Matemáticas en la Universidad

Mathematics at the University

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J.; Trujillo-González, R.
Universidad de La Laguna

Resumen

En este capítulo se presenta una aproximación hacia la enseñanza de las Matemáticas en el nivel Universitario, tomando como referencia algunos resultados obtenidos en el ámbito de la investigación realizada en nuestro país. Se comienza haciendo una reflexión inicial sobre los resultados principales obtenidos en los últimos 25 años, para continuar con una discusión en torno a la transición desde la Educación Secundaria hasta la Universidad, las dificultades que emergen en ese contexto, relacionadas principalmente con la adaptación de los contenidos y metodología empleadas, y el impacto que deberían tener las tecnologías digitales y la resolución de problemas en la enseñanza de los conocimientos que demanda actualmente la Sociedad. El capítulo finaliza mostrando algunos ejemplos de actividades para trabajar conceptos matemáticos propios del ámbito universitario, surgidos y adaptados de investigaciones en las que han participado los autores.

Palabras clave: Matemáticas universitarias, Tecnología, Resolución de problemas.

Abstract

This chapter presents an approach for teaching Mathematics at the university level, taking as a reference some results obtained in the field of research carried out in our country. It begins by making an initial reflection on the main results obtained in the last 25 years, and then continues with a discussion on the transition from secondary education to university, the difficulties that emerge in this context, mainly related to adapting the content and methodology used, and the impact that digital technologies and problem solving should have on teaching the knowledge that society currently demands. The chapter concludes with some examples of activities for practicing mathematical concepts typical of a university environment, resulting and adapted from research in which the authors have participated.

Keywords: University mathematics, Technology, Problem solving.

Introducción

Hablar de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad no es una tarea sencilla, por lo que se requiere hacer unas precisiones iniciales para situar los elementos que darán lugar a este capítulo. Se tratará aquí de establecer algunas recomendaciones y presentar algunos ejemplos que emergen de la investigación que se ha llevado a cabo en los últimos años en este campo, que ha permitido encontrar pequeños avances que los sustentan. Desde la SEIEM, se ha prestado atención a este ámbito de investigación (aunque menos que en otros niveles educativos), de modo que algunos resultados de esas investigaciones han sido presentados en diversos Seminarios de Investigación y publicados en sus correspondientes actas. Bien es verdad que, en ningún caso, se puede decir que esas actas recogen todos los resultados de investigación, pero sí se ha tratado de presentar un panorama más o menos extenso (Camacho-Machín, 2005, 2011 y 2021) directamente relacionado con las matemáticas universitarias. Recientemente, la revista Avances de Investigación en Educación Matemática, publicada en el seno de la SEIEM, ha publicado un monográfico titulado "El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad" (Vol 21, 2022) que incluye seis trabajos de investigación situados en el ámbito de las Matemáticas universitarias.

Se podría decir que, en términos generales, la mayor parte de avances de la investigación en los niveles universitarios en los últimos veinticinco años se ha producido en el ámbito del grupo GIDAM[1] que, en el año 2015, publicó el libro *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (Azcárate et al., 2015). Este libro se organiza en torno a cuatro bloques, cada uno de los cuales contiene diversos capítulos donde se presentan los marcos teóricos que fundamentan las diferentes investigaciones en el campo, los conceptos matemáticos como eje central de las investigaciones sobre enseñanza y/o aprendizaje, el papel de la tecnología en las investigaciones que se han realizado y la figura del profesor. En líneas generales, y en palabra de los editores, se trató de proporcionar una visión lo más completa posible sobre:

> Las actuales tendencias de investigación de esta área, tanto en el ámbito nacional como internacional.
> El conocimiento generado y los principales resultados de investigación en didáctica del análisis matemático en el seno del grupo de investigación GIDAM.

1. GIDAM es el acrónimo del Grupo de Investigación de Análisis Matemático de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (https://www.seiem.es/grp/gidam.shtml). La Didáctica del Análisis Matemático no es el único tópico de investigación en este grupo, aunque sí ha sido el mayoritario. Existen otros grupos de trabajo en nuestro país que realizan investigaciones relevantes en el ámbito internacional, relacionados con Estadística y Probabilidad, Álgebra… pero no se tratarán en este capítulo, por falta de espacio y tiempo.

> Las características de los procesos de transferencia del conocimiento, tanto por las aportaciones de los resultados de las investigaciones en torno a la enseñanza, el currículo, la formación de profesores, etc., como por la influencia de los avances tecnológicos en el diseño de propuestas innovadoras para la enseñanza del análisis matemático. (p. 12)

En el simposio de la SEIEM, celebrado en 2021, se desarrolló un Seminario de Investigación titulado “La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad” en el que se presentaron tres ponencias. Henriques (2021) mostró los resultados obtenidos haciendo uso de lo que denominan “tareas de prácticas exploratorias haciendo uso de tecnología”, indicando que repercuten positivamente en el aprendizaje de los estudiantes respondiendo con ello a los retos y necesidades actuales. Por otra parte, Biza (2021) destacó la singularidad de la Educación Matemática Universitaria como área que depende en gran medida de las instituciones y de los contenidos que deciden tratar esas instituciones, lo que hace que la Educación Matemática Universitaria no dependa solamente de la investigación sobre su enseñanza y aprendizaje, sino de las diferentes instituciones involucradas. Finalmente, Camacho-Machín (2021) presentó una agenda de investigación que recoge diferentes aspectos que se deberían tener en cuenta en la investigación, y a los que se debería prestar atención en nuestro país, de cara a mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas universitarias, como los siguientes:

- Habría que potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de las diferentes ingenierías, ciencias experimentales, económicas y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. En particular, es necesario dar un impulso a la investigación sobre la modelización matemática analizado desde otras perspectivas diferente a las epistemológicas.
- Debería darse un papel más importante a las investigaciones relacionadas con el campo afectivo, estudiar las creencias y concepciones que tanto los estudiantes como los docentes universitarios tienen sobre las matemáticas, la enseñanza y sobre su propia naturaleza.
- Se requiere también que la investigación se oriente hacia las prácticas docentes tanto de los profesores como de los estudiantes y las instituciones.

También se destaca la importancia de mejorar los cursos de matemáticas relacionados con la transición de la Educación Secundaria a la Universidad, así como la necesidad de utilizar las tecnologías digitales y la resolución de problemas como elementos que contribuyan al desarrollo del aprendizaje de las matemáticas universitarias. En ese sentido, Camacho-Machín (2021) señala que las TIC están a la disponibilidad de todos los estudiantes universitarios, por lo que es fundamental seguir desarrollando investigaciones en torno al uso de esos recursos como materiales de apoyo para el aprendizaje.

La resolución de problemas haciendo uso de tecnologías digitales es también esencial. Hay una escasez de proyectos de investigación que emplean para su desarrollo entornos dinámicos de trabajo como GeoGebra (p. 42).

Y también hace mención específica al aspecto concreto de la demostración y la prueba, que cada vez más está siendo olvidado sobre todo en los cursos de matemáticas universitarias en las Ingenierías y en general en las Ciencias (Química, Ambientales, de la Salud, etc.) e indica que:

Es también importante determinar el papel de la prueba y la argumentación en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. El uso de los diferentes teoremas matemáticos sin entender y distinguir la hipótesis de la tesis y el desarrollo de argumentos que los justifiquen requieren también de mayor atención. (p. 42)

En relación con la Agenda de Investigación que establece en su ponencia Camacho-Machín (2021), destaca lo que señala Artigue (2019) quien habla de la necesidad del desarrollo de "cursos puente" de matemáticas, la promoción del trabajo colaborativo entre estudiantes, profesores, matemáticos e investigadores en Didáctica de las Matemáticas, la utilización de la amplia gama de recursos disponibles, así como la importancia de desarrollar acciones dirigidas hacia la formación de tutores académicos universitarios.

No es fácil abordar soluciones a los retos señalados debido a varios factores (Camacho-Machín, 2021) entre los que se encuentran, la escasa valoración de la docencia en la promoción de los docentes universitarios y su escasa formación didáctica. Creemos que es importante la formación inicial del profesorado universitario de Matemáticas dado que su formación actual no los prepara para enfrentarse al amplio abanico de dificultades que se encontrarán cuando ejerzan su labor de enseñanza.

La concepción tradicional de separar la teoría y la práctica en la enseñanza universitaria de las matemáticas es otro de los problemas que destaca Artigue (2019). Esa división fomenta una separación que no es real en el propio ámbito de la investigación que se realiza en el campo de las Matemáticas, dado que cada vez más se busca la interpretación real de los avances de la investigación. La constatación de la poca atención que se le ha prestado tradicionalmente a la difusión y transferencia de los resultados de investigación en el área de Didáctica de la Matemática es otro de los puntos débiles en el ámbito universitario, por lo que la colaboración entre los diversos colectivos que se ocupan de la enseñanza de las matemáticas universitarias (didactas de las matemáticas, investigadores y docentes) resulta fundamental para trabajar conjuntamente para la mejora de la enseñanza universitaria.

La *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2020) incorpora diez entradas asociadas al ámbito de la Didáctica de las Matemáticas relacionados con la Universidad. La que podemos considerar "primera entrada" es aquella que elaboran Winsløw y Rasmussen (2020) y que denominan *University Mathematics Education* (UME), y en la cual establecen los elementos clave de estas Matemáticas. En este capítulo nos referiremos en ocasiones como Educación Matemática Universitaria y también con su acrónimo original. Las otras nueve entradas están relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos: Álgebra Abstracta, Análisis Matemático, Ecuaciones diferenciales y Álgebra Lineal. También hay una entrada dedicada al estudio de la Lógica y dos entradas más relacionadas con la formación y desarrollo profesional del profesorado universitario de matemáticas. Presenta también la Encyclopedia un espacio dedicado a la transición entre las matemáticas de la Educación Secundaria y de la Universidad, así como otro dedicado a las prácticas de enseñanza de las matemáticas universitarias.

En este capítulo trataremos de dar una visión general de algunos de los aspectos que hemos mencionado. Para ello, dedicaremos los siguientes apartados a presentar un breve análisis de la realidad que se constata en la transición de los estudiantes desde la Educación Secundaria hasta la Universidad. Posteriormente haremos una revisión de algunos proyectos internacionales que atienden tanto a la problemática de esta transición como a la mejora, mediante la práctica, del aprendizaje de los conceptos matemáticos en los primeros cursos universitarios, principalmente a través de proyectos auspiciados por Erasmus+. Finalmente, se presentan dos ejemplos de secuencias de actividades que muestran cómo se pueden usar las tecnologías digitales y la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas en los cursos iniciales de la Universidad.

La transición entre Educación Secundaria y Universidad

El debate sobre el paso de las Matemáticas de la Educación Secundaria a las Matemáticas universitarias es muy antiguo. Klein (2016) lo hace explícito en la introducción de su libro "Matemática elemental desde un punto de vista superior", presentando lo que denomina el problema didáctico de la doble discontinuidad, que se relaciona con el salto que existe de la matemática y su forma de enseñarla en los cursos de la Educación Secundaria y la formación matemática que reciben en la Universidad (primera discontinuidad) y la matemática con la que los profesores de Secundaria se vuelven a encontrar cuando entran nuevamente en la escuela para enseñarlas (segunda discontinuidad) después de haber recibido su formación universitaria. Parafraseando a Klein, en relación con la "primera" discontinuidad, el estudiante universitario se encuentra con problemas de matemáticas que no ha tratado en la Secundaria, olvidándose así de muchos aspectos de esas matemáticas. Cuando termina sus estudios universitarios y vuelve o al aula como profesor o a la vida profesional aparece esa otra discontinuidad con la matemática que volverá a necesitar para desenvolverse.

Desde los años 70 del siglo pasado, las distintas Universidades exigen unas pruebas de acceso que los estudiantes que deseen entrar en sus facultades deben superar. Estas pruebas han ido recibiendo distintas denominaciones a lo largo de los años (Selectividad, 1975, PAU, 2006, y EBAU, 2017, incluso cambiando de una comunidad autónoma a otra). A pesar de estos cambios, la impresión que se tiene de la propia experiencia, es que todas estas versiones tienen algo en común: se pueden preparar y superar aprendiendo una serie de rutinas para la resolución de las actividades que componen la prueba.

Después del análisis realizado comparando los resultados obtenidos en la PAU y la EBAU en varios años, Nortes et al (2021) concluyen que los estudiantes (de 2º curso de Bachillerato que habían cursado la materia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales II) se sienten mejor cuando aplican una fórmula que aplicando un razonamiento, que les falta rigor y precisión en los cálculos. También indican los autores que se sigue preparando al alumnado para resolver los problemas rutinarios típicos de las pruebas, las cuales siguen estando alejadas del currículo oficial y en definitiva, se repiten los problemas con ligeras variaciones.

Otro aspecto que destacan en su análisis de las pruebas de acceso es que existe una escasa diferencia entre los exámenes propuestos en las PAU y los exámenes de EBAU, pese al cambio de modelo.

En ese mismo artículo, los autores indican que los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en estudios anteriores. En las pruebas de EBAU que ellos analizan, la media obtenida es un 4,32 (p. 224), siendo similares a los de otros estudios realizados con anterioridad.

Todo esto conduce a multitud de interrogantes que forman parte de las problemáticas de interés en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática: ¿Qué información aportan las pruebas de acceso universitario sobre el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes? ¿Cómo se relaciona el éxito en dichas pruebas con el éxito en la Universidad, en particular en los primeros cursos? ¿Reflejan esas pruebas el conocimiento matemático que los estudiantes necesitan para enfrentar con garantías los primeros cursos universitarios? ¿Son esos conocimientos iguales, independientemente del Grado que los estudiantes vayan a cursar?

Por otra parte, el entorno socioeconómico que rodea a la Universidad no es ajeno a lo que se hace en sus aulas, laboratorios y salas de reuniones. El alumnado, sus familias, los gobernantes, los empleadores, los emprendedores, …, es decir, todos los actores de nuestro sistema, solicitan a la Universidad que sea parte de las soluciones de los problemas que le preocupan (bienestar, salud, medio ambiente…), pero especialmente se le exige uno: que proporcione a sus alumnos verdaderas herramientas para tener una vida mejor (el conocido lema de "mejor vida que sus padres").

Puede costar encajar cómo podemos atender esta realidad socio-económica en la enseñanza de las Matemáticas. Nuestro punto de vista es simple: haciendo todo lo posible, de manera continuada e innovadora, para reducir las tasas de abandono y fracaso asociadas a las asignaturas de Matemáticas.

Esta dinámica repercute positivamente en la satisfacción de todos los actores (alumnos, profesores, administradores y familias):

- el profesorado enseñará de forma más satisfactoria.
- el alumnado se enfrentará a procesos de aprendizaje novedosos, motivantes y que atajan con antelación dificultades comunes y propias de la etapa.

– los administradores verán mejorados los indicadores académicos que determinan las acreditaciones de títulos por las agencias de calidad correspondientes.
– la sociedad en general (familias, empleadores, emprendedores, etc.) percibirá mayor satisfacción en sus graduados, motivación y confianza, necesarias para afrontar los altos niveles de fracaso y abandono, especialmente en las asignaturas de Matemáticas.

Muchos grados de las enseñanzas científico-técnicas, principalmente las ingenierías[2], presentan indicadores de fracaso muy altos, y las tasas de abandono en dichos grados son tales que se hace necesario mantener una especial atención sobre ellos.

Entre las y los estudiantes que abandonan**,** más de la mitad lo hace después del primer año, lo que demuestra que el inicio del grado es el momento más delicado de cara a la continuidad en los estudios.

El tratamiento de esta situación requiere un continuo proceso de detección de problemas, análisis de la situación, generación de herramientas de intervención, y análisis de impacto de las mismas.

En esta dirección, y por tener las Matemáticas un protagonismo tal vez excesivo en la causa de estos indicadores, las Universidades instauraron hace décadas los denominados Cursos Cero pre-universitarios para los alumnos de nuevo ingreso. Incluso algunos grados ya lo han introducido en sus programaciones como parte de su calendario oficial, siguiendo las sugerencias de mejora de las renovaciones de acreditación o procesos de modificación de los títulos.

Desde nuestro punto de vista son insuficientes por las siguientes razones:

– Reducen las causas del fracaso al déficit de conocimientos de Bachillerato, desproblematizando los procesos de enseñanza-aprendizaje implementados en los grados.
– Buscan la homogeneización del alumnado en escenarios cada vez más diversos. De forma más concreta, pretenden modelar al alumno medio que deseamos en nuestras aulas, pero no analiza el estado del alumno que recibimos para saber qué necesita realmente para afrontar la nueva etapa educativa.
– Esto se refleja especialmente en la oferta de un curso cero similar para todos los grados científico-técnicos, sin distinguir qué requiere cada uno de ellos. No podemos reducir todo a que sepan resolver sistemas de ecuaciones y derivar.
– Permanecen en el tiempo sin adaptarse a los cambios de Educación Secundaria y Bachillerato, por lo que incluso no atienden al verdadero déficit de conocimientos del alumnado.
– De forma casi insultante, plantean que en dos semanas pueden “subsanar” lo que el Bachillerato no ha conseguido en dos cursos académicos.

2. Datos y cifras del Sistema Universitario Español - Publicación 2019-2020 https://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano/estadisticas/universitaria/datos-cifras-copia.html

Pero además de todo esto, los Cursos Cero no atacan a la raíz del problema, ni mucho menos atienden al alumno en riesgo de abandono una vez impartidos. Los Cursos Cero son medidas preventivas, casi profilácticas, centrados en asegurar al profesor que su clase de alumnos de nuevo ingreso es homogénea en conocimientos del contenido matemático, pero sin atender los déficits de competencias que posean para acceder a los estudios universitarios.

La ilusión de aumentar el porcentaje de población que haya completado estudios terciarios (los que se hacen justo después de la etapa obligatoria, ciclos formativos y/o Universidad) es común para todos los países. Es el vehículo para la modernización, diversificación económica e innovación. En España, los titulados en educación terciaria tienen de media sueldos un 45% más elevados que los que han completado la segunda etapa de Educación Secundaria. Los que no han completado este último nivel de educación cobran, de media, un 18% menos.

A inicios del curso 2021/22, la tasa de graduación en Educación Secundaria postobligatoria en España -el porcentaje de población que se espera que se gradúe a lo largo de su vida en esa etapa-, creció 8,5 puntos porcentuales en los últimos seis años, hasta situarse en el 74,7%. No obstante, seguimos por debajo de la media OCDE (80,3%) y UE22 (80,6%).

En la etapa de Educación Secundaria, la OCDE apunta también a la alta tasa de repetición del sistema español, con un 8,7% de escolares repetidores en primera etapa de Educación Secundaria (1º a 3º de ESO), cuando la media OCDE es del 1,9% y la media UE22 del 2,2%. En segunda etapa de Educación Secundaria (4º ESO, Bachillerato, Formación Profesional Básica y de Grado Medio), repiten curso el 7,9% del alumnado en España, cuando la media OCDE es del 3% y la media UE22 del 3,3%.

La preocupación por el fracaso en el sector terciario es lógica porque afecta al crecimiento socio-económico general y el bienestar de los ciudadanos. La nueva Ley de Educación (LOMLOE –2020) se ha aprobado con una gran controversia alrededor de un tema casi tabú en este país hasta el momento: pasar de curso, e incluso titular etapa, sin haber aprobado todas las asignaturas.

Esta reforma otorga a los equipos docentes de Educación Primaria y Educación Secundaria la capacidad de decidir si un alumno puede pasar de curso o merece el título de ESO o Bachillerato, sin estar condicionados por el número de materias suspendidas. Aunque pudiera parecer que el cambio implica una relajación del rigor educativo, no es así. El objetivo es reducir el número de repetidores y alcanzar los objetivos por otras vías.

Estos alumnos llegarán a la Universidad, algunos con asignaturas sin aprobar, con un nuevo currículo más orientado a las competencias que a los contenidos. El nuevo currículo de Bachillerato, que pasa de tres a cinco modalidades, estrenando asignaturas, permitirá pasar de primero a segundo hasta con dos suspensos y obtener el título con una materia pendiente. La evaluación del aprendizaje del alumnado será continua y diferenciada según las distintas materias. El profesorado de cada asignatura decidirá, a final de curso, si el joven ha logrado las competencias adecuadas.

Tenemos por tanto un nuevo escenario educativo que debe afrontar la Universidad, pero no desconocido después de ocho leyes de educación en los 40 años de democracia (desde la LOECE de 1980 hasta la LOMLOE de 2020). No obstante, la rigidez del sistema imposibilita atender estos cambios con agilidad y destreza. Los Grados no pueden adaptar rápidamente sus asignaturas a las nuevas modalidades de Bachillerato, el flujo de información desde Secundaria a la educación superior es lenta y entrecortada (cuando existe), y tristemente la Universidad atiende la necesidad de cambio esencialmente cuando ve los fracasos.

El gran reto de la enseñanza universitaria de las Matemáticas es asumir, en parte o totalmente, los principios que le vienen desde hace tiempo de la Educación Secundaria: introducir la enseñanza centrada en el estudiante y orientar la formación a la adquisición de las competencias fundamentales del siglo XXI, las que les demanda el mercado laboral. Aquí el lector puede elegir el listado de competencias que más le satisfaga, pero para gusto de los matemáticos que no suelen sentirse cómodos con los términos competenciales al englobarlas todas en la resolución de problemas, las llamadas «4C» son comunes a casi todas estas listas. Estas "4C" establecen las habilidades cognitivas que facilitan la resolución de problemas complejos: Creatividad, Pensamiento Crítico, Colaboración y Comunicación… a las que habría que añadir también las habilidades de resolución de problemas y de razonamiento.

No nos referimos a cambiar contenidos para adaptarnos al nuevo currículo de Educación Secundaria y Bachillerato, hablamos de cambiar la forma de enseñar y los objetivos. Los contenidos son el medio, no el fin. El fin son las competencias, y las herramientas son las TIC y las dinámicas innovadoras en los métodos de enseñanza-aprendizaje (clase invertida, aprendizaje basado en proyectos, docencia híbrida, gamificación, talleres ...).

La generación de conocimiento, por sí misma, está justificada para cualquier área científica, pero la investigación en áreas como la Didáctica de la Matemática se convierten en cruciales para lanzar hacia la mejora y la excelencia uno de los tesoros más preciados de cualquier sociedad, la Educación. La investigación y la formación de docentes se conjugan en un sitio ideal, la Universidad, luego no hay justificación para dilatar por parte de los gobiernos el aumento de la inversión en la investigación en Didáctica de las áreas científicas y en mejora de la formación del profesorado, cosas que van de la mano en las Universidades de todo el mundo, y que es emblema de Universidades en muchas áreas.

Todo lo expuesto anteriormente nos ayuda a postular uno de los mensajes centrales de este capítulo: la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el ámbito universitario es absolutamente necesaria y justificada.

El origen de los grupos de investigación, enormemente ligado a las antiguas Escuelas de Magisterio, acompañado por la enorme predisposición del profesorado de esos niveles a las innovaciones y la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje, e incentivado por la atención a la diversidad, la ampliación de edad de la obligatoriedad del nivel de estudios, y así un largo etcétera han fundamentado la tradición y alta calidad de la investigación en Didáctica en los distintos niveles educativos en España, patrón de muchas escuelas iberoamericanas.

En lo que sigue del capítulo presentamos algunas investigaciones que consideramos que muestran el valor de futuro para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en educación superior. Debemos romper las reticencias del pasado, las clasificaciones artificiales de las áreas de investigación, y acercarnos más a las demandas reales de la sociedad (mejores ciudadanos y con más competencias para el empleo) y de las propias Universidades (mejor investigación y mejor docencia). Posiblemente las áreas de didácticas son las que mejor se ajustan a estos objetivos comunes a todos los países y Universidades.

Proyectos de investigación sobre matemática universitaria

Para situar en un contexto metodológico y conceptual los proyectos sobre matemática universitaria que citaremos a continuación, conviene mencionar algunos proyectos europeos no universitarios que han resultado ser fuente de inspiración para los primeros.

En la Educación Primaria y Secundaria se han desarrollado en la pasada década dos proyectos importantes para el desarrollo profesional de profesores en ciencia y matemáticas: El proyecto Fibonacci[3] y el proyecto PRIMAS[4], elaborando materiales para la educación preuniversitaria, tomando como referencia la Educación Basada en la Indagación[5] (EBI)

El proyecto PRIMAS, entre cuyas publicaciones se encuentran algunos módulos traducidos a diferentes idiomas (por ejemplo, al español), considera que los elementos fundamentales a tener en cuenta deben ser los resultados y el entorno de aprendizaje, el papel tanto de los profesores como de los estudiantes, y la cultura de la clase. De esta forma, como resultados de aprendizaje se pretende conseguir: mentes críticas y creativas, comprensión de la naturaleza de las ciencias y las matemáticas y preparación para el aprendizaje a lo largo de la vida. También tratan de conseguir una cultura de la clase en las que se compartan las indagaciones y se valoren los errores como fuentes de aprendizaje, Los entornos de aprendizaje que se promueven son entornos en los que debe tratar de ir desde los problemas a las explicaciones y no de los ejemplos a la práctica y se debe conseguir que los estudiantes sean capaces de inventar problemas y colaborar en la búsqueda de sus soluciones. El papel del profesorado debe apoyarse en valorar los razonamientos de los alumnos, conectar sus experiencias y fomentar el aprendizaje en la indagación y la investigación.

3. http://www.fibonacci-project.eu
4. https://primas-project.eu
5. En original es Inquiry-Based Education (IBE). Se considerará aquí Consideraremos el término Inquiry como Indagación.

El Proyecto Fibonacci, que también está bastante extendido a nivel europeo, tiene como principales objetivos: diseñar, implementar y evaluar la Educación Basada en la Indagación en Ciencias y Matemáticas, extendiendo la EBI con elementos propios de la innovación y sostenibilidad del entorno que rodea a los estudiantes y los profesores. En su fundamentación considera tres pilares básicos en torno al IBSME y nueve patrones de comportamiento que van desde el desarrollo de la cultura basada en la resolución de problemas hasta el aprendizaje autónomo, promoviendo el trabajo cooperativo y empleando el método científico.

Ambos proyectos están dirigidos por un modelo de aprendizaje complementario basado en la indagación o investigaciones dirigiéndose hacia el uso de la modelización y la resolución de problemas matemáticos.

Como complemento a estos proyectos centrados en la Secundaria, la Unión Europea ha mostrado su interés en intentar reducir el fracaso universitario en las asignaturas de matemáticas financiando proyectos del programa Erasmus+. Los proyectos **iTEM - i**nnovative **T**eaching **E**ducating in **M**athematics[6], **Pythagoras**[7] **y PLATINUM**[8] son ejemplos de ello.

iTEM presta atención a la mejora de la enseñanza de las asignaturas básicas (cálculo y álgebra lineal) en los grados de ingeniería, introduciendo problemas de la vida real, modelos de enseñanza basado en el Aprendizaje Basado en Proyectos y el uso de sistemas dinámicos y móviles. El Aprendizaje Basado en Proyectos es una metodología centrada en la resolución de tareas que deben ser propuestas por el profesor o los mismos alumnos (supervisados) que deben ser resueltas para alcanzar los aprendizajes previamente establecidos. La generación de herramientas para la detección de alumnos en riesgo (vía las técnicas de analíticas de aprendizaje tan de moda en los últimos años), la preparación de materiales de ejemplo de uso de problemas reales en formato de actividades de Aprendizaje Basado en Proyectos, el uso de herramientas dinámicas (CAS y mobile-tools) y el diseño de materiales de atención de alumnos con dificultades de seguir las asignaturas han sido los ejes fundamentales de trabajo para reducir los indicadores de fracaso en los grados de ingeniería en centros de Israel, Kosovo y Uzbekistán.

Pythagoras es un proyecto recién iniciado en el momento de redacción de este libro y centra su atención en el diseño de procesos innovadores en varios aspectos. Por un lado, pretende seguir la iniciativa de la UNESCO de promover, con la enseñanza de las Matemáticas, el logro y soporte de los Objetivos de Desarrollo Sostenible por medio de la Educación[9]. Se postula así el aprendizaje de matemáticas basado en proyectos, que implica la introducción de problemas desafiantes que hacen fluir la creatividad, la investigación y la construcción de conocimiento. El aprendizaje basado en proyectos

6. https://item.chania.teicrete.gr/
7. https://www.pythagoras-grant.eu/
8. https://platinum.uia.no
9. *Mathematics for action: supporting science-based decision-making* - UNESCO (2022) https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380883.locale=en

puede ser una instrucción auténtica en su máxima expresión, donde a los estudiantes se les permite experimentar problemas de la vida real, utilizando su propio enfoque único; fomentando así el desarrollo de competencias transversales fundamentales. Por otro lado, el proyecto considerará la gamificación en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, de manera transversal, siempre pondrá especial interés en la atención a los alumnos en riesgo de abandono, una de las mayores preocupaciones de la UE.

Platinum

Este proyecto, cuyo nombre original es Partnerships for Learning And Teaching in University Mathematics (PLATINUM)[10], es un proyecto en el que participa un grupo de 8 Universidades europeas de un total de siete países, entre las que se encuentra, representando a España, la Universidad Complutense de Madrid. Este proyecto reúne a profesores de distintos ámbitos académicos (ingenierías, ciencias,…), interesados por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. Quizás, la característica más importante de Platinum es que está sustentado por un marco conceptual validado por la investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. La característica más importante es que el desarrollo de este proyecto ha servido como contexto en el que seguir avanzando en el establecimiento de la Educación Matemática Basada en la Indagación (IBME)[11] como un Marco Conceptual, basado en la experimentación, para la enseñanza de las Matemáticas de la Universidad. EMBI constituye un modelo de enseñanza tanto de la matemática como de la ciencia en el que se plantea que los estudiantes deben reproducir el quehacer de los científicos e ingenieros en general y los matemáticos en particular (Artigue y Blomhøj, 2013; Dorier y Maaß, 2020). Para ello, deben observar fenómenos, hacerse interrogantes y preguntas, y buscar respuestas a tales cuestionamientos, interpretando, evaluando y comunicando los resultados obtenidos. Para responder a las preguntas surgidas a partir de la observación de los fenómenos, deben basarse en la experimentación, controlando sistemáticamente las variables que intervienen en ellos, utilizando diagramas, haciendo cálculos específicos, buscando patrones y relaciones y estableciendo las respuestas como consecuencia de las investigaciones realizadas.

Las tareas que se proponen en este marco metodológico se interrelacionan entre sí y deben suponer retos a los estudiantes, propiciando un trabajo colaborativo. El papel del profesor se modifica sustancialmente con esta metodología, dado que debe pasar de ser transmisor de conocimientos mediante explicaciones, con ejemplos ilustrativos y diestro en la resolución de ejercicios, a poseer unas capacidades diferentes, tales como provocar el uso de los conocimientos previos de los estudiantes, manejar con

10. Se podría traducir por “Asociados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias”.

11. Consideraremos el término Inquiry como Indagación con lo que podríamos hablar, en la comunidad latina, de Educación Matemática Basada en la Indagación (EMBI).

cierta destreza las discusiones en pequeño y gran grupo, ser capaz de buscar retos para que los estudiantes aprendan a justificar sus argumentos, complementar los distintos puntos de vistas que se presenten en las discusiones y ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre las diferentes ideas que surjan.

Gómez-Chacón, et al., (2021), en una publicación que recoge un informe bastante completo, tanto de la metodología como de los fundamentos teóricos y ejemplos concretos del proyecto Platinum, especifica la manera de desarrollar el trabajo de los diferentes "socios" del proyecto mediante lo que ellos denominan "Comunidades de Indagación"[12], así como su funcionamiento y avances. Todo esto se establece a partir de un modelo que consta de tres niveles de concreción.

En el capítulo trece[13] de Gómez Chacón et al. (2021) se presentan de manera explícita algunas tareas que fueron experimentadas en la Universidad de Masaryk, en la República Checa (Brno), en tres cursos diferentes: Estadística, Análisis Matemático 1 y Matemáticas 2, en clases magistrales y seminarios. Se diseñaron tres tipos de actividades EMBI: tareas cortas (Estadística), tareas grupales (Matemáticas 2) y unidades de enseñanza completas (Análisis Matemático 1). Las tareas utilizadas en los dos primeros cursos son tareas cortas y proyectos para desarrollar en equipo con el propósito de introducir nuevos conceptos. En el curso de Análisis Matemático 1 son diseñadas con el objetivo de reforzar los conceptos básicos y profundizar en la comprensión por parte de los estudiantes con unidades de enseñanza basadas en EMBI más completas. El seguimiento y evaluación también varía desde observaciones por parte de los profesores y el análisis detallado por parte de los profesores de los informes y presentaciones de las actividades realizadas por los estudiantes. Por ejemplo, en relación con las tareas para el curso de Análisis Matemático 1 (propuestas para permitir que los estudiantes refuercen los conocimientos adquiridos con anterioridad), se presenta a modo de "juego" la siguiente tarea:

Instrucciones de la tarea: Configurar grupos de entre 2 y 4 miembros. Uno de los grupos determinará las condiciones de límite o los requisitos de continuidad de una función desconocida. Los demás tratarán de encontrar un ejemplo de una función que cumpla los requerimientos. El profesor puede cambiar los roles de los mismos. Ejemplos de requerimientos:

a) Determina una función $f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.
b) Determina una función $f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$, pero no es continua en $x=3$.
c) Determina una función $\mathrm{f(x)}$ tal que $\lim_{x\to 3} \mathrm{f(x)} = -\infty$.

Figura 1. Tarea de refuerzo en la que se pide que justifiquen sus soluciones mediante software o incluso con representaciones propias. (Gómez Chacón et al, 2021, p. 243)

12. Communities of Inquiry (CoI).
13. https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-13

Como ejemplo del tercer tipo de tareas, los autores diseñaron dos Fichas de Trabajo (para dos sesiones de trabajo y pautando el tiempo dedicado al trabajo práctico con y sin los profesores) para estudiar la monotonía/convexidad y concavidad de funciones, en términos de aplicaciones de los conocimientos previos adquiridos. En ambas actividades, se les pide el manejo del SGD GeoGebra para resolver algunas de las cuestiones.

Para el estudio de la monotonía de una función, se trabaja con la función polinómica $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$. En la Figura 2 se presentan las actividades propuestas:

(a) Dibuja con GeoGebra la gráfica de la función.

(b) Determina los intervalos en los cuales la función crece o decrece; escríbelo todo en la siguiente tabla:

	$(-\infty, -1)$	$(-1{,}0)$	$(0{,}4)$	$(4, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$				

(c) Calcula la derivada de la función.

(d) Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos de la siguiente tabla;:Escriba aquí la ecuación.

(e) Dibuja con GeoGebra la gráfica de la función derivada.

x_0	-4	-0,5	3	5
$f'(x_0)$				

(f) Determina los intervalos donde la primera derivada es positiva o negativa, expresándolos en la siguiente tabla:

Intervalo				
$f'(x)$				

(g) Calcula: $f'(-1), f'(0), f'(4)$

Tarea final: Resume las conclusiones de todas las indagaciones hecha con esta función.

Figura 2. Actividad de Gómez Chacón et al. (2021, p. 244)

En relación con la concavidad y convexidad, se propone una tarea para el estudio de la función racional f y su derivada, dadas explícitamente $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ y $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, , con diferentes apartados en los que se pide como en el caso anterior, estudiar los intervalos donde varía el signo de la derivada segunda habiendo pedido previamente la representación gráfica de la función hecha con GeoGebra. Finalmente, se pide a los estudiantes que obtengan y representen, en la misma figura, las ecuaciones de las rectas tangentes y comprueben su posición conectándola con el signo de la segunda derivada. En esta experiencia, se crearon grupos de discusión que celebran seminarios para revisar el trabajo realizado durante el desarrollo de las lecciones diseñadas.

El uso de la Tecnología en la Universidad: algunos ejemplos

En este apartado se tratará de responder a la siguiente pregunta: ¿En qué modo es posible adaptar materiales curriculares innovadores a los nuevos avances en tecnologías digitales? ¿Es posible?

Se presenta a continuación una adaptación de dos materiales diseñados en el contexto de sendas investigaciones. El uso de dichos materiales mostró buenos resultados, por lo que consideramos que su adaptación al uso de tecnologías más actuales puede resultar útil de cara a la práctica de la enseñanza de las matemáticas universitarias. Se incluyen dos ejemplos de secuencias de enseñanza, una dedicada al concepto de integral definida y otra hacia la introducción de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

Ejemplo 1: La enseñanza y aprendizaje de la integral definida

En la investigación de Depool (2004) se analizaron las potencialidades y dificultades que aparecen cuando se establece una modificación en el orden en el que habitualmente se trabaja el concepto de integral definida. La idea fue la de introducir el concepto como área limitada por una curva con el eje OX, combinando una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación y posponiendo el estudio del cálculo de primitivas, el Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de Barrow a la última parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se elaboraron en aquel momento diversos Programas de Utilidades con el Computer Algebra System (CAS) *Derive*, que los estudiantes manipulaban a partir del diseño de una serie de prácticas de laboratorio. Dado que los resultados obtenidos fueron relativamente buenos, se presentará aquí una actividad de las utilizadas en la parte experimental de su investigación, adaptada al uso de GeoGebra.

Depool fundamenta su trabajo en dos elementos principales: por una parte, un modelo de competencia que se adapta del que establece Socas (2001) en el caso del estudio del papel de los sistemas matemáticos de signos para la comprensión de objetos matemáticos relacionados con los pensamientos numérico y algebraico. El segundo elemento considerado lo constituye el empleo de tecnología, en particular *Derive,* como elemento facilitador de la formación de conceptos matemáticos.

El modelo de competencia se utilizó como un marco de referencia para analizar las actuaciones de los estudiantes, y mediante su uso, se determinó el grado de comprensión del concepto (Camacho et al., 2010).

El segundo elemento que ya hemos indicado, tiene que ver con el uso herramientas tecnológicas como mediadores entre el proceso de instrucción y el aprendizaje.

La parte experimental del trabajo se desarrolló en el aula siguiendo tres fases (Camacho-Machín, 2005):

> Fase 1: *Clases habituales:* El profesor hace una presentación de los contenidos usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.
> Fase 2: *Prácticas en el Laboratorio de ordenadores:* Los estudiantes realizan por parejas, en el laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en su desarrollo.
> Fase 3: *Puesta en común:* Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron (p. 101)

Las prácticas de laboratorio, núcleo central del módulo instruccional, se desarrollaban a partir de un comentario general y un protocolo de actuación que los estudiantes debían seguir como instrucción. Los contenidos se proyectaban en una pantalla con un cañón de proyección, y se entregaban a los estudiantes con el objetivo de aclarar los puntos que fueran necesarios. Además, cada práctica nueva se comenzaba abriendo el archivo que contiene la práctica anterior en la que los estudiantes leían las observaciones de ésta y la calificación respectiva. Una vez terminado el módulo, se realizaba una evaluación final que contiene los puntos más importantes tratados en las prácticas. El siguiente problema, adaptado de un libro de texto clásico (Edwards y Penney 1996, pp. 370-371), constituyó una de las prácticas utilizadas:

> *Un fabricante necesita hacer hojas de metal de 36 pulgadas* (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (Figuras 6 y 7)
>
> $$y = \frac{1}{2} sen\pi x, 0 \leq x \leq 36$$
>
> *¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas láminas?*

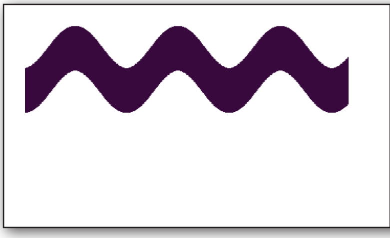


Figura 3. Lámina de metal

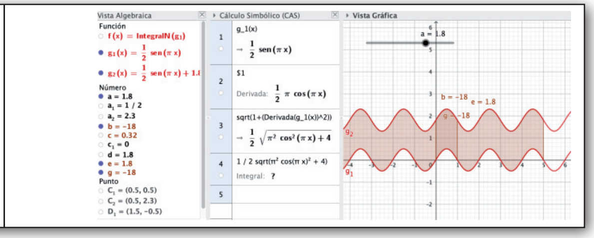


Figura 4. Representación icónica de las funciones $y = \frac{1}{2} sen\pi x; y = \frac{1}{2} sen\pi x + a$ el deslizador a representa un ancho variable de la lámina de metal

Se considera que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

se tiene en este caso

$$S(x)=\int_0^{36}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 cos^2\pi x dx} = 36\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 cos^2\pi x\, dx}$$

El texto indica además que *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) y remite al lector al capítulo del libro que se dedica a métodos numéricos de integración. Señala que la solución al problema será:

$$\int \sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\pi\, x}\ \mathrm{dx} = 1{,}46$$

Indicando a continuación que la solución del problema es: $36.(1{,}46) = 52{,}56$ pulgadas.

En nuestro caso, la resolución con GeoGebra permitirá obtener una solución desde los puntos de vista gráfico y numérico. El SGD GeoGebra nos permitirá aproximar la solución de diferentes maneras:

1.- Mediante segmentos, debido a las propias características de la función (Fig. 5).

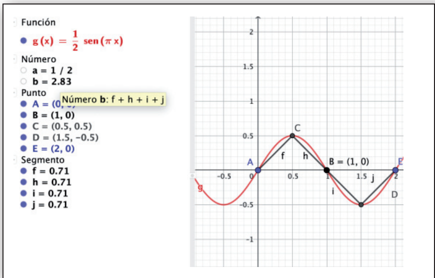


Figura 5. La aproximación con segmentos en el intervalo (0,1) es 1.42

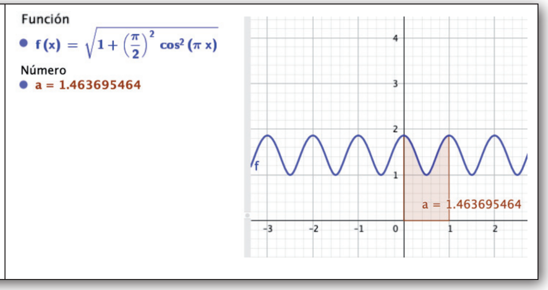


Figura 6. Cálculo de la longitud del arco de la curva buscado, mediante el área limitada

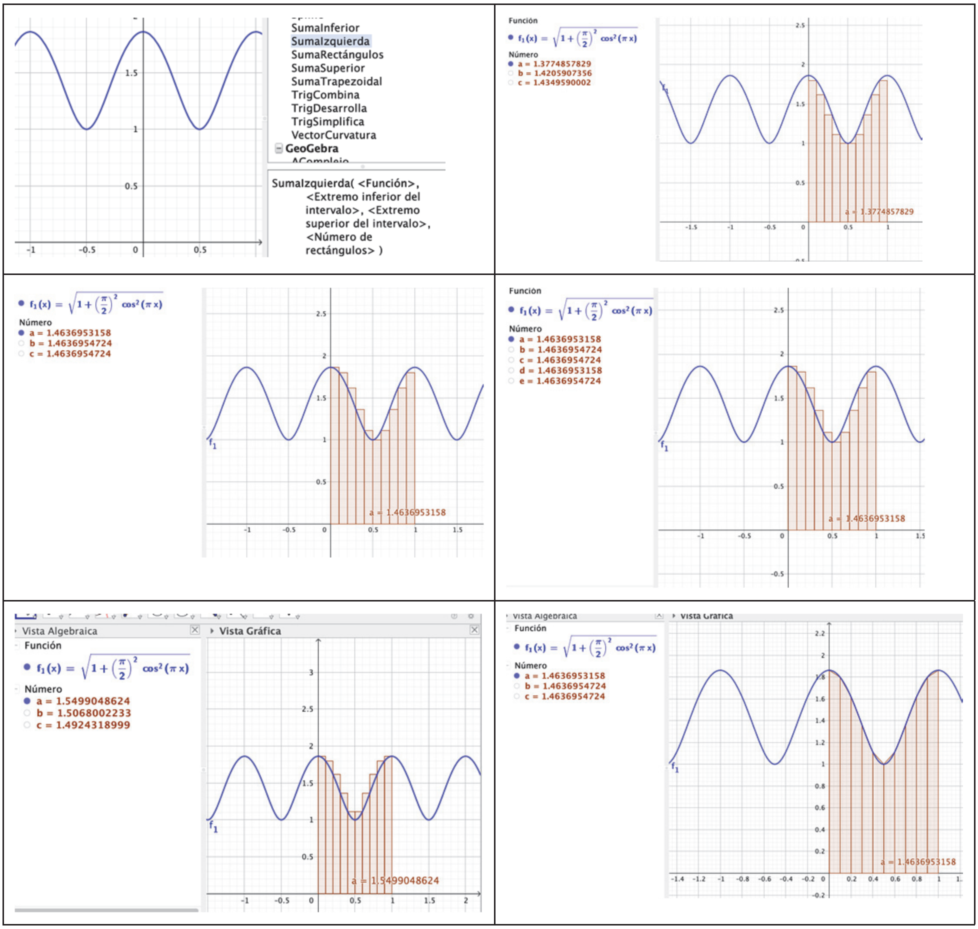
2.- Entender que, pese a que el cálculo de la longitud del arco de curva viene representado mediante el valor de una integral definida, esto es el área de la superficie limitada por una curva. La integral definida representará la medida lineal de la longitud del arco, algo que genera dificultades de interpretación no solo para la longitud sino para múltiples conceptos físicos relacionados con integrales definida, como por ejemplo fuerza, presión, etc. (Figura 6)

GeoGebra nos facilita varias formas de calcular esa integral definida:

La Figuras 3 y 4 muestran la forma de la hoja a la que se refiere el problema. La figura 4 recoge la representación gráfica de la función correspondiente. En la primera casilla de la Tabla 1, se puede observar los diferentes comandos predefinidos por GeoGebra. Las siguientes casillas presentan todos los cálculos para 10, 20 y 30 subintervalos de igual amplitud del intervalo (0,1).

Se obtienen:

Tabla 1. Representaciones gráficas y numéricas de las distintas opciones de GeoGebra: (el orden de izquierda a derecha y de arriba abajo es el mismo que el de la Tabla 2)



$$36(1.4636954724) \approx 56{,}693$$

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46370.

Tabla 2. Valores de las diferentes aproximaciones

Div	SumaInferior	SumaIzquierda	SumaRectángulos	SumaSuperior	Suma Trapezoidal
10	1.3774857029	1.4636953158	1.4636953158	1.5499048624	1.4636953158
20	1.4205907356	1.4636954724	1.4636954724	1.5068002233	1.4636954724
30	1,4349590002	1.4636954724	1.4636954724	1.4924318999	1.4636954724

El estudiante concluirá en definitiva que, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente 36(1.4636954724) ≈ 56,693 pulgadas de ancho.

El siguiente enlace presenta los applets de las diferentes aproximaciones hechas con GeoGebra que se muestran en las Tablas 1 y 2.

https://www.geogebra.org/m/kkgexm6d

Ejemplo 2. La enseñanza y aprendizaje de las EDO en un escenario de resolución de problemas, haciendo uso de herramientas tecnológicas

En esta sección se presenta una propuesta para la introducción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), desde una perspectiva de resolución de problemas, y donde se utiliza el GeoGebra como herramienta tecnológica que favorece la indagación y la reflexión profunda, tanto en torno al concepto de EDO, con en relación con las situaciones problemáticas planteadas. Esta propuesta es una adaptación de un Módulo de Enseñanza diseñado en el contexto de una investigación realizada con estudiantes universitarios del Grado de Química (Perdomo-Díaz, 2010). En una primera fase de dicha investigación se identificó un conjunto de dificultades que los estudiantes presentaban en relación con el concepto de EDO y que tenían tres orígenes principales:

(a) las limitaciones en el reconocimiento y uso de los diferentes significados asociados al concepto de derivada (Camacho, et al., 2010). En este sentido, (Thurston, 1994) señala los siguientes significados para la derivada de una función:

  (1) Infinitesimal: la relación entre el cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en la función.
  (2) Simbólico: la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada de sin x es cos x, etc.

(3) Lógica: $f'(x) = d$ sí y sólo si para todo ε hay un δ tal que cuando $0 < |\Delta x| < \delta$,
$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.
(4) Geométrico: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene tangente.
(5) Velocidad: la velocidad instantánea de f(t), cuando t es el tiempo.
(6) Aproximación: la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función, cerca de un punto.
(7) Microscópico: la derivada de una función es el límite de los que se observa mirando cada vez con un microscopio más potente. (p. 3)

(b) la falta de conexión entre el concepto de EDO y el concepto de derivada y
(c) el escaso desarrollo de procesos cognitivos y estrategias efectivas para la resolución de problemas (Camacho et al., 2010). A partir de estos resultados se tomaron las siguientes decisiones sobre el diseño del Módulo de Enseñanza:

– Plantear actividades que contribuyan a robustecer la red de significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada, introduciendo las EDO a través de su relación con dicho concepto, como un significado más de esa red conceptual.
– Utilizar un enfoque basado en la resolución de problemas, haciendo explícitas diferentes etapas que permiten avanzar en el proceso de resolución y distintas estrategias.
– Emplear recursos tecnológicos que favorezcan que el estudiante pueda centrarse en el análisis de los procesos de resolución, las respuestas obtenidas y su conexión con la situación planteada.

Desde este punto de vista, la alternativa pedagógica que se plantea consiste en construir los nuevos conceptos matemáticos a partir de conceptos ya conocidos por los estudiantes, tratando así de disminuir las discontinuidades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 2001; Raychadhuri, 2007; Guerrero-Ortiz et al., 2016); en particular, haciendo más natural la transición entre conceptos matemáticos tan cercanos entre sí como el de derivada de una función y Ecuación Diferencial Ordinaria.

El Módulo de Enseñanza, presentado en detalle en Perdomo-Díaz (2010), está formado por cuatro problemas, tres de ellos diseñados para ser trabajados en pareja y el último de forma individual, en un total de 11 sesiones de clase, de una hora de duración. Puesto que la investigación se iba a realizar con estudiantes universitarios del Grado de Química, los problemas se plantearon en contextos cercanos a su formación: la descomposición de elementos químicos, la mezcla de sustancias químicas y la dinámica de poblaciones. En el primero, de carácter introductorio, se analizan diferentes situaciones de variación y sus representaciones en lenguaje matemático, lo que se vio que era necesario a partir de los resultados de una investigación previa (Camacho et al., 2009) y se finaliza con la introducción del concepto de EDO, orden y solución de la misma. La estructura de los siguientes dos problemas es similar: se comienza con el planteamiento de una situación y, a continuación, se plantean una serie de cuestiones divididas en distintas etapas. El último de los problemas se utilizó como instrumento para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

Los resultados de la investigación realizada con los estudiantes del Grado en Químicas (Camacho, et al. 2012) reflejaron que este Módulo de Enseñanza permitió que los estudiantes mostraran, de forma explícita, procesos que habitualmente quedan escondidos para el docente, como son el análisis de las situaciones planteadas, la interpretación que daban a la información o la forma de generalizar los resultados. Por otra parte, la interacción entre los estudiantes favoreció la generación de ideas, así como la reflexión y el análisis en torno a las mismas. Asimismo, el uso de una herramienta tecnológica, en este caso la calculadora Voyage 200, permitió que los estudiantes pudieran analizar la situación a través de diferentes representaciones, lo que resultó especialmente útil en el proceso de generalización de los modelos matemáticos.

Estos resultados nos motivaron a incorporar en este capítulo una adaptación de uno de los problemas de este Módulo de Enseñanza, como ejemplo de un tipo de actividad que podría realizarse en el ámbito universitario. Aunque la actividad está diseñada para estudiantes del Grado de Química, es fácilmente adaptable a otros grados universitarios en los que se estudien las EDO.

El problema se denomina "Dinámica de poblaciones" (Figura 7) y es el tercero de los problemas del Módulo de Enseñanza. Está diseñado para ser trabajado durante 4 sesiones de una hora y tiene dos características principales: la importancia que se da al sistema de representación gráfico y el significado asociado al concepto de EDO que se utiliza, fuertemente ligado al concepto de derivada de una función. Se trata de un problema que podemos considerar de dinámica poblacional y cuya resolución pasa por el planteamiento y resolución de una EDO que puede resolverse por el método de variables separables.

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias.

La piscifactoría "*La mar de bueno*" solicita sus servicios para buscar una manera sencilla de comunicar a sus inversores cómo varía la cantidad de peces que hay en uno de los recintos que utilizan para la cría de doradas.

Los últimos recuentos del número de peces que hay en uno de los recintos han mostrado que el número de peces está disminuyendo considerablemente. Los técnicos de nutrición y de epidemiología no han detectado ningún problema relacionado con la alimentación o alguna enfermedad, pero me apuntan que quizás el problema esté en la cantidad de peces que hay dentro del recinto.

Necesito que realice un estudio sobre cómo varía el número de peces que hay en el recinto a lo largo del tiempo y que analice cuál puede ser el problema.

Para presentar el informe a los inversores, sería conveniente que este se presentara en un formato de fácil comprensión como, por ejemplo, una representación gráfica que refleje cuál es la situación en cualquier instante de tiempo.

Le adjunto cierta información recogida por nuestros trabajadores que podrían serle de utilidad en su trabajo.

- La tasa de nacimiento de doradas es de 410 por cada mil, cada año.
- La tasa de mortalidad de doradas es de 220 por cada mil, cada año.

Figura 7. Enunciado inicial del problema "Dinámica de poblaciones"

El diseño del problema trata de guiar a los estudiantes en el análisis de la situación, así como en la construcción y generalización del modelo matemático y el análisis del propio proceso de resolución. Para ello se plantea un conjunto de preguntas, organizadas en torno a cinco etapas. Dichas etapas se diseñaron tomando como referencia las etapas del modelo propuesto por Polya (1945), algunas de las cuáles se enriquecieron a partir de las ideas de autores como Schoenfeld (1992) o Santos-Trigo (2007) (Figura 8).

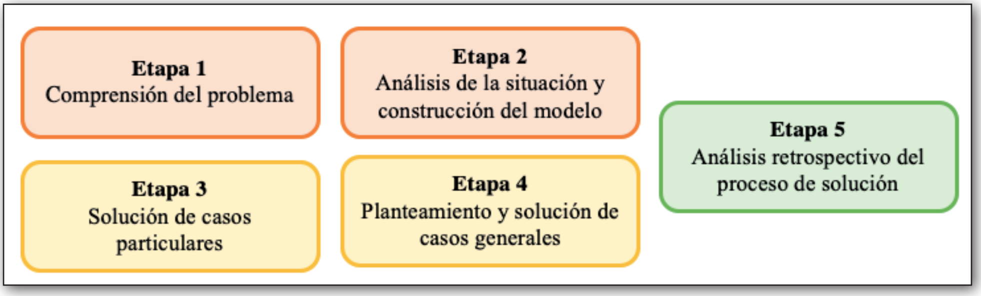


Figura 8. Etapas consideradas en la resolución del problema

Estas etapas ya habían sido trabajadas con los estudiantes en el segundo problema del Módulo de Enseñanza. En este problema, la intención es continuar haciéndolas explícitas, a la vez que se disminuye el número de preguntas guía formuladas por el docente, de manera que sean los propios estudiantes quienes comiencen a formularse dichas cuestiones.

A continuación, presentamos una descripción de cada una de esas etapas y la adaptación de las actividades al uso de GeoGebra.

Etapa 1. Comprensión del problema

Se plantea a los estudiantes una serie de preguntas (Figura 9) cuyo objetivo es que reflexionen acerca de la situación que se trata de abordar, así como guiarlos en la identificación de información relevante y el análisis del significado de dicha información.

En esta etapa contestaremos a una serie de preguntas que nos ayudarán a comprender la situación planteada. Añade cualquier otra pregunta que consideres relevante.

- ¿Qué fenómeno estamos estudiando?
- ¿Qué solicita el cliente?
- ¿Qué significa que la tasa de nacimiento es de 410 peces por cada mil?
- ¿Qué significa que la tasa de mortalidad es de 220 peces por cada mil?
- En la situación considerada, ¿qué está cambiando?

Figura 9. Preguntas planteadas en la Etapa 1

Reflexionar en torno a estas preguntas ayudará a los estudiantes en el proceso de análisis y la búsqueda de posibles vías de resolución. Se trata de que identifiquen los aspectos más relevantes que le acerquen a elaborar un modelo matemático que resuelva el problema.

Esta es una etapa que conviene hacer explícita cuando se comienza a trabajar bajo un enfoque de resolución de problemas. De esta manera se muestra a los estudiantes algunos ejemplos del tipo de preguntas que, en el futuro, deberían hacerse de forma autónoma al enfrentar un nuevo problema. A medida que se avanza, el docente puede ir haciendo esta etapa cada vez más implícita, a fin de promover que sea cada alumno quien formule las preguntas que necesita.

Etapa 2. Análisis de la situación y construcción del modelo

Se pide explícitamente a los estudiantes que completen una tabla, indicando la variación en el número de peces que se produce en un año, para distinto número de peces (Figura 10). El objetivo es guiar a los estudiantes en el proceso de construcción del modelo matemático. En los dos primeros problemas del Módulo, los alumnos interpretaban la variación en términos de la derivada en función del tiempo. Con esta tabla, se les guía para que expresen dicha variación como la diferencia entre el número de peces que nacen y mueren en un determinado período de tiempo. Así, si P(t) representa la cantidad de peces en un instante cualquiera de tiempo t, se trata de que los estudiantes, completando esta tabla, lleguen a la expresión de la EDO $\left(\frac{dP}{dt} = 0{,}19P(t)\right)$

Llamemos $P(t)$ a la cantidad de peces que hay en cualquier instante.

Analicemos cómo varía el número de peces que hay en el recinto.

Número de peces	**Peces que nacen en un año**	**Peces que mueren en un año**	**Variación en el número de peces, en un año**
1000			
2000			
3000			
$P(t)$			

- Escribe la EDO que modela la situación.

Figura 10. Actividades de la segunda etapa de resolución

Etapa 3. Solución de casos particulares

La etapa comienza pidiendo a los estudiantes que resuelvan la EDO obtenida anteriormente. En el segundo problema del Módulo se les ha explicado el procedimiento algebraico que permite resolver este tipo de ecuaciones. En este punto, conviene animar a los estudiantes a comprobar su respuesta apoyándose en GeoGebra, el cuál dispone de un entorno CAS (Computer Algebra System) que permite resolver EDOs, entre muchas otras cosas (Figura 14).

En esta etapa no se indican condiciones iniciales, de forma que la solución de la EDO queda expresada en términos de un parámetro. La actividad continúa planteando a los estudiantes un conjunto de preguntas que les lleven a analizar la expresión obtenida: *¿La constante de integración puede ser negativa? ¿Por qué? Con los datos que tienes, ¿puedes calcular el valor de la constante de integración? ¿Qué necesitarías conocer para poder calcularlo?* Con esta discusión se analiza la relación entre la expresión algebraica de la solución y la situación planteada y, además, surge la necesidad de disponer de unas condiciones iniciales, concepto que ya se habría discutido en el segundo problema del Módulo.

Seguidamente, se plantea a los estudiantes un conjunto de preguntas dirigidas al análisis de las soluciones de la EDO: *El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante? Explica tu respuesta. ¿Hasta qué valor? ¿Te parece que la información obtenida a través de la representación gráfica se ajusta a lo que ocurre en la realidad?* GeoGebra incorpora en la solución un deslizador, c_1 para la constante de integración, lo que facilita el análisis de las soluciones obtenidas y permite responder a las preguntas formuladas (Figura 11).

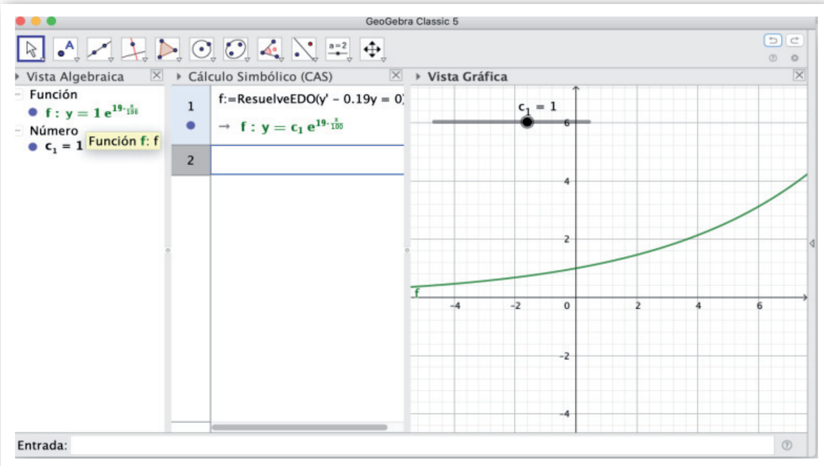


Figura 11. Resolución algebraica de una EDO usando GeoGebra y representación gráfica de la solución

Una vez analizado el caso anterior, se introduce un nuevo caso, donde se incorpora un término de competición entre las especies (Figura 12). Se pide a los estudiantes que expresen matemáticamente esta nueva situación, lo que les conduce a la EDO $\frac{dP}{dt} = 0'19P - bP^2$, y analicen dicha expresión.

Cuando el número de peces que hay en el recinto es muy grande, empiezan a escasear recursos como el espacio vital, los alimentos, etc. por lo que los peces comienzan a competir entre ellos. Esto hace que el número de peces sufra cierta disminución debido a esta causa. Recuerda que el dueño de la piscifactoría ya apuntaba a este hecho como la posible causa de la muerte de los peces. De forma experimental se ha visto que el término de competición entre las especies es proporcional al cuadrado de la población en cada instante, es decir que este hecho hace que la población disminuya según el término $b \cdot P^2$.

- Teniendo en cuenta este hecho, indica la variación de la población de doradas conforme pasa el tiempo.
- ¿Tendría sentido que el término de competición fuera negativo? ¿Por qué?
- Analiza para qué valores de P la población
  - **(a)** Aumenta
  - **(b)** Disminuye
  - **(c)** Se mantiene constante

Figura 12. Planteamiento del caso con un término de competición entre especies

Las dos últimas preguntas tienen como objetivo que el estudiante se apoye en la expresión de la EDO para responder, puesto que no dispone de información suficiente para poder representar gráficamente las soluciones. Por tanto, la opción que les queda es utilizar la EDO para obtener información acerca de la monotonía de la función solución, surgiendo así una nueva interpretación del concepto EDO, relacionada directamente con uno de los múltiples significados asociados al concepto de derivada, el significado geométrico (Thurston, 1994). Este tipo de preguntas contribuye a que los estudiantes construyan una red de significados en torno a un mismo concepto matemático, en este caso las EDO. Se les muestra que pueden obtener información de la función solución, no solo resolviendo la ecuación, sino también a través del análisis de dicha ecuación.

El problema continúa preguntando a los estudiantes lo siguiente: *¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?* Para responder, se puede pedir a los alumnos que consideren un caso particular para esta nueva situación, donde b=0,001, y se apoyen en el uso de GeoGebra (Figura 16). Moviendo el deslizador que GeoGebra presenta, asociado a la constante de integración que aparece en la expresión de la solución de la EDO, se puede observar que la forma de las soluciones cambia cuando dicha constante es menor, igual o mayor que 0 (Figura 13 (a), (b) y (c), respectivamente), pero que, en todas ellas, la solución tiende al valor P(t)=190.

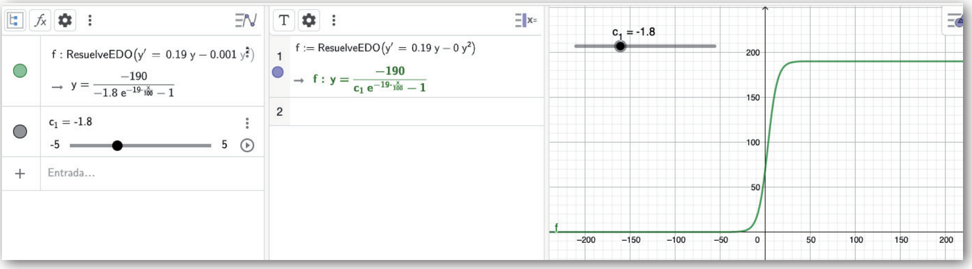


Figura 13 (a)

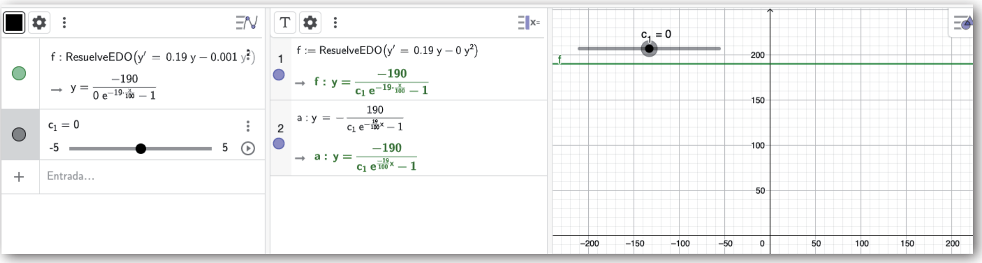


Figura 13 (b)

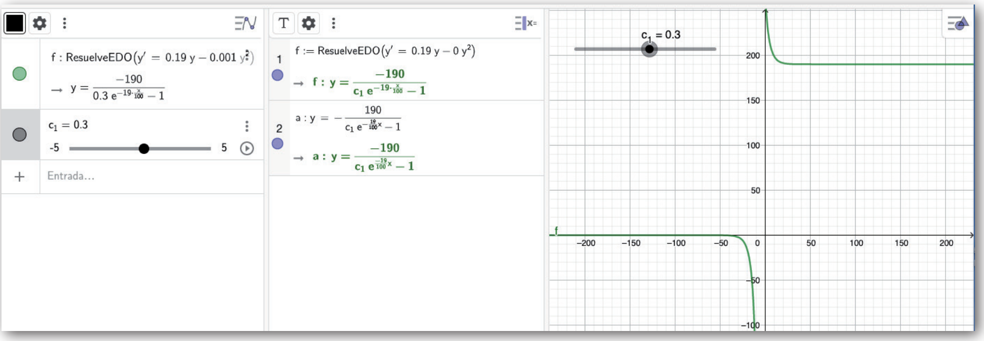


Figura 13 (c)

Figura 13. Soluciones para valores de la constante de integración menor (a), igual (b) y mayor que 0 (c).

A partir de esta representación se puede plantear a los estudiantes diversidad de preguntas como, por ejemplo: *¿Cuál tendría que ser la población inicial de peces para que la población se mantenga siempre constante? ¿Y para que siempre aumente?* Además, se puede pedir a los estudiantes que profundicen en el análisis de la situación planteada, por ejemplo, solicitándoles que analicen las soluciones para distintos valores de la población inicial de peces. Se les puede proponer, por ejemplo, que analicen cuál será la solución si inicialmente hubiese una población de (a) 100 peces y (b) 280 peces (Figura 14), que son dos casos con comportamientos diferentes.

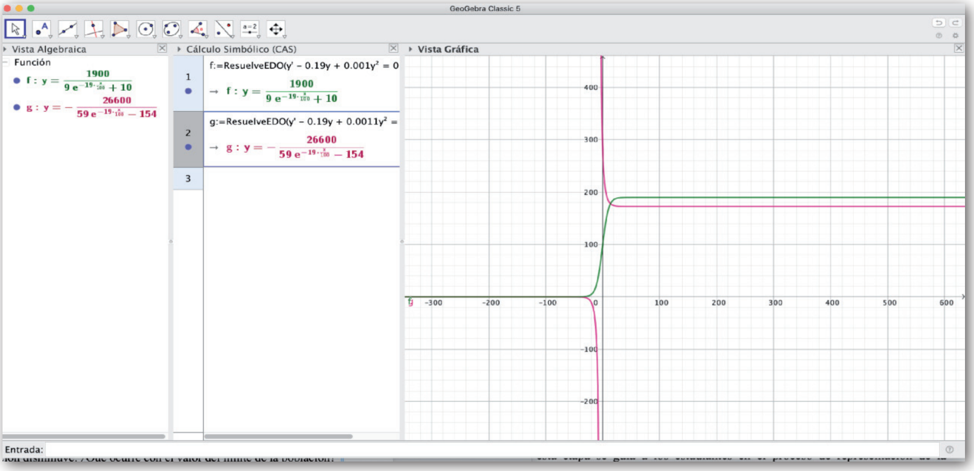


Figura 14. Solución de dos problemas de valores iniciales con diferentes comportamientos

Con las preguntas anteriores se ha profundizado en el análisis de la situación, para distintos valores de la población inicial de peces, es decir para distintas condiciones iniciales de la EDO. A continuación, puede plantearse a los estudiantes un conjunto de cuestiones que les permitan estudiar la situación en función del término de competición (b), por ejemplo: *Si el término de competición aumenta, ¿qué ocurre con el valor del límite de la población? ¿Y con la población? ¿Y si el término de competición disminuye?* Haciendo uso de GeoGebra, los estudiantes pueden resolver EDOs con valores de b mayores y menores que 0.001 y analizar las representaciones gráficas de las soluciones, aprovechando los deslizadores (Figura 15).

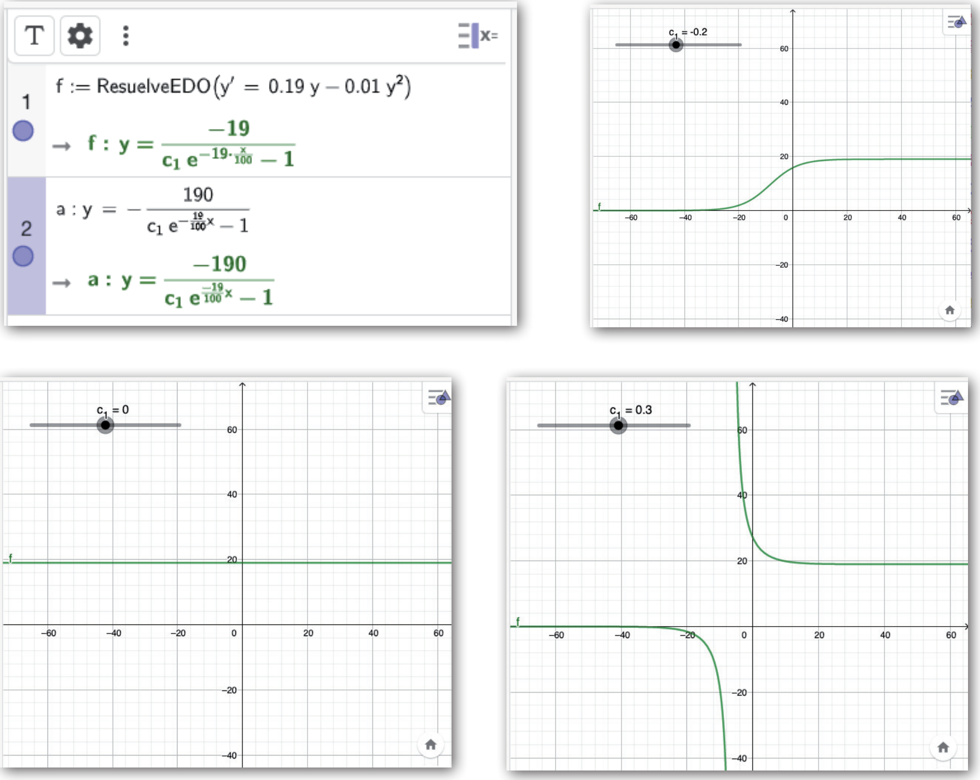


Figura 15. Estudio del caso b=0.01

En esta etapa convendría, además, dejar espacio para que los estudiantes planteen sus propias preguntas. Se les puede animar a formular preguntas a sus compañeros, que luego puedan resolver y discutir juntos.

Las preguntas en torno a las condiciones iniciales y al término de competición, además de permitir que los estudiantes profundicen en el análisis de la situación, les conducen a modelos cada vez más generales, foco de la siguiente etapa.

Etapa 4. Planteamiento y solución de casos generales

En esta etapa se analiza y discute en torno al tercer parámetro que interviene en la situación planteada a los estudiantes, la tasa de crecimiento de la población de peces. Se comenzaría con un conjunto de preguntas que lleven al estudiante a reflexionar sobre el significado de dicho valor y formular conjeturas (Figura 16):

La EDO con la que trabajamos en la etapa anterior era $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = 0'19P - \mathrm{bP}^2$.

- ¿A qué hacía referencia el término 0'19? Recuerda cómo lo calculamos.
- Supongamos ahora que la tasa de crecimiento de la población es a. Escribe la EDO que modela la situación.
- ¿Qué significa, en términos de los nacimientos y las muertes de los peces, que la tasa de crecimiento, a, sea positiva?
- ¿Qué significa que sea negativa?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?
- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

Figura 16. Preguntas para reflexionar sobre la tasa de variación

A estas preguntas pueden añadirse otras que ya fueron formuladas en etapas anteriores y que permiten retomar la relación del concepto de EDO con el significado geométrico de la derivada de una función, como *Analiza para qué valores de P la población, aumenta, disminuye y se mantiene constante*.

Una vez más, el uso de GeoGebra permite que los estudiantes puedan resolver EDOs con valores de *a* menores y mayores que 0.19 y analicen las representaciones gráficas de las soluciones, aprovechando los deslizadores (Figura 17), lo que les permitirá verificar si sus conjeturas eran correctas o no.

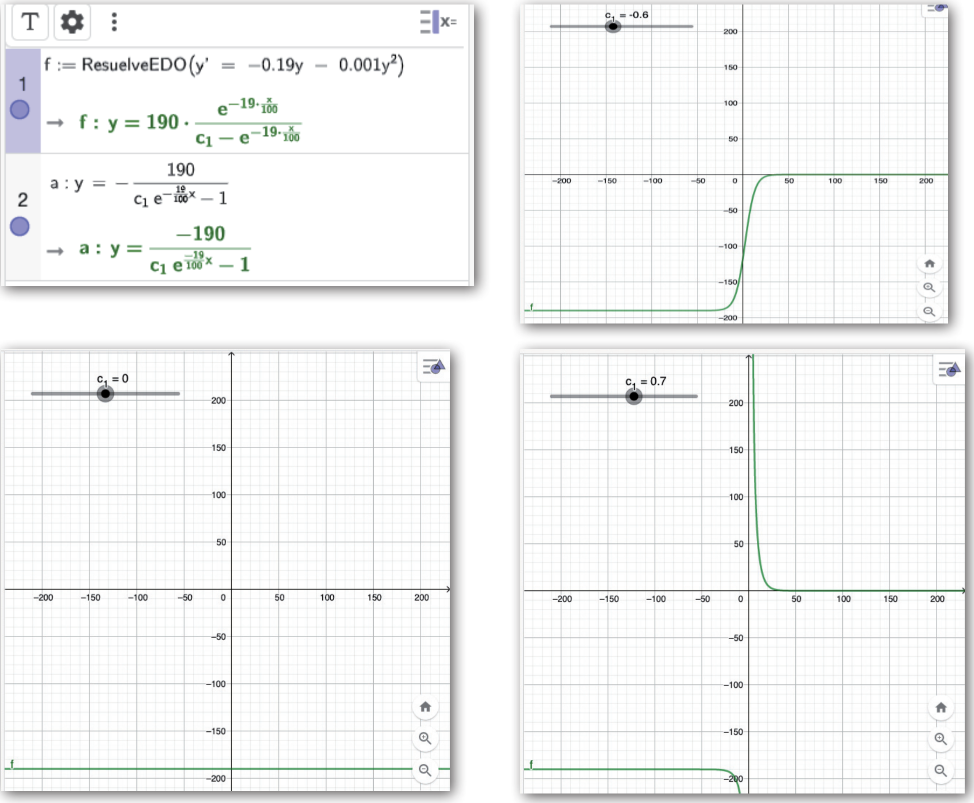


Figura 17. Estudio del caso a= -0.19 y b=0.01

Etapa 5. Análisis retrospectivo del proceso de solución

En esta etapa se pide a los estudiantes elaborar dos informes (Figura 18). El objetivo es que revisen el proceso de resolución que han seguido y los resultados obtenidos. Al docente, esta etapa le permitirá observar qué procesos y resultados han considerado más relevantes los estudiantes, si han establecido conexiones correctas entre los dos contextos de trabajo (matemático y no matemático), así como los errores y dificultades que puedan haber presentado.

En esta etapa deberás elaborar dos informes, uno dirigido al cliente que ha requerido tus servicios y otro dirigido al Colegio Oficial de Químicos de Canarias. En dichos informes debes reflejar, al menos, la siguiente información:

Para el cliente

- Cuál es la EDO que modela la variación en el número de peces que hay dentro de su recinto.
- Qué factores están involucrados en esta variación y qué significa el término de competición que has tenido que añadir.
- Cuál puede ser la razón de que el número de peces que hay dentro del recinto esté disminuyendo.
- Si, en su caso, hay un valor límite para la cantidad de doradas que habrá en su recinto.
- Una representación gráfica de lo que ocurre con el número de peces que hay dentro del recinto, dependiendo del número inicial de peces que haya y del término de competencia.
- Una posible solución a su problema para que el número de doradas no siga disminuyendo.

Para el Colegio Oficial de Químicos de Canarias

- Por qué has necesitado utilizar una EDO para modelar la situación.
- Por qué tuviste que considerar un elemento que el cliente no te proporcionaba (el término de competición).
- Un ejemplo de cómo utilizar la información que has obtenido para resolver cualquier situación análoga a esta, en la que el cliente te indique únicamente las tasas de nacimiento y mortalidad de la especie y el término de competencia.
- Representaciones gráficas que ilustren los distintos casos que pueden presentarse dependiendo de las tasas de natalidad y mortalidad y del término de competencia.

Figura 18. Actividad final con foco en análisis retrospectivo

Los dos ejemplos presentados, son tareas que se transfieren de resultados obtenidos en dos investigaciones cuyo enfoque es esencialmente distinto. En ambos casos, se ha realizado una adaptación de estas actividades para GeoGebra. En el primer caso se interpreta, en un ámbito contextualizado, el significado de la integral definida cuando no sólo se utiliza como para calcular áreas sino longitudes de curvas y, además, en esta situación no se puede encontrar una primitiva de la función sino que obligatoriamente debe ser calculada aproximadamente. En el segundo caso se trata de, a partir de ciertos protocolos elaborados para las cinco etapas de resolución de problemas, trabajar en un proyecto contextualizado vía el planteamiento y resolución de Ecuaciones diferenciales elementales.

Discusión final

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel universitario presentan muchos aspectos en común con el resto de niveles educativos; sin embargo, también presentan algunas particularidades. Identificar y ser conscientes de estas particularidades permitirá, a los distintos actores involucrados, tomar mejores decisiones que contribuyan a disminuir el fracaso y las tasas de abandono en este nivel educativo.

Según el Informe de Datos y Cifras del Sistema Universitario Español correspondiente al curso 2019-2020[14] muchos grados del ámbito científico-técnico, especialmente las Ingenierías, presentan indicadores de fracaso muy altos que se manifiestan, entre otras formas, con unas elevadas tasas de abandono al finalizar el primer curso universitario. Las asignaturas relacionadas con las matemáticas, en muchas ocasiones, son consideradas como uno de los factores que interviene en dicho fracaso. ¿Qué se puede hacer, considerando la investigación en Didáctica de la Matemática, para contribuir a mejorar estos datos que preocupan por igual a educadores, gestores, y también a los estudiantes y sus familias?

La innovación, la personalización de las enseñanzas, al menos a las necesidades e intereses de cada uno de los Grados, y la adaptación a los cambios que se han ido incorporando en el resto de niveles educativos son algunos de los retos que la investigación en Didáctica de la Matemática Universitaria puede ayudar a afrontar en mejores condiciones, no de forma aislada y personalizada, dependiente de la buena voluntad de un número limitado de docentes, sino de manera informada, estructurada y alineada con los objetivos curriculares y el diseño de los programas educativos universitarios.

En la actualidad existe una amplia cantidad y diversidad de resultados de investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática Universitaria. Si bien es cierto que aún existen muchos problemas de investigación sin abordar, o sobre los que es necesario profundizar, hay un reto principal que atender si realmente se quiere mejorar los resultados de los estudiantes: ¿Cómo hacer llegar los resultados de las investigaciones al aula? ¿Cómo generar instancias de transferencia efectivas, desde la investigación hasta la docencia universitaria?

Algunos de los principales resultados que ha mostrado la investigación en Didáctica de la Matemática y que afectan directamente al ámbito universitario tienen que ver con:

La transición entre la Educación Secundaria y la Universidad: Qué diferencias existen entre los contenidos matemáticos de estas etapas, las metodologías que se emplean o los procesos de evaluación, las características y el rol de las pruebas de acceso a la Universidad, las características y objetivos de los “Cursos Cero”, etc.

14. https://www.Universidades.gob.es/stfls/Universidades/Estadisticas/ficheros/Datos_y_Cifras_2020-21.pdf

Las características particulares y la complejidad de ciertos conceptos matemáticos propios de la etapa universitaria: Discontinuidades que se producen entre el aprendizaje de conceptos matemáticos conceptualmente relacionados de forma estrecha, importancia de establecer redes de significado entre los diferentes conceptos matemáticos, priorizando lo conceptual a lo procedimental, etc.

El aporte que supone trabajar desde una perspectiva basada en la resolución de problemas: Plantear a los estudiantes situaciones relacionadas con el Grado que están cursando, hacer explícitas las diferentes etapas del proceso de resolución de problemas, especialmente aquellas que tienen que ver con aspectos metacognitivos o el análisis y reflexión en torno a la situación planteada, los procesos de resolución, las soluciones obtenidas y las posibles extensiones de la situación abordada, etc. Esto incluye mostrar la no linealidad de las etapas de resolución, generar un ambiente de trabajo donde haya espacio para la reflexión y el análisis por parte de los estudiantes, el error, y la discusión entre pares, desterrando así la idea de que los problemas deben resolverse en poco tiempo. Por parte del docente, esto incluye, además, la importancia de plantear "buenas preguntas" que promuevan la indagación, la reflexión, etc.

El uso de la tecnología como herramienta que contribuye tanto al proceso de resolución de problemas como a la construcción de esa red de significados asociados a los distintos conceptos matemáticos. Ciertas herramientas tecnológicas permiten dedicar más tiempo al análisis y la reflexión en torno a los conceptos matemáticos, los procesos de resolución, las soluciones obtenidas y su interpretación en las situaciones problemáticas, así como a la formulación de conjeturas y su verificación. Tal y como se ha podido observar en los ejemplos presentados en este capítulo, a medida que evoluciona la tecnología que tenemos a nuestra disposición, emergen nuevas opciones de enfrentarse a un mismo problema.

El reto es generar acciones que contribuyan a que estos conocimientos lleguen a los docentes universitarios y se produzcan los cambios necesarios en sus creencias y concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en este nivel educativo, que les lleven a la acción. Este reto nos conduce a un tema central: la formación del docente de Universidad.

Por otra parte, atender a la problemática general del fracaso y abandono en los primeros cursos universitarios requeriría de un proceso continuo de detección de problemas, análisis de la situación, generación de herramientas de intervención y evaluación del impacto de las mismas. En este contexto resultaría interesante, y quizás imprescindible, la creación de comunidades de colaboración, donde participen investigadores en Didáctica de la Matemática y profesores de matemáticas, tanto de Secundaria como del nivel universitario.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the University level? En D. Holton (Ed.), (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en Didáctica de la Matemática a nivel universitario. *Revista de la Academia de Ciencias Canaria*, *31,* 75-93.

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 797-810.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. y Moreno, M. (Eds.), (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. Servicio de publicaciones de la ULL. S/C de Tenerife.

Biza, I. (2021). Teaching and learning of Mathematics at the University Level. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 19-32). SEIEM.

Camacho-Machín, M. (2005). La Enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático haciendo uso de CAS. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-110). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba - SEIEM.

Camacho-Machín, M. (2011) Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). SEIEM - Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Camacho-Machín, M. (2021). Agenda de Investigación para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33-48). SEIEM.

Camacho, M., Depool, R., y Santos-Trigo, L. M. (2010). Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. En F. Hitt, D. Holton, y P. W. Thompson (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education VII. CBMS series* (Vol 16. pp. 29-61). American Mathematical Society.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA*, *3*(3), 123-133.

Camacho, M., Perdomo, J., y Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las EDO vía la Resolución de Problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 9-32.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de La Laguna. España.

Dorier, J. L. y Maaß, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. En D. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*) (pp. 384-388). Springer.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall.

Gómez-Chacón, I. Hochnuth, R., Jaworski, B., Rebenda, J. Ruge, J. y Thomas, S. (Eds.), (2021). *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning. The PLATINUM Project*. Masaryk University. Czech Republic.

Guerrero-Ortiz, C., Mejía, H. y Camacho-Machín, M. (2016) Representations of a mathematical model as a means of analyzing growth phenomena. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 109-126.

Henriques, A. (2021). Aprendizagem da Matemática no ensino superior: Práticas de natureza exploratoria com suporte da tecnología. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 5-18). SEIEM.

Klein, F. (2016) *Elementary Mathematics from a higher standpoint (Volume 1: Arithmetic, Algebra, Analysis)*. Springer. (Nueva edición traducida por G. Schubring).

Lerman (Ed.), (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*). Springer.

Nortes Martínez-Artero, R., De Pro-Bueno, A. y Nortes Checa, A. (2021). De la PAU a la EBAU: Un análisis en el dominio de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. *Educatio Siglo XXI,* 39(2), 255-276. https://doi.org/10.6018/educatio.403561

Perdomo-Díaz, J. (2010). *Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas.* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de La Laguna. España.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

Raychadhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(3), 367-381.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* Trillas.

Socas, M. (2001), *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Documento inédito.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). NCTM.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.

Winsløw C. y Rasmussen C. (2020). University Mathematics Education. En D. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*) (pp. 881-890). Springer.