# Matemáticas en el Bachillerato

## *Mathematics in High School*

Sánchez-Matamoros García, G.[a]; Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, MC.[c]; Fernández-Ahumada, E.[b]; García Pérez, M.T.[b]; Moreno, A.,[c] Ramírez-Uclés, R.[c]; Serradó, A.[d]
[a] *Universidad de Sevilla,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Granada,*
[d] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

El Bachillerato es la etapa postobligatoria de la Educación Secundaria en la que se produce la transición de la escuela a la universidad. Esta transición incluye no sólo cambios en las formas de enseñanza o en las estrategias de enseñanza aprendizaje utilizadas sino también cambios en el punto de vista sobre las matemáticas. Cuando los estudiantes ingresan en la universidad, los conceptos estudiados en el bachillerato vuelven a aparecer, sin ofrecerles la oportunidad de conectar con lo aprendido anteriormente. El docente debe ser consciente de estos problemas para que no se produzcan conflictos en el aprendizaje de los estudiantes. Las investigaciones en educación matemática puede ser una vía para lograrlo. En este capítulo se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato organizados en relación a los distintos sentidos matemáticos.

*Palabras clave:* Bachillerato, Sentidos matemáticos, Tareas matemáticas, Trayectoria de aprendizaje.

Abstract

Baccalaureate is the post-compulsory stage of Secondary Education in which the transition from school to university takes place. This transition includes not only changes in the forms of teaching or in the teaching-learning strategies used, but also changes in the point of view about mathematics. When students enter university, the concepts studied in high school reappear, without offering them the opportunity to connect with what they learned previously. The teacher must be aware of these problems so that conflicts do not occur in student learning. Research in mathematics education can be a way to achieve this. This chapter highlights key aspects of the learning and teaching of Mathematics in High School organized in relation to the different mathematical senses.

*Keywords:* High School, Mathematics senses, Mathematical tasks, Learning trajectory.

## El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato

El Bachillerato es la etapa postobligatoria de la Educación Secundaria en la que se produce la transición de la escuela a la universidad. En las últimas décadas, podemos encontrar varios estudios que tratan temas relacionados con la transición de las matemáticas escolares a las universitarias, hecho que, a nivel internacional, se ha visto reflejado en las conferencias que se celebran desde el año 2016 en la Red Internacional para la Investigación en Didáctica de las Matemáticas Universitaria (INDRUM) reconocidas como conferencias temáticas del ERME (Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática) o en los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME). En estos estudios se han identificado tensiones en relación con las desconexiones entre las matemáticas, las actitudes, las prácticas y los rendimientos de los estudiantes a nivel escolar y universitario. La transición de la escuela a la universidad incluye cambios en las formas de enseñanza, en los enfoques de la instrucción, en las estrategias de enseñanza aprendizaje, en el punto de vista sobre las matemáticas, y en los objetivos de aprendizaje (Biza et al., 2016).

Además, los conceptos matemáticos, muy frecuentemente, se introducen a nivel escolar y vuelven a tratarse de nuevo a nivel universitario. Un ejemplo de ello lo tenemos en los conceptos de límite de funciones o de función derivada. En el Bachillerato, la enseñanza de estos conceptos se centra principalmente en las técnicas relacionadas con el cálculo de límites o con el cálculo de derivadas. Cuando los estudiantes ingresan en la universidad estos conceptos vuelven a aparecer en los cursos de Cálculo y se introducen desde cero, sin prestar atención a lo que los estudiantes han aprendido anteriormente en el Bachillerato, sin darles la oportunidad de conectar lo que han aprendido en la escuela con los nuevos conocimientos introducidos a nivel universitario. Esta desconexión suele generar conflictos en el aprendizaje de los estudiantes, convirtiéndose en muchas ocasiones en un obstáculo para el aprendizaje. Problemas similares podemos apreciar en otros conceptos de Cálculo, Álgebra, Geometría o Números.

Lo mismo sucede con las prácticas matemáticas, mientras que en las matemáticas escolares el alumnado, muy a menudo, se centra más en la aplicación de procedimientos y menos en el razonamiento sobre estos, en las matemáticas universitarias a los estudiantes se les pide que se involucren en prácticas matemáticas nuevas para ellos, centradas más en el razonamiento y menos en la aplicación de procedimientos, resultándoles difícil ver cuál es el propósito de las mismas.

El docente tanto de Bachillerato como de Universidad debe ser consciente de estos problemas para que se dé una transición efectiva de la escuela a la universidad y no lleguen a producirse conflictos en el aprendizaje de los estudiantes, las investigaciones en educación matemática puede ser una vía para lograrlo.

A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato organizados en relación con los distintos sentidos matemáticos.

## Sentido algebraico

El álgebra escolar se ha venido introduciendo en los currículos de muchos países como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de Secundaria y Bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2003). La construcción en los diferentes planes de estudios del álgebra escolar ha sido reflexionada profundamente por el profesorado. Sin embargo, tradicionalmente se mantiene una forma de enseñar los temas que enfatiza la manipulación de símbolos. Actualmente, no debería ignorarse algunas otras vías como la tecnológica.

### Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones

La fluidez con el simbolismo algebraico y el conocimiento de las herramientas matemáticas adecuadas para la resolución de cada problema ayuda a la resolución de problemas de diversas áreas curriculares, así como contenidos propios de este nivel, por ejemplo, las matrices. El conocimiento y comprensión de los objetos algebraicos que se trabajan en este nivel es fundamental para poder ligarlos a fenómenos de la realidad. El uso de elementos geométricos ayuda a la traducción entre diferentes sistemas de representación y permite realizar justificaciones y demostraciones visuales de relaciones numéricas.

La siguiente tarea[1] sigue este planteamiento involucrando la acción de matrices sobre vectores de tres dimensiones.

> En las siguientes preguntas: R, S son matrices de rotación; P, Q son matrices de reflexión; M no es ni una rotación ni una reflexión.
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices no puede dejar direcciones vectoriales fijas?
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices puede dejar fija exactamente una dirección vectorial?
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices puede dejar fija más de una dirección vectorial?
> ¿Se da alguna vez el caso de que RS pueda dejar un vector invariante?
> ¿Se da alguna vez el caso de que PQ pueda dejar un vector invariante?
> ¿Sucede alguna vez que M dejará invariable la dirección de un vector?
> ¿Puede una matriz con determinante cero dejar un vector fijo?
> ¿Puede una matriz con determinante mayor que 1 dejar fijo un vector?
> ¿Puede una matriz dejar exactamente dos vectores fijos?

El vector v está fijado por la matriz M si $Mv = v$. Al estudiar las respuestas de cada pregunta, podemos utilizar argumentos geométricos o algebraicos, según corresponda

1. https://nrich.maths.org/6877

e incluso dibujar diagramas y construir ejemplos particulares de matrices y vectores si el alumnado lo considera necesario. Si ellos no obtienen una respuesta definitiva a una parte dada, podemos animarlos a que traten de dar ejemplos de cuándo la pregunta planteada es o no cierta.

Este problema plantea una serie de preguntas diseñadas para provocar la reflexión de los estudiantes sobre las matrices que dejan vectores fijos y las propiedades que tendrían dichas matrices y vectores.

Puede ser interesante comenzar con un trabajo preliminar sobre matrices en tres dimensiones. Los estudiantes podrían encontrar algunos ejemplos de matrices de 3×3 que representan rotaciones y reflexiones simples, que podrían usarse para resolver el problema. Las preguntas se dividen claramente en tres secciones: preguntas 1-3, 4-6 y 7-9. Los estudiantes podrían abordar estas preguntas en esas tres secciones, tal vez trabajando con un compañero, y retroalimentar ideas al resto de la clase después de que se responda cada sección.

Para cada sección de preguntas, se pide al alumnado que piense en lo que se les pide que hagan, use su intuición para hacer comentarios iniciales, luego piense en la geometría de la situación y finalmente use algunos ejemplos para apoyar su razonamiento algebraicamente.

## Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta

La experiencia con el álgebra de Bachillerato debería capacitar al alumnado para comprender las relaciones y funciones con mayor complejidad que las vistas en las etapas anteriores, representarlas de diferentes formas, seleccionar la más adecuada y pasar con flexibilidad de una a otra.

Además, el trabajo con las tareas algebraicas en esta etapa educativa debería desarrollar la capacidad de (CEMAT, 2021):

- Comprender y realizar transformaciones con funciones, como combinarlas aritméticamente, componer las de uso común, y obtener sus inversas. Utilizar la tecnología para realizar las operaciones con las expresiones simbólicas más complicadas.
- Comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional, logarítmica y periódica.
- Interpretar las representaciones de las funciones de dos variables.
- Usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas.
- Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para las funciones y las relaciones.

Por ejemplo, las características de la función que aparece en la situación presentada a continuación.

Algunas veces los médicos prescriben «fármacos hipnóticos» (p. ej. pastillas para dormir) a pacientes que no pueden dormir a causa de dolor físico o tensión emocional. Otros son usados como sedantes o anestésicos durante las operaciones. Hay muchos tipos diferentes de fármacos que pueden ser prescritos. Un requisito importante es que su efecto desaparezca antes de la mañana siguiente, de lo contrario el paciente se encontrará somnoliento durante todo el día. Esto podría ser peligroso si, por ejemplo, tiene que conducir para trabajar. Por supuesto, para alguien confinado a guardar cama en un hospital esto no sería tan importante.

Imagina que un doctor ha prescrito un fármaco llamado Triazolam (Halcion). Después de tomar algunas pastillas, el fármaco alcanza un nivel de 4 μg/1 en el plasma sanguíneo. ¿Con qué rapidez desaparecerá el fármaco? (Shell Center, 1990). Para que puedan contestar a la pregunta se le facilita la siguiente información:

| *Nombre del fármaco* | *Fórmula aproximada* |
|---|---|
| *Triazolam (Halcion)* | $y = A \times (0{,}84)^x$ |
| *Methohexitona (Brietal)* | $y = A \times (0{,}5)^x$ |
| *CLAVE* $A$ = *tamaño de la dosis inicial*<br>$y$ = *cantidad de fármaco en la sangre*<br>$x$ = *tiempo en horas desde que el fármaco llega a la sangre* | |

Después de facilitar que el estudiante emplee sus potencialidades para una primera incursión en el problema como podría ser utilizar la calculadora para realizar una tabla, le avanzamos las siguientes cuestiones.

Haz una gráfica exacta para mostrar cómo desaparece el efecto del Triazolam.

¿Después de cuántas horas se ha reducido a la mitad la cantidad de fármaco en la sangre?

¿Cómo depende esa vida media del tamaño de la dosis inicial? Escribe y explica tus resultados.

Investiga el efecto de tomar una dosis de 4 μg de Methohexitone cada hora.

Dibuja una gráfica exacta y escribe sobre sus implicaciones.

Este trabajo podría realizarse con el uso de aplicaciones informáticas que faciliten el desarrollo de estructuras algebraicas y la conexión entre el problema, su modelo como función en forma simbólica y la representación gráfica de dicha función.

Se podría generalizar el trabajo del alumnado pidiéndoles que establezcan entre todos la forma de la gráfica de la función. La formulación de preguntas como las siguientes ayudarían a ello:

¿Cuándo aumenta o disminuye?

¿Es siempre y mayor que 0? ¿Por qué?

¿Qué significa a cuando x no es un número entero?

## Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelización para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se modelan

Modelizar supone identificar las relaciones cuantitativas esenciales en una situación del mundo real y usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar las relaciones derivadas de diferentes contextos. Finalmente, sacar conclusiones razonables acerca de una situación que está siendo modelada y considerar las limitaciones del modelo.

La tarea que se muestra a continuación (Labraña et al., 1995) permite trabajar todas las fases del proceso de modelización y si se trabaja con herramientas informáticas no resultará tedioso y podrá ponerse el énfasis en sacar conclusiones del modelo.

*El 75% de la población laboral de un país tiene trabajo y el resto está en paro. Se prevé que cada año se destruirán un 10% de los empleos, por lo que el gobierno emprende un programa de reactivación económica con el que promete emplear anualmente al 20% de los parados.*

*Cumpliéndose la previsión, ¿será mejor o peor la situación al año siguiente?*

*¿Qué sucedería al cabo de dos años?*

*¿Crees que es casual esta situación? ¿Cómo prevés que evolucionará y hasta cuándo o dónde?*

*Si las condiciones se mantienen, calcular la evolución del empleo en los próximos diez años.*

*Si las cifras iniciales fuesen de un 60% de empleo y un 40% de paro, ¿cómo evolucionaría la situación?*

*¿A qué podemos atribuir que distintas situaciones iniciales de paro-empleo nos conduzcan a un mismo resultado?*

Esta tarea describe el producto reiterado de una matriz por sí misma. Se trata de una cadena de Markov y tiene como particularidad que los elementos de la matriz se expresan como probabilidades.

En la pregunta a) se introduce la reflexión sobre la evolución del empleo a partir del producto de matrices.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72,5 \\ 27,5 \end{pmatrix}$$

En la pregunta b) el alumnado podría conjeturar sobre la tendencia que puede seguir la población de empleo.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 72,5 \\ 27,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,75 \\ 29,25 \end{pmatrix}$$

En la pregunta d) podría utilizarse un programa de cálculo para que resulte menos tedioso. El resultado de ir sustituyendo la segunda matriz (población laboral) por el resultado de los sucesivos productos (situación de la población de empleo cada año posterior) permitirá ver a los estudiantes una de las características de las cadenas de

Markov: tienden a converger a un estado estacionario. Este hecho ratifica las previsiones de estabilidad si realizamos el cálculo a 20 años.

## Sentido espacial

El sentido espacial se puede caracterizar por la competencia del sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos (CEMAT, 2021). Como principales referencias para desarrollar este sentido se han tomado los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM y el Marco teórico de PISA para la evaluación de la competencia matemática 2021, según las cuales el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas.

Así, este sentido lo vamos a abordar a partir del enunciado de un problema y de las posibles manifestaciones, en su resolución, de la geometría plana de Primero de Bachillerato, y posteriormente los matices añadidos en la geometría espacial de Segundo de Bachillerato.

Partimos del problema siguiente: Dadas dos rectas paralelas y un punto A en r, construid un cuadrado que tenga como vértice A y otro vértice en la recta s. ¿Cuántas soluciones distintas hay?

En un posible proceso de resolución, si partimos de que uno de los lados del cuadrado esté contenido en la recta r, las habilidades de percepción de la figura-contexto y de las relaciones espaciales, conectarán las propiedades y relaciones asociadas a la componente de los conceptos geométricos. Al estar un lado sobre la recta r, el punto A se corresponde a uno de los ángulos rectos. Por lo tanto, la longitud del lado debe ser igual a la distancia entre las dos rectas paralelas (Figura 1). En este razonamiento van implícitas propiedades relativas a que la distancia entre dos rectas paralelas es igual a la longitud del segmento que las une perpendicularmente. En este caso, aplicando simetrías a una de las soluciones, se obtendrían las dos soluciones posibles.

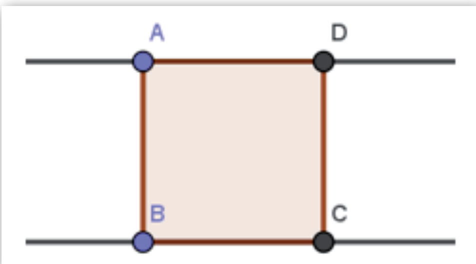



**Figura 1.** Una de las soluciones con el lado contenido en las rectas

Sin embargo, el problema adquiere matices interesantes cuando el lado del cuadrado no está contenido en la recta r. Por ejemplo, si partimos de las soluciones anteriores y vamos desplazando el punto B por la recta s conservando que sea un cuadrado, vamos obteniendo infinitas soluciones (Figura 2). Esta construcción es especialmente clarificadora al utilizar la herramienta de arrastre de Geogebra al ir desplazando B por s. La habilidad de discriminación visual, puede reconocer como equivalentes aquellas que sean simétricas. Al ser A un punto fijo, al variar B en el mismo sentido siempre se obtienen medidas diferentes y, por lo tanto, soluciones diferentes por tener distinta área.

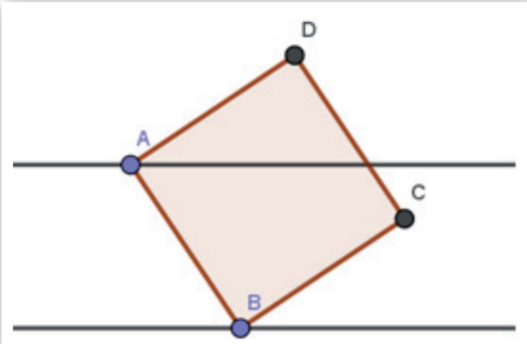



**Figura 2.** Una solución con dos vértices consecutivos en cada recta

En todos los casos anteriores, A y B determinan un lado del cuadrado solución. Vamos a analizar el caso en que determinen una diagonal. La construcción de un cuadrado dada la diagonal, implica el reconocimiento de propiedades del cuadrado asociadas a la perpendicularidad y longitud de las diagonales. Nuevamente se ponen en juego habilidades relativas a las relaciones espaciales para conectar las propiedades y las relaciones métricas. Dado un punto B cualquiera en la recta s, se determinaría el punto medio del segmento AB y sería el centro del cuadrado (Figura 3). Sabiendo que en los cuadrados las diagonales son perpendiculares y con la misma longitud, se podrían hallar los otros dos vértices. Para comparar el área de estos cuadrados con los anteriores, se puede relacionar la fórmula del cuadrado del lado con la de la mitad del cuadrado de la diagonal.

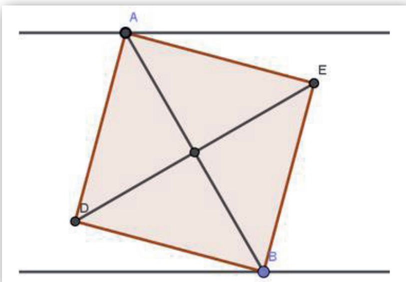



**Figura 3.** Una solución con dos vértices no consecutivos en cada recta

La búsqueda de todas las soluciones, implica la determinación de un criterio para considerarlas distintas. Si únicamente se determina la forma, la componente de movimientos permite establecer que todos los cuadrados son semejantes, puesto que se obtienen uno del otro por combinaciones de isometrías (giros, traslaciones, simetrías) y homotecias. Pero se pueden determinar otros criterios relativos a la medida (que tengan distinta área) o la posición respecto a las rectas (que tengan vértices diferentes). En estos casos la habilidad de percepción de la posición en el espacio y la conservación de la percepción podrían discriminar que las figuras obtenidas por isometrías mantienen el área.

El procedimiento implicaría un trabajo con las respectivas ecuaciones y coordenadas, lo que conecta el sentido espacial con otros sentidos como el de la medida y el algebraico. Así, el problema en geometría espacial difiere esencialmente en considerar coordenadas tridimensionales y las correspondientes ecuaciones en el espacio. Sin embargo, al añadir una nueva dimensión, surgen nuevas soluciones al aplicar giros respecto al segmento AB en el espacio tridimensional (Figura 4). Nuevamente, es necesario conectar las propiedades y los movimientos con las imágenes mentales, representaciones y habilidades de visualización.

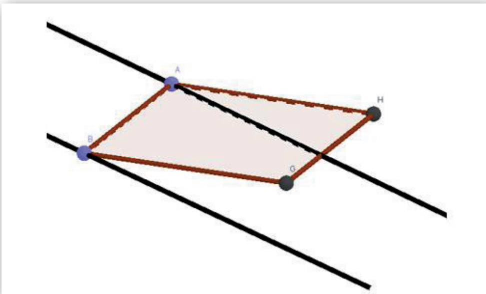



**Figura 4.** Cuadrado en el espacio tridimensional

## Sentido estocástico

Las actividades a las que el alumnado se habrán enfrentado en cursos anteriores les deben haber permitido el desarrollo del sentido estocástico, reconociendo cómo las investigaciones estocásticas aportan sentido a la variabilidad, predictibilidad e incertidumbre de la muestra de datos estudiada. Deben haberse iniciado al estudio de la inferencia informal, consistente en la capacidad de realizar generalizaciones de las investigaciones llevadas a cabo en situaciones de incertidumbre, reconociendo el papel que tienen los parámetros de centralización, posición y dispersión en el estudio de la distribución, el uso de datos como prueba de las generalizaciones de los modelos de regresión y de tendencias de proyecciones y el empleo del lenguaje probabilístico de la generalización, incluida la referencia informal a los niveles de certeza sobre las conclusiones extraídas. El empleo de este lenguaje probabilístico ayudará a la comprensión del significado de las aproximaciones clásicas, subjetivas y frecuenciales de la probabilidad.

Así pues, las actividades a las que el alumnado se tendrá que enfrentar en Bachillerato le deberán permitir, según CEMAT (2021), por un lado, ahondar en las grandes ideas de variabilidad, distribución, muestreo, inferencia, aleatoriedad y probabilidad y, por otro lado, desarrollar un sentido estocástico de estas ideas “para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones”. Este comité defiende el carácter instrumental de las matemáticas para la mayoría de áreas de conocimiento, que en Bachillerato se concretan en las diferentes modalidades. Y, aunque las actividades que se presentan en este documento se han seleccionado para que puedan ser usadas en cualquier modalidad debe tenerse en cuenta que al transferirlas al aula estas adecuen el contexto a la modalidad y al papel que tienen las herramientas estocásticas en sí mismas para cada modalidad (consumidores, productores y difusores de datos estocásticos).

La primera actividad que presentamos tiene por finalidad la realización de predicciones y la toma de decisiones asociadas a la determinación de la probabilidad condicionada asociada al contexto médico:

> Susana ha encontrado una anormalidad en su pecho y decide consultar al doctor. El doctor le indica que es necesario que se realice una estudio de mamas. Susana, antes de acudir al médico y ante el miedo que le supone tener la enfermedad, busca información en Internet y encuentra la siguiente tabla que muestra el número de personas sanas y enfermas en una muestra de 10000 personas según el resultado del examen mamario (prevalencia=0,001).

| | *Estado de salud* | | |
|---|---|---|---|
| *Resultado del estudio* | *Enferma* | *Sana* | *Total* |
| *Positivo* | *99* | *4995* | *5094* |
| *Negativo* | *1* | *94905* | *94906* |
| *Total* | *100* | *99900* | *100000* |

> En función de la información encontrada en Internet:
> Pregunta 1: ¿Qué riesgo tiene Susana de que la traten por un cáncer de mama si está sana?
> Pregunta 2: ¿Cuál es el riesgo que tiene Susana de que no la traten por el cáncer de mama si está enferma?
> Pregunta 3: ¿Cómo debería tomar la decisión de ser o no ser tratatada? Razona matemáticamente.

La situación se presenta como un análisis de las probabilidades condicionadas estableciendo los sucesos:

A=”está enferma” y B=”el test es positivo”. En la pregunta 1, en función de los sucesos establecidos podemos asociar el riesgo a la probabilidad que tiene Susana de que la traten por un cáncer de mama si está sana. Es decir: $P(B|\bar{A})=\frac{p(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{4995}{99900}=0{,}05.$

En la pregunta 2, podemos asociar el riesgo a la probabilidad que tiene Susana de que no la traten de un cáncer de mama (porque el test ha dado negativo) si está enferma. En este caso, tendríamos que calcular: $P(\bar{B}|A)=\frac{p(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{100}=0{,}01.$

Finalmente la tercera pregunta, podemos valorar la probabilidad de estar enferma y, en conclusión, iniciar un tratamiento. En este caso deberíamos calcular la probabilidad total considerando los resultados del test:

$$P(A)=P(B)\cdot P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|\bar{A})=0{,}02$$

En función de la información encontrada en Internet la probabilidad de que esté enferma es de un 0,02 un valor bajo para tener miedo ante esta situación. Debe esperar que se confirmen los valores con su propio test para tomar una decisión que no esté basada en las probabilidades muestrales encontradas en Internet.

El planteamiento de este problema en el contexto de riesgo es un elemento motivador al significado que adquieren los cálculos probabilísticos en situaciones de dependencia, independencia y condicionamiento para el alumnado (Batanero y Gea, 2018). Se han presentado los datos usando tablas de contingencia y frecuencias naturales como facilitadores de la comprensión de la probabilidad condicionada. Los diferentes problemas asociados al mismo deben permitir que el alumnado distinga entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicionada. El tercer problema es un facilitador de la comprensión de en qué contextos tiene interés aplicar la probabilidad total. El problema podría utilizarse para introducir y validar el signifidao del Teorema de Bayes, al plantearse cual es la probabilidad de que Susana esté enferma si sabe que el test es positivo o usar la simulación para comprender qué le puede ocurrir a Susana al realizarse sucesivos tests.

Tal y como indican estas autoras, en la simulación se lleva a cabo una actividad de modelización. Por ello, el alumnado de bachillerato debe desarrollar estrategias de modelización que le permitan evolucionar de los acercamientos al estudio de datos descriptivos a los inferenciales. Por ello, proponemos que el alumnado resuelva actividades de modelización como:

> Los restaurantes han descubierto que, de media, el 5% de las reservas telefónicas que se realizan no se personan en el día y hora solicitado. Como consecuencia de este fenómeno, los restaurantes han decidido aplicar una práctica de overbooking (parecida a la de los aviones). Si un restaurante de tamaño medio tiene plaza para 75 comensales, ¿cuántas plazas adicionales debe reservar para aumentar sus beneficios sin causar insatisfacción a los comensales por no tener su reserva a punto?

Los trabajos previos de Paparistodemou et al. (2017) permiten establecer una estrategia para resolver dichas situaciones de modelización:

Matematización de la situación

1. ¿Cuáles podrían ser algunas de las razones por las que algunos clientes de los restaurantes no se presentan al restaurante en el día y hora solicitado?
2. Aproximadamente, ¿cuántos pasajeros podrían ir a comer al restaurante un determinado día y en un determinado turno (mediodía/noche)?
3. ¿Cuántas reservas adicionales sería razonable aceptar?
4. ¿Qué consecuencias puede tener el exceso de reservas?
5. ¿Qué consecuencias puede tener no aplicar la práctica de overbooking (como en los vuelos)?

Modelado de las reservas

6. Modelar reservas usando software educativo (Geogebra, TinkerPlots) para simular el número de comensales que no llegan (o llegan) al restaurante.
7. ¿Qué suposiciones debe realizarse sobre la situación que se va a modelar? ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra? ¿Cuál es el valor de la probabilidad de éxito (es decir, que pueda usar la reserva realizada)? ¿Cuántas iteraciones quieres realizar (es decir, diferentes reservas)?
8. Repetir el experimento y explicar cómo y por qué difieren los resultados que se obtienen respecto a la simulación anterior.
9. Repetir la simulación con un gran número de iteraciones.
10. Construir un diagrama adecuado de la distribución del número/porcentaje de comensales que no se presentan a un restaurante y describir la distribución.
11. ¿Hay algo de la distribución obtenida en la simulación que llama la atención?
12. Si es necesario, realice cambios en el modelo (por ejemplo, especificando un valor diferente para el número de reservas realizadas) y repetir la simulación.

Ajuste del modelo

13. Reconocer el modelo teórico binomial que se ajusta a la simulación.
14. Generar los valores teóricos de dicho modelo teórico.
15. Comparar la distribución probabilística binomial con el modelo obtenido de la simulación experimental.

Aplicar el modelo a la realidad

16. ¿Qué recomendaciones realizaría al restaurante sobre la cantidad extra de reservas que debe aceptar para que sus beneficios sean máximos y no perjudique a los comensales?

La adopción de enfoques informales de la inferencia estadística como el propuesto en la fase de modelización por simulación puede ayudar a promover el razonamiento estadístico, mientras se desarrolla el proceso de toma de decisiones (Paparidostemou et al., 2017). Eso no significa que puedan superar todas las dificultades que supone la aproximación de los modelos experimentales a los modelos teóricos, en este caso binomial. Siendo una de las ideas más importantes, es la menos comprendida por el alumnado (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Este tipo de actividades debe permitir que el alumnado integre y transfiera las ideas de distribución (de datos, de probabilidad y muestral).

## Sentido de la medida[2]

El sentido de la medida supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas. Asimismo, los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta son centrales en este sentido de la medida, siendo más importantes los primeros en Educación Primaria y los segundos en Educación Secundaria. Propio de la etapa de Bachillerato es la medida de superficies o volúmenes, lo que supone integrar el estudio del límite de una función, e incorporar la integral o la derivada como herramienta para calcular la medida de superficies o volúmenes (CEMAT, 2021). Por tanto, el sentido de la medida en Bachillerato requiere del aprendizaje de los conceptos de límite, derivada e integral, conceptos claves del Cálculo en Bachillerato.

El aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo en Bachillerato, a pesar de su potencialidad como marco para modelar problemas relacionados con la variación, presenta muchas dificultades en los estudiantes. Un ejemplo de este tipo de dificultades se pone de manifiesto en la resolución de problemas de optimización de superficies o volúmenes donde los estudiantes deben usar el cálculo diferencial (Tabla 1) para su resolución. En este tipo de problemas los estudiantes suelen usar el siguiente método:

2. Algunos de los ejemplos analizados han sido parcialmente publicados en revistas del área: "Fuentealba, C.; Sánchez-Matamoros, G.; Badillo, E. (2016). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 72-77; Fuentealba, C.; Sánchez-Matamoros, G.; Badillo, E.; Trigueros, M. (2017). Thematization of the derivative schema in university students: a study about the existence of nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST), 48*(3), 374-392; Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85–98; Sánchez-Matamoros, G. y Fernández, C. (2016). Secuencia de actividades para el aprendizaje de la derivada desde una trayectoria de aprendizaje. En: *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 72. 40-45).

- Plantear la función f que debe optimizarse (maximizar o minimizar).
- Calcular la derivada de la función f.
- Buscar los puntos críticos de f igualando a 0 la derivada f'.
- Evaluar la segunda derivada en los puntos críticos, si es positiva será un mínimo y si es negativa será un máximo.

Los profesores, en ocasiones, creemos que, sin necesidad de que se promueva explícitamente la reflexión por su parte, los estudiantes de manera espontánea construyen las relaciones entre los elementos matemáticos que conforman un concepto, en este caso el concepto de función derivada, en la resolución de problemas. Sin embargo, los resultados de investigaciones sobre la comprensión de dicho concepto muestran la complejidad de su aprendizaje (García et al., 2011). Un ejemplo de ello se pone de manifiesto en la forma en que resuelve el problema el estudiante (Tabla 1).

**Tabla 1.** Ejemplo de tarea de derivada y respuestas de un estudiante que muestra dificultades de aprendizaje

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarea: problema de optimización de cálculo diferencial</th></tr>
<tr><th colspan="2">Estudiante 1</th></tr>
<tr><td>Tarea 1<br><br>Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón cuadrada de 60 cm de lado. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo</td>
<td>Proceso de resolución<br><br>V = LARGO x ALTO x ANCHO<br>ALTO = x LARGO = 60 − 2x ANCHO = 60 − 2x<br>$V(x) = x(60-2x)(60-2x) = 3600x - 240x^2 + 4x^3$<br>$\frac{dV}{dx} = 3600 - 480x + 12x^2$ PUNTOS CRÍTICOS $\frac{dV}{dx} = 0$<br>$3600 - 480x + 12x^2 = 0$<br>$x^2 - 40x + 300 = 0$ $x = \frac{40 \pm \sqrt{1600-1200}}{4}$ $x_1 = 30$ $x_2 = 10$<br>PARA OBTENER EL MAXIMO DERIVAMOS LA FUNCIÓN DEL VOLUMEN POR SEGUNDA VEZ. SI ES MAYOR QUE CERO TENDRA UN MÁXIMO.<br>$\frac{d^2V}{dx^2} = -480 + 24x$ EN EL PUNTO CRÍTICO $x_1 = 30$<br>$\frac{d^2V}{dx^2} = -480 + 24(30) = 240 > 0$<br>EL VOLUMEN MÁXIMO DE LA CAJA SE OBTIENE CON x=30 x < 3</td></tr>
<tr><th colspan="2">Análisis de la respuesta: dificultades del estudiante</th></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1 plantea correctamente la función volumen, calcula la derivada de la función volumen, busca los puntos críticos igualando a cero la primera derivada de la función volumen. Sin embargo, considera que el volumen máximo pedido se encuentra en aquel valor donde la segunda derivada sea positiva, lo que pone de manifiesto la desvinculación, en este estudiante, del significado de las derivadas sucesivas de una función con la función dada, y de las relaciones que se establecen entre el comportamiento local y global de esta.</td></tr>
</table>

Así, la enseñanza del Cálculo generalmente se centra en un aprendizaje procedimental, basado en la resolución de problemas con cálculos algorítmicos (Artigue, 1995). Si el estudiante del ejemplo (Tabla 1), en lugar de haber usado un procedimiento aprendido de memoria en la instrucción previa, hubiera hecho uso del significado de la primera derivada y su relación con el crecimiento y decrecimiento de la función, entorno a los puntos críticos, hubiera llegado a la conclusión de que el volumen máximo está en aquellos puntos donde la segunda derivada es menor que cero y no mayor que cero. Estudiar la monotonía de la función (creciente (primera derivada mayor que cero) o decreciente (primera derivada menor que cero)) en los intervalos que generan los puntos críticos le permite determinar el tipo de extremos. Por este motivo surge la necesidad de crear situaciones de enseñanza, a través del diseño de tareas, donde se promueva la construcción del significado de los elementos matemáticos que conforman el concepto y de las relaciones que pueden establecerse entre estos en distintos modos de representación y las conversiones entre ellos (García et al., 2011; Badillo et al., 2011).

Una propuesta de enseñanza de estos conceptos que puede permitir superar estas dificultades es que el docente en sus tareas profesionales de planificar e implementar una lección considere una secuenciación de tareas o problemas que tengan en cuenta como los estudiantes progresan en su aprendizaje. En este sentido, consideramos que una trayectoria de aprendizaje puede ser útil en este proceso puesto que puede facilitar al docente la interpretación del nivel de comprensión del estudiante de un determinado contenido matemático (Sánchez-Matamoros y Fernández, 2016; Wilson et al., 2013).

En general, una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: el objetivo de aprendizaje, la descripción del progreso en el aprendizaje y un conjunto de tareas (Clements y Sarama, 2004). A modo de ejemplo, y por ser la derivada un concepto fundamental en el estudio de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes, presentamos a continuación una trayectoria de aprendizaje de dicho concepto.

## Una trayectoria de aprendizaje del concepto derivada

Las tres componentes de la trayectoria de aprendizaje del concepto de derivada que vamos a considerar son:

- Un objetivo de aprendizaje: Comprender el concepto de derivada a través de la coordinación de diferentes modos de representación, analítico (algebraico-numérico) y gráfico.
- La descripción de una progresión en el aprendizaje del concepto de derivada que se pone de manifiesto a través del uso progresivo, por parte del estudiante, de un mayor número de elementos matemáticos que conforman dicho concepto,

entendiendo por elementos matemáticos tanto los relativos a la definición de derivada (por ejemplo, la derivada en un punto como límite del cociente incremental) como los relativos a propiedades, teoremas, lemas y corolarios (por ejemplo, el corolario: si f´<0 en el intervalo (a, b) implica que f es decreciente en el intervalo (a, b)) en los diferentes modos de representación tanto analítico como gráfico; y de las relaciones que se establecen entre dichos elementos en la resolución de tareas o problemas. Esta caracterización se ha realizado a partir de los resultados de las investigaciones previas en el área (Sánchez-Matamoros et al., 2006).

– Un conjunto de tareas secuenciadas a partir de la progresión en el aprendizaje descrita.

Nos referiremos a una aproximación a la derivada desde una perspectiva o modo de representación analítica cuando está vinculada al límite del cociente incremental y desde una perspectiva o modo de representación gráfico cuando está vinculada a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de abscisa $x$=a. Una de las dificultades en el aprendizaje de este concepto identificada por investigaciones previas es que los estudiantes tienden a comprender la derivada de una función desde una sola perspectiva o modo de representación, y mayoritariamente es la perspectiva o modo de representación analítico el que domina en la comprensión de los estudiantes (Habre y Abboud, 2006). En consecuencia, tienen dificultades para resolver problemas relacionados con diferentes modos de representación (Sánchez-Matamoros et al., 2006), o para relacionar el significado de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto con la derivada de dicha función en ese punto. Estas dificultades en muchas ocasiones hacen que el estudiante no sea capaz de esbozar el gráfico de la derivada de una función (Ferrini-Mundy y Graham, 1994), o de relacionarlo con la expresión analítica.

Por tanto, el docente tiene que ser consciente cuando planifica la lección sobre el concepto de derivada que para que los estudiantes lleguen a conseguir el objetivo planteado es necesario que coordinen los modos de representación analítico y gráfico a través del establecimiento de relaciones entre elementos matemáticos vinculados a la derivada de una función tanto con carácter puntual, es decir, en un punto; como global, es decir, considerar las relaciones entre una función y su función derivada en un intervalo (a, b). Desde investigaciones previas se ha identificado que una de las formas de progresar en el aprendizaje del concepto de derivada y de esta manera llegar a la comprensión de dicho concepto, se pone de manifiesto a través del uso de los elementos matemáticos vinculados al modo de representación analítico con carácter puntual en primer lugar y posteriormente con carácter global (en un intervalo) para finalizar coordinando o relacionando elementos matemáticos en ambos modos de representación analítico y gráfico (Figura 5).

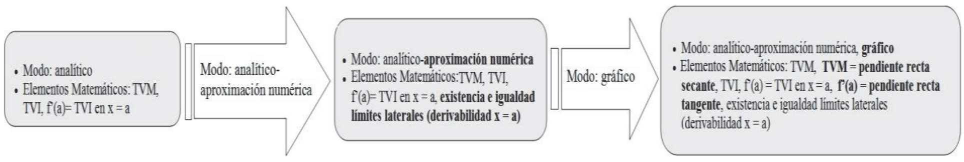



**Figura 5.** Progresión en el aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje de la derivada para estudiantes de Bachillerato (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

A continuación, mostramos a modo de ejemplo una secuencia de tareas vinculada a esta progresión en el aprendizaje (Figura 5). En la tabla 2, se presentan las tareas 1 y 2 que posibilitan la primera transición señalada en la Figura 5. En la tarea 1 se da la expresión analítica de una función *f* y se pide la tasa de variación media (TVM) en un intervalo, así como su paso al límite (TVI) en el punto de abscisa $x$=1. En la tarea 2, se presenta una tabla de valores de una cierta función *f* continua y se pide que a partir de estos valores indique el valor de la derivada de *f* en $x$=2 y si la información proporcionada por la tabla permitiría afirmar si la función es derivable en $x$=1.

**Tabla 2.** Ejemplos de tareas de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

**Tipo de tarea:** derivada de una función con carácter puntual y global en modo de representación analítico

**Tarea 1**

Calcula la tasa de variación media (TVM) de

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

en el intervalo [1, 2] ¿qué sucede con la tasa de variación instantánea (TVI) de *f* ($x$) en el punto (1, *f* (1))?

**Tarea 2**
De una cierta función *f* continua conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

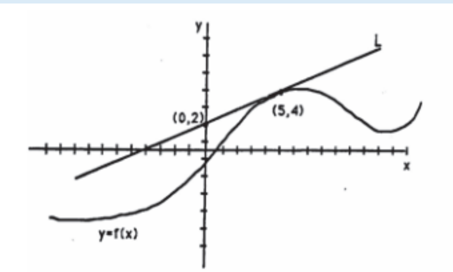
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 1 | 1.00001 | 1.0001 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -2.1 | -2.01 | -2.001 | -2.0001 | -2.00001 | -2 | -2.00002 | -2.0002 | -2.002 | -2.02 | -2.2 |

| x | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | 1.99999 | 2 | 2.00001 | 2.0001 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.61 | 3.9601 | 3.996001 | 3.99960001 | 3.99996 | 4 | 4.00004 | 4.00040001 | 4.004001 | 4.0401 | 4.41 |

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de *f* en $x$=2.
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x$=1?

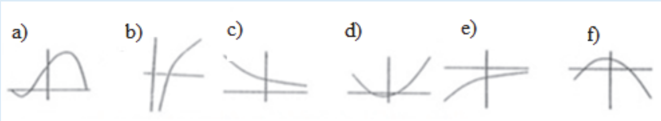
A continuación, en la tabla 3, se muestran tres tareas. La tarea 3 se presenta la gráfica de una función *f* y se pide el valor de la función en $x$=5 y de su derivada *f* ´en $x$=5 (la pendiente de la recta tangente en $x$= 5). Esta tarea permite hacer uso del significado gráfico de la derivada con carácter puntual lo que favorece la segunda transición. Esta transición en la progresión en el aprendizaje se da cuando los estudiantes amplían el significado de la derivada desde la perspectiva analítica a la gráfica en primer lugar con carácter puntual para posteriormente hacerlo con carácter global, es decir, la relación entre la función y su derivada en un intervalo. La tarea 4, en la que se pide emparejar gráficas de funciones con las de su derivada, sin tener las expresiones analíticas de dichas funciones, permitirá al estudiante establecer relaciones en la interpretación gráfica de la derivada lo que posibilitará dicha transición con carácter global. Para finalizar, la tarea 5, en la que se proporciona información en modo de representación analítico sobre una función y sus derivadas primera y segunda, y se pide esbozar la gráfica de la función, también permitirá que el estudiante pueda progresar en su aprendizaje a través de esta segunda transición estableciendo relaciones entre elementos matemáticos en los modos de representación analítico y gráfico en una situación nueva para él. La situación que plantea esta tarea 5 requiere, en su resolución por parte del estudiante, del uso del significado de los elementos matemáticos lo que llevará al estudiante al desarrollo de una comprensión conceptual del concepto de derivada. Además, las características de las funciones que consideremos en este tipo de tareas, como la existencia de puntos angulosos y cúspides, o la condición de continuidad, también ayudarán al estudiante a consolidar el conocimiento construido. En la Tabla 4 se presenta otra tarea (tarea 6) dada en modo de representación gráfico que también promueve este tipo de construcción.

**Tabla 3.** Ejemplos de tareas de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

| |
|---|
| **Tipo de tareas:** relaciones entre la función y su función derivada con carácter puntual y global en modos de representación analítico y gráfico |
| **Tarea 3**<br><br>Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (5, 4) como aparece en la figura, encontrar el valor de la función en x = 5, f (5) y el de la función derivada en el mismo punto, f '(5)<br><br><br> |

**Tarea 4**

Analiza las gráficas siguientes:




¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

**Tarea 5**

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

a) $f$ es continua en su dominio b) $f(2) = 0$ c) $f'(5) = 0$ d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

e) $\lim_{x \to 8^-} f(x) = -\infty$ f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$ g) $f'(x) > 0$ cuando $x < 5$

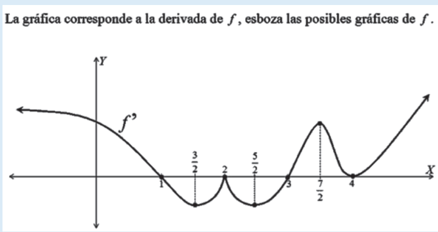
h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$ i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$

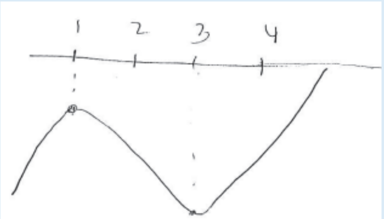
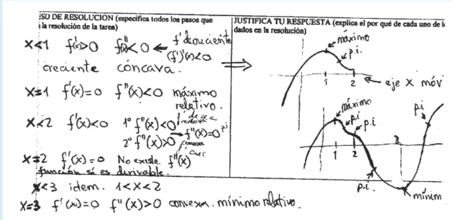
En dicha tarea (Tabla 4), se pide construir la gráfica de $f$ a partir de la gráfica de $f'$. La gráfica de $f'$ contempla varios cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. En la resolución de la tarea el estudiante deberá establecer relaciones entre elementos matemáticos que vinculan los ceros y valores extremos de $f'$ con los valores extremos y puntos de inflexión de $f$; el signo de $f'$ con la monotonía de $f$; y el crecimiento de $f'$ con la convexidad de $f$. Por tanto, en este tipo de tareas es necesario establecer relaciones entre la función, su derivada y su derivada segunda para llegar a su resolución (Fuentealba et al., 2016).

**Tabla 4.** Ejemplo de tarea de construcción de una función f a partir de la gráfica de su función derivada (Spivak (1974) citado en García et al. (2011) y respuestas de dos estudiantes

**Tipo de tarea**: establecer relaciones entre la función, su derivada primera y su derivada segunda

**Tarea 6**



| **Respuesta Estudiante 1** | **Respuesta Estudiante 2** |
|---|---|
|   |   |

**Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes**

El **Estudiante 1**, para esbozar la gráfica de la función *f*, ha podido realizar un cambio de modo de representación gráfico al analítico para obtener información sobre la función. De carácter global sobre la monotonía de *f*: *f'* es positiva (*f'*>0) en los intervalos (-∞, 1), (3,4) y (4, + ∞), entonces *f* es estrictamente creciente en dichos intervalos. *f'* es negativa (*f'*<0) en los intervalos (1,2) y (2,3), luego *f* es estrictamente decreciente en dichos intervalos. Además, de los ceros de *f'* obtiene información puntual sobre los posibles valores extremos o puntos de inflexión de *f* : *f'* tiene ceros en los puntos de abscisa *x*=1, *x*=2, *x*=3 y *x*=4, por lo tanto, puede que f tenga un valor extremo (máximo o mínimo) o punto de inflexión en los puntos con dichas abscisas. También ha establecido relaciones de la información global y puntual obtenida anteriormente, y considera que si *f'* tiene signos distintos a la izquierda y a la derecha de los puntos de abscisa *x*=1 y *x*=3, es porque *f* tiene un máximo local en *x*=1 y un mínimo local en *x*=3. Sin embargo, el estudiante muestra dificultades en realizar el esbozo correcto de *f* al no tener en cuenta el comportamiento de la segunda derivada de *f*.

El **Estudiante 2**, además de usar la información con carácter global y puntual considerada por el estudiante 1, también ha tenido en cuenta el comportamiento de *f''* a partir de la gráfica de *f'* de la tarea, obteniendo información sobre la curvatura de *f* (cóncava o convexa), y considera los intervalos en los que *f''* es positiva o negativa. Para ello este estudiante ve *f''* como la derivada de *f'* (escribe (*f'*)') y establecer relaciones entre ellas: *f'* es estrictamente decreciente en los intervalos (-∞, 3/2), (2,5/2) y (7/2, 4), luego *f''*<0 por lo tanto *f* es cóncava en dichos intervalos; *f'* es estrictamente creciente en los intervalos (3/2, 2), (5/2, 7/2) y (4, + ∞), luego *f''*>0, por lo tanto, *f* es convexa en dichos intervalos. De la información global obtenida deduce la información puntual relativa a los puntos de abscisas *x*=3/2, x=2, *x*=5/2, *x*=7/2 y *x*=4 en los que hay cambios de curvatura en la función *f*. Lo que le lleva a deducir que *f* posee puntos de inflexión en (3/2, *f* (3/2)), (2, *f* (2)), (5/2, *f* (5/2)) (7/2, *f* (7/2)) y (4, *f* (4)). De esta forma, y considerando en conjunto la información global y puntual proporcionada por las relaciones entre *f*, *f'* y *f''* el estudiante 2 realiza el esbozo correcto de la gráfica de *f*.

En general, un estudiante de Bachillerato considerará que la gráfica realizada por el estudiante 1 (Tabla 4) es correcta, aunque no lo es, ya que no tiene en cuenta el estudio de la curvatura de *f* en los distintos intervalos de su dominio. Para hacer un esbozo de la gráfica de *f* correcto no solo se deben establecer relaciones entre *f* y *f'*, sino que también es fundamental establecer relaciones entre *f'* y *f''* y coordinarlas, para ello deberán considerar *f'* como una función y *f''* como su derivada. En este sentido, la gestión del docente es fundamental durante la resolución de la tarea por parte del estudiante, para que no llegue a convertirse en un obstáculo para la comprensión del concepto de derivada en niveles superiores de enseñanza (Fuentealba et al., 2017).

Finalmente, también considerar en la gestión del aula el uso de recursos informáticos como software de matemáticas gratuitos ya que estos pueden facilitar a los estudiantes el poder establecer relaciones entre los diferentes modos de representación en la resolución de las tareas o problemas.

## Sentido numérico

El sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar situaciones que requieren el empleo de números y operaciones con flexibilidad y comprensión. Las actividades que promueven el desarrollo del sentido numérico plantean situaciones en las que hay que estimar y aproximar, componer y descomponer números, comunicar e interpretar información numérica, buscar relaciones y patrones en los números, reconocer errores al operar con números, usar diferentes niveles de precisión con los números, inventar formas de calcular un resultado o usar un resultado numérico para tomar una decisión (CEMAT, 2021).

En este sentido, en Bachillerato se deben ver los conjuntos numéricos desde una perspectiva más global. El alumnado debería aprender las diferencias entre los distintos conjuntos numéricos y qué propiedades se conservan y cuáles no al pasar de un conjunto a otro, operar con fluidez números reales y tener cierta competencia con vectores y matrices para resolver problemas, utilizando la tecnología cuando sea apropiado, y saber decidir inteligentemente qué herramientas usar y cuándo usarlas para realizar cálculos con fluidez, así como saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. Las tareas que se planteen deben ir enfocadas a la activación de procesos cognitivos de conexión y reflexión, de forma que los procesos de reproducción tengan menor protagonismo. Un conjunto de tareas que podrían ser útiles para que el alumnado pueda conseguirlo son las siguientes:

> Consideremos tres puntos A, B y C. A es $\frac{7}{8}$, B es $\frac{7}{18}$, y C es $\frac{1}{2}$. Sin encontrar la distancia exacta, elige quién está más cerca de C. Justifica tu respuesta.

Probablemente el estudiantado habrá realizado actividades de representación de fracciones con cierta frecuencia en cursos inferiores, el objetivo de esta actividad no es poner en práctica esa habilidad (proceso cognitivo de reproducción), sino poner de manifiesto cómo es el conocimiento de los estudiantes en relación con los números racionales, ya que para justificar la respuesta dada, necesitan ser capaces de estimar el tamaño de esos números racionales cuando el tamaño de los números enteros que componen esas fracciones son de tamaños muy diferentes. Tratándose de tres números racionales, no enteros, lo que denotaría un mayor desarrollo de sentido numérico sería, sin ni siquiera tener que representarlos o calcular las distancias de A, B y C, o pasarlos a fracciones con el mismo denominador, pensar en qué número decimal están representado esas fracciones. En el caso de $\frac{1}{2}$ está bastante claro (0,5), en el caso de $\frac{7}{8}$ puedo pensar que debe ser un número cercano a 1 ya que 7 está muy cerca de 8. Y en el caso de $\frac{7}{18}$ puedo pensar que es un número algo menos que 0,5 puesto que 18 es algo más del doble de 7. Por lo que podríamos decir B<C<A y que B está más cerca de C que A.

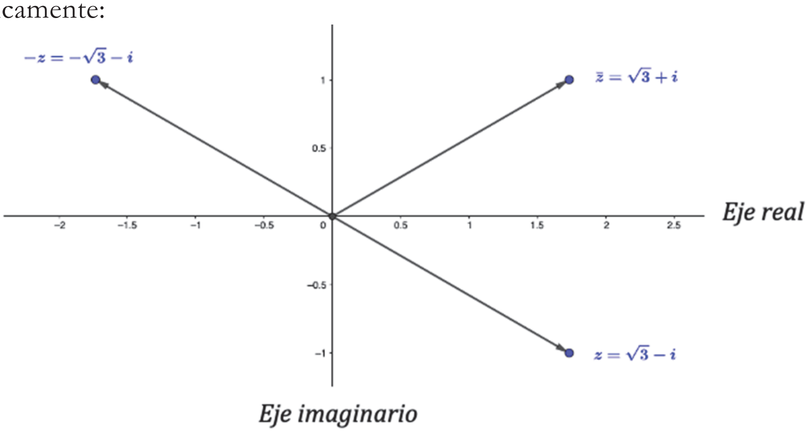
En relación con el conjunto de los números complejos proponemos un par de tareas, en la primera de ellas se pretende que el estudiante relacione diferentes modos de representación y en la segunda que construya con significado el conjunto de los números complejos:

> Dado el número complejo $z = \sqrt{3} - i$, represéntalo gráficamente y exprésalo en forma polar. ¿Podrías obtener su opuestos y su conjugado?

En un posible proceso de resolución, el estudiante tendrá que considerar que el opuesto de un número complejo $z = a + bi$, es $-z = -a - bi$, y el conjugado $\bar{z} = a - bi$. En nuestro caso:

$$-z = -\sqrt{3} + i \quad \rightarrow \quad \bar{z} = \sqrt{3} + i$$

Gráficamente:



Si al número complejo $z = 2 + i$ le sumamos 3, ¿qué tipo de número obtendremos? Justifica tu respuesta

a) Un número complejo.
b) Un número entero.
c) Un número racional.

El estudiante para poder contestar la tarea debe considerar que al sumarle a un número complejo un número real, la parte imaginaria permanece invariable, y que lo que se obtiene es un número complejo, por tanto, la opción correcta sería a. En nuestro caso:

$$\mathrm{z} = 2 + \mathrm{i} \;\;\rightarrow\;\; \mathrm{z} + 3 = 5 + \mathrm{i} \;\in\; \mathbb{C}$$

Otro tipo de tareas que se debe considerar en este nivel educativo son las relacionadas con las propiedades de los conjuntos numéricos. A modo de ejemplo, mostramos la siguiente tarea que permite apreciar la densidad del conjunto de los números reales:

Escribe tres números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{4}}{3}$ *y 1*

En un posible proceso de resolución el estudiante puede transformar $\frac{1-\sqrt{4}}{3}$ en una expresión equivalente que le pueda ayudar a estimar mejor, en este caso podría ser $-\frac{1}{3}$. Luego, el estudiante debe encontrar tres números reales que estén entre $-\frac{1}{3}$ y 1. Por la densidad del conjunto de los números reales, entre dos números reales $-\frac{1}{3}$ podemos encontrar infinitos números reales, el estudiante sólo debe elegir tres de entre las infinitas posibles soluciones que tiene, por ejemplo:

$$-\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

Para finalizar, considerar también que el estudiante de Bachillerato debe realizar cálculos con fluidez, así como saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. Un ejemplo de este tipo de tareas es la siguiente:

Estima el resultado de la siguiente multiplicación $2{,}5 \cdot 10^{7} \times\; 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

En un posible proceso de resolución, el estudiante puede aplicar la propiedad asociativa y multiplicar 2,5 · 0,5 , y usar que multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir por 2, obteniendo que el resultado es la mitad, es decir, 1,25. Y por otro lado, efectuar el producto de potencias de la misma base obteniendo que $10^{7} \cdot 10^{-4} = 10^{3}$.

Por último, hacer uso del cálculo mental de 1,25 por $10^{3}$: $1{,}25 \cdot 10^{3} = 1250$

Las justificaciones dadas por el alumnado nos permitirán observar las estrategias usadas y el nivel de desarrollo del sentido numérico.

## Reflexión final

Un aspecto del Bachillerato que debe tenerse en cuenta por parte del docente de este nivel educativo es el papel que tienen estos dos cursos en la transición de los estudiantes a la universidad. Estos cursos deben preparar a los estudiantes para sus estudios posteriores y capacitarlos para las pruebas de acceso a la universidad. Estos dos objetivos pueden parecer complementarios: los estudiantes que superan esos exámenes deben estar mejor preparados para sus estudios universitarios. Sin embargo, en la práctica, las experiencias de la mayoría de los estudiantes de estos cursos es que no son necesariamente lo que necesitan para sus estudios universitarios. La preparación para los exámenes hace que la enseñanza se enfoque en procedimientos y no prepara a los estudiantes para el rigor, el razonamiento y la abstracción que necesitan para sus estudios universitarios de matemáticas (Biza et al., 2016). El docente debe ser consciente de ello para que estos cursos no terminen sirviendo únicamente para preparar a los estudiantes para las pruebas de acceso a la universidad.

## Referencias


Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos [Teaching of calculus principles: epistemological, cognitive and didactical problems]. In: Gómez P, editor. *Ingeniería didáctica en educación matemática [Didactic engineering in mathematics education*]. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Badillo, E., Azcarate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191–206.

Batanero, C. y Gea, M. (2018). El riesgo como contexto en la enseñanza de la probabilidad condicional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 125-132.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. y Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead.* ICME-13 Topical Surveys, Springer International Publishing AG Switzerland. Available at http://www.springer.com/gp/book/9783319418131.

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 81-89. https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33* (pp. 31–45). Washington, DC: Mathematical Association of America

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2016). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70*, 72-77.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374-392.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1023–1045.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*: The 18th ICMI Study, 299-310.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57–72.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Labraña, A., Plata, A., Peña, C., Crespo, E. y Segura, R. (1995). *Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Editorial Síntesis.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Paparistodimou, E., Meletiou-Mavrotheris, M. y Serradó, A. (2017). Problemas de modelización y razonamiento estadístico. *Investigación en la enseñanza de las matemáticas (9*), 10.12681/enedim.14179.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85–98.

Sánchez-Matamoros, G. y Fernández, C. (2016). Secuencia de actividades para el aprendizaje de la derivada desde una trayectoria de aprendizaje. En: *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 72. 40-45).

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.