketika $x \in I + (x')$ yang menyatakan persistiwa future x'. Sifat pemantulan ini menyatakan bahwa dalam ruang waktu lengkung, penjalaran gelombang elektromagnet tidak sama dengan kecepatan cahaya akan tetapi, lebih kecil atau sama dengan kecepatan cahaya [4] berkurangnya kecepatan cahaya disebabkan oleh interaksi radiasi dengan ruang-waktu lengkung. Kebergantungan potensial pada keadaan gerak partikelnya terpenuhi jika $\tau \leq u$ dimana u waktu tunda retarded. Detweiler and Whiting [5] telah mendefinisikan bentuk umum dari persamaan (11):

$$G^{\alpha}_{S\beta'}(x,x') = \frac{1}{2}\left[G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x')\right] + \left[G^{\alpha}_{-\beta'}(x,x')\right] - H^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$$

di mana $H^{\alpha}_{\beta'}(x,x')$ fungsi dua titik. Ini simetri dengan pertukaran indeks dan argumennya dan memenuhi solusi persamaan homogen $H^{\alpha}_{\beta'}(x,x') - R^{\alpha}_{\gamma}(x)H^{\gamma}_{\beta'}(x,x')$. Oleh karena itu, baik fungsi Green retarded maupun advanced adalah singular dan selalu memenuhi persamaan gelombang. Akibatnya fungsi Green radiatif pada persamaan (12) dapat ditulis kembali menjadi:

$$G^{\alpha}_{R\beta'}(x,x') = G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x') - (x,x') = \frac{1}{2}\left[G^{\alpha}_{+\beta'}(x,x')\right] - \left[G^{\alpha}_{-\beta'}(x,x') - H^{\gamma}_{\beta'}(x,x')\right]$$

Karena potensial memenuhi persamaan gelombang homogen sehingga berperilaku baik pada garis duniannya sehingga aksinya pada partikel bermuatan akan terdefinisi dengan baik dan karena potensial $A^{\alpha}_{S}(x)$ menunjukan tidak ada gaya pada partikel. Dari fungsi radiatif kita mempunyai bentuk tensor medan elektromagnetik $F^{\alpha}_{R\beta} = \nabla_{\alpha}A^{R}_{\beta} - \nabla_{\beta}A^{R}_{\alpha}$ dan generalisasi persamaan (12) adalah

$$a_{\mu} = \frac{1}{m}\left(f^{eksternal}_{\mu} + eF^{R}_{\mu\nu}u^{\nu}\right)$$

dimana $u^{\mu} = \frac{dz}{d\tau}$ 4-kecepatan muatan dengan percepatan a merupakan turunan intrinsik terhadap waktu propernya.

4. Kesimpulan

Garis dunia tersebut digambarkan oleh persamaan parametrik $z_{\mu}(\tau)$ yang mana τ disebut waktu proper. Vektor tangennya adalah $u_{\mu} = dz\mu/d\tau$ dan percepatan partikelnya diberikan oleh $a_{\mu} = dz\mu/d\tau$. Dengan memisalkan γ sebagai basis ortonormal yang terdiri dari 4-kecepatan dan 3 vektor spesial e^{μ}_{a} yang diberi tanda a oleh indeks frame $a = 1, 2, 3$. Vektor-vektor ini memenuhi hubungan $g_{\mu\nu}u_{\mu\nu} = -1,\ g_{\mu\nu}u_{\mu}e^{\nu}_{e} = 0$ dan $g_{\mu\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b} = 0$. Akibatnya kita dapat mengambil vektor spesial pada garis dunia $\frac{De^{\mu}_{a}}{d\tau} = au^{\mu}$ dimana

$$a_{a}(\tau) = a_{\mu}e^{\mu}_{a}.$$

yang merupakan komponen frame vektor kecepatan. Dengan demikian, kita dapat menggunakan tetrad yang dievaluasi pada garis dunia. Komponen-komponen tensor Riemann dan tensor Ricci dapat ditulis dalam suku-siku basis sebagai berikut:

$$R_{a0b0}(\tau) = R_{\mu\lambda\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}u^{\lambda}u^{\nu},$$
$$R_{a0bc}(\tau) = R_{\mu\lambda\nu\rho}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}e^{\rho}_{c}u^{\lambda}u^{\nu}u^{\rho},$$
$$R_{abcd}(\tau) = e^{\mu}_{a}e^{\lambda}_{b}e^{\nu}_{c}e^{d}_{\rho}$$

dan komponen frame tensor Ricci diberikan oleh

$$R_{00}(\tau) = R_{\mu\nu}u^{\mu\nu},$$
$$R_{A0}(\tau) = R_{\mu\nu}u^{\nu}e^{\mu}_{a},$$
$$R_{ab}(\tau) = R_{\mu\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b},$$

dalam menyusun frame tersebut di atas kita gunakan metrik dengan signatur δ_{ab} diagonal $(1,1,1)$ untuk menurunkan indeks dan inversnya $\delta^{ab} = diagonal$ $(1,1,1)$ untuk menaikan indeks.

Referensi

[1] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*. Chicago: Enrico Fermi Institute, University of Chicago, 1997.

[2] N. Chernokov, “Two Connections in The Gravity Theory,” *Discuss. J. Gravitational Phys.*, vol. 2, no. 1, 1997.

[3] S. M. Wagh, “The Significance of the General Principle of Relativity,” *arXiv:physics/0502088*, 2005, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.physics/0502088.

[4] L. Barack, “Gravitational self-force by mode sum regularization,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, no. 8, p. 084021, Sep. 2001, doi: 10.1103/PhysRevD.64.084021.

[5] Y. Mino, M. Sasaki, and T. Tanaka, “Gravitational radiation reaction to a particle motion,” *Phys. Rev. D-Part. Fields, Gravit. Cosmol.*, vol. 55, no. 6, pp. 3457–3476, 1997, doi: 10.1103/PhysRevD.55.3457.

[6] T. C. Quinn, “Axiomatic approach to radiation reaction of scalar point particles in curved spacetime,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, no. 6, p. 064029, Aug. 2000, doi: 10.1103/PhysRevD.62.064029.

[7] T. C. Quinn and R. M. Wald, “Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime,” *Phys. Rev. D*, vol. 56, no. 6, pp. 3381–3394, Sep. 1997, doi: 10.1103/PhysRevD.56.3381.

[8] L. Barack, Y. Mino, H. Nakano, A. Ori, and M. Sasaki, “Calculating the Gravitational Self-Force in Schwarzschild Spacetime,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, no. 9, p. 091101, Feb. 2002, doi: 10.1103/PhysRevLett.88.091101.

[9] S. Detweiler, “Radiation Reaction and the Self-Force for a Point Mass in General Relativity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, no. 10, pp. 1931–1934, Mar. 2001, doi: 10.1103/PhysRevLett.86.1931.

[10] S. Detweiler and B. F. Whiting, “Self-force via a Green’s function decomposition,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, no. 2, p. 024025, Jan. 2003, doi: 10.1103/PhysRevD.67.024025.

[11] M. J. Pfenning and E. Poisson, “Scalar, electromagnetic, and gravitational self-forces in weakly curved spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, no. 8, p. 084001, Mar. 2002, doi: 10.1103/PhysRevD.65.084001.

[12] L. Barack, “Self-force on a scalar particle in spherically symmetric spacetime via mode-sum regularization: Radial trajectories,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, no. 8, p. 084027, Sep. 2000, doi: 10.1103/PhysRevD.62.084027.