Matemáticas en la Educación Primaria

Mathematics in Primary Education

Molina, M.[a], Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, M.C.[c]; Fernández-Ahumada, E.[b]; García Pérez, M.T.[b]; Moreno, A., Sánchez-Matamoros García, G.[d]; Ramírez-Uclés, R.[c]; y Serradó, A.[e]
[a] *Universidad de Salamanca,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Granada,*
[d] *Universidad de Sevilla,*
[e] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

En este capítulo se concretan las definiciones de los diferentes sentidos, algebraico, espacial, estocástico, de medida y numérico, expuestas en capítulos previos, a la etapa de educación primaria. Se identifican y describen las principales componentes de estos sentidos cuyo desarrollo puede abordarse en esta etapa, dándose ejemplos de tipos de tareas y de recursos que pueden ser útiles. En algunos casos nos apoyamos en investigaciones previas para dar ejemplos de posibles dificultades que puede manifestar el alumnado.

Palabras clave: Sentido matemático, Primaria, Tareas matemáticas, Currículo.

Abstract

In this chapter we specify the definitions of the different senses, algebraic, spacial, estocastic, measurement and numeric, in the case of primary education. We identify and describe the main component of these senses whose development can be addressed at this stage and provide examples of type of tasks and resources that can be of use. In some cases we use previous studies to give examples of posible difficulties that students can encounter.

Keywords: Mathematical sense, Primary, Mathematical tasks, Curriculum.

Introducción

En este capítulo retomamos la idea de sentido matemático desarrollada en capítulos previos, considerando cada uno de los diferentes sentidos previamente definidos: algebraico, espacial, estocástico de medida y numérico. El objetivo es ejemplificar el trabajo de cada uno de estos sentidos en el aula de primaria explicitando sus principales componentes y dando sugerencias de tareas a considerar. En todos los casos la propuesta es trabajar de forma contextualizada, favoreciendo la experimentación, apoyándose en recursos concretos y representaciones pictóricas, y explicitando la funcionalidad que ha de caracterizar los aprendizajes matemáticos de esta etapa.

Sentido algebraico

En línea con la definición de sentido algebraico propuesta en este libro, el desarrollo de pensamiento algebraico requiere (Kaput, 2008):

- Pensar y operar en términos de cantidades desconocidas (como si fueran conocidas) y sus relaciones. En este contexto las cantidades indeterminadas pueden tener el significado de incógnitas, variables, parámetros, constantes o números generalizados, y pueden ser representadas de muy diversas formas (ej., un material físico como una caja, lenguaje verbal, letras, representaciones pictóricas como una mancha o una nube).
- Generalizar (reconocer estructura) y expresarlo a través de representaciones que van ganando en formalismo. Esta dimensión del trabajo algebraico es la más relevante para abordar el desarrollo del sentido algebraico en educación primaria. Tareas de tipo numérico, geométrico o de medida pueden enriquecerse al preguntar por otros casos similares y buscar la generalidad.
- Razonar y manipular expresiones simbólicas de forma sintácticamente guiada. No solo se considera la notación algebraica, también otros sistemas de símbolos como gráficos, rectas numéricas, tablas y lenguaje natural. La tecnología ha logrado un desarrollo del lenguaje simbólico accesible y eficiente. Las hojas de cálculo, las calculadoras gráficas o las aplicaciones de geometría dinámica proporcionan métodos más accesibles para la manipulación simbólica.

Para hacer recomendaciones para su trabajo en el aula de primaria, retomamos aquí las cuatro componentes identificadas en el capítulo del Sentido Matemático Escolar que nos permiten diferenciar enfoques para abordar el desarrollo del sentido algebraico en el aula: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; Resolución de problemas; Situaciones funcionales; Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas

Este componente se refiere a tareas dónde hay una estructura desconocida que el alumnado debe identificar y representar. Las siguientes recomendaciones de la CEMAT (2021) para el desarrollo de sentido algebraico conectan con este enfoque:

- Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos.
- Describir regularidades (entre ellas, las propiedades de las operaciones aritméticas) de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas.
- Crear patrones.
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión (patrones de repetición, de crecimiento ...): el elemento siguiente, uno lejano, uno genérico ...

En Primaria, el alumnado debería investigar patrones numéricos y geométricos y expresarlos matemáticamente con palabras o símbolos. Los aspectos de la simbología algebraica tradicional no deberían ser una limitación en esta etapa para el trabajo del desarrollo del pensamiento algebraico.

Se pueden realizar trabajos con patrones geométricos donde tengan que analizar su estructura y el modo en que cambia. Pidiéndoles posteriormente que describan los patrones que observan. Por ejemplo, el alumnado podría identificar el patrón subyacente al ejemplo de la figura 1.

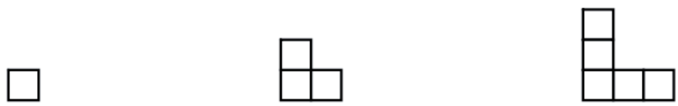

Figura 1. Patrón geométrico

Para encontrar la estructura de los patrones geométricos, es interesante copiar el siguiente elemento a uno dado y observar físicamente lo que se hace con el cuerpo. Es decir, expresar qué hacía tu cuerpo para establecer la regla de cómo crecen los cuadrados de la figura en filas y columnas (Mason, 2017).

En el trabajo con patrones ofrecer siempre los primeros términos impide el desarrollo de todas las capacidades de los estudiantes (Mason, 2017). Es conveniente considerar también términos intermedios o términos no secuenciales.

En el contexto de la aritmética, el propio cálculo es un contexto muy rico para trabajar la percepción de una estructura al dirigir la atención hacia propiedades aritméticas (ej., compensación, asociativa, elemento opuesto) cuyo uso es habitual en estrategias de cálculo pensando (ej., 28+ 46 = 30 + 44 = 30 + 40 + 4 = 70 + 4 = 74). Compartir estrategias diferentes y pedir su justificación permite hacer explícitas las propiedades aritméticas que dan estructura a la aritmética y al álgebra y alejarse del foco del cálculo aritmético.

Resolución de problemas

La naturaleza aritmética o algebraica de un problema depende de cómo este se resuelva. En la etapa de primaria podemos considerar diversos tipos de problemas verbales relativos a relaciones cuantitativas. La propuesta desde este enfoque del álgebra es centrar la atención en representar las relaciones descritas en el problema, provocando así pensar y representar cantidades desconocidas, y también traducir entre representaciones de relaciones cuantitativas. Ante problemas como "He comprado una caja de lápices de colores. En casa tenía 15 lápices. Ahora tengo 20 en total. ¿Cuántos lápices hay en la caja?" y "Tengo una cesta con manzanas. Dentro de la cesta hay 20 manzanas verdes y otras rojas, ¿Cuántas manzanas hay en la cesta?", el alumnado puede representar el enunciado mediante representaciones pictóricas o mediante ecuaciones sencillas (haciendo uso de una letra o algún otro símbolo para representar la cantidad desconocida). La comparación de expresiones diferentes propuestas por el alumnado permitirá abordar la noción de equivalencia y centrar la atención en las relaciones cuantitativas que describe el problema en vez de en los cálculos necesarios para su resolución. Si bien no es un objetivo de esta etapa, la propuesta de uso de letras para representar cantidades desconocidas es accesible al alumnado en este contexto. En su caso pueden escribir ecuaciones sencillas (ej., $y+15=20$ y $15+x=20$; $20 + a = ?$ y $20 + y = b$) y mediante su comparación iniciarse en las normas sintácticas que regulan el simbolismo algebraico (ej., cantidades diferentes han de estar representadas mediante diferentes letras). La resolución de los problemas en esta etapa no ha de requerir operar con representaciones simbólicas, siendo más adecuado utilizar recursos como el modelo de barras, estrategias de conteo o métodos de cálculo.

Situaciones funcionales

Esta perspectiva del álgebra supone reconocer y describir una relación funcional. En esta etapa, el trabajo con funciones depende (de) y promueve la comprensión de variables, el establecimiento de relaciones y el uso de diversas representaciones para expresar esas relaciones.

En el aula de primaria podrían plantearse situaciones como la siguiente. Dibujamos un punto en el centro de una hoja de papel o en papel cuadriculado. Luego, y cada minuto, dibujamos 4 puntos más alrededor del primer punto. Esta imagen crece cada minuto. ¿Cuántos puntos crece la figura cada minuto? Si continuamos dibujando puntos correspondientes a los minutos 2 y 3: ¿Cómo es esta imagen?

¿Qué está pasando en esta imagen? ¿Cómo está pasando? ¿Cómo lo sabes? ¿Ves un patrón? ¿Cuántos puntos crece cada vez? ¿Cómo se relacionan estos puntos entre sí?

El alumnado propondrá diferentes interpretaciones. Cuando sea apropiado, se puede dibujar un cuadro que conecte los cuatro puntos para cada minuto. Después de un minuto, la imagen crece hasta tener 5 puntos. Después de dos minutos, tiene 9 puntos, etc. Es el momento de proponer al alumnado la construcción de una tabla con dos columnas, una para los minutos y otra para el número total de puntos. Esta es una herramienta útil para que establezcan posteriormente una relación funcional.

El trabajo finaliza cuando después de discutir las respuestas que proporciona la clase para explicar cómo ellos obtienen la relación entre las dos variables, responden a la siguiente cuestión: ¿Cómo podríamos averiguar la cantidad de puntos que habría para cualquier cantidad de minutos? Es el momento de guiar al alumnado para que expresen la relación entre los minutos y los puntos.

Una función puede ser representada de múltiples formas. El lenguaje verbal es el punto de partida para la comprensión de las funciones y permite hacer una descripción generalmente cualitativa. Una representación tabular permite organizar los pares de elementos que relaciona la función y ayuda a identificar y describir los cambios entre las variables (Blanton, 2008). Las representaciones simbólicas brindan una visión cualitativa y cuantitativa general de la función, permitiendo hacer un análisis del comportamiento de la función de manera abstracta.

Para representar la indeterminación y las relaciones identificadas entre las variables, el alumnado puede recurrir a diversos tipos de representaciones tales como lenguaje natural, representaciones visuales (e.g. dibujos y material manipulativo), símbolos matemáticos e incluso gestos. La profundidad de la comprensión de las funciones dependerá de cómo ellos desarrollen la habilidad de usar variedad de representaciones y sean capaces de relacionarlas.

Modelización de fenómenos físicos y matemáticos

En esta etapa educativa se pretende modelar situaciones cotidianas o representables con objetos y usar representaciones como gráficas, tablas, expresiones numéricas e incluso ecuaciones sencillas, para extraer conclusiones. El alumnado de primaria puede formular enunciados generales sobre cómo se relacionan una variable con otra. Por ejemplo, puede estudiarse el dinero gastado en un parque de atracciones y el número de viajes disfrutados (asumiendo que todas las atracciones tienen el mismo coste y pudiéndose añadir un coste fijo de entrada) o entre el número de paradas de un tren y el número de personas a bordo suponiendo que en cada parada suben dos pasajeros (puede añadirse personal fijo en el tren como el conductor y algún revisor).

Para ayudar al alumnado a modelizar la situación se puede iniciar preguntando por casos particulares (¿Cuánto dinero necesito para 3 viajes en las atracciones? ¿Y para 5 viajes?) sugiriéndoles organizar los datos en una tabla. Posteriormente se puede dar mayor generalidad a las cuestiones preguntando por el caso de muchas personas: ¿Cómo puedes saber cuánto dinero necesitas para muchos viajes en las atracciones? ¿Cómo le explicarías a un amigo cuánto dinero se necesita para muchos viajes? El trabajo puede ampliarse considerando la relación inversa: si me he gastado una determinada cantidad de dinero ¿cuántos viajes he realizado?

Sentido espacial

Las ideas que se presentan para desarrollar en los escolares el sentido espacial a lo largo de los diferentes niveles se basan en dos ideas principales. Por un lado, el diseño de tareas que favorezcan la conexión entre las componentes, trabajando todas ellas desde una visión global. Por otro lado, el enfoque funcional que resalte la resolución de problemas en contextos de utilidad en el mundo real. Se presentan distintas tareas relativas al concepto de cuadrado y cómo se va enriqueciendo a lo largo de las etapas. Se plantean como reflexión al lector para analizar las componentes, su conexión y aplicabilidad a la resolución de problemas. Ejemplificaremos también como la visualización conecta distintas componentes.

Conectando los conceptos geométricos (propiedades y relaciones)

Imagina que estás jugando al tabú. El juego consiste en describir a tus compañeros de equipo unas tarjetas en la que aparece la palabra a definir y unas cuantas palabras prohibidas que no puedes utilizar. Además no puedes dibujar nada ni hacer gestos. ¿Cómo podrías describir "cuadrado" sin utilizar las palabras cuatro, lados, iguales o ángulos?

En este juego no podríamos describir el cuadrado a partir de la definición (polígono regular de cuatro lados y cuatro ángulos iguales) puesto que utilizaríamos palabras prohibidas. Las distintas posibles respuestas ponen de manifiesto distintas componentes del sentido espacial.

Es interesante reflexionar con el alumnado sobre la diferencia entre la definición de un objeto geométrico y la descripción a través de propiedades que se observan y pueden caracterizar a un cuadrado. Por ejemplo, ¿se podría utilizar la definición "cuadrilátero con las dos diagonales iguales y perpendiculares"? o ¿El único rectángulo que es a su vez un rombo? Este tipo de tareas conecta las componentes relativas al conocimiento de las propiedades y el reconocimiento de relaciones geométricas, principalmente a través de la habilidad de percepción de relaciones espaciales (viendo dos o más objetos relacionados con otro o entre sí).

Las definiciones de cuadrado que conoce el alumnado han podido variar desde las distintas etapas, pero el reconocimiento de propiedades se ha ido enriqueciendo al incrementarse su manejo de conceptos geométricos. En Educación Infantil se suelen presentar ejemplos de cuadrados con representaciones manipulables y a partir de ellas se describen las propiedades: la cantidad de lados, que sean iguales y que los ángulos sean rectos. En Educación Primaria, al conocer otros tipos de cuadriláteros, se pueden matizar las diferencias del cuadrado con el rectángulo (no todos los lados son iguales) o con el rombo (no todos los ángulos son iguales), así como analizar caracterizaciones de los cuadriláteros atendiendo a sus diagonales.

Para conectar las distintas componentes relativas a conceptos geométricos, juega un papel relevante la visualización, tanto por la riqueza de representaciones con las que el estudiante pueda explorar las propiedades, como por la variedad de habilidades de visualización que son necesarias. Por ejemplo, el estudiante debe percibir las relaciones espaciales en un cuadrado (igualdad de longitudes, paralelismo, perpendicularidad…) y discriminar visualmente las características que lo diferencian de otras figuras geométricas. En las distintas representaciones, especialmente en los cursos inferiores, conviene desarrollar la habilidad de coordinación ojo motor (coordinar la visión con el movimiento del cuerpo), presentando y construyendo diferentes representaciones como pueden ser distintas perspectivas o desarrollos planos.

Es importante resaltar que la caracterización de cuadrado ha de ir más allá de una imagen estereotipada. Por ejemplo, en una investigación con estudiantes de 6º de Primaria y Primer ciclo de ESO (Ureña et al., 2022), se detectó que eran minoritarios los estudiantes que reconocían los cuadrados cuando no estaban apoyados sobre la base. En un contexto de siembra de semillas, al pedirles que identificaran cuadrados en los 15 puntos marcados en la Figura 2, mostraban la habilidad de percepción de la figura-contexto para reconocer los 8 cuadrados pequeños de área 1 y los 3 grandes de área 4. Sin embargo, muy pocos estudiantes contabilizaron los otros tres que no se apoyaban en la base y cuya área es 2. Incluso al percibirlos, hubo estudiantes que no los contabilizaron justificando que eran rombos y no cuadrados.

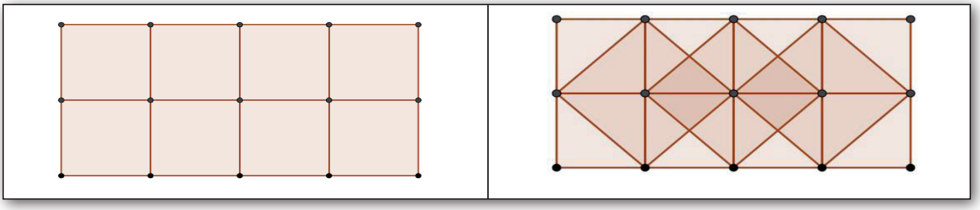

Figura 2. Determinar cuadrados en el problema de las semillas (Ureña et al., 2022)

Si además se pretende que el manejo de conceptos geométricos sea funcional para la resolución de problemas, conviene que se favorezcan los aspectos fenomenológicos, identificando situaciones en las que se utilizan cuadrados. Cuando se utiliza un cuadrado en el mundo real, ¿qué propiedad se está utilizando? Y del mismo modo, en otras situaciones en las que no se utilicen cuadrados, pero sí otros tipos de cuadriláteros: ¿Por qué las baldosas son cuadradas? ¿Y las caras de un dado? ¿Por qué las televisiones y los móviles son rectangulares y no cuadrados? ¿Y los folios?

Para la identificación de cuadrados en el entorno se ponen en juego habilidades como la percepción de la figura-contexto (reconociéndolos en un fondo complejo) y la discriminación visual de los elementos que lo caracterizan (identificando diferencias y similitudes). Se puede analizar la funcionalidad de tener ángulos rectos, que implica la propiedad de teselación del plano. Esta propiedad la cumplen tanto los rectángulos como los cuadrados, para diferenciarlos es necesario añadir las propiedades relativas a la igualdad de lados, que pueden aportar funcionalidades relativas al mayor número de simetrías del cuadrado o las invarianzas por giros. Interviene así la componente relativa a movimientos, por ejemplo, al identificar los giros, simetrías o traslaciones en un suelo enlosado con cuadrados.

Retomando el juego de las palabras prohibidas, podríamos proponer a los estudiantes que verifiquen las siguientes descripciones del cuadrado: "la forma geométrica de las caras de un cubo", "cuadrilátero con cuatro ejes de simetría", "es un cuadrilátero que al unir los puntos medios de sus lados, se vuelve a obtener la misma figura".

Conectando los conceptos geométricos: movimientos y orientación

En la trama cuadrada de un geoplano se plantean las siguientes cuestiones: ¿Se pueden construir dos rectángulos diferentes con perímetro 16 unidades de medida? En caso afirmativo, ¿tienen la misma área? ¿Cuál de ellos tiene mayor área? ¿De todos los rectángulos de igual perímetro es el cuadrado el de mayor área?

En esta tarea es interesante profundizar en el concepto de área (conectando con el sentido de la medida), más allá de la utilización de fórmulas, utilizando medidas directas a partir de los propios cuadrados determinados por los puntos del geoplano. Es decir, si consideramos como unidad de medida el área del cuadrado base de la trama cuadrada del geoplano, podemos calcular el área de los distintos cuadrados a partir de descomposiciones (ver Figura 3). Es importante que el estudiante manifieste habilidades como la conservación de la percepción o la percepción de las relaciones espaciales para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes como el tamaño y la forma; por ejemplo, comprobar que el área de un rectángulo se mantiene aunque cambie de posición o se aplique alguna isometría.

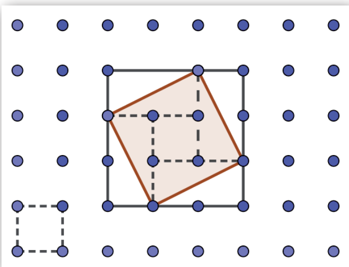

Figura 3. Cálculo de área del cuadrado mediante descomposición

De un nivel más avanzado se pueden plantear cuestiones relativas a la construcción de cuadrados de una determinada área. ¿Es posible construir cuadrados de área cualquier número natural? Es importante favorecer la construcción de cuadrados en posiciones giradas y contrastar el área obtenida mediante descomposición y mediante la fórmula a partir de la longitud de su lado. Nuevamente la componente de movimientos se ve reforzada por las habilidades relativas a la conservación de propiedades, como el área o la perpendicularidad, al realizar isometrías.

En esta tarea se aporta un elemento fenomenológico del cuadrado en su utilización como unidad de medida y al generarse conexiones con elementos del sentido de la medida. ¿Qué significa que una figura tenga de área 7 metros cuadrados? En el geoplano se ve la utilidad de esta unidad de medida al "rellenar de cuadrados" la superficie de la figura. ¿Qué ocurre si en vez de un geoplano de trama cuadrada se utiliza una trama isométrica utilizando como unidad de medida de superficie el área de un triángulo equilátero? En este caso, se puede cuestionar al alumnado sobre la conveniencia de usar esta medida triangular para comprobar que todos los polígonos construidos en el geoplano de la Figura 4 tienen la misma área y perímetro sin necesidad de utilizar fórmulas ni medidas basadas en cuadrados.

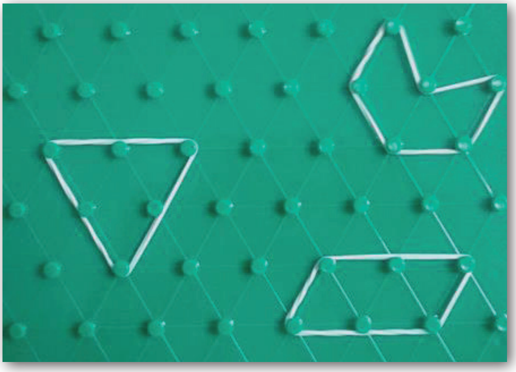

Figura 4. Polígonos con igual área y perímetro en la trama isométrica del geoplano

El propio geoplano admite el uso de coordenadas para identificar puntos. Por ejemplo, se pueden construir figuras geométricas y comunicar a los compañeros las coordenadas de los vértices para que los reproduzcan. Si les pedimos que determinen las coordenadas de un mismo objeto desde cuatro puntos de vista diferentes atendiendo a los cuatro lados del geoplano, se favorecen las habilidades asociadas a la orientación espacial, como la percepción de la posición en el espacio (determinar la relación de un objeto con otro objeto o con el observador). Una estrategia para reconocer la perspectiva del compañero puede ser aplicar un movimiento que lleve un observador al otro, así se conectan las componentes de visualización, orientación y movimientos.

Conectando el sentido espacial con otros sentidos

Como se ha evidenciado en tareas anteriores, el sentido espacial está estrechamente relacionado con el sentido de la medida. También se pueden establecer conexiones con el sentido numérico o con determinadas propiedades geométricas y gráficas asociadas al sentido estocástico. A lo largo de las etapas educativas, en la resolución de problemas geométricos va adquiriendo un papel protagonista la utilización de fórmulas, ecuaciones y notación algebraica y pueden perder valor los razonamientos más visuales, especialmente cuando se tratan de tareas de generalización o argumentación. Así, es importante mostrar tareas en las que la conexión del sentido espacial con el sentido algebraico aporta un enriquecimiento a la resolución de problemas. Lo ejemplificaremos con la tarea de la siembra de semillas. Esa tarea describe un contexto en el que un agricultor siembra cada día tres semillas en línea recta, en una línea paralela a la del día anterior y distante un metro. Se pregunta por el número de cuadrados que pueden construirse de forma que las semillas sean sus vérticesy por el área de estos. Tras trabajar con algunos casos particulares (ej., día 3 o día 5), se puede estudiar el caso del día 100. La cuantificación de patrones geométricos como el caso de estos cuadrados, permite dirigir la atención hacia la relación entre las variables cuantificadas implicadas (ej. en este caso el número de día y el número de cuadrados) y nos traslada a un problema de modelización.

Sentido estocástico

Las actividades propuestas para esta etapa deben permitir que el alumnado empiece a desarrollar el sentido estocástico a partir de estudiar datos en contextos cotidianos, interpretarlos dentro de él, dar sentido a los procedimientos de análisis de los datos, y reconocer la incertidumbre inherente cuando se estima una población mediante una muestra. Desde una perspectiva investigadora, el alumnado deberá interpretar información procedente de diferentes fuentes y relativa a diferentes contextos con el fin de elaborar inferencias, hacer predicciones y tomar decisiones fundamentadas en los datos.

Las primeras actividades pueden enunciarse como pequeñas cuestiones de investigación relativas a experiencias cotidianas sobre las cuales el alumnado carece de datos para poder darles respuesta, por ejemplo: *¡Me duele la espalda! ¿Pesa demasiado mi mochila?*

Esta actividad, adaptada de Mintz et al. (2002), tiene como objetivo estudiar cómo la rutina diaria de llevar la mochila cargada con mucho peso conlleva problemas serios de salud en la espalda, dolor de cabeza y dolor de hombros. La secuencia didáctica para dar respuesta a la pregunta puede iniciarse con el estudio documental sobre qué relación existe entre el dolor de espalda y el peso de la mochila y cuál el peso adecuado de una mochila para el alumnado de primaria. Ello debe permitir identificar las primeras situaciones de aleatoriedad al valorar que la respuesta a la misma no está determinada para toda la población española, ni tan solo para cada uno de los alumnos o alumnas de la clase. También permitirá identificar que las dos cuestiones básicas a responder son: ¿cuánto pesamos? y ¿cuál es el peso de nuestras mochilas? Además, supone la identificación de dos variables: peso de cada uno y peso de la mochila.

Tal y como indica Konold (2007) el estudio de dichos datos (recogida, organización en tablas y presentación mediante gráficos) usando medios tecnológicos es suficiente para que el alumnado empiece a desarrollar las capacidades de razonamiento e interpretación de datos. Si en dicha recogida de datos se añade la variable género, el alumnado puede enfrentarse a realizar las primeras comparaciones, interpretar las cuestiones previas del estudio en función del género y, así, realizar las primeras inferencias informales. Sin embargo, el alumnado se puede enfrentar al dilema de no saber si están razonando sobre los datos como si fueran toda la población o sobre una población subyacente de la que los datos son una muestra (Pratt y Ainley, 2008). Empezando, así, a percibir la variabilidad de la muestra y las fuentes que la producen. Es más, considerando la necesidad de un crecimiento a la par en la comprensión de los conceptos de variabilidad, distribución de los datos y muestreo, este tipo de estudios les ha de permitir reconocer la incertidumbre asociada a la muestra del alumnado que se estudie (Pfannkuch et al., 2015).

En una última fase, y sabiendo que la Asociación Española de Pediatría (AEP) indica que el peso de la mochila de los niños y niñas nunca debe superar el 10-15% del peso de los mismos, podrían tomarse decisiones individuales sobre qué objetos necesitamos llevar cada uno de nosotros en la mochila diariamente según nuestro género y peso, tomar decisiones conjuntas para el grupo clase, nivel educativo o centro escolar sobre cómo preparar la mochila diaria e incluso, en caso de sobrepeso de algunas mochilas, realizar predicciones sobre los problemas de espalda que puedan tener cuando vayan creciendo.

Siguiendo las recomendaciones de Ben-Zvi et al. (2015), se aconseja que en los primeros niveles de primaria la muestra se reduzca al alumnado del grupo clase. Posteriormente se puede ampliar la muestra al alumnado de un mismo nivel. Finalmente la muestra se puede ampliar a todo el colegio. La ampliación del tamaño de la muestra conlleva que el alumnado trabaje con la variable nivel educativo o edad además de las tres variables señaladas con anterioridad (género, peso del niño o niña, y peso de la mochila), que les permiten distinguir entre variables cualitativas y cuantitativas.

Los estudios de investigación sobre la lectura de gráficos indican la existencia de cuatro niveles de lectura de los gráficos (Diaz-Levicoy et al., 2015). La actividad de la mochila, u otras actividades diseñadas bajo los mismos principios, permiten que el alumnado se adentre en tres niveles de lectura de los gráficos: leer los datos (lectura literal), lectura dentro de los datos (leer para comparar, es decir, extraer información implícita en el gráfico mediante operaciones o comparaciones), leer más allá de los datos (leer para predecir). Sin embargo, se necesitan actividades de mayor complejidad que favorezcan una lectura detrás de los gráficos (análisis crítico de la información y del contexto al que refiere). Estas pueden surgir de la necesidad de usar el soporte gráfico para comparar distribuciones en función de su centro y su dispersión e iniciar así al cálculo de los primeros parámetros de centralización y posición. Para una lectura detrás de los datos, proponemos la siguiente actividad: *¿Cuál es el mejor diseño de un avión de papel 10x15 cm² o 20x30 cm²?*

Fielding-Wells y Hillman (2018) proponen esta actividad auténtica para introducir al alumnado del tercer ciclo en la modelización de datos y provocar que razonen y piensen estadísticamente sobre el significado y el sentido que tiene el uso de medidas de centralización, posición y dispersión. La actividad se inicia mediante la introducción de la pregunta que guiará el proceso de modelización de cuál de esos dos es el mejor tamaño para fabricar aviones de papel. Para ello, el alumnado debe construir los aviones, probarlos, recolectar los datos del experimento asociados al tamaño del papel y la distancia que recorren y representar gráficamente los mismos.

La lectura de los datos del gráfico debe permitirles en un primer momento identificar los valores atípicos y cómo se distribuyen los datos en dicha representación. Se sugiere agrupar los datos según el tamaño del avión en diferentes intervalos de distancia recorrida, permitiéndoles distinguir dos tipos de variables: cualitativas (tipo de avión: 10x15 o 20x30) y cuantitativas continuas (distancia recorrida). Posteriormente puede analizarse gráficamente la dispersión de los datos para cada uno de los tipos de avión con el fin de intentar inferir cuál es el mejor diseño de avión. Sin embargo, el estudio de la dispersión en el gráfico no permitirá al alumnado tomar una decisión sobre el mejor modelo. Una lectura detrás de los datos permitirá valorar dónde hay más datos (densidad), qué valor tiene mayor frecuencia (moda), dónde están su centrados (media) o cuál es su punto medio (mediana). Posteriormente se pueden traducir numéricamente los intervalos de mayor densidad, la moda, mediana y media. Estos análisis del centro, la dispersión, la densidad y de la asimetría, favorecerán pasar del estudio de los valores individuales de los datos a la noción de distribución de los datos (Bakker y Gravemeijer, 2004). Finalmente, el alumnado puede responder al problema de modelización estadística tomando decisiones sobre cuál es el mejor diseño para el avión.

Desde un punto de vista probabilístico, el alumnado puede predecir la distancia a la que llegará un avión si se vuelve a lanzar. Pueden ir más allá y mediante el gráfico asignar probabilidades a los diferentes intervalos de lanzamiento usando palabras como seguro, imposible, poco probable, etc. Y, en consecuencia, realizar predicciones usando el lenguaje probabilístico. Los diferentes resultados de estas predicciones facilitarán la comprensión de la incertidumbre asociada, la aleatoriedad de la situación y de cómo el estudio estadístico favorece dicha predicción.

Así pues, la participación en el proceso de modelización de los aviones de papel, en el que se han establecido unas primeras hipótesis e inferencias, favorecerá la maduración cognitiva del pensamiento hipotético en un primer nivel descrito como las percepciones sobre qué ocurre en la realidad (Serradó, 2014). Pero, también surgirá el reto de conectar las primeras intuiciones cotidianas del alumnado sobre el azar, expresadas con su lenguaje natural, y el lenguaje académico de la probabilidad.

En este sentido, proponemos que las actividades se trabajen desde la progresión del conocimiento probabilístico informal al formal. Debido a la multiculturalidad de nuestras aulas, usar el lenguaje natural para expresar la idea de azar puede ser problematico ya que hay países que no tienen una palabra natural para expresar la idea de probabilidad o en otras culturas contextualizan esta idea utilizando palabras, frases y expresiones diferentes. Por ello, proponemos una actividad en que el alumnado debe explicar qué significan para ellos frases como las siguientes: a) Lo más probable es que mañana llueva; b) Ocho de cada diez veces lloverá mañana; c) La posibilidad de que llueva mañana es del 80%, d) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,8.

Esta actividad adaptada de los trabajos de Dvořákova et al. (2017) favorecerá la evolución del lenguaje probabilístico informal al lenguaje académico, progresando desde el concepto de posibilidad expresada en porcentajes hasta el concepto de probabilidad usando la fracción o decimal. También permitirá que el alumnado razone sobre el papel de la probabilidad en relación con su medida de la incertidumbre en contextos cotidianos en los que no sea aplicable la regla de Laplace o no sea posible la repetición del experimento aleatorio.

Sentido de la medida

El desarrollo del sentido de la medida en esta etapa requiere, en primer lugar, identificar las características de los objetos que son susceptibles de ser cuantificables y establecer relaciones cualitativas y cuantitativas que permitan distinguir igual, menor y mayor cantidad de una misma magnitud en diferentes objetos. De este modo podrá provocarse la necesidad de medir. La construcción de la noción de unidad de medida permite dar paso al aprendizaje del proceso de medida, la selección y empleo de estrategias y de instrumentos adecuados para realizar mediciones y la realización de estimaciones, todo ello mediante procesos de experimentación en contextos cotidianos.

El aprendizaje de las magnitudes y su medida se desarrolla a lo largo de toda a etapa de primaria, continuándose en secundaria. Para describir su evolución se destacan 5 propiedades. La conservación y la composición aditiva hacen referencia a que la cantidad de magnitud permanece estable cuando el objeto se somete a movimientos isométricos o se fragmenta en partes. La transitividad implica que si un objeto es mayor que otro y este es mayor que un tercero, el primer es mayor que el tercero. Las restantes propiedades, iteración de la unidad e igualdad de tamaño de las unidades, hacen referencia a la unidad de medida, la cual debe ser igual cuando se reitera para cubrir por completo un objeto.

A continuación centramos la atención en las magnitudes geométricas longitud, superficie y volumen, las cuales pueden trabajarse en conexión con el sentido espacial. Para el caso del aprendizaje de la longitud y su medida, mostramos una propuesta basada en niveles de desarrollo identificados en investigaciones previas (Sarama y

Clements, 2009) y una selección de tareas que secuenciadas pretenden promover que el alumnado de un nivel concreto de comprensión construya habilidades y conceptos.

Proceso de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en Educación Primaria

Sarama y Clements (2009) describen un proceso de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida a partir de 8 elementos: el reconocimiento de la longitud, la conservación, la transitividad, la equipartición, la unidad de medida y su unicidad, la iteración, la acumulación de la distancia y la aditividad, el origen y relación entre número y la unidad de medida. Partiendo de estos elementos Szilagyi, Clements y Sarama (2013) indican una secuencia a través de la cual el alumnado puede progresar en el aprendizaje de la longitud y su medida. Esta se muestra en la tabla 1.

Tabla 1[1]. Niveles de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Características</th><td rowspan="4">Del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Reconocen la magnitud longitud como un atributo de los objetos: identifican las cualidades de la magnitud longitud.

Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Reconocen la conservación de la longitud (comprenden que, si se mueve un objeto, su longitud no cambia, tampoco si modificamos su forma).

Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos para clasificar los objetos por su longitud (pero tienen dificultades para ordenar por longitud cuando hay más de dos objetos, lo que evidencia dificultades con la transitividad)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Utilizan la propiedad transitiva para ordenar tres o más objetos por su longitud mediante comparaciones indirectas</td></tr>
</table>

1. Esta adaptación ha sido parcialmente publicada en: Sánchez-Matamoros García, G., Moreno Moreno, M., Pérez Tyteca, P., y Callejo de la Vega, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(2), 203-228.

Nivel	Características	
4	Identifican una única unidad de medida, como parte de la longitud de un objeto que se mide y son conscientes de que deben realizar iteraciones de la unidad a lo largo de la longitud sin superposiciones ni saltos, y reconocer la propiedad de acumulación: reconocer que cuando se itera una unidad a lo largo de la longitud de un objeto y se cuentan las iteraciones, la palabra-número significa el espacio cubierto por todas las unidades contadas desde ese punto.	
5	Reconocen la relación inversa entre las unidades (su medida) y el número de unidades medida, es decir, a mayor longitud de la unidad de medida, menor número de iteraciones de esta (**Relación entre número y medida**). Reconocen la necesidad de utilizar una única unidad de medida para medir y que debe ser universal (**universalidad de la unidad de medida**). Empiezan a realizar estimaciones de la longitud de objetos usando el metro como unidad de medida.	De la propiedad transitiva a la constitución de la idea de unidad de medida de longitud y su uso
6	Reconocen los submúltiplos del metro (decímetro, centímetro, milímetro). Miden longitudes usando como unidades de medida los submúltiplos del metro (decímetro, centímetro, milímetro). Establecen equivalencias entre los múltiplos y submúltiplos del sistema métrico decimal. Conocen y usan instrumentos de medida de longitud (regla, cinta métrica, etc.)	

Con el interés de que el alumnado progrese a lo largo de los citados niveles, se les han de proponer diferentes tipos de tareas secuenciadas tales como las siguientes:

- Comparación de dos objetos por desplazamiento (comparación directa).
- Comparación de tres o más objetos usando un intermediario (comparación indirecta).

– Clasificación de objetos.
– Ordenación de objetos según su longitud (con subdivisiones).
– Comparación de las longitudes de un objeto con la de otro que lo contiene un número exacto de veces (iteración).
– Iterar distintas unidades de medida sobre una misma longitud.
– Subdivisión de una longitud en partes iguales.
– Uso de una regla graduada que no tiene el cero para medir una longitud.
– Selección de la unidad de medida más adecuada.
– Estimación y comprobación de longitudes de objetos.
– Medición usando diferentes procedimientos.
– Manejo de instrumentos de medida: uso y lectura.
– Cálculo del error de la medida.

Algunas investigaciones indican que los niños no siempre desarrollan la conservación de la magnitud antes de aprender algunas ideas de medición (Sarama y Clements, 2009) y ello implica dificultades en el desarrollo de la noción de acumulación (Stephan et al., 2003), en entender la unicidad en la unidad de longitud (Ellis et al., 2003), en realizar inferencias sobre el largo de los objetos independientemente del tamaño de la unidad (Nunes y Bryant, 1996), y finalmente en relacionar un número con una longitud e indicar su significado (Skoumpourdi, 2015).

Este hecho hace que en algunas ocasiones proponer tareas que conllevan el uso de elementos tanto de la magnitud como de la medida puede ayudarnos a identificar diferentes dificultades de aprendizaje que pueden estar dándose en nuestros estudiantes. En el siguiente ejemplo se propone al alumnado hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C) (ver figura 5, adaptado de Moreno et al., 2021).

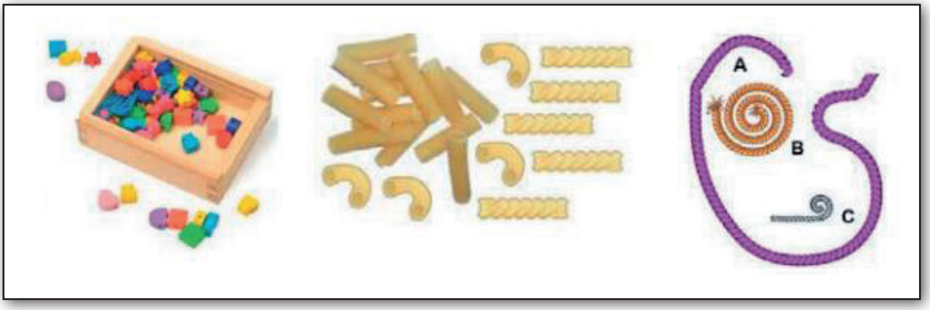

Figura 5. Accesorios para los collares en la tarea

Al preguntarles ¿quién ha hecho el collar más largo?, pueden partir de la longitud de la cuerda que elijan y emplear la propiedad de conservación al reconocer que la longitud de la cuerda no cambia, aunque esté doblada o estirada. También pueden decidir cuál es el más largo si todos han usado el mismo abalorio (misma unidad) y las iteraciones de la unidad realizadas no presentan huecos entre ellas, contando el número de abalorios utilizados para indicar la medida (largo) de este.

La resolución de la tarea por parte de los estudiantes nos permitirá interpretar diferentes características de la comprensión de estos. Por ejemplo, puede darse el siguiente diálogo entre dos estudiantes:

> Estudiante 1: El mío es más largo, tiene 12 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario [usa la cuerda C y 13 macarrones de distintos tipos] porque la cuerda es más larga.
> Estudiante 2: No, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.

Por el diálogo entre ambos estudiantes, se puede inferir que el estudiante 2 no reconoce la conservación de la longitud al usar el número de abolorios de sus collares, en lugar de la forma de las cuerdas, para comparar la longitud de estos (nivel 1 de la Tabla 1), esto hace que el estudiante 2 muestre dificultades en relación con la medida de la longitud (unicidad de la unidad de medida). En cuanto al estudiante 1, se encuentran, al menos, en el nivel cuatro de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1) porque dadas las características de la situación de enseñanza - aprendizaje hay evidencias, en relación con la magnitud, de que tiene adquirido el reconocimiento y la conservación de la longitud. En relación con la medida de longitud, este estudiante tiene adquirida la unicidad de medida, la iteración y la acumulación, dado que usa una única unidad de medida, macarrones del mismo tipo, la itera sin dejar huecos y ha utilizado el número de abalorios usados para indicar el largo del collar (acumulación).

Se debe tener en cuenta que, en función de los niveles de comprensión inferidos para cada estudiante, las decisiones instruccionales que debe plantear el docente para favorecer la progresión en el aprendizaje deben ser diferentes para cada estudiante. Así, para el estudiante 2 que se encuentran en el nivel uno de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1), se debería plantear como objetivo de aprendizaje adquirir la conservación de la longitud y proponer como tarea, por ejemplo, comparar objetos con diferentes longitudes y formas. Para el estudiante 1, que se encuentran en el nivel cuatro de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1), al no tener evidencia de si comprende la relación entre número y medida, se podría proponer como objetivo de aprendizaje adquirir esta relación y plantear, por ejemplo, la tarea de medir la longitud de un objeto primero con una unidad y después con otra de distinto tamaño.

Sobre el aprendizaje de las magnitudes superficie y volumen y su medida

Al igual que ocurre en el caso de la longitud, el alumnado percibe la idea de superficie manipulando objetos y comparándolos, primero de forma directa (superponiéndolos) y más adelante mediante un intermediario, lo que les ayuda a desarrollar la noción de transitividad. La comparación de objetos de diferente aspecto e igual superficie (ver ejemplo en Figura 6) contribuye a desarrollar la idea de conservación de la superficie y composición aditiva. Partiendo de estos conocimientos el alumnado podrá emplear la unidad cuadrada para medir por reiteración sobre los objetos. En este momento los geoplanos así como las mallas cuadriculadas en papel son de gran utilidad para contribuir a la comprensión de la unidad de medida cuadrada y del proceso de medida directa por iteración de la unidad. La consideración de figuras más complejas da lugar a la necesidad de descomponer la figura en otras cuyas áreas sean más fácilmente medibles (como se ha mostrado al referirnos al sentido espacial) o a razonar estableciendo relaciones entre áreas de figuras relacionadas. Por ejemplo, en la Figura 2 puede obtenerse el área del cuadrado sombreado a partir de su descomposición en un cuadrado de área 1 y cuatro triángulos de área 1 o, por el contrario, razonando a partir del cuadrado mayor que lo contiene cuya área es 9 y restándole las áreas de los cuatro triángulos de área 1 que se muestran en blanco.

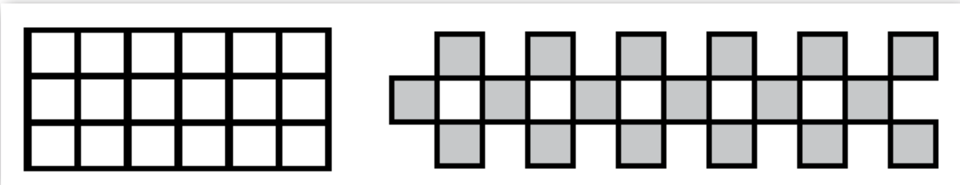

Figura 6. Figuras de diferente aspecto e igual superficie

El geoplano es también un recurso de gran utilidad para trabajar la relación entre perímetro y superficie y abordar las suposiciones erróneas que el alumnado tiende a desarrollar sobre la relación entre ambas magnitudes. Posteriormente será el momento de introducir las fórmulas del área cuya validez puede razonarse para casos sencillos como es el ejemplo del rectángulo o del romboide.

En lo que respecta a las magnitudes volumen y capacidad el proceso a seguir es similar siendo en este caso esencial la experimentación rellenando objetos con cubos o líquidos. La consideración de figuras tridimensionales compuestas por cubos favorece la comprensión de la unidad de medida cúbica y la comprensión de la medida del volumen y contribuirá a reducir dificultades relativas con la visualización de las unidades cúbicas que quedan dentro de la figura.

Sentido numérico

En los primeros cursos es fundamental poner la atención en una buena alfabetización numérica que lleve al alumnado a tomar conciencia de cada número natural en sí mismo como representación de una cantidad, del lugar que ocupa en la secuencia numérica y de las relaciones que mantiene con el resto de números. En este proceso debemos utilizar modelos cardinales que acojan las cantidades reales y modelos ordinales que muestren la serie ordenada de símbolos. Ambos modelos han de estar en constante conexión, ser muy estructurados y orientarse a la emergencia de estrategias eficaces para el cálculo.

En el trabajo con las cantidades, la caja de numeración u otros materiales similares como los bloques de base diez (preferiblemente encajables), son recursos imprescindibles para construir los números, apreciar su tamaño y comprender las leyes del Sistema de Numeración Decimal (Ver Figura 7). De uno en uno, el alumnado va construyendo los nueve primeros números, la decena, la centena y las cantidades hasta el novecientos noventa y nueve. El trabajo con los citados recursos produce un salto cualitativo en la comprensión del número, ya que proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional. En este contexto se trabaja con facilidad y de forma significativa el conteo y la comprensión del número como cantidad.

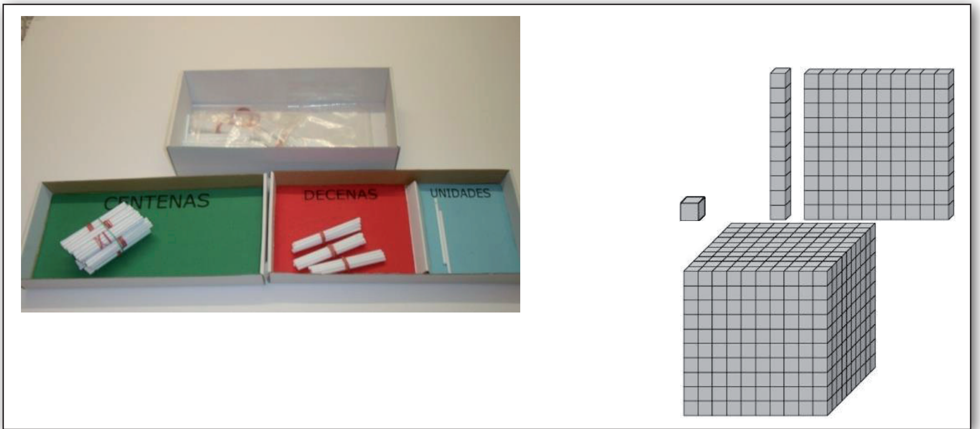

Figura 7. Caja de numeración y bloques de base diez

En lo que respecta al cálculo, se debe evitar el uso del algoritmo estándar en los primeros años de aprendizaje. El desarrollo del sentido numérico se favorece apoyando el cálculo en el uso de la caja de numeración o los bloques de base diez ya que conecta directamente con estrategias por descomposición y facilita la transcripción gráfica que se deriva de la manipulación de las cantidades. En la Figura 8 se muestran ejemplos de cálculo haciendo uso de la caja de numeración en los que el alumno expresa numéricamente cómo ha resuelto la operación.

63 - 24 = 63-3-20-1=39	45+29 45+10+10+5+4=74
Pone seis decenas y tres unidades (63); quita de ella las tres unidades sueltas (-3) y dos decenas (-20); deshace una decena para tomar una unidad (-1) y pone en su lugar las nueve unidades restantes; hace recuento y comprueba que quedan tres decenas y nueve unidades (39).	Añade una decena (+10), otra decena (+10) y cinco unidades (+5) con las que forma una nueva decena que deberá agrupar y llevar a su lugar. Por último, añade las cuatro unidades restantes (+4), hace recuento y escribe el resultado (74).

Figura 8. Cálculos resueltos con la caja de numeración

Más adelante, en ausencia de la caja, el alumno recrea mentalmente la actividad manipulativa y expresa cada paso. Cuando el cálculo le resulta difícil une las cantidades que corresponden a cada cálculo parcial, como puede verse en la Figura 9.

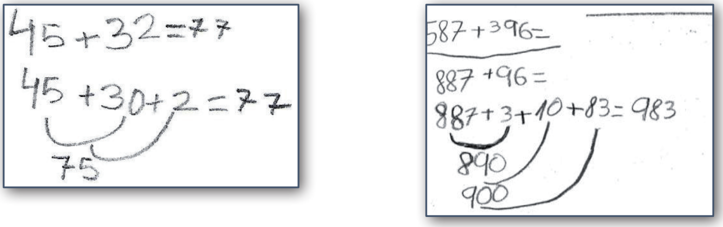

Figura 9. Operaciones realizadas sin la caja de numeración

El empleo de las centenas, decenas y unidades fuera de la caja de numeración o con los bloques de base diez permite un conocimiento aún más flexible de las cantidades. Por ejemplo se pueden realizar descomposiciones de una cantidad (ej., descomposición del 58 como 40+18, 11+47, 10+20+28, 2+50+6) o representaciones de la suma repetida de cantidades para conectarla con la multiplicación (Figura 10).

Cuatro veces 222:
4x222=
4x200=800
4x20=80
4x2=8

Figura 10. Representación de la multiplicación

La cinta numérica y la tabla 100 (ver Figura 11) son otros dos recursos a destacar por su utilidad para conectar las representaciones concretas de cantidades con el símbolo que les corresponde.

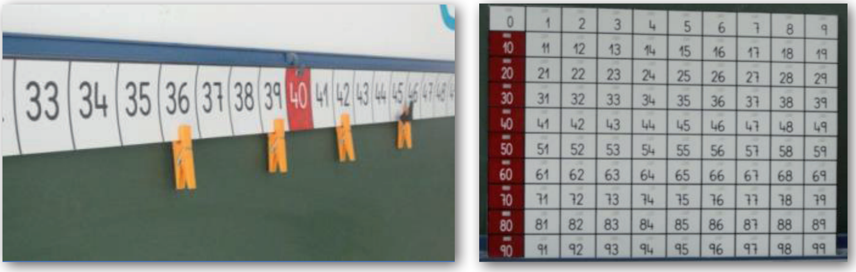

Figura 11. Cinta numérica y panel numérico

La cinta numérica facilita la apropiación de los números del cero al cien como una secuencia linealmente ordenada, continua y ampliable. Para el alumnado, la cinta se asemeja a los juegos de recorrido tradicionales en los que el cero es el punto de partida y cada número tiene su lugar ocupando una casilla. Siempre podemos verla y recurrir a ella para consultar dudas o efectuar comprobaciones. Además, contribuye a enriquecer el contexto de aprendizaje, ya que cada número aporta información sobre sí mismo en relación con los demás: vemos los que le anteceden y le siguen, si está situado al principio, en la parte central o al final de la serie, podemos compararlo con la posición que ocupan otros y cuantificar la distancia entre ambos. También es un excelente soporte para recoger información numérica de sucesos, situaciones o acontecimientos que afecten al aula, o para representar datos referidos a problemas que debamos resolver.

Apoyándonos en este "mapa lineal", cada niño y niña podrá ir construyendo su propia línea mental para pensar y operar con los números. En este aspecto, la cinta conecta directamente con estrategias secuenciales (a saltos) para el cálculo pensado (Figura 12) y con representaciones gráficas como la Línea Numérica Vacía (Figura 13). Es un recurso muy eficaz para aplicar las primeras estrategias de cálculo basadas en desplazamientos convenientes.

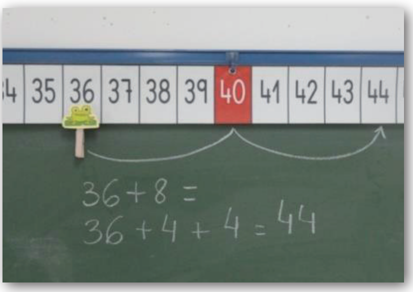

Figura 12. Conexión entre la cinta numérica y el cálculo simbólico

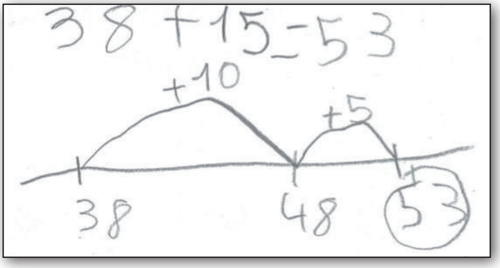

Figura 13. Cálculo en la línea numérica vacía

La tabla 100 o panel numérico permite trabajar las operaciones de suma y resta como desplazamientos por las filas y las columnas (ver Figura 14). Es de utilidad para poner de manifiesto distintas formas de resolver una misma operación (Ver Figura 15). Se deben realizar muchas actividades para conocer y asimilar este mapa hasta que constituya un soporte fiable para el cálculo mental.

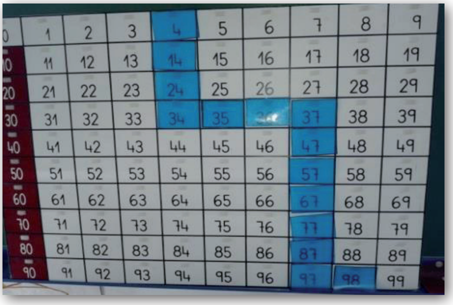

Figura 14. Representación del recorrido 4 + 30 + 3 + 60 + 1= 98 en el panel

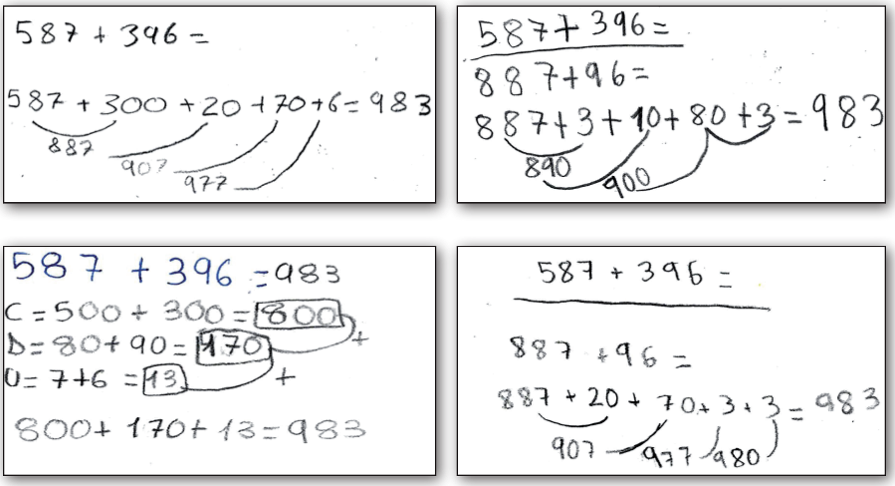

Figura 15. Operación 587+396 usando diferentes estrategias

El trabajo con los patrones aritméticos en el contexto de cálculos que comparten cierta estructura (ej., 10000-143, 10000-9143, 5000-4143) también favorece el desarrollo del sentido numérico.

Referencias

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 147-168). Kluwer Academic Publishers.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303. DOI:10.1007/s10649-015-9593-3.

Blanton, M. (2008). A*lgebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice.* NH: Heinemann.

Diaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). SEIEM.

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Dvořáková, B., Gimenez, J., Guzón, A.F. H., Hao, L., Inekwe, I., Mejía B., Sánchez, M., Scott, P., Serradó, A., Spevák, J. y Teague, D. (2017). The importance of teaching probability. A Brief produced at the Park City International SeminarPark City Mathematics Institute July 3-8, 2017.

Ellis, S., Siegler, R. S. y Van Voorhis, F. E. (2003). *Developmental changes in children's understanding of measurement procedures and principles*. Presentado en Society for Research in Child Development, Tampa, FL, USA.

Fielding-Wells, J. y Hillman, J. (2018). Supporting young students emerging understandings of centre through modelling. En M. A. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS10). International Statistical Institute.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Konold, C. (2007). Designing a data analysis tool for learners. En M. Lovett y P. Shah (Eds.), *Thinking with data: The 33rd Annual Carnegie Symposium on Cognition* (pp. 267-291). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer.

Mintz, J., Mintz, J., Moore, K. y Schuh, K. (2002). "Oh, My aching back! A statistical analysis of backpack weights". *STATS: The magazine for Students of Statistics* (32), 1719-1720.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 57-72.

Nunes, T. y Bryant, P. E. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.

Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics* (88), 343–360. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1

Pratt, D. y Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Sarama, J. y Clements D. (2009). *Early childhood mathematics education research. learning trajectories for young children*. Routledge.

Serradó, A. (2014). Developing hipothetical thinking through four cycles of informal stocastical modelling. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)* (24), 173-178.

Skoumpourdi, C. (2015). Kindergartners measuring length. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 89-1995). Charles University

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P. y Gravemeijer, K. P. E. (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (Vol. 12). National Council of Teachers of Mathematics.

Szilagyi, J., Clements, D. H. y Sarama, J. (2013). Young children's understanding of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education, 44* (3), 581-620. https://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.44.3.0581

Ureña, J., Ramírez-Uclés. R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2022), *Generalisation strategies and representations used by last-year elementary school students*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.
https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429