Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Mathematics in Compulsory Secondary Education

Moreno, A.[a]; Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, MC.[a]; Fernández-Ahumada, E.[b]; García Pérez, M.T.[b]; Sánchez-Matamoros García, G.[c]; Ramírez-Uclés, R.[a]; Serradó, A.[d]
[a] *Universidad de Granada,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Sevilla,*
[d] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

El desarrollo de la competencia matemática a lo largo de la etapa de Secundaria se lleva a cabo mediante la movilización de contenidos que integran conceptos, procedimientos y actitudes. Estos contenidos se van a organizar en este capítulo en torno a la idea cognitiva de sentido matemático que a lo largo del libro se ha venido interpretando como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos. Esta idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes contenidos de los sentidos matemáticos. A lo largo del capítulo se ofrecen propuestas de tareas para el desarrollo de cada uno de los sentidos para orientar al profesorado de esta etapa a desarrollar las propuestas curriculares.

Palabras clave: Sentido matemático, Secundaria, Tareas matemáticas, Currículo.

Abstract

The development of mathematical competence throughout this stage is carried out through the mobilization of content that integrates concepts, procedures and attitudes. These contents are going to be organized in this chapter around the cognitive idea of mathematical sense that throughout the book has been interpreted as the set of skills related to mastery in the context of metric, numerical, algebraic, geometric and stochastic contents. This idea of mathematical sense underlines the functional nature of learning mathematics at this educational stage and the possibilities of establishing connections between the different contents of the mathematical senses. Throughout the chapter, proposals for tasks are offered for the development of each of the senses to guide the teachers at this stage to develop the curricular proposals.

Keywords: Mathematical sense, Secondary, Mathematical tasks, Curriculum.

Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

El aprendizaje de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se caracteriza por ser competencial, autónomo, significativo y reflexivo. El desarrollo de la competencia matemática a lo largo de esta etapa se lleva a cabo mediante la movilización de contenidos que integran conceptos, procedimientos y actitudes. Estos contenidos se van a organizar en este capítulo en torno a la idea cognitiva de sentido matemático que a lo largo del libro se ha venido interpretando como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos. Esta idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes sentidos matemáticos.

El profesorado es el intermediario entre los planteamientos curriculares y su aula. Por tanto, todo cambio debe contar con la responsabilidad del profesorado. Su participación, bien como participante del proceso de cambio curricular o como usuario del currículo final, demanda la comprensión de los procesos de cambio que tiene lugar en él. A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Secundaria Obligatoria relacionados con los distintos sentidos matemáticos.

Sentido Algebraico

El álgebra escolar se ha venido introduciendo en los currículos de muchos países como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de Secundaria y Bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2003). El álgebra, así entendida, ha sido tradicionalmente introducida como generalización de la aritmética y las representaciones algebraicas tratadas como representaciones de las operaciones aritméticas (Kieran, 1992).

Sin embargo, el profesorado es consciente de que buena parte del alumnado posee una escasa comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos.

El álgebra tiene sus raíces históricas en el estudio de métodos de resolución de ecuaciones. Incluso antes de la introducción de los símbolos alfanuméricos, como señala Sessa (2005), las construcciones geométricas de Euclides tuvieron una influencia perdurable en el álgebra. En esa convivencia del álgebra y la geometría escolar, "pensar la geometría como herramienta para validar las leyes y resolver problemas algebraicos y concebir al álgebra como herramienta para resolver problemas geométricos constituyen dos facetas de una misma problemática que permitiría a los alumnos la construcción de sentidos potentes para ambos campos" (Sessa, 2005, p. 63).

El sentido algebraico, estudia las relaciones entre cantidades, la generalización de propiedades y la representación de las relaciones matemáticas. La caracterización del sentido algebraico desarrollada en este libro nos lleva a mirar el álgebra escolar desde tres perspectivas: álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones; álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta; y, álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelización para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se modelan.

El álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones

Esta perspectiva del álgebra considera los aspectos simbólicos y su manipulación. Es decir, la identificación de situaciones donde usar los símbolos, la ejecución de cálculos simbólicos con fluidez y de diversas maneras, la conexión del álgebra con la geometría y la elección de símbolos de manera eficiente.

Un ejemplo de esta forma de abordar el álgebra se muestra en la siguiente tarea tomada de Mason (2017). *Escribe cuatro números en una tabla de dos por dos:*

5	*3*
7	*4*

Escribe el producto de las filas y el de las columnas y ahora suma la suma de las columnas y réstale la suma de las filas

35+12-15-28 = 4

En una nueva tabla y siguiendo las mismas instrucciones elige números para que el resultado sea 3 (o el número que se elija previamente)

La propiedad que se esconde tras esas operaciones es el producto de las diferencias de las diagonales y la identificación de esa estructura, aunque difícil de reconocer de inmediato, permitirá resolver la tarea para cualquier resultado que asignemos previamente. Evidentemente, si el alumnado está familiarizado con el uso de letras, pueden hacerlo utilizando el álgebra simbólica, pero no es una condición imprescindible, ya que pueden desarrollar el pensamiento algebraico con esta actividad sin lenguaje simbólico y empleando otras representaciones. Lo que sí necesitarán es estar familiarizados con propiedades de la aritmética como la conmutatividad, la asociatividad y la propiedad distributiva.

Esta tarea se enriquece si planteamos dos variantes para practicar la búsqueda de la propiedad desconocida. Esta propuesta se presenta como paso intermedio entre el uso de la aritmética con números concretos y el uso del simbolismo con letras. La primera de las variantes sería: *¿por qué el resultado sigue siendo el mismo si se elige dos números más, sumo el primer número a las celdas superior izquierda e inferior derecha y resto el segundo número a los números inferior izquierdo y superior derecho?*

La otra variante sería: *Leyendo en el sentido de las agujas del reloj desde la esquina superior izquierda, forme dos números de dos dígitos. En nuestro caso obtenemos 53 y 47. Haz lo mismo en sentido antihorario para obtener 57 y 43. Ahora haz la diferencia de los productos: 53 x 47 – 57 x 43 = 40.*

Modifiquemos la cuadrícula restando 1 a los números de la diagonal principal y sumando 2 a los números fuera de la diagonal. Se obtiene la cuadrícula que se muestra a continuación, y 45 x 39 – 49 x 35 = 40 también. ¿Podría ser esto una coincidencia?

4	5
9	3

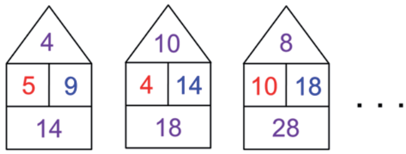
En definitiva, se trata de tareas donde hay una estructura desconocida que el alumnado debe identificar y representar. El camino hacia la representación alfanumérica cada vez más compleja puede transitar por las representaciones disponibles en el alumnado.

Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta

Esta perspectiva del álgebra desarrolla habilidades como generalizar patrones, relacionar las propiedades de los números con la manipulación algebraica, relacionar las familias de funciones con determinadas expresiones algebraicas y analizar el efecto de los parámetros en las expresiones algebraicas.

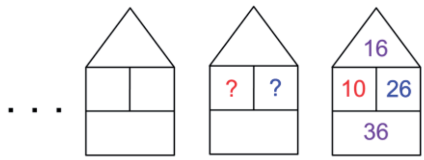
La siguiente tarea[1] y sus posibles extensiones permiten el desarrollo del sentido algebraico con la perspectiva anterior:

El profesor presenta las siguientes casitas con números y pide a los estudiantes que averigüen qué está sucediendo.



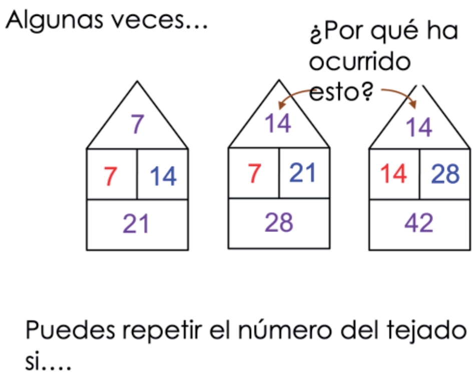
Esta tarea incluye varias relaciones numéricas que pueden ser identificadas por el estudiantado y formalizadas con lenguaje simbólico o no según lo familiarizados que estén con el uso de letras. Sin embargo, sea cual sea la estrategia de representación que se emplee, se potenciará el sentido algebraico porque estarán generalizando patrones y estableciendo las propiedades numéricas desconocidas en la tarea.

Esta tarea puede enriquecerse si planteamos variantes como la siguiente donde el estudiantado tendrá que deducir los términos precedentes a uno dado conociendo la ley de transformación:



1 http://www.mrbartonmaths.com/index.html

Incluso podemos desarrollar la capacidad de justificar argumentos si preguntamos:



Álgebra para expresar y apoyar las situaciones de modelización

Las matemáticas que principalmente se trabajan hoy tienen como objetivo modelizar situaciones del mundo real para hacer predicciones futuras y para explicar acontecimientos pasados. La modelización incluye la identificación de patrones, situaciones del mundo real y experimentos científicos (NCTM, 2003).

Tareas (Schmittau, 1993) como la siguiente son especialmente interesantes en este nivel educativo:

> A las 8.00 de la mañana del domingo, un niño se fija en una pequeña planta que crece cerca de su casa. Decide medirla y descubre que mide 3 cm de alto. La mide de nuevo el lunes por la mañana a las 8:00 y encuentra que mide 9 cm de alto. Decide medirla a la misma hora en las mañanas siguientes. La medida del martes es 27 cm y la del miércoles 81 cm. Suponiendo que este patrón de crecimiento es descriptivo de todo el historial de crecimiento de la planta:
>
> 1. ¿Qué altura tenía el sábado anterior a las 8:00? ¿Por qué no se fijó?
> 2. ¿Qué altura tenía el viernes anterior a las 8:00 am? ¿El jueves anterior a las 8 am?
> 3. Si etiquetamos el domingo como el Día 1, el primer día en que el niño midió la planta y quiere ser coherente con nuestro esquema de numeración, ¿cómo deberíamos numerar los siguientes días: sábado, viernes, jueves? Si denotamos la altura de la planta el domingo a las 8.00 a.m. como 31 cm, ¿cómo podríamos expresar las alturas de la planta los otros días?
> 4. ¿Qué altura tenía la planta a las 8:00 de la noche del sábado anterior? ¿A las 8:00 de la noche del domingo? ¿A las 4:00 pm del sábado? (¿Encontraste la altura en otro día u hora?)
> 5. ¿Cuándo tendrá la planta 46,765 cm de altura?

El contexto de esta tarea ofrece un modelo matemático para su resolución que se introduce inicialmente mediante la reflexión sobre lo que ocurre en el contexto real (pregunta 1 y 2) y se va formalizando en la cuestión 3 para terminar con su expresión algebraica. Especialmente interesante es la cuestión 4 porque permite que el alumnado reflexione sobre la necesidad de trabajar con valores no positivos y no enteros de la variable independiente. Finalmente, la cuestión 5 anima a trabajar con la relación inversa entre las variables.

Más que reflejar la realidad botánica, Schmittau (1993) dice que esta tarea, que sugiere introducir después de potencias con números enteros positivos, implica el movimiento entre secuencias aritméticas y geométricas (situando los datos en ejes de día y altura) a través del desarrollo de la función exponencial $y=3^x$, y se desarrollan soluciones para x en varios intervalos, no solo para números enteros positivos, sino también exponentes cero, negativos y fraccionarios. Debido a la naturaleza continua del crecimiento de las plantas, se puede ver como posible, en determinados intervalos de tiempo, que las alturas de estas involucren exponentes irracionales.

Sentido espacial

En el capítulo 3 de este libro se describe que el sentido espacial se organiza alrededor de dos componentes y sus respectivas habilidades, que lejos de ser independientes, están íntimamente enlazadas: manejo de conceptos geométricos y visualización.

El desarrollo de las destrezas asociadas a este sentido se consigue con la propuesta de tareas escolares que fomenten tres acciones básicas: construir, representar y describir objetos geométricos. Estas acciones se han de realizar tanto con objetos formales como con variedad de objetos manipulables, donde la tecnología adquiere un papel fundamental en la enseñanza de la geometría. Las herramientas de geometría dinámica proporcionan una modelización de gran diversidad de figuras de dos y tres dimensiones y permiten una manipulación sencilla, facilitando entornos de trabajo e infinidad de ejemplos para enunciar y probar conjeturas, lo que favorece el aprendizaje de la generalización y demostración (NCTM, 2001).

Conectando los conceptos geométricos

En este sentido, y para resaltar la funcionalidad de las descripciones geométricas para comunicar información sobre las formas del espacio, se pueden utilizar tareas como la presentada en el trabajo de Gutiérrez et al. (2018) que se describe a continuación.

La tarea consistía en ubicar unos determinados edificios en la plantilla de la Figura 4. Los estudiantes trabajaban colaborativamente por parejas. El jugador A tenía la información de la Figura 5, correspondiente a dos perspectivas de los edificios y algunas pistas. Del mismo modo el jugador B disponía de la información de otras dos perspectivas y otras pistas diferentes (Figura 6). Los jugadores podían intercambiar todo tipo de información verbalmente, pero no podían enseñar al compañero sus perspectivas. El objetivo era colocar los edificios en la cuadrícula y justificar la existencia y unicidad de la solución.

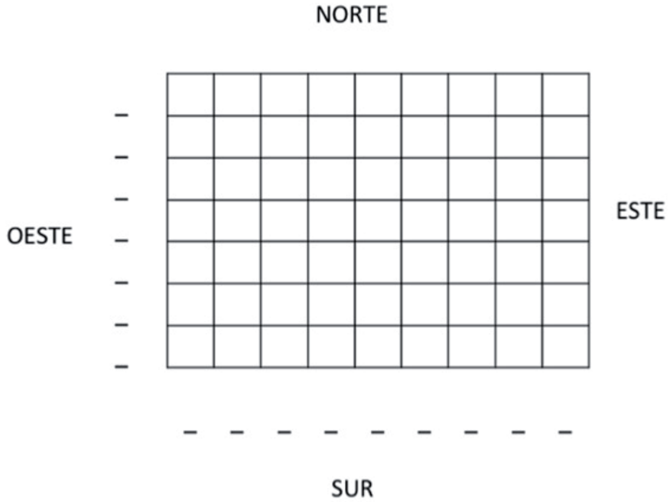
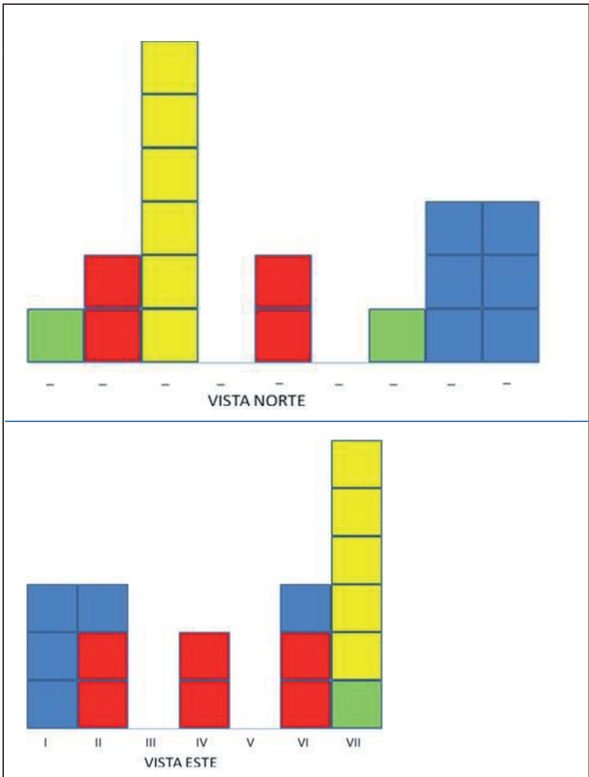


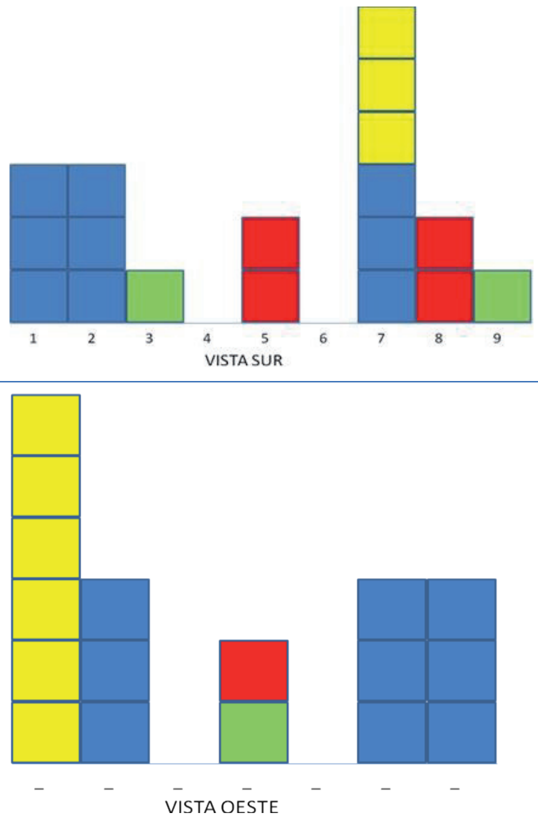
Figura 4. Plantilla para ubicar los edificios (Gutiérrez et al. 2018)



El nombre de las calles horizontales (las que van en dirección oeste-este) son números romanos desde el I hasta el VII, ordenadas de manera creciente desde el sur hasta el norte.
Cuando un edificio ocupa un cuadrito, no hay otro edificio en ningún cuadrito que tenga un lado o un vértice en común con él.

Hay un total de 9 edificios.
Los azules tienen tres plantas
Conoces las perspectivas de los edificios desde el norte y desde el este

Figura 5. Información del Jugador A en el problema de los edificios (Gutiérrez et al., 2018)



El nombre de las calles verticales (las que van en dirección norte-sur) son números desde el 1 hasta el 9, ordenadas de manera creciente desde el oeste hasta el este.
Los edificios coinciden con cuadrados de la cuadrícula. Están separados, no se tocan en ningún punto y los edificios de la misma altura tienen el mismo color.
Hay edificios de cuatro colores:
Tú sabes que hay un edificio amarillo, dos verdes y tres rojos
Conoces las perspectivas de los edificios desde el sur y desde el oeste

Figura 6. Información del Jugador B en el problema de los edificios (Gutiérrez et al., 2018)

Las respuestas de los estudiantes mostraron distintas habilidades de visualización según varias fases como la colocación de los edificios, la comunicación de la información o la comprobación de las vistas. Los estudiantes de mejor rendimiento manifestaron importantes elementos de la visualización como los procesos para transformar información de representaciones visuales en verbales y viceversa, sistemas de referencia y habilidades de visualización y orientación.

Conectando el sentido espacial con otros sentidos

Para ejemplificar cómo conectar el sentido espacial con otros sentidos presentamos la siguiente tarea: ¿Qué polígonos regulares pueden obtenerse al cortar un cubo por un plano?

En niveles inferiores se pueden abordar versiones simplificadas de esta pregunta, como trabajar secciones de diferentes objetos utilizando bloques de plastilina y secciones de objetos familiares (rebanadas de pan, rodajas de embutido…). En Educación Primaria se puede trabajar secciones de cuadrados y rectángulos e identificar los cortes de las caras en el desarrollo plano. En esta tarea intervienen las habilidades de visualización para percibir la figura-contexto y las relaciones espaciales. Estas habilidades conectan los conocimientos geométricos relativos a los conceptos con las propiedades que se visualizan. Además de razonar con las representaciones obtenidas, se puede favorecer la conexión con otros sentidos al pedirles que justifiquen más allá de lo obtenido empíricamente e intentar argumentar para el caso general. Por ejemplo, ¿Qué sección rectangular tiene mayor área? En la Figura 7 pueden argumentar sobre la mayor longitud de los lados en los rectángulos obtenidos, comparándolos con la longitud de la diagonal de la cara del cubo e incluso compararlos aplicando movimientos.

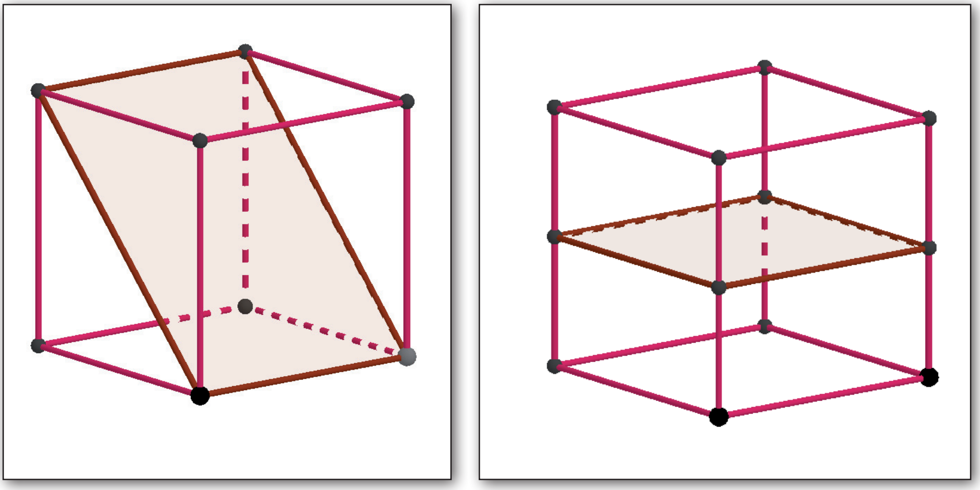


Figura 7. Comparaciones de áreas de rectángulos obtenidos por secciones planas de un cubo

En cursos superiores se pueden plantear cuestiones relativas a justificaciones, por ejemplo, ¿cuándo la sección es el rectángulo con mayor área? ¿Es posible obtener un paralelogramo que no sea un rectángulo? Para abordarlas el estudiante puede utilizar distintas representaciones, como dibujos en perspectiva o desarrollos planos, además de modelos físicos que les permita explorar y visualizar propiedades empíricamente. Los argumentos analíticos y la notación algebraica pueden apoyarse en las representaciones visuales y aportar generalidad.

En Educación Secundaria se pueden utilizar distintas representaciones para reconocer las propiedades de las secciones. Para motivar que es posible obtener un hexágono regular, se pueden marcar los puntos (Figura 8) y pedirles que justifiquen si están en un mismo plano. Los argumentos pueden ser variados, desde los más visuales a los más algebraicos: ver que todos los puntos se obtienen girando uno de ellos respecto al centro del cubo y un eje perpendicular al plano, aplicando simetrías u obteniendo las coordenadas de los puntos. La imposibilidad de obtener pentágonos regulares conjuga la visualización con razonamientos analíticos sobre las propiedades de las secciones planas de un cubo como que los lados en caras paralelas son paralelos, y por tanto no pueden ser los lados de un pentágono regular. Además, el hecho de que no puede tener más de seis lados, imposibilita la obtención de polígonos de más de seis lados.

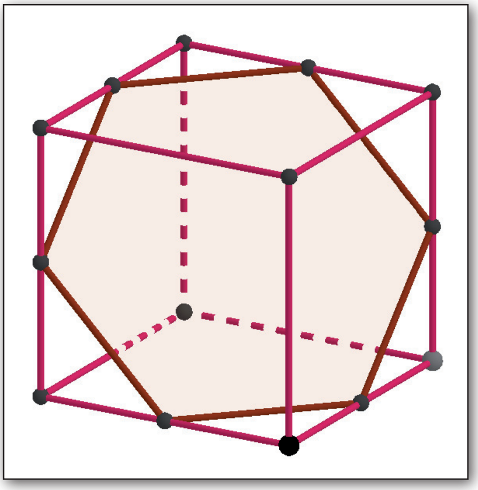


Figura 8. Hexágono regular como sección plana de un cubo

Sentido estocástico

Las actividades que deben favorecer el desarrollo del sentido estocástico en secundaria tienen que anclarse en los aprendizajes previos del alumnado que le habría capacitado para iniciarse en el estudio de datos contextualizados y reconocer la incertidumbre inherente cuando se estima una población mediante una muestra significativa y cercana a sus intereses que les permita realizar las primeras inferencias, predicciones o tomas de decisiones. En esta etapa, deberán avanzar en el desarrollo de dichas capacidades a partir de la reflexión sobre cómo las investigaciones estocásticas aportan sentido a la variabilidad, predictibilidad e incertidumbre a la muestra de datos estudiada. Particularmente, la necesidad actual de formar ciudadanos críticos que dispongan conocimientos que les permitan interpretar, seleccionar y comunicar información, requiere un desarrollo y manejo de conocimientos estocásticos, esto implica la necesidad de una comprensión de los principios del proceso inferencial y una concientización de los riesgos de ignorar la variabilidad (Behar y Grima Cintas, 2003).

El alumnado debe desarrollar, a través de las actividades, actitudes de curiosidad por el mundo que le rodea y que lleva a las personas a hacerse preguntas que permiten desarrollar las competencias globales, como el pensamiento creativo y crítico.

Por ejemplo:

> Un grupo de alumnos decide iniciar una campaña de sensibilización ambiental acerca de las maneras que contribuye su centro a la gestión de residuos y la contaminación a escala local y global (OECD, 2018).

El inicio de la campaña podría partir del estudio: *¿cómo se gestionan los residuos en el centro?*

Aunque esta pregunta está contextualizada, no es una "buena pregunta de investigación". Una buena pregunta de investigación es aquella que permita una rica exploración de los datos en cuestión, el descubrimiento y el pensamiento estadístico (Arnold y Pfannkuch, 2018).

Por ello, en los primeros niveles de la etapa, el profesorado debe orientar al alumnado para que plantee preguntas de investigación ricas. Es decir, preguntas en las que las variables de interés son claras y están disponibles, la población (o muestra) de interés es clara, la intención de la pregunta es clara, la pregunta puede responderse con los datos, la pregunta merece la pena ser investigada, tiene un propósito y la pregunta permite hacer un análisis de toda la muestra.

Es decir, un primer acercamiento a la respuesta de la pregunta anterior podría ser la elaboración de una encuesta a realizar en el centro con preguntas como:

> ¿Tiras al suelo desperdicios, envoltorios o basura?
> ¿Tiras al contenedor adecuado los envases, papeles, vidrio, pilas, ...?
> ¿Traes el desayuno en un envase de usar y tirar?

El alumnado a la par que desarrolla la capacidad de interrogar se ve involucrado en diferentes ciclos de investigación que permite desarrollar la capacidad de formular preguntas, reconocer la necesidad de los datos, la variabilidad de los mismos y la incertidumbre inherente. En los últimos años de la etapa de secundaria deben ser capaces de reflexionar sobre la idoneidad de las preguntas que se plantean. Por ejemplo, participando en actividades como:

Para cada una de las preguntas, razona si es rica para llevar a cabo una investigación estadística:

> a) ¿Tienen las chicas brazos más largos que los chicos?
> b) ¿Quién tiene el peroné más largo?
> c) ¿Cuáles son las longitudes típicas del cuello del alumnado?
> d) ¿Cuál es el deporte más popular que se practica?

La actividad, adaptada de la investigación llevada a cabo por Arnold y Pfannkuch (2018) sobre el estudio de preguntas de investigación, debe permitir identificar que: no está definida la población (o muestra) que se estudia, que las preguntas tienen diferentes propósitos (el estudio de la anatomía y los deportes que se practican), que la respuesta de la pregunta b solo incluye un individuo, etc.

El diálogo sobre la adecuación de dichas preguntas, les permitirá pensar como estadísticos al plantearse cuestiones de carácter teórico. Por ejemplo:

> ¿cómo los diferentes elementos de un ciclo de interrogación (generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar) inciden en el desarrollo del ciclo de investigación (problema, plan, datos, análisis, conclusiones)?

Por ello, Gould et al. (2017) sugieren que el planteamiento y análisis de preguntas de investigación es fundamental para el éxito en el análisis, la interpretación y la extracción de conclusiones de los datos. Si bien el alumnado de primaria ya debe haberse iniciado en el estudio de datos, se propone que las actividades de secundaria favorezcan el análisis exploratorio de la distribuición de los datos a partir de la visualización y representación de gráficos y el cálculo de medidas de centralización y dispersión para comparar variables. Sin embargo, este análisis exploratorio no debe reducir la estadística al cálculo de las medidas de centralización y dispersión descontextualizadas del proceso de investigación (CeMAT, 2021). Así pues, proponemos actividades que capaciten al alumnado para calcular y otorgar sentido a los parámentros de posición, centralización y dispersión, mediante situaciones como:

> El I.E.S. Antonio Muro premia cada curso escolar al mejor alumno o alumna de 4º de secundaria en función de las calificaciones de sus asignaturas. Por ello, desde dirección les han solicitado a los representantes de las cinco clases que establezcan los criterios para elegir cuál es el/la mejor, tomen la decisión de cuál es el mejor candidato en función de estos criterios y redacten el acta de concesión de un premio.
> Si solo saben las calificaciones de cinco candidatos, ¡ayúdales a realizar el encargo de dirección!
> Candidato 1: 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5
> Candidato 2: 9,0; 9,1; 9,2; 9,3; 9,4 ;9,6; 9,7; 9,8; 9,9; 10
> Candidato 3: 9,0; 9,0; 9,1; 9,2; 9,3; 9,7; 9,8; 9,9; 10; 10
> Candidato 4: 9,0; 9,1; 9,2; 9,4; 9,4; 9,6; 9,6; 9,8; 9,9; 10
> Candidato 5: 9,0; 9,1; 9,2; 9,2; 9,4; 9,6; 9,8; 9,8; 9,9; 10

La actividad está propuesta para que el alumnado deba plantearse cuestiones que guíen su toma de decisiones. En su inicio, pueden calcular los parámetros de centralización y posición. Pero, los datos están preparados para que: (a) si proceden a un análisis de la centralización de los datos todos tengan la misma media; (b) del análisis de los parámetros de posición concluyan que todos tienen la misma mediana y cuatro de ellos tienen la misma calificación mínima y máxima. Al no poder concluir y tomar decisiones con estos parámetros, el alumnado debe plantearse el análisis de la densidad de los datos, concluyendo que cuatro de ellos tienen la mayoría de calificaciones entre el segundo y tercer cuartil. Al no poder tomar decisiones, deben formular preguntas e hipótesis asociadas a la dispersión de los datos y a la consideración académica de quién es el mejor alumno o alumna (el que tenga las calificaciones más o menos dispersas). Si abogan por la constancia del alumnado entonces tomarán la decisión de que la mejor opción es la 1, ya que su rango, desviación media y típica es cero. Por el contrario, si abogan por alumnos o alumnas con una mayor dispersión y mayor valor en el tercer cuartil, entonces tomarán la decisión de que la mejor opción es la número 2. En este caso, sugerimos que el alumnado use *GeoGebra* para construir un diagrama de cajas y bigotes que le permitirá comparar las cinco distribuciones de datos a la par que valoran cómo la forma de la distribución está influenciada por diferentes aspectos y, a su vez, sintetiza la información de los parámetros de centralización, posición, dispersión y los intervalos de mayor densidad. Es más, debe permitir que el alumnado construya la idea de la distribución como entidad conceptual que surge de la integración de los conceptos de centro, distribución, densidad y simetría (Bakker y Gravemeijer, 2004).

Este tipo de actividades favorece que el alumnado se inicie en la realización de inferencias informales sobre cuál es la mejor candidatura ya que se encuentran bajo dos hipótesis para tomar la decisión: dispersión nula o máxima dispersión de calificaciones. Sin embargo, no podemos hablar de inferencia en sentido estricto, dado que la inferencia a una población contiene elementos de incertidumbre, las inferencias estadísticas deben contener un lenguaje probabilístico que implique una tendencia estadística y/o un nivel de confianza o incertidumbre en una predicción. Así pues, es interesante que en este proceso de crecimiento que supone la etapa de secundaria el alumnado realice predicciones con muestras grandes de datos que permitan concluir sobre la población en cuestión. Un ejemplo, sería plantear la investigación:

> ¿Está envejeciendo la población europea?

El uso de la base de datos *EuroStat* proveerá de tablas y gráficos para analizar las tendencias de crecimiento de la población y las predicciones que realiza dicho organismo. Este problema, se podría reducir a investigar:

> ¿Cuáles son las tendencias de proyección de la población europea en función de las variables edad y género?

Las tablas de datos, los gráficos y mapas europeos se pueden encontrar en la base de datos de *EuroStat* (https://ec.europa.eu/eurostat/data/database), y facilitarán la interpretación y conclusiones de las mismas para dar respuesta al interrogante. El trabajo con estas bases de datos reforzará la comprensión de la utilidad de los censos de población y los procesos de muestreo estratificado y aleatorio. Es más, este tipo de actividades es una herramienta pedagógica útil para sensibilizar e introducir lentamente al alumnado en la variabilidad decreciente de las señales aparentes de las distribuciones en muestras de tamaño creciente (Ben-Zvi et.al., 2012). El software permite realizar diferentes tipos de predicciones asociadas a otras variables como la baja o alta tasa de natalidad, la alta o baja tasa de mortalidad. Así pues, el alumnado puede asociar ciertas tendencias de proyección a otras variables. Esta asociación puede ser un motivador a la necesidad de analizar la correlación existente entre variables. En este mismo problema de investigación sobre si está envejeciendo la población europea, se pueden responder preguntas como:

> Considerando los condicionantes de salud en el envejecimiento de la población europea, ¿existe alguna correlación entre la salud auto-percibida del sujeto a cierta edad y la esperanza de vida saludable que tenga?

El diagrama de dispersión como el gráfico de burbujas que se pueda construir son muy útiles para interpretar la relación entre las variables en estudio, ya que permite visualizar su intensidad (a través de la mayor o menor dispersión de la nube de puntos), su sentido (si la relación es directa o inversa) y el tipo (lineal o no), observando su tendencia (Gea et al., 2014).

Podríamos ir más allá y, con el fin de profundizar en los modelos matemáticos, otorgar al mismo tiempo sentido matemático y algebraico a dicha investigación y ver cuál es la mejor modelización funcional. Ejemplos de estas actividades, ya sugeridas en los marcos teóricos PISA2018 para el desarrollo de la competencia globalizada (OCDE, 2018), son:

> ¿Son las funciones lineales o las exponenciales las que ajustan mejor a los datos de crecimiento de la población europea?
> ¿Cuál es el mejor modelo de regresión que ajuste la edad y las tasas de fecundidad por edad en Europa?

La variabilidad aleatoria se manifiesta mediante la dispersión de la nube de puntos respecto al modelo de regresión. Así pues, el modelo de regresión tendrá como principal finalidad la predicción de una de las variables en función de la otra, y la evaluación de la variabilidad latente en los datos. Posteriormente, esta "variabilidad" de los puntos alrededor del modelo se medirá mediante la covarianza y el coeficiente de correlación (Gea et al., 2014). Permitiendo así que el alumnado identifique una nueva fuente de aleatoriedad y no reducir exclusivamente su estudio en contextos de juegos.

El contexto de los juegos de azar ha sido tradicionalmente una fuente de experiencias para reconocer la naturaleza aleatoria de la situación y la medición de la incertidumbre mediante la asignación de probabilidades. El GAISE II report (Bargagliotti et al., 2020) propone dos actividades:

1. *Asume que el dado no está trucado. Si lanzamos el dado 10 veces, ¿cuántas veces veremos el número 2 en la cara superior?*
2. *Asume que el dado no está trucado. Si lanzamos el dado 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en cada lanzamiento el valor de la cara superior sea el número 2?*
3. *Coge un dado, ¿está trucado? Es decir, ¿tiene cada cara la misma probabilidad de aparición?*

La respuesta a la pregunta 1 tiene un acercamiento meramente matemático en el sentido que parte de la afirmación que el dado no está trucado y podemos asumir que salir cada uno de los posibles valores de un dado es equiprobable. Es cierto que tal y como está enunciado el problema su respuesta se reduce a la determinación del espacio muestral y la contabilización del número de sucesos que sea dos en la cara superior.

El espacio muestral determinado en el problema 1, permite resolver el problema 2 calculando la probabilidad aplicando la regla de Laplace al considerar que todos los sucesos elementales son equiprobables al ser un dado justo. Si en lugar de considerar las actividades como una secuencia de aprendizaje, el problema 2 se presenta de forma aislada dicho problema se resuelve considerando la independencia de los sucesos correspondientes a cada uno de los lanzamientos y la equiprobabilidad de los sucesos elementales correspondientes al lanzamiento de un único dado.

Sin embargo, el problema 3 es un problema con un acercamiento estadístico, en que llegamos a las conclusiones pertinentes a través de resultados experimentales. La solución del problema comienza con un dado desconocido, del que no sabemos si está trucado o no. La búsqueda de una respuesta experimental debería pasar por varias fases: (a) se tira el dado, se ve lo que ocurre para examinar los datos resultantes para ver si parecen proceder de un dado trucado o no. Este análisis es interesante ya que el alumnado puede desarrollar el sentido de la aleatoriedad pero caer en la tentación de pensar en patrones reiterados asociados a una muestra inadecuada, (b) se tira el dado 10 veces, para elaborar las primeras hipótesis que guiarán el estudio inferencial de las tendencias (H0: el dado está trucado, H1: el dado no está trucado), (c) repetir el proceso de lanzar el dado, ahora 100 veces, y notar las frecuencias relativas de las tiradas con números pares para cada una de estas 100 pruebas, (d) comparar los resultados de estas frecuencias relativas con las frecuencias predichas por el modelo matemático que se ha trabajado en el problema 1 para la hipótesis H1 y, (e) si las frecuencias relativas empíricas son bastante diferentes de las probabilidades numéricas para un dado no trucado y no es probable que se deba a la variabilidad azarosa, entonces podemos concluir que el dado está trucado (Bargagliotti et al., 2020).

Estas dos actividades permiten que el alumno se enfrente a la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista frecuencial y el clásico. Es más, en el significado frecuencial, la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa de aparición del suceso, apoyándose en la ley de los grandes números. Las ideas de representatividad y variabilidad muestral están implícitas en este significado, y la precisión de la estimación de la probabilidad depende del tamaño de la muestra (Begué et al., 2018)

Se da por sentado, que el experimento del lanzamiento del dado se puede dar exactamente en las mismas condiciones. Sin embargo, en la mayoría de situaciones a modelizar el alumnado se debe enfrentar a situaciones en que el experimento no es repetible o no se puede repetir en las mismas condiciones. Pensemos en la actividad:

> Estamos organizando en el centro escolar una salida al campo para el próximo mes, ¿debemos poner un paraguas o impermeable en la mochila?

La cuestión que plantea una situación cotidiana que responde a un fenómeno aleatorio que tiene por finalidad que el alumnado trabaje la predictibilidad, analice la incertidumbre asociada al fenómeno meteorológico y realice inferencias para que pueda tomar la decisión de poner o no un paraguas o impermeable en la mochila. Para su resolución, podemos partir del estudio del grado de creencia que el día previsto para la salida al campo llueva. El recuento entre todo el alumnado nos permitiría dar una aproximación a la probabilidad subjetiva. En un segundo momento, se podrían investigar diferentes fuentes de datos (servicios meteorológicos, apps, ...). El hecho que puedan aportar datos diferentes puede ser un motivo para analizar la calidad y cantidad de datos para realizar dichas predicciones. Así como, las diferentes variables que estudian para realizar dichas predicciones. En particular, los datos que aportan sobre la "probabilidad de lluvia". Los datos observados de años anteriores permitirían un estudio de la distribución de los mismos y realizar estimaciones sobre la proporción de días lluviosos y no lluviosos. Además, se podría realizar el estudio de las tendencias en intervalos de tiempo y reflexionar sobre si la estimación a través de la observación de estas tendencias tiene una fiabilidad alta o no.

En resumen, esta pregunta tan simple por su cotidianeidad, permite que el alumnado realice inferencias estocásticas no formales, consistentes en: (1) la generalización, incluyendo predicciones, estimaciones de parámetros y conclusiones, que van más allá de la descripción de los datos; (2) el uso de los datos como prueba de estas generalizaciones; y, (3) el empleo de un lenguaje probabilístico de la generalización, incluida la referencia informal a los niveles de certeza sobre las conclusiones extraídas (Makar y Rubin, 2028).

Sentido de la medida

El aprendizaje de una magnitud y su medida sigue resultando difícil para el alumnado de educación secundaria, por ello debemos prestarle especial atención a lo largo de toda la enseñanza obligatoria, por las dificultades que este aprendizaje conlleva y por la importancia que la magnitud y su medida tiene en la vida cotidiana.

El aprendizaje de la medida implica ir más allá de la mera medida de una magnitud, del uso de fórmulas o de la utilización mecánica del sistema métrico decimal. Según Piaget en el caso de las magnitudes y de su medida el alumnado debe superar diferentes estadios que le llevará a conocer y manejar estas nociones de forma correcta. Estos estadios y su relación se muestran en el esquema que presentamos a continuación (Figura 9).

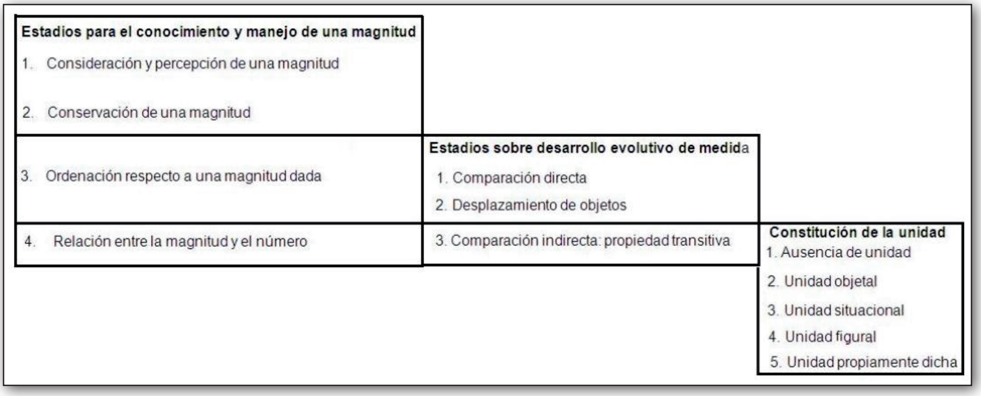


Figura 9. Adaptación de los Estadios de Piaget para el conocimiento de una magnitud y su medida (Sánchez-Matamoros, et. al., 2016)

También deben conocer y dominar técnicas e instrumentos de medida que se pueden emplear para medir de manera directa (longitud, superficie, amplitud, masa, volumen, capacidad y tiempo) o bien de manera indirecta (medidas basadas en proporcionalidad, en las relaciones entre magnitudes y en estrategias de estimación).

Proceso de enseñanza y de aprendizaje de una magnitud y su medida en educación secundaria

El proceso de enseñanza y de aprendizaje debe apoyarse en la idea de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud y su medida, es decir, conocer cómo se desarrolla la comprensión de la magnitud y su medida para poder tomar decisiones de enseñanza adecuadas a los objetivos de aprendizaje. Apoyarse en una trayectoria de aprendizaje en la planificación e implementación de una lección facilitará al profesorado la interpretación y diagnóstico de posibles dificultades del alumnado en la adquisición de un determinado contenido matemático (Wilson, Mojica y Confrey, 2013), en nuestro caso, la noción de magnitud y su medida.

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes (Clements y Sarama, 2004):

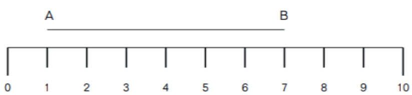
- Un objetivo de aprendizaje.
- La descripción de un proceso de aprendizaje: niveles de desarrollo de la comprensión, obstáculos que deben ser superados.
- Un conjunto de tareas.

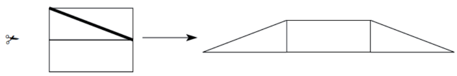
En el aprendizaje de una magnitud y su medida, el alumnado debe distinguir entre magnitud y medida. La magnitud es considerada como una característica de un objeto que puede ser cuantificable, y medir es asignar un valor numérico a un atributo de un objeto, por ejemplo, a la duración de un suceso, a la longitud de un lápiz o a la capacidad de una piscina. Medir una magnitud conlleva reconocer una unidad de medida (Freudenthal, 1983).

El aprendizaje de una magnitud y su medida comienza realizando comparaciones cualitativas y ordenando objetos según la magnitud considerada. El siguiente logro implica cuantificar la magnitud mediante la asignación de un valor numérico, y luego utilizar instrumentos de medición, por ejemplo, la regla en el caso de la magnitud de longitud.

Sin embargo, debemos ser conscientes de que algunas investigaciones (Tabla I) indican que el alumnado de educación secundaria muestra dificultades en el aprendizaje de diferentes magnitudes y su medida, como en el uso de la regla en la medida de la magnitud longitud o en la conservación de las áreas en figuras con distintas formas (Hart et al., 1981).

Tabla I. Ejemplos de tareas de medidas de las magnitudes longitud y superficie de la investigación de Hart et al. (1981) y posibles respuestas de estudiantes mostrando diferentes características de comprensión

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de tarea: De Manejo de instrumentos de medida (regla): uso y lectura</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td>Respuesta del estudiante 1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Cuánto mide el segmento AB?

</td><td>El segmento AB mide 6 cm. Porque el extremo A del segmento está situado en 1cm de la regla graduada, y el extremo B en 7cm de la regla graduada</td></tr>
<tr><td>Respuesta del estudiante 2</td></tr>
<tr><td>El segmento AB mide 7 cm., porque el extremo B del segmento está sobre el 7 de la regla graduada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1, hace un uso correcto del instrumento de medida de la longitud (regla) al considerar que el extremo derecho del segmento (B) se encuentra en los 7 cm. de la regla, y el extremo izquierdo del segmento (A) se encuentra en 1 cm. de la regla. Esto le ha permitido percibir la medida de la longitud del segmento AB y dar una respuesta correcta.
El estudiante 2, tiene dificultades para hacer un uso correcto del instrumento de medida de la longitud (regla) al considerar sólo que el extremo derecho del segmento (B) se encuentra en los 7 cm. para responder.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de tarea: De comparación de superficie de objetos (Reconocimiento de la equivalencia de superficies)</td></tr>
<tr><td>Ejemplo 1</td><td>Respuesta del estudiante 1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Tiene la figura inicial y final la misma cantidad de superficie (área)?
</td><td>Si, porque he obtenido la figura final cortando la figura inicial por la mitad y a continuación una de las dos mitades en las que he dividido la figura, la he vuelto a cortar, ahora por la diagonal, y los dos triángulos que he obtenido los he pegado uno a cada lado de la otra mitad que dejé sin cortar. Porque dos superficies son equivalentes si una superficie puede descomponerse en los mismos trozos que la otra.</td></tr>
<tr><td>Respuesta del estudiante 2</td></tr>
<tr><td>No, porque la figura inicial es más alta, y la figura final es más larga y estrecha.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1 hace transformaciones del tipo cortar mover y pegar que le permiten percibir que la cantidad de superficie (área) de la figura inicial y final es la misma (Conservación de la magnitud superficie) y dar una respuesta correcta.
El estudiante 2 tiene dificultades para establecer que figuras de formas diferentes pueden ser equivalentes en cantidad de superficie (área).</td></tr>
</table>

Las dificultades mostradas por los estudiantes en estas tareas deben ser tenidas en cuenta en la planificación de la enseñanza pues un mal uso en el instrumento de medida de la longitud puede conllevar dificultades en áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales, en las representaciones planas de objetos tridimensionales para su visualización y resolución de problemas de áreas, o en las representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 41733). Y dificultades similares a la mostradas por el estudiante en la comparación de superficies en las que le influye la forma de la figura para apreciar la equivalencia de cantidad de superficie pueden darse en relación con otras magnitudes como, por ejemplo, la capacidad en las que la forma del recipiente puede influir. Además, el hecho de saber descomponer figuras planas, como en este caso un trapecio isósceles, en figuras de áreas conocidas como rectángulo y triángulos podrán favorecer que los estudiantes sean capaces de deducir cuál es el área de la figura inicial (trapecio) y aplicarlo en nuevas situaciones.

Para finalizar, indicar que las diferentes magnitudes y su medida aparecen frecuentemente cuando se aborda en el aula de Matemáticas problemas realistas, o en trabajos interdisciplinares. Por ello, se puede considerar el sentido de la medida como un contexto excepcional para apreciar la utilidad de las Matemáticas.

Así, en el currículo de educación secundaria en la materia de Física y Química se menciona la predicción y comprobación, utilizando la experimentación y el razonamiento matemático, de las principales magnitudes, ecuaciones y gráficas que describen el movimiento de un cuerpo, relacionándolo con situaciones cotidianas (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 88-89). Analizando la relación existente entre las Matemáticas y la Física, observamos que problemas concretos de Física, como pueden ser aquellos de Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento, sin tener en cuenta las causas que lo produce), han sido cruciales en el desarrollo histórico de las Matemáticas (Azcárate, 1984).

Generalmente, las dificultades de las Matemáticas en los contextos de Física se suelen vincular a la falta de habilidades para transferir el conocimiento de Matemáticas a las clases de Física (Redish y Kuo, 2015). Sin embargo, también es cierto que nuestro sistema educativo tampoco favorece que el estudiante pueda llegar a establecer dicha relación. Así, conceptos de Cinemática como son velocidad media (vinculado a la Tasa de Variación Media (TVM) en Matemáticas), velocidad instantánea (vinculado a la Tasa de Variación Instantánea (TVI) y a la derivada de una función en Matemáticas) o la aceleración (vinculado a la segunda derivada de una función en Matemáticas) comienzan a estudiarse en la Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años) en la asignatura de Física. Sin embargo, el concepto de Derivada no se introduce en la asignatura de Matemáticas hasta primero de Bachillerato (16- 17 años). Esto conlleva, que a los estudiantes les resulte muy complejo establecer la relación de los conceptos de velocidad y aceleración con los de espacio y tiempo, y esto los lleva a tener problemas a la hora de enfrentar enunciados de Mecánica (Azcárate, 1984). Este hecho se pone de manifiesto, en algunas ocasiones, cuando los estudiantes tienen dificultades en las medidas basadas en las relaciones entre magnitudes como espacio y tiempo o en estrategias de estimación.

Sin embargo, y si tenemos en cuenta lo que recoge el Real Decreto 217/202, de 29 de marzo por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, en Matemáticas se debe prestar atención al estudio gráfico de funciones en contextos de la vida cotidiana y a las tasas de variación absoluta, relativa y media (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 41738). Por tanto, la posibilidad de que en clase de Matemáticas se planteen problemas contextualizados en Cinemática, facilitará que el estudiante empiece a establecer relaciones entre Matemáticas y Física desde la Educación Secundaria Obligatoria. Así, un ejemplo de problemas que se podrían abordar en clase de Matemáticas son los relativos a la tasa de variación media (T.V.M.) contextualizada en Física en la velocidad media en diferentes modos de representación analítico y gráfico (Figura 10). Las relaciones que se establecen entre las Matemáticas y la Física en la resolución de este tipo de problemas pueden observarse en la medida en la que los estudiantes identifican las dos magnitudes covariantes e interpretan el significado físico de lo que le piden, es decir, de la velocidad media. Además, los estudiantes deben mostrar que son capaces de trabajar con las tres magnitudes (posición, tiempo y velocidad) haciendo uso de las unidades de medida correspondientes a estas magnitudes.

Así, en la resolución de las dos tareas de la figura 10 el estudiante deberá asociar la velocidad media pedida (contexto físico) con la T.VM. (contexto matemático) en cada intervalo en la tarea 1, o con la pendiente de la línea secante en la tarea 2. El estudiante usará la tabla de valores del enunciado (posición-tiempo), en la tarea 1, o los puntos de la gráfica, en la tarea 2, para resolver el problema, dando como resultado el valor numérico de la velocidad media expresada en “m/s” como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos de tiempo que aparecen en los enunciados de estas tareas. Además, tanto los datos de la tarea 1 como los de la tarea 2, no se corresponde con un movimiento rectilíneo uniforme ni con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que son los tipos de movimientos estudiados en Física por estos estudiantes, por lo que estos no podrán usar ninguna de las fórmulas aprendidas para resolverlos, teniendo que hacer uso del significado de TVM en el modo de representación analítico (tarea 1) o gráfico (tarea 2) en el contexto de Cinemática.

TAREA 1:

Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los intervalos temporales [0,10], [10,20], [20,30] y [0,40] a partir de su posición en los distintos momentos:

Tiempo [s]	0	1 0	20	30	40
Posición [m]	0	33	41	56	100

TAREA 2:

A) *Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los siguientes intervalos temporales:*

De 0 a 17 segundos.

De 0 a 11 segundos.

De 0 a 5 segundos.

De 0 a 2 segundos.

B)

a) *¿Hay algún intervalo dónde la velocidad media es nula? Si lo hubiera dibújalo sobre la gráfica. Justifica tu respuesta.*

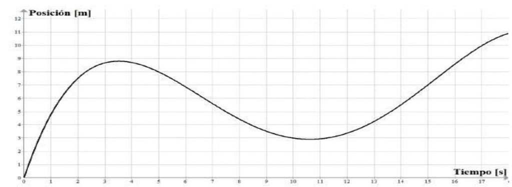


Figura 10[2]. Tareas relativas a la tasa de variación media contextualizadas en Física (Bermejo-Luna y Sánchez-Matamoros, 2021)

2. Estas tareas analizadas han sido publicadas en: Bermejo-Luna, M.V., y Sánchez-Matamoros García, G. (2021). Evidencias de conocimiento entre Matemáticas y Física sobre velocidad media. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(1), 5-16.

En la gestión de aula, el uso del Geogebra como recurso informático para resolver diferentes tipos de tareas puede ser de gran utilidad, al facilitar a los estudiantes la coordinación entre los modos de representación (analítico y gráfico).

Sentido Numérico

El sentido numérico tiene la base teórica en las siguientes capacidades generales:

- Comprender los números, sus representaciones, relaciones entre números y las propiedades del sistema de numeración.
- Conocer los significados de las operaciones y cómo se relacionan.
- Realizar cálculos con fluidez y realizar estimaciones razonables.

Estas capacidades al interpretarse en los saberes que se integran en el currículo pueden trabajarse como se sugiere a continuación.

Habilidad para realizar cálculos mentales con estrategias "inventadas"

La habilidad para realizar cálculos mentales puede abordarse en el aula presentando, en primer lugar, las operaciones de fracciones y a continuación se le pide al alumnado que dé una respuesta en el tiempo indicado. Posteriormente, se les pide que razonen cómo han llegado a su respuesta. Esta segunda parte da pie a que afloren las estrategias inventadas por los estudiantes y que el docente proponga otras.

¡Estimaciones en 5 segundos!	¡Estimaciones en 10 segundos!
$\frac{7}{8}+\frac{1}{10}$ $>$ ó $<$ 1?	$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$ $>$ ó $<$ 1?
$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}$ $>$ ó $<$ 1?	$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ $>$ ó $<$ $\frac{1}{2}$?

Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado. Actividades que favorezcan el uso de referentes para realizar estimaciones

Se plantea una actividad para que estimen cantidades de diversa índole. Posteriormente, se les pide que indaguen e investiguen para conocer el valor exacto de la cantidad previamente estimada. Se finaliza con un debate para que discutan cuándo es necesario el valor exacto o cuándo una aproximación es un valor más útil.

- Población de España.
- Población de Madrid/Barcelona/Valencia/Bilbao/Sevilla.
- Número de estudiantes matriculados en tu centro educativo.
- Número de estudiantes que han elegido la asignatura optativa de Robótica.
- Peso de un elefante.
- Peso de un loro.
- Peso de una hormiga.

Representar números reales en la recta numérica

Para abordar la representación de los números reales en la recta numérica se pueden plantear las siguientes tareas:

Representa en la recta numérica $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$. ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$? Justifica tu respuesta

Representa en la recta numérica los siguientes números: $-\frac{7}{8}, -2{,}3, -\sqrt{2}$. Explica cómo lo has hecho.

Las justificaciones dadas por el alumnado nos permitirán observar las estrategias usadas.

Comprensión de las operaciones

Para poder observar la comprensión de las operaciones por parte del alumnado, nos será útil plantear cuestiones como las siguiente

María está resolviendo un problema en el que tiene que hacer una multiplicación de dos números decimales, pero se le ha olvidado poner la coma en el resultado final, ¿podrías ponérsela? Explica por qué decides ponerla en el lugar que has elegido.

$$237{,}23 \times 1{,}23 = 2917929$$

Las justificaciones dadas por los estudiantes, nos va a permitir observar las estrategias usadas.

Conocer distintas representaciones de los números

El juego puede ser un recurso para que el alumnado conozca diferentes representaciones de los números. Un ejemplo de ello lo tenemos en el blog de Ana García

Azcárate (Figura 11). En él se proponen plantillas para diseñar dominós que podrían ser interesantes para el trabajo con las diferentes representaciones de los números. A continuación, describimos la dinámica de un dominó para trabajar la representación de fracciones decimales que se encuentra disponible en el blog citado.

El objetivo de este juego es que el alumnado maneje las fracciones decimales, con denominadores 10 y 100 y traduzca a su expresión decimal. Su construcción se basa en la estructura de los dominós clásicos, 8 veces el 0, 8 veces el 1, etc., hasta 8 veces el 6, obteniéndose las 28 fichas del dominó mediante todas las posibles combinaciones de 7 resultados, tomados de dos en dos, más las siete fichas de dobles, se ha reproducido en las 28 fichas que se presentan, cambiando las cifras de un dominó clásico por fracciones decimales y sus equivalencias.

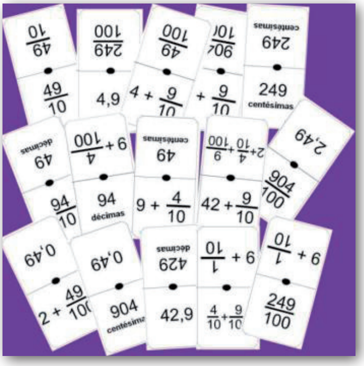


Figura 11. Dominó de representación de fracciones y decimales. Fuente: Blog de Ana García Azcárate

Los siete decimales que se han utilizado para las fichas del juego son: 0,49; 2,49; 4,9; 9,04; 9,1; 9,4; 42,9. Estos números no están escogidos aleatoriamente, sino que comparten las mismas cifras para dificultar algo más la identificación de los valores. Cada fracción se representa como aparece en la figura siguiente (Figura 12).

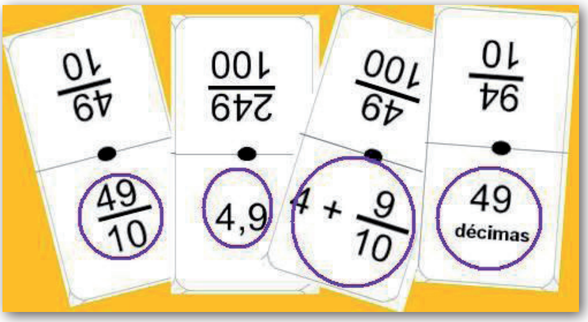


Figura 12. Representación de cada fracción.
Fuente: Blog de Ana García Azcárate

Reflexión final

El desarrollo competencial de las matemáticas requiere del trabajo de las conexiones entre sentidos matemáticos. Como hemos visto en el capítulo se pueden conectar el sentido numérico y algebraico, éste con el sentido espacial y con el estocástico. De tal manera que las diversas perspectivas a una misma situación desde los diferentes sentidos matemáticos, enriquezca el desarrollo de la competencia matemática.

El trabajo desde los sentidos matemáticos permite apreciar que la matemática es una ciencia cultural, que permite pensar, entender y actuar en los problemas del entorno que tienen que ver con la cantidad, la forma, el tamaño y la incertidumbre aleatoria. Esta idea es fundamental para transitar de manera coherente y continua de la Educación Primaria a la Educación Secundaria.

Por otro lado, cobra especial importancia la resolución de problemas y el trabajo con tareas contextualizadas porque permite desarrollar una enseñanza funcional de las matemáticas que hará predominar y dar sentido a los conceptos frente al aprendizaje de destrezas o algoritmos en situaciones descontextualizadas.

El paso de una situación real, contextualizada, a un problema matemático bien definido exigirá el desarrollo del razonamiento matemático. En las propuestas presentadas en este capítulo se ha insistido en a necesidad de conectar los diferentes sentidos, realizar preguntas pertinentes que inviten y apoyen la reflexión del alumnado y el uso de software y otras herramientas que le permitan el aprendizaje y la investigación autónoma.

REFERENCIAS

Arnold, P. y Pfannkuch, M. (2018). Critiquing investigative questions. En M. Sorto, A. White, y L. Guyot (Edits.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS10, July, 2018), Kyoto, Japan (págs. iase-web.org). International Statistical Institute.

Azcárate, C. (1984). La nueva ciencia del movimiento de Galileo: una génesis difícil. *Enseñanza de las Ciencias, 2*(3), 203-208.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 147-168). Kluwer Academic Publishers.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II). A Framework for Statistics and Data Science Education*. American Statistics Education y National Council of Teachers of Mathematics.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudantes de secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63-79, https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256.

Behar, R. y Grima Cintas, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad. 5* (2). 84-90.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K. y Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44*(7), 913-925.

Bermejo-Luna, M.V. y Sánchez-Matamoros García, G. (2021). Evidencias de conocimiento entre Matemáticas y Física sobre velocidad media. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(1), 5-16.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 81-89. https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Gea, M., Batanero, C. y Roa, R. (2014). El sentido de la correlación y regresión. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 87*, 25-25.

Gould, R., Bargagliotti, A. y Johnson, T. (2017). An analysis of secondary teachers' reasoning with participatory sensing data. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G. y McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16* (p. 212). John Murray.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Makar, K. y Rubin, A. (2028). Learning about Statistical Inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield, (Ed.) *International Handbook of Research in Statistics Education. Springer International Handbooks of Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. In S. Stewart (ed.). *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer.

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria. BOE 30 de marzo de 2022. Boletín Oficial del Estado, 76, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

OECD. (2018). *Marco de Competencia Global. Estudio PISA. Preparar a nuestros jóvenes para un mundo inclusivo y sostenible*. MECD.

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2017). *Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. Learning to Solve Complex Scientific Problems*, 223-246. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *Science and Education, 24*(5-6), 561-590. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7

Sánchez-Matamoros García, G., Moreno, M., Callejo, M. L. y Valls González, J. (2016). La medida en el Grado en Maestro en Educación Infantil: desarrollo de un módulo de enseñanza. En M. Tortosa, S. Grau y J. Álvarez (coords.), *XIV Jornades de Xarxes* *d´Investigació en Docència Universitària. Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinaris* (pp. 403-414). Universitat d'Alacant, Institut de Ciències de l'Educació.

Schmittau, J. (1993). Retrieved from: http://www.mlrg.org/proc3pdfs/Schmittau_Mathematics.pdf

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Orígenes y perspectivas. Libros del Zorzal.

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.