

Aportes teóricos a la formación de profesores desde tesis doctorales y su desarrollo en la educación matemática en Chile

Theoretical contributions to teacher training from doctoral theses and their impact on mathematics education in Chile

ELISABETH RAMOS-RODRÍGUEZ,¹ NIELKA ROJAS GONZÁLEZ,²
MACARENA VALENZUELA MOLINA³ Y MARÍA VICTORIA MARTÍNEZ VIDELA⁴

¹Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, ²Universidad Católica del Norte,
³Universidad Alberto Hurtado, ⁴Universidad de O'Higgins

Resumen

La formación de profesores es una línea de investigación ampliamente trabajada en educación matemática. En ella se puede encontrar una diversidad de enfoques que permiten profundizar en el desarrollo y conocimiento del profesor, para comprender los procesos implicados en esta profesión. Este capítulo muestra los alcances en esta línea, a partir de los aportes teóricos de tesis doctorales dirigidas por el profesor Pablo Flores, centradas en la reflexión y el conocimiento del profesor. Además, se ilustra cómo estos avances teóricos han traspasado fronteras contribuyendo en la formación docente y a la investigación en educación matemática en Chile.

Palabras clave: conocimiento del profesor, reflexión docente, formación de profesores, educación matemática

Abstract

Teacher training is a widely worked line of research in Mathematics Education. In it you can find a diversity of approaches that allow deepening the development and knowledge of the teacher, in order to understand the processes involved in this profession. This chapter shows the achievements in this line, based on the theoretical contributions of doctoral theses directed by Professor

Pablo Flores, focused on the reflection and knowledge of the professor. In addition, it illustrates how these theoretical advances have crossed borders, contributing to teacher training and research in Mathematics Education in Chile.

Keywords: teacher knowledge, teacher reflection, teacher training, mathematics education

1. Introducción

La formación docente es una temática que ocupa un lugar importante en el desarrollo investigativo dentro del ámbito de la Educación, como también en el desarrollo de políticas públicas que buscan mejorar la formación inicial docente y las oportunidades de desarrollo profesional. En Chile, el Ministerio de Educación ha desarrollado desde hace más de una década el Programa de Fomento a la Calidad de la Formación Inicial de Docentes, enmarcado en la Ley 20903 que describe un marco de acción sobre elementos relativos al desarrollo profesional y la carrera docente, considerando ciertas obligaciones para las instituciones formadoras de profesores. Asimismo, se fijan Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente que refieren al núcleo esencial de conocimientos disciplinarios y pedagógicos con que se espera desarrollen los profesionales de la educación al finalizar formación inicial (MINEDUC, 2012).

Estas orientaciones se vinculan con el desarrollo investigativo en el ámbito de la educación matemática, a partir de un consenso respecto de la importancia de reflexionar e investigar sobre los procesos de formación inicial y la formación continua, debido a que la riqueza y solidez de la formación de los profesores es un elemento clave para el logro del aprendizaje de los estudiantes (Darling-Hammond, 2000; Darling-Hammond *et al.*, 2009).

Es así como las temáticas de conocimiento de profesor y desarrollo profesional constituyen dos relevantes núcleos de trabajo en la investigación en educación matemática. La primera busca indagar en los diversos procesos involucrados en el desarrollo profesional de los docentes, entre ellos, el proceso de reflexión, la forma de operar o diseñar los programas de desarrollo profesional y la instalación de prácticas en los centros educativos, entre otros. En el segundo núcleo mencionado, podemos com-

prender el conocimiento como sustento del desarrollo profesional; es decir, lo que facilita y constituye un elemento que enriquece el conocimiento profesional docente (Climent *et al.*, 2014), pero también cómo se puede desarrollar desde la formación inicial de un profesor.

Ambas temáticas están altamente relacionadas entre sí y, en algunos casos, es imperceptible su delimitación. Por ejemplo, al estudiar un programa de desarrollo profesional docente podemos centrarnos en analizar la transformación de conocimiento que experimenta un docente al participar en él, comprender qué contenidos matemático enseña, para qué y cómo lo enseña, analizar la instrucción del profesor, las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la comunicación de la disciplina y la organización del currículo, entre otros aspectos. Es así como el desarrollo profesional docente y el conocimiento del profesor cobran relevancia al comprender, implementar e investigar el quehacer docente, tanto en la formación inicial como continua.

Los alcances de ambas líneas son amplios y, dentro de ellos, es de interés preocuparse por el papel que juegan algunos estudios en beneficio del desarrollo de la educación matemática. Este trabajo tiene por objetivo presentar los aportes teóricos de tesis doctorales centradas en la reflexión y el conocimiento del profesor, bajo la dirección del profesor Pablo Flores, como miembro del grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, a quien se le reconoce en esta obra, y cómo estos avances teóricos se implementan en Chile.

A continuación, se contextualiza el papel que juegan tres constructos presentes en las tesis doctorales: análisis didáctico, conocimiento del profesor y reflexión. Posteriormente, se desarrollan las ideas teóricas de las tesis, enfatizando los aportes que nacen de la reflexión del trabajo conjunto con el profesor Pablo Flores y cómo estos trabajos se han seguido desarrollando en Chile.

2. Relación entre MTSK, análisis didáctico y reflexión

Como se ha mencionado, las tesis que guían este trabajo centran su atención en la reflexión y en el conocimiento (desde el modelo MTSK) del profesor. En ellas está presente el *análisis didáctico* (AD) desde tres enfoques, lo cual se ilustra en la figura 1, que contribuye a la articulación de estos constructos. Al observar desde la izquierda la figura 1, se visualizan dos agentes utilitarios que se manifiestan en torno al AD, el profesor y el investigador en formación de profesores. En relación con el profesor, al llevar a cabo el Estudio de Clases, puede considerar el AD para profundizar en el contenido, lo que hace emerger el primer enfoque de este: *formativo-metodológico*. Por otra parte, el segundo agente utilitario del AD, el investigador en formación de profesores, puede profundizar en aspectos matemáticos y de la enseñanza de los fenómenos estudiados para abordar una investigación en esta área, lo que hace surgir al *enfoque comprensivo* del AD. Por último, este segundo agente utilitario puede emplearse para identificar indicadores del conocimiento del profesor o bien para analizar la reflexión de los profesores, entre otros estudios en torno a

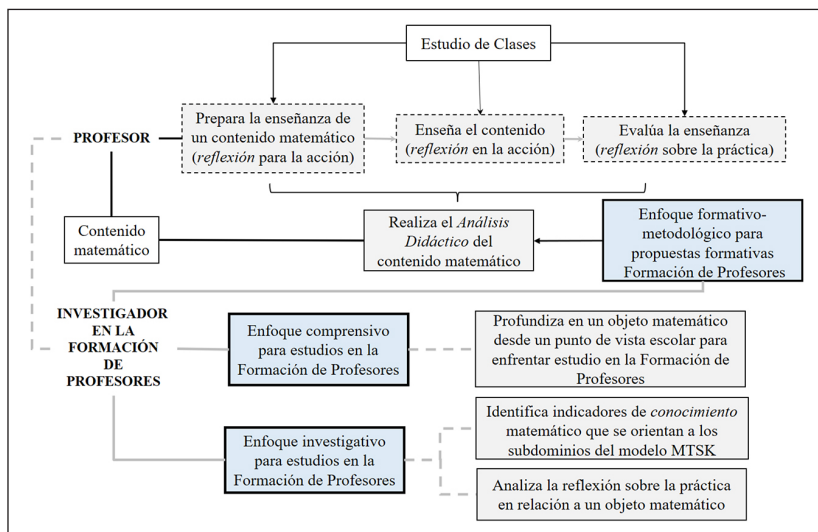


Figura 1. Enfoques del AD en la Investigación en Formación de profesores.

la formación de profesores. Esto hace emerger el tercer enfoque del AD, denominado *investigativo*. En síntesis, se tiene que:

- a) Un enfoque formativo-metodológico para la formación de profesores, que los lleva a enfrentarse a la tarea de realizar el AD para el diseño, implementación y evaluación de experiencias de aprendizaje dentro un programa formativo, objetos de estudios.
- b) Un enfoque comprensivo, en que el AD se considera una herramienta que permite al investigador profundizar en el contenido matemático escolar imbricado en su estudio, desde el ámbito matemático y de la enseñanza.
- c) Un enfoque investigativo, en que el AD se contempla como herramienta que permite al investigador disponer de un referente amplio para identificar indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que puedan servir para comprenderlo, o bien para analizar la reflexión sobre la práctica de profesores en relación con un objeto matemático.

Estos tres enfoques y su relación con la función que cumplen en el contexto de la formación docente pueden orientar el estudio del conocimiento del profesor de matemática y su desarrollo profesional, ya sea en un ámbito de investigación como a nivel de formación, elaborando cursos, diseñando programas de estudios, planificando contenidos, entre otros, de acuerdo con los trabajos presentados.

Cabe destacar que el AD es posible vincularlo con la metodología de Estudio de Clases y con los procesos reflexivos en la formación de profesores. En los apartados siguientes se presentan estudios en relación con los enfoques descritos, desde distintas perspectivas estudiadas en tesis doctorales.

3. Desarrollo profesional del profesor de matemáticas

El trabajo doctoral realizado por Ramos-Rodríguez (2014) se centra en estudiar la reflexión de profesores de matemáticas sobre la modelación matemática, al participar en un programa de

desarrollo profesional. En este estudio se relaciona la reflexión, el Estudio de Clases (EC) y el AD.

En este mismo estudio, se buscó una herramienta metodológica formativa que diera impulso a los procesos reflexivos. Es así como se utilizó el EC (*lesson study*, como es llamado en la literatura anglosajona), definido como un medio de capacitación para profesores de manera que desarrollen sus prácticas pedagógicas, basado en la investigación sobre su propia práctica (Isoda *et al.*, 2012; Ponte, 2014). El EC se considera un modelo adecuado para la formación de profesores, ya que les permite estudiar sus formas de enseñanza (Elipane, 2011) y, por tanto, se puede insertar directamente en la enseñanza para generar modelos y formas concretas de buenas prácticas, constituyéndose en un enfoque clave para compartir actividades de perfeccionamiento docente.

El EC implica un proceso cíclico compuesto de tres etapas (preparación, implementación y evaluación de la clase y revisión de resultados) en las que es particularmente importante la colaboración entre pares, la práctica, la focalización en el aprendizaje de los estudiantes (Isoda *et al.*, 2012) y la investigación sobre la propia práctica (Elliot, 2004).

A partir de esta profundización en el estudio de Ramos-Rodríguez (2014), se examinaron elementos teóricos del EC y de la reflexión para ver su complementariedad, apreciando como el EC es una buena herramienta para generar la reflexión de profesores en un curso formativo. A partir de los aportes del profesor Pablo Flores, se estableció una relación teórica a partir del modelo reflexivo de Korthagen (2010), denominado ALaCT, como medio para general la reflexión, y el EC que sitúa el contexto para trabajar con profesores analizando procesos reflexivos. La figura 2, presenta una relación entre ambos constructos EC y reflexión, a partir del modelo reflexivo ALaCT.

Como se observa en la figura 2 el modelo ALaCT (alusión a los nombre de las fases en inglés *Action, Looking back on action, Awareness of essentials aspects, Creating alternative methods of actions y Trial*) se refiere a un proceso compuesto de cinco fases: a) acción o experiencia; b) mirar hacia atrás en la acción; c) identificación de los puntos importantes en donde es relevante la intervención de un agente externo (un académico experto, un par o mediante lectura de documentos); d) crear, buscar y preparar

comportamientos alternativos para la acción; y, por último, e) comprobar en una nueva situación, empezando un ciclo nuevo de reflexión, pero desde apreciaciones anteriores.

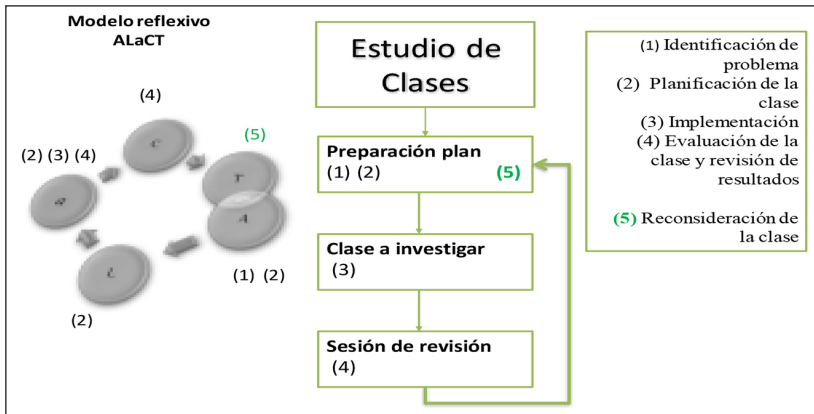


Figura 2. Articulación del EC y modelo ALaCT.

El modelo ALaCT orienta la reflexión del profesor, implicándolo en las diversas fases. Una de ellas requiere distanciamiento de la propia acción para detectar los problemas que han surgido, o bien para apreciar el posicionamiento que se adopta. Este distanciamiento (que requiere un trabajo entre pares, desde el trabajo colaborativo) es posible realizarlo mediante procesos sistemáticos como los que propone el EC, favoreciendo las fases del ciclo reflexivo, el que se incorporan nuevos elementos que sustentan las decisiones de los profesores respecto a sus clases, identificando las fases del modelo reflexivo ALaCT y las etapas de un ciclo del EC.

Fruto de este estudio, en Ramos-Rodríguez *et al.* (2017) se concluye que, si bien parece ser que el EC no es un elemento clave en toda reflexión, sí que favorece el proceso reflexivo en un curso formativo, componente que, además, vincula fácilmente teoría y práctica, confirmando los resultados de Elliot (2004) sobre EC y reflexión y en concordancia con el enfoque realista planteado por Korthagen (2011).

La experiencia formativa e investigativa que surge de la articulación teórica evidencia que el EC favorece en los docentes una mayor involucración en sus procesos de reflexión apoyando su desarrollo profesional. Observamos elementos de complemen-

tariedad entre la reflexión y el EC, que entrega herramientas para la práctica y al trabajo colaborativo de manera de incentivar el trabajo reflexivo de los profesores.

Los resultados del estudio de la articulación entre EC y reflexión que se forjó en la tesis doctoral han traspasado al contexto de la educación matemática chilena. Ambos temas son desarrollados en Chile en la formación inicial y continua, impulsando el constructo reflexión, de manera sistemática y operativa, tema que el Ministerio de Educación de Chile impulsa en la formación docente, para hacer un camino que favorezca la innovación dentro de las instituciones escolares y de las aulas.

Evidencia de ello, se puede ver en diversas instancias formativas llevadas a cabo en este país. Desde el año 2015, se implementan en Chile diversas capacitaciones a profesores con foco el desarrollo de capacidades reflexivas, como el curso «Didáctica del álgebra, teoría y práctica desde la reflexión docente». Destacamos uno, realizado desde el año 2016, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Se trata de un Diplomado en Didáctica de la Estadística y las Probabilidades, cuyo objetivo es promover en los docentes participantes procesos reflexivos mediante el EC. También, en la misma casa de estudio, en el año 2021 se realizó un programa de desarrollo profesional para profesores de colegios vulnerables cuyo objetivo fue llevar a cabo ciclos de EC que involucraran la reflexión del desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de Primaria. Por último, resaltamos que, a contar del año 2020, en la malla curricular del Programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV, se han incluido elementos de la reflexión sistemática del profesor, brindando espacios para que el profesorado conozca este constructo y los implemente en su quehacer profesional.

Estos resultados, además de impactar en los lineamientos de programas de desarrollo profesional, han tenido repercusión en el ámbito investigativo y en la emergencia de estudios chilenos que van en esta línea. Destacamos el trabajo de Corrial (2016), donde se caracteriza el conocimiento didáctico del contenido sobre ecuaciones lineales de un profesor novel de matemáticas que participa de un curso de acompañamiento que promueve procesos reflexivos.

4. Análisis didáctico

En la línea del conocimiento del profesor de matemáticas, se ha buscado comprender el conocimiento matemático implicado en la práctica, surgiendo la necesidad de diseñar herramientas para hacer operativo un proceso que permita identificar el conocimiento y profundizar en su caracterización. Por lo cual, a partir de la reflexión instada por Pablo Flores en su dirección de la tesis doctoral de Rojas (2014) y luego de Valenzuela-Molina (2021), hemos profundizado en la articulación del AD y el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

A partir de los estudios realizados por Rico (1997a; 1997b), sobre el análisis curricular que articula cuatro dimensiones: cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social, se comienza a interpretar las bases del AD. El AD se define como herramienta para facilitar al profesor el diseño de unidades didácticas, siendo un recurso que permite organizar la actividad de enseñanza referente a contenidos matemáticos (Gómez, 2007).

El estudio del conocimiento del profesor de matemática o del profesor que enseña matemática ha tenido una gran relevancia en los aportes de la didáctica de la matemática, lo cual se evidencia en los diversos *Handbook de Educación* de profesores de matemática (Gutiérrez *et al.*, 2016; Lester, 2007; Tirosh y Wood, 2008) y en estudios de distintos formadores de maestros, matemáticos y didactas que se han preocupado por la formación inicial y continua de profesores.

El conocimiento que los profesores deben ir transformando, desde su formación inicial y de manera continua, tiene su origen en la interacción con el contenido matemático, en las experiencias de enseñanza y aprendizaje, en la reflexión crítica y constante sobre su práctica. Esto le permite tomar decisiones respecto del diseño, implementación y evaluación de experiencias de aprendizaje, ya que conlleva un conocimiento global, que le permite gestionar la enseñanza, desarrollar estrategias, incorporar los estilos de aprendizaje de sus alumnos, y resolver imprevistos durante sus clases. Esta visión más amplia del conocimiento de un profesor trasciende a la del profesor que solo transmite conocimiento, ya que va construyendo su conocimiento a partir de su experiencia como estudiante, de su experiencia como docente y de la reflexión constante que necesariamente produce cambios

específicos en su práctica, dando al conocimiento del profesor un carácter especializado del saber matemático (Carrillo *et al.*, 2018).

Por tanto, dado que el AD permite profundizar en un contenido matemático y planificar en función de los elementos que el proceso de enseñanza y aprendizaje demanda, consideramos que es un procedimiento ideal de cómo el profesor diseña, lleva a la práctica y evalúa las actividades de enseñanza y aprendizaje. Desde la visión de un investigador permite describir la ruta de conocimiento que se exterioriza para preparar la enseñanza, analizando la transformación del conocimiento profesional, sobre los diversos elementos disciplinares y didácticos.

Fruto de la experiencia en investigación y de la articulación teórica, en relación con la utilización del AD como una herramienta formativa se han desarrollado trabajos conjuntos entre investigadores para fortalecer la formación docente. Es así como la experiencia obtenida en las tesis citadas, en relación con la utilización del AD como una herramienta formativa para y en la formación inicial (Valenzuela-Molina, 2021) y continua (Ramos-Rodríguez, 2014) de profesores chilenos, hemos llevado a cabo un estudio en el que se muestra las virtudes que ofrece el AD para fortalecer el proceso de desarrollo docente, al considerar dos casos: *a*) futuros profesores chilenos que trabajan el AD sobre fracciones, y *b*) una profesora chilena en ejercicio que participa en un programa de formación continua en el que realiza el AD sobre ecuaciones de primer grado (Ramos-Rodríguez *et al.*, 2019). Los resultados mostraron que los sujetos estudiados profundizan en el conocimiento del contenido matemático y las limitaciones de aprendizaje, antes de diseñar e implementar tareas matemáticas de una clase, lo que trae implicancias en la calidad de la planificación e implementación.

La articulación del AD como herramienta formativa ha contribuido a dar presencia a este en el ámbito de la educación matemática chilena. Ejemplo de ello, se pueden encontrar en la formación inicial de profesores de Primaria de la Universidad Alberto Hurtado y Universidad Católica del Norte, y en la formación continua de profesores de Secundaria de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Además de contribuir en los lineamientos de los programas de desarrollo profesional chilenos, se ha evidenciado que el rol

del AD como fuente de profundización para el investigador. Destacamos los trabajos de final de grado en el Programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV, los que, a partir del año 2016, contienen un capítulo en que los estudiantes desarrollan el AD del objeto matemático implicado en sus trabajos. Por ejemplo, la tesis de Araya (2018) presenta una secuencia didáctica para promover el aprendizaje de la variable aleatoria y su función de probabilidad fundamentada desde el AD.

En la Universidad Alberto Hurtado y Universidad Católica del Norte, el AD también se utiliza como fuente de investigación. En este caso, se incorpora para profundizar en el conocimiento desde el ámbito conceptual, cognitivo, de instrucción y la evaluación del objeto matemático implicados en los Proyectos de Titulación de algunos egresados de la carrera de Educación Básica, especialmente los que tienen la mención Matemática. Por ejemplo, Barra (2021) desarrolla cuentos matemáticos para la Educación Secundaria, en que los temas de las narraciones se ahondan desde el AD.

5. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemática-MTSK

El profesor de matemática, para desarrollar su práctica, necesita un conocimiento especializado para enseñar, tanto disciplinar como didáctico. En todo su quehacer profesional el profesor moviliza significados, propiedades y definiciones de los temas matemáticos, además, bosqueja las formas de construcción de la materia, las relaciones entre contenidos, el conocimiento sobre la enseñanza de matemática y las características del aprendizaje de contenidos matemáticos, entre otros.

Para ello, un buen referente para profundizar y comprender el conocimiento del profesor ha sido considerar el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), propuesta por el grupo SIDM de la Universidad de Huelva (Carrillo *et al.*, 2018), producto de que el saber de un profesor se considera especializado para enseñar. Esto ha llevado desde el año 2010 a relacionar el modelo de conocimiento MTSK con el AD, como fuente para hacer operativo el estudio del conocimiento del pro-

feesor, pero a la vez como principio para profundizar en los objetos matemáticos (Rojas, 2010).

Para comprender la articulación, definimos el modelo MTSK (figura 3) que considera dos grandes grupos de conocimiento de naturaleza diferente. Por un lado, presenta el conocimiento que tiene el profesor de matemática en un contexto escolar, el dominio del *Mathematical Knowledge* y el conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Pedagogical Content Knowledge*. Además, en el centro integra las creencias en matemática y su enseñanza y aprendizaje.

El *Mathematical Knowledge* considera tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemática: el conocimiento profundo del contenido matemático, de su estructura y de cómo se procede y produce en matemática. El conocimiento de los temas describe qué y cómo el profesor de matemática conoce los temas que va a enseñar, el Conocimiento de la Estructura Matemática describe el conocimiento del profesor sobre relaciones entre contenidos matemáticos, el Conocimiento de la Práctica Matemática alude a la forma de proceder para llegar a los resultados matemáticos.

El *Pedagogical Content Knowledge*, desde los trabajos de Shulman (1986), se funda como un conocimiento particular del profesor, relacionado al contenido a enseñar, y realzado como la base de conocimiento que necesita un profesor para la enseñanza. En este dominio del conocimiento se distinguen tres subdominios, el primero de ellos referidos al conocimiento de la enseñanza de la matemática que implica el modo de representar el contenido y su potencial para la instrucción, así como el conocimiento de recursos y materiales didácticos. El conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática, que implica el modo en que los alumnos piensan y construyen el conocimiento cuando se enfrentan a las actividades y tareas matemáticas, y al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los distintos contenidos, así como de las fortalezas, dificultades y obstáculos asociados al aprendizaje del contenido en sí mismo. El conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática considera el conocimiento del profesor sobre lo que está convenido curricularmente que aprenda un estudiante y el nivel de profundidad en cada nivel

escolar, así como secuenciaciones del contenido y los saberes que lo sustentan.

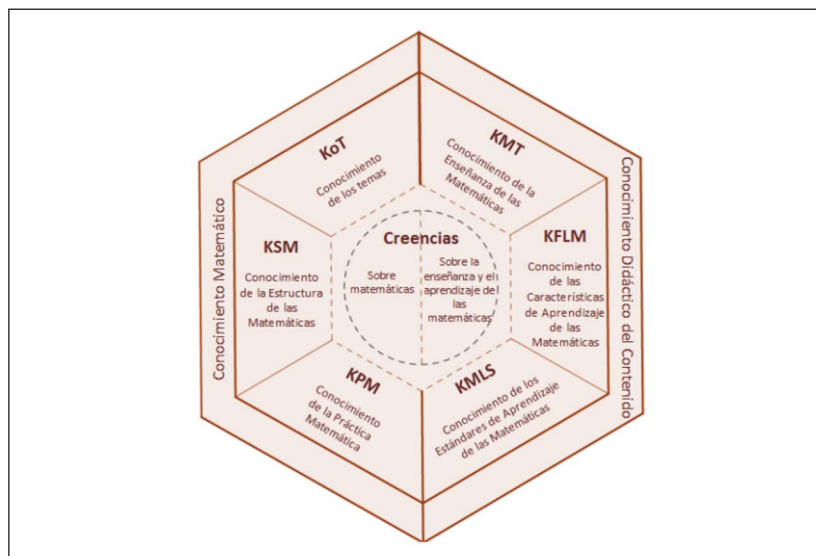


Figura 3. *The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model- MTSK.* Fuente: Carrillo et al. (2013).

El modelo MTSK es una valiosa herramienta para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de aula, además un recurso para el diseño de propuestas formativas para profesores en formación y en ejercicio. La especialización del modelo MTSK permite diferenciar los elementos del conocimiento general, para centrarnos exclusivamente en el conocimiento matemático y didáctico del contenido. A partir de la identificación y de la organización de componentes de conocimiento manifestado por profesores se permite profundizar en el conocimiento especializado en su conjunto y desde la óptica formativa permite diseñar acciones formativas orientadas en el conocimiento necesario integrar, activar o desarrollar.

Esta temática, a partir de las tesis doctorales dirigidas por Pablo Flores (Rojas, 2014; Valenzuela-Molina; 2021), ha tenido repercusión en el ámbito investigativo de Chile. Por ejemplo, a partir del año 2016, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso se cuenta con una variedad de tesis de magister y doctorado centradas en caracterizar el conocimiento especiali-

zado (MTSK) del profesor de matemática (Bozo, 2020; Miranda, 2016). Además, impulsando investigaciones conjuntas en la línea de la formación inicial y continua de profesores de matemática de la Universidad Alberto Hurtado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y Universidad Católica del Norte, como consecuencia de las experiencias doctorales guiadas por Pablo Flores y otros investigadores del área de educación matemática. De igual manera, este marco ha permeado el desarrollo investigativo para la estructuración de evaluaciones de diagnóstica en la formación inicial docente, considerando instrumentos que consideran el conocimiento matemático, así como las creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje como elementos esenciales en los que indagar desde el comienzo de la formación inicial (Martínez-Videla *et al.*, 2019).

6. Relación el MTSK y el análisis didáctico

Considerando que los modelos de conocimiento incluyen categorías generales y que es necesario disponer de modelos que lleven a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se manifiestan en una enseñanza de la matemática efectiva, queda de relieve que el profundizar en la enseñanza de la matemática desde la óptica del AD este permite a investigadores y profesores hacer una reflexión sobre la enseñanza del contenido matemático escolar y, además, establecer relaciones precisas entre los componentes del AD y los dominios de conocimiento (figura 4). Esto permite hacer una reconstrucción del conocimiento plausible que el profesor manifiesta en su tarea de enseñanza y, a la vez, ser una herramienta para planificar procesos formativos en el ámbito matemático. Por ejemplo, el subdominio «conocimiento de la enseñanza de la matemática» implica conocer los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido, las propiedades y sus fundamentos, los sistemas de representación y elementos fenomenológicos que se asocian al contenido matemático, que al realizar el AD se profundizan en el análisis conceptual y de contenido. Asimismo, desde el análisis cognitivo y de instrucción se consideran aspectos de aprendizaje y de la enseñanza en relación con la organización del saber, tipos de tareas y secuenciación, caracte-

rísticas de aprendizaje de los estudiantes y recursos para la enseñanza.

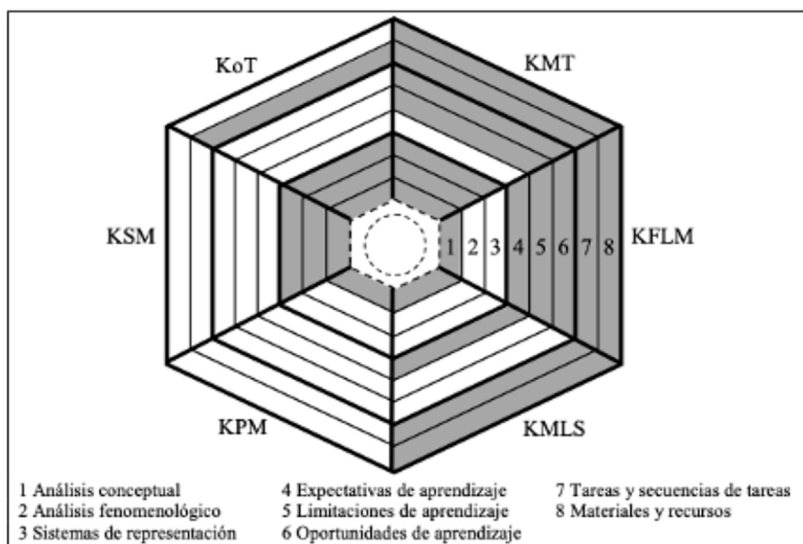


Figura 4. Relación MTSK-AD en la formación de profesores. Fuente: Rojas (2014, p. 94).

La operacionalización de este modelo en la formación inicial y continua de profesores en Chile ha permitido diseñar asignaturas de los planes curriculares y curso de formación en relación con el AD para transitar en los conocimientos necesarios para la enseñanza a partir del modelo MTSK (Ramos-Rodríguez *et al.*, 2021; Valenzuela-Molina, 2021). Desarrollando trabajos de diseño de secuencias de aula, por medio de la profundización de los temas matemáticos y didácticos a partir de la práctica docente; con un enfoque metodológico para investigar y profundizar en aspectos disciplinares y didácticos del objeto matemático, lo que permite tener una mirada profunda y amplia sobre la matemática que se ponen de manifiesto al observar ciertas reacciones y procesos de aprendizaje de los futuros maestros.

Por otro lado, el AD contribuye al desarrollo de la investigación, ya que la realización de este en relación con el tema de las fracciones ha permitido profundizar y establecer descriptores de conocimiento para cada subdominio de modelo MTSK. En síntesis, el análisis didáctico ha sido en este estudio una herramienta

con doble utilidad, como herramienta investigativa (Rojas *et al.*, 2013) y como herramienta formativa (Rico, 2013), lo que permite describir y caracterizar la transformación de conocimiento especializado.

6.1. Transformación de MTSK en un contexto formativo con AD

El contexto formativo del AD en la tesis doctoral de Valenzuela-Molina (2021), codirigida por Pablo Flores, permite observar, describir y caracterizar la transformación de conocimiento especializado sobre división de fracciones de futuras profesoras.

La transformación del conocimiento del profesor (o futuro profesor) se puede evidenciar cuando este manifiesta cambios graduales sobre lo que es capaz de hacer con otros y luego individualmente, a partir de una reflexión personal, generada individualmente o a partir de agentes externos, tomando conciencia de lo nuevo o de los cambios que se generan para la readecuación de la práctica. (Valenzuela-Molina, 2021, p. 35)

Desde esta conceptualización, se evidencia la transformación de MTSK de futuras profesoras, en diferentes momentos durante su formación, las que se manifiestan con acciones concretas de transformación consciente, al rediseñar tareas de enseñanza para la división de fracciones, cuyo cimiento base de conocimiento se logra por medio del AD y la reflexión constante sobre los cambios y decisiones conscientes que van tomando en el camino.

Desde este punto de vista de la transición de conocimientos, en esta investigación cada uno de los elementos involucrados en el AD, tanto los conceptos como los procedimientos, significados, fenómenos, errores y dificultades, entre otros, facilitan a las futuras profesoras el conocer y organizar la enseñanza desde un punto de vista teórico y práctico. Ellas se enfocaron en profundizar sobre los organizadores del currículo del AD para la división de fracciones, elementos que se evidencian en el diseño de planificación por medio de la incorporación de estrategias y algoritmos, en la consideración de algunos errores que pueden cometer sus estudiantes y en la propuesta de situacio-

nes problemas que estructuran la clase. El AD favoreció la adquisición de conocimiento matemático y didáctico de las profesoras, el cual se va reformulando en la medida que avanza su proceso formativo, cuando diseñan y rediseñan la clase a implementar. Esta transformación tiene sus cimientos en la discusión y retroalimentación constante que se producen durante la reflexión en el aula formativa, lo que facilita la transformación de conocimiento.

La transformación de MTSK fue evidenciada desde dos posturas. La primera de ellas se pone de manifiesto cuando los profesores van reestructurando su conocimiento especializado, de tal manera de ir avanzando desde un MTSK inicial a un MTSK idóneo o pretendido (desde la postura de los estándares para profesores de Educación Primaria y del perfil de egreso de cada universidad). Es decir, una reestructuración del anterior, tanto en el qué hacer como en el cómo hacerlo. Cabe destacar que no nos referimos a un MTSK final, pues este siempre está en constante transformación.

Una segunda postura tiene su origen en la relación interna y coherente entre categorías dentro de un mismo subdominio o fuera de él (en MTSK), ya que podría esperarse que un profesor modifique su conocimiento especializado de manera que se logre coherencia entre las categorías y dominios. En síntesis, la transformación del conocimiento especializado del profesor puede ser mediado a partir del uso de la herramienta de análisis didáctico, permitiendo a los profesores o futuros profesores modificar su conocimiento, desde un conocimiento inicial que transita a un nuevo conocimiento pretendido.

7. Contribuciones, una mirada global

Las tesis doctorales y trabajos presentados a lo largo del estudio dejan en evidencia que estas líneas de investigación y formación han seguido su desarrollo en la educación chilena. Así, la reflexión docente, la relación con el modelo de conocimiento especializado y la integración en la práctica del AD (no solo con foco en la planificación) han tomado presencia en diversos espacios formativos de Chile.

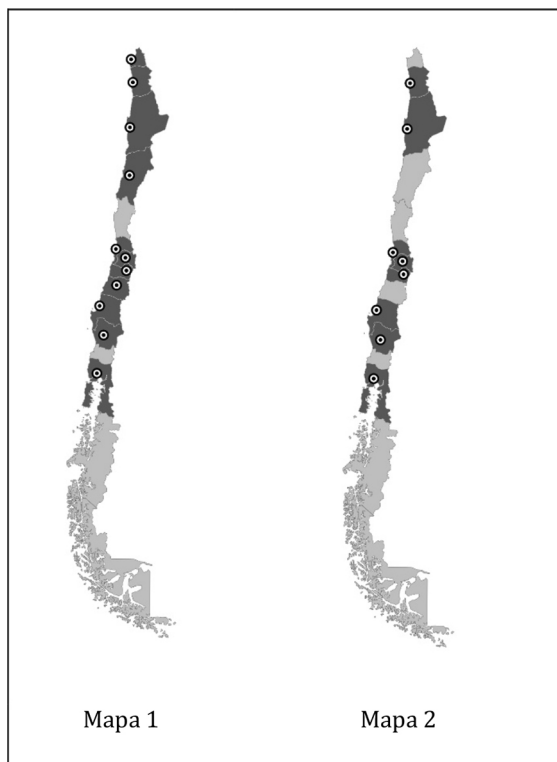


Figura 5. Utilización del AD, MTSK y la reflexión en la formación inicial y desarrollo profesional en Chile.

Una mirada global de ello es posible visualizar en la figura 5, en que se destacan (en negro) las regiones de Chile en que desarrollan estos referentes teóricos en la formación inicial y continua (mapa 1) llegando a ser 11 de las 16 regiones del país. De igual forma, en el mapa 2 se da cuenta de aquellas regiones en que se utilizan los marcos en el contexto de formación de posgrado y en el ámbito investigativo llegando a 8 regiones. Esto muestra que distintas universidades, investigadores y grupos de formación emplean estos referentes conceptuales para el desarrollo de la educación matemática en el país para tributar a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes.

Por lo tanto, el AD se ha manifestado como una efectiva herramienta teórica-metodológica para el estudio del conocimiento de profesores en ejercicio y formación, en distintos ámbitos

educativos. Además, considerando que los modelos de conocimiento suelen incluir categorías generales, se ha avanzado a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento, que se manifiestan en la enseñanza de la matemática. Aportando el AD indicadores de conocimiento relacionados con el modelo MTSK, referentes a variados temas matemáticos.

Estas contribuciones pueden seguir ampliándose y fortaleciendo redes de colaboración, dado que la tarea docente exige una alta preparación profesional, una instrucción continua y el desarrollo de nuevas formas de vinculación entre universidades, centros de investigación nacionales e internacionales.

8. Referencias

- Araya, D. (2018). *Secuencia didáctica para promover el aprendizaje de la variable aleatoria y su función de probabilidad desde el Análisis Didáctico* [tesis de magíster]. PUCV.
- Barra, M. (2021). *El cuento para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Media* [trabajo final de grado]. Universidad Católica del Norte.
- Bozo, F. (2020). *Mecanismos utilizados por los docentes en las transformaciones de conversión y tratamiento en el MCD a través del modelo MTSK* [tesis de magíster]. PUCV.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En: Ubuz, B., Haser, C. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University.
- Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Contreras, L. C., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- Corrial, C. (2016). *Conocimiento de una profesora novel respecto de ecuaciones lineales en un curso de acompañamiento para evaluación docente* [tesis de magíster]. PUCV.
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso* [tesis doctoral]. Universidad de Huelva.

- Contreras, J. (2011). *La autonomía del profesorado*. Morata.
- Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En: Lin, F. L. y Cooney, T. J. (eds.). *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Kluwer.
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement. *Education policy analysis archives*, 8(1), 1-44. <https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000>
- Darling-Hammond, L., Johnson, C. y Chung Wei, R. (2009). Teacher preparation and teacher learning: A changing policy landscape. En: Sykes, G., Schneider, B. y Plank, D. N. (eds.). *Handbook of education policy research* (pp. 613-636). Routledge.
- Elliot, J. (2004). Using research to improve practice: the notion of evidence-based practice. En: Day, C. y Sachs, J. (eds.). *International handbook of the continuing professional development of teachers* (pp. 264-290). Open University Press.
- Elipane, L. (2011). Incorporating lesson study in pre-service mathematics teacher education. En: Ubuz, B. (ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 257-282). PME.
- Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En: Berenguer, M. I. et al. (eds.). *Investigación en el aula de matemáticas* (pp. 13-27). THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(4), 139-159.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria [tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Isoda, A., Arcavi, A. y Mena, A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Korthagen, F. A. J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68(24), 83-101.
- Korthagen, F. A. (2011). Making teacher education relevant for practice: The pedagogy of realistic teacher education. *Orbis scholae*, 5(2), 31-50.
- Martínez-Videla, M., Rojas-Sateler, F., Ulloa, R., Chandía, E., Ortíz, A. y Perdomo, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar

- al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 56(2), 1-19.
- Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases curriculares*. Gobierno de Chile.
- Miranda, M. (2016). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas de segundo ciclo básico en la enseñanza de inecuaciones lineales* [tesis de magíster]. PUCV.
- Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Ramos-Rodríguez, E., Bustos, B. y Morales, A. (2021). Identification of the Principles of Effective Professional Development Programs and Their Impact: An Investigation of the Guidelines of a Mathematics Didactic Graduate Program and a Case Study Focused on Teacher Training. *The International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning*, 29(1), 1-16. DOI:10.18848/2327-7971/CGP/v29i01/1-16.
- Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2017). Práctica y reflexión de profesores de matemáticas chilenos bajo la perspectiva del Estudio de Clases. *Quadrante*, xxvi(2), 69-97.
- Ramos-Rodríguez, E., Valenzuela, M. y Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemática. En: Olfos, R., Ramos-Rodríguez, E. y Zakaryan, D. (eds.). *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 51-100). Graó.
- Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno* [trabajo de fin de máster]. Universidad de Granada.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En: Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-208). Universidad de Granada.
- Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Valenzuela-Molina, M. (2021). *Transformación del conocimiento especializado sobre división de fracciones de futuras profesoras en un contexto de Estudio de Clases* [tesis doctoral]. PUCV.