

Matemáticas en la Educación Infantil

Mathematics in Early Childhood Education

Alsina, Á.^a, Berciano, A.^b, De Castro, C.^c, Edo, M.^d, Giménez, J.^e, Jiménez-Gestal, C.^f, Prat, M.^g, Salgado, M.^h, Vanegas, Y.ⁱ

^a *Universidad de Girona,*

^b *Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea,*

^c *Universidad Autónoma de Madrid,*

^d *Universitat Autònoma de Barcelona,*

^e *Universidad de Barcelona,*

^f *Universidad de La Rioja,*

^g *Blanquerna-Universidad Ramon Llull,*

^h *Universidade de Santiago de Compostela,*

ⁱ *Universidad de Lleida*

Resumen

En la Educación Infantil, el aprendizaje de las matemáticas se inicia con los conocimientos intuitivos e informales que los niños traen a la escuela. En estas edades, las prácticas docentes deben favorecer el desarrollo de los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas, así como facilitar que los niños interactúen con ideas matemáticas clave. El enfoque de enseñanza se basa en el juego, la exploración, y la manipulación, en proporcionar tiempo suficiente, materiales manipulativos, y apoyo para que los niños se desenvuelvan en situaciones de la vida en las que necesiten conocimientos matemáticos.

Palabras clave: Educación infantil, Metodología didáctica, Recursos didácticos, Sentido algebraico, Sentido espacial, Sentido estocástico, Sentido de la medida, Sentido numérico.

Abstract

In Early Childhood Education, the learning of mathematics begins with the intuitive and informal knowledge that children bring to school. At these ages, teaching practices should favor the development of children's problem-solving and reasoning processes, representation, communication and connection of mathematical ideas, as well as favoring for children to interact with key mathematical ideas. The teaching approach is based on play, exploration, and manipulation, on providing enough time, manipulatives, and support for children to face life situations in which they need mathematical knowledge.

Keywords: Early childhood education, Educational methodology, Educational resources, Algebraic sense, Measurement sense, Number sense, Spatial sense, Stochastic sense.

EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

EN LAS ÚLTIMAS DÉCADAS, ha ido aumentando considerablemente la visibilidad de la Educación Matemática Infantil. Muestra de ello, es el desarrollo de diversas agendas de investigación en este campo (Alsina, 2020a; Elia et al., 2021). En el contexto internacional, por ejemplo, se está realizando una importante labor en el grupo *Early Years Mathematics (EYM)* dentro del *Congress of European Research in Mathematics Education (CERME)*, con la presencia de estudios de autores españoles. Edo (2016) señala que entre los temas que se han tratado en las diferentes ediciones aparece el análisis de las oportunidades de aprendizaje matemático en contextos informales, el papel de los materiales, las diferentes formas de comunicación y representación matemática de los niños pequeños o las evidencias de aprendizaje sobre contenidos específicos, entre otros. Existen otras iniciativas a nivel internacional, como las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning*, que cubren cuestiones relacionadas con el desarrollo del pensamiento matemático a través de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos matemáticos y el contenido matemático, el impacto del entorno social, con estudios sobre las transiciones para niños pequeños entre el hogar y la escuela o bien la profesionalización de los maestros de la primera infancia, con una amplia variedad de enfoques teóricos y metodológicos innovadores que establecen unas bases interesantes para futuras investigaciones en esta área (Alsina, 2020; Carlsen et al., 2020).

En el contexto español se ha producido también un aumento considerable de la producción científica desde la reactivación del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) en 2011, dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En este caso, los intereses de investigación se han orientado principalmente a tres grandes temas: la adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil, la formación inicial de maestros de Educación Infantil y el uso de recursos o contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático (Alsina, 2013; Salinas, 2016).

A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Educación Infantil organizados en tres dimensiones (Alsina, 2020): 1) las finalidades de la enseñanza (¿para qué se enseña? y ¿por qué se enseña?); 2) la organización de la enseñanza (¿qué se enseña? y ¿cuándo se enseña?); y 3) las prácticas de enseñanza (¿cómo se enseña?). Con ello, se pretende promover un debate sobre la calidad de la Educación Matemática Infantil y la influencia en el aprendizaje de las matemáticas en etapas educativas posteriores.

Finalidades de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Sobre esta dimensión, se destacan dos cuestiones fundamentales: el papel relevante que tiene la Educación Infantil para desarrollar las habilidades matemáticas y la entidad propia de la etapa.

En el marco del desarrollo integral, es fundamental reconocer en el papel de las matemáticas intuitivas e informales. Los conocimientos matemáticos intuitivos se refieren a un tipo de conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987); adicionalmente, los conocimientos matemáticos informales tratan sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera más natural y espontánea (Alsina, 2015; Baroody, 2005; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg y Baroody, 2007; Vanegas et al., 2021). Estos conocimientos informales son el eslabón necesario para el acceso a la matemática formal, que se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita (Baroody, 2000). De acuerdo con Ginsburg et al. (1998), estas formas de aprendizaje se relacionan entre sí para ir dando un sentido al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

En relación a la entidad propia de la etapa, es importante precisar que la Educación Infantil *no es una etapa pre-escolar*, tampoco en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas. Desde este prisma, las matemáticas que se aprenden en esta etapa tienen por objeto que los niños puedan desenvolverse en diversas situaciones de la vida cotidiana en las que necesitan conocimientos matemáticos, en una clara alusión al enfoque competencial (NCTM, 2003).

Organización de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Geist (2014), Clements y Sarama (2015) y Alsina (2006, 2015), han realizado diversos estudios que les han permitido establecer qué conocimientos matemáticos son importantes abordarlos en toda la etapa de Infantil. Anteriormente, otros organismos y autores habían propuesto los conocimientos matemáticos que deberían aprender los niños a partir de los 3 años. Canals (1989), por ejemplo, había realizado una propuesta de organización de los conocimientos matemáticos de 3 a 6 años a partir de tres tipos distintos de actividades matemáticas: identificar, relacionar y operar. Esta autora incluía los bloques de lógica, números y cálculo, medida y geometría. El NCTM (2003) se refiere a conocimientos relativos tanto a los contenidos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, datos y azar) como a los procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Otros autores realizan aportaciones que van consolidando la disciplina, como por ejemplo Chamorro (2005), quién desarrolló los bloques de lógica, el número y la aritmética, la geometría y la medida, además de la resolución de problemas; Castro y Castro (2016), en cuya obra colectiva se hace referencia al pensamiento lógico-matemático, el espacio y la geometría, los números y las operaciones, y la medida; o bien el libro de Muñoz-Catalán y Carrillo (2018), en el que participan diversos

autores y que tratan el número y las operaciones, las magnitudes, la estadística y la probabilidad, el espacio y las figuras geométricas. En estas propuestas, más allá de explicitar los contenidos que se deben abordar por edades, se remarca que las matemáticas infantiles deben incorporar la exploración de una gran variedad de ideas matemáticas (numéricas, geométricas, de medida, de estadística, del álgebra temprana) y el desarrollo de procesos matemáticos (conexiones, resolución de problemas, razonamiento, comunicación y representación).

Las prácticas de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

En diversas declaraciones de posición se han descrito algunas recomendaciones esenciales acerca de las prácticas de enseñanza de las matemáticas en Infantil, que aquí se reproducen de forma sintetizada. Así, por ejemplo, la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NAEYC y NCTM, 2013), señalan que es necesario potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social; aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños; utilizar prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas; facilitar que los niños interactúen con ideas matemáticas clave; proporcionar tiempo suficiente, materiales, y apoyo para que los niños se impliquen en el juego; o introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas; entre otras. También la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012) propone diversas recomendaciones, por ejemplo, atraer la curiosidad natural de los niños; utilizar enfoques aceptados para la educación en la primera infancia como el juego para facilitar el desarrollo infantil de las ideas matemáticas; animar a los niños a verse a sí mismos como matemáticos, estimulando su interés y habilidad en la resolución de problemas y la investigación a través de actividades relevantes para ellos, que supongan un reto, y exijan mantener el esfuerzo; proporcionar materiales apropiados, espacio, tiempo y otros recursos para animar a los niños a implicarse en su aprendizaje matemático; animar a los pequeños a justificar sus ideas matemáticas a través de la comunicación de estas ideas, de un modo desarrollado por los niños, que muestren niveles adecuados de rigor matemático; etc.

Con base en las dimensiones descritas, en los apartados siguientes se profundiza en distintos conocimientos matemáticos que se deben potenciar en la Educación Infantil. Se resaltan avances de la investigación en Educación Matemática Infantil y se ejemplifican prácticas que se espera enriquezcan el trabajo de aula y, con ello disponer, además del estado actual, de una base para analizar escenarios de futuro de la Educación Matemática Infantil en nuestro contexto.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN 0-3

En los últimos 20 años, se ha observado un interés creciente por el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde el nacimiento a los 3 años. Observamos esta tendencia en documentos curriculares (Clements, 2004; National Research Council, 2014), en investigaciones y experiencias en el aula (Alsina, 2015; De Castro, 2011; De Castro et al., 2015; De Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012; Lee, 2012), y en libros para la formación inicial de maestras y maestros de Educación Infantil (Alsina, 2006; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2009).

Los niños de 0 a 3 años comienzan a desarrollar intuiciones matemáticas que serán la base para sus posteriores aprendizajes, todavía dentro de la Educación Infantil (3 a 6 años), así como después, en la Educación Primaria. En estas edades, el aprendizaje se desarrolla a través del juego, casi siempre muy poco dirigido, con la creación de entornos de aprendizaje, en que se organizan el espacio y los materiales para proporcionar experiencias, gracias a las cuales, los pequeños puedan desarrollar estas intuiciones matemáticas.

Oportunidades de aprendizaje de las matemáticas, de 0 a 3 años, durante una jornada escolar

Las rutinas proporcionan oportunidades para el aprendizaje matemático. Empezamos la jornada con el recibimiento. Después, recogemos el aula tras jugar, esperando a los demás miembros del grupo. Aquí aparece el pensamiento matemático al guardar los juguetes realizando agrupamientos, seleccionando objetos de un tipo, o elaborando clasificaciones sencillas que atienden al tipo de objeto. Al tiempo, se deben coordinar el tipo de objetos a guardar con el número y características de los recipientes que se usan para guardarlos, orientarse en el espacio y distribuir correctamente los materiales en recipientes. A veces, incluso, utilizar algún tipo de simbolización, guardando objetos en un cesto con un dibujo o una foto del objeto (De Castro et al., 2015).

En el corro, o asamblea, cada día, el encargado del día en el aula de 2 a 3 años puede contar a los compañeros que han venido. La disposición de los pequeños en el corro facilita un orden para el conteo. El objetivo, más que contar correctamente, es ofrecer una situación significativa que da sentido a la práctica del conteo para determinar cuántos somos, si falta alguien, o cuántos faltan. Ir despacio, tocando a cada compañero, al contar (con una varita, en la actividad de “contar cabezas”, Figura 1) ayuda a hacer la correspondencia uno a uno. Este conteo emergente va acompañado de errores, al tratar con cantidades muy grandes para ellos. Son habituales los errores en el recitado de la secuencia de palabras-número: “uno, dos, tres, cuatro, cinco, ocho, nueve, cinco, seis, ...”. Tampoco los niños son conscientes que el último numeral recitado representa el número de compañeros contados, o principio de cardinalidad. En este contexto, los niños pueden “escribir” cuántos compañeros

toman uno o varios trozos de fruta. Ésta se preparada en un cuenco y un niño la reparte entre sus compañeros. También en este momento pueden generarse errores, dejar algún niño sin fruta, típicos de situaciones de correspondencia uno a uno, de enumeración, conteo o estimación. Aquí la colocación de los niños influye de manera notable. El maestro, en este caso, puede incidir en hacer ver la importancia de seguir el orden y fijarse en que cada niño tenga fruta. Para que sea una situación manejable por el niño, serán cantidades pequeñas (hasta tres, por ejemplo) y se apoyará en comentarios como “tienes que traer uno para... y otro para...” (De Castro y Flecha, 2018).

Matemáticas y juego sensorial

En el aula de bebés, 0-1 años, las matemáticas hacen su aparición a través del juego sensorial, con recursos como el “cesto de los tesoros”, propuesto por Goldschmied (2000) (Alsina, 2006; Edo, 2012). El conocimiento de los objetos, a través de la exploración de sus propiedades físicas y sonoras, abre la puerta a los agrupamientos y a las clasificaciones, que podemos ver ya en el aula de un 1-2 años, en variantes del juego heurístico (Alsina, 2006; Edo, 2012; Goldschmied, 2000). Para los bebés, se suele proponer la creación de diferentes cestos de materiales, con una temática concreta, como un cesto con instrumentos musicales, de frutas, etc. (De Castro y Flecha, 2018)

Algunas situaciones de juego se plantean en el ciclo de 0 a 3 a partir de instalaciones (Alsina y León, 2016). En ellas, los materiales no se disponen al azar; hay un “orden”, una estructura y una intencionalidad de estimular el pensamiento matemático. La tela sobre el suelo, con los materiales en el borde, delimitan un espacio. En la disposición, también se aprecia una simetría aproximada. Los materiales, en cada parte del espacio de juego, se presentan agrupados. Hay recipientes de distintos tamaños para explorar la magnitud capacidad, para ordenar por tamaños, para trasvasar contenidos y para hacer comparaciones. Abundan las equivalencias en forma, cilindros, pero también las diferencias (materiales de plástico, madera, metal, o cartón). Seguimos la línea de Geist (2014) al plantear que, en la intervención en estas edades, es fundamental la organización del entorno de juego. En la Figura 2, observamos la organización del entorno y una situación de trasvasado de un recipiente a otro, que partía de un agrupamiento de tapones amarillos y del llenado de un vaso. A la derecha, una intervención del maestro haciendo ver la diferencia de capacidad entre dos recipientes. Los niños utilizan las latas de atún para establecer correspondencias uno a uno entre colecciones de latas y troncos, y los vasos para llenarlos de materiales y hacer trasvases. El tipo de actividad matemática es dirigida indirectamente por los maestros a través de una cuidada selección de materiales y la organización del entorno de juego, que se traduce después en “acciones matemáticas” (Alsina y León, 2016; De Castro y Flecha, 2018).



Figura 2. Disposición de los materiales en la propuesta, trasvasados e intervención

Otras propuestas adecuadas para el aprendizaje de las matemáticas de 0 a 3 años son las bandejas de experimentación, para niñas y niños de 1 a 3 años (Alsina, 2015; Edo, 2012) y las transformaciones de espacios (Edo, 2012). También el juego en el exterior, en el jardín, puede estimular el pensamiento matemático. Los materiales más comunes son los cubos, palas y arena; elementos ideales para iniciarse en intuiciones relativas a la cantidad, peso o capacidad, en el camino hacia la medición de magnitudes. Disponer de diferentes contenedores para la arena, facilita la comparación de capacidades, al introducir unos dentro de otros, o a través del trasvase del contenido (Lee, 2012).

Juego de construcción de 0 a 3 años

Otra situación privilegiada para la emergencia de intuiciones matemáticas es el juego de construcción. Los niños, desde muy temprano (1-2 años), comienzan a recorrer una trayectoria de aprendizaje en la construcción que ha sido descrita por Gura (1992). Comienzan formando apilamientos lineales verticales (torres) y horizontales (caminos), después pasan a los apilamientos bidimensionales, formando embaldosados y paredes (Figura 3, izquierda), a los cerramientos, los puentes, y acaban formando patrones y simetrías. La evolución a lo largo de estos hitos es rápida y depende más de la experiencia con la construcción que de la edad, apareciendo simetrías ya en el aula de 2-3 años (Figura 3, derecha).



Figura 3. Elementos matemáticos en el juego de construcción infantil de 0 a 3 años

En el juego de construcción se dan múltiples oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas. Se construyen formas geométricas a partir de otras, como el rectángulo de la Figura 3 (izquierda), aparece la longitud en los apilamientos horizontales, y la altura en las torres, también con situaciones de comparación directa, bien con la altura de los niños, o entre dos torres. También, al formar puentes, se compara la distancia de los pilares con la longitud de la pieza superior. Finalmente, aparecen esquemas de construcción que se repiten, como patrones, y construcciones simétricas que surgen de forma espontánea (De Castro, 2011; De Castro y Quiles, 2014).

SENTIDO NUMÉRICO

El desarrollo del sentido numérico en la Educación Infantil implica un gran número de conocimientos y procesos matemáticos. Aunque el conteo, la iniciación a la suma y la resta, y el desarrollo de notaciones numéricas, han recibido una atención mayor en Educación Infantil, hay otros contenidos que cada vez requieren mayor atención. Por ejemplo, la subitización, o reconocimiento inmediato (súbito) de una cantidad sin necesidad de contar, gracias a que se trate de una cantidad muy pequeña de hasta 3 o 4 objetos (subitización perceptiva), o a que la cantidad se organice según un patrón visual (como en los dados, las manos, los naipes) y utilicemos la relación parte-todo (subitización conceptual) (Clements y Sarama, 2015). En la actualidad, hay diferentes materiales manipulativos que proponen una iniciación visual a la aritmética, complementaria del conteo, como el rekenrek (un ábaco holandés), las placas del Numicon (adaptación de las placas de Herbinière Lebert), o los marcos de diez (*ten frames*). Estos y otros materiales manipulativos (regletas de Cuisenaire, cubos encajables) facilitan también el aprendizaje de otros contenidos, como la descomposición aditiva, que es un contenido adecuado para la edad de 5 años en Educación Infantil con materiales manipulativos y en contextos de resolución de problemas (Dacey

et al., 1999) y será un requisito básico para el aprendizaje de estrategias de cálculo mental en la Educación Primaria.

El aprendizaje del conteo y la iniciación a la aritmética

Desde los 2 años, hasta los 6, se van desarrollando muchos aspectos interrelacionados del conteo. La recitación de la secuencia de palabras número comienza en torno a los 2 años, con recitados hasta 5. Poco a poco, el recitado va avanzando hasta el 10 (3 años) y hasta el 20 (4 años), alcanzando el recitado hasta 100 en torno a los 6 años, para lo cual es necesario aprender a contar de 10 en 10 y hacer la conexión entre décadas (saber qué palabra número va después del 29, 39, etc.). También, en torno a los 6 años, se aprende a contar hacia atrás desde 10 (Clements y Sarama, 2015). El recitado de palabras número no es algo puramente memorístico, pues las palabras número siguen ciertos patrones en su formación, como la ley de formación a partir del 16 o del 20 (veinti+uno, veinti+dos, etc.), la similitud entre las palabras para las unidades y las decenas (tres, cuatro, cinco... treinta, cuarenta, cincuenta...). Además, la lista de las palabras número que usamos para contar se va convirtiendo en un instrumento matemático, según pasamos por diferentes niveles de elaboración de la parte de la secuencia adquirida (Fuson, 1992).

La resolución de problemas aritméticos verbales

Los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva recomendados para Educación Infantil son los correspondientes a las categorías semánticas de cambio, creciente y decreciente, con incógnita en la cantidad final y los de combinación con incógnita el total. Un segundo grupo de problemas, accesibles en último curso de Educación Infantil, en torno a los 6 años, son los de cambio con incógnita en la cantidad de cambio, los de combinación con incógnita en una parte, y los de comparación con incógnita en la diferencia (Clements y Sarama, 2015). Los niños resuelven estos problemas utilizando estrategias informales de modelización directa. En ellas, se representan las cantidades, las relaciones entre cantidades o las acciones que se relatan en el enunciado, y finalmente se utiliza el conteo para determinar la solución del problema (Fuson, 1992).

Realmente, según la investigación (ver revisión en De Castro y Hernández, 2014), los niños y niñas de 4 a 6 años pueden resolver una variedad mucho más amplia de problemas aritméticos verbales, incluyendo problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación, división reparto y división medida y otros problemas. Las condiciones que se deben cumplir para que los pequeños resuelvan estos problemas son: (1) Que el enunciado sea breve y evoque una situación familiar; (2) Que las cantidades que aparecen en el problema sean accesibles a las capacidades de conteo infantiles;

(3) Que el enunciado sea fácil de modelizar. Un ejemplo de esta situación es el problema, basado en el cuento “*A remainder of one*”, de Elinor J. Pinczes, en el que los niños deben organizar un ejército de 21 insectos en una disposición rectangular, en filas iguales. Se trata de un problema de descomposición factorial que admite varias soluciones. En la Figura 4, vemos las estrategias de modelización directa que utilizan niñas y niños de 5 años para resolver este problema. La estrategia base es crear contando una colección de 21 objetos e ir formando, por ensayo y error, gráfica o manipulativamente, grupos de 2, de 3 (una de las soluciones, Figura 4, en el centro), de 5, de 6, de 7 (la segunda solución, Figura 4, izquierda). Al final de la sesión de resolución de problemas, los niños pueden compartir y explicar sus soluciones.



Figura 4. Estrategias de modelización directa, y soluciones, en un problema de descomposición factorial

Situaciones de aula como las descritas en el ejemplo de la Figura 4, ilustran que, más allá de los contenidos, en la Educación Infantil se pueden desarrollar procesos matemáticos (NCTM, 2003) y los distintos momentos del ciclo de construcción de modelos matemáticos, abarcando desde el planteamiento de un problema “real”,

como la organización de una colección de objetos en una disposición rectangular, la elaboración de un modelo matemático con objetos o dibujos, la obtención de soluciones matemáticas ($21=3\times 7$, $21=7\times 3$, $21=21\times 1$, $21=1\times 21$), su interpretación en contexto (incluyendo 1 fila de 21 soldados o 21 filas de 1 soldado), y su valoración como posible solución del problema inicial, descartando algunas de las soluciones matemáticas ($21=21\times 1$, $21=1\times 21$).

Las representaciones numéricas y el aprendizaje de los numerales escritos con cifras

Las notaciones numéricas van evolucionando, en la Educación Infantil, desde representaciones icónicas, en que el número se representa mediante una colección de dedos, marcas, u objetos, cuantificados mediante subitización o correspondencia uno a uno, hasta las representaciones simbólicas con cifras que llegan a implicar el conocimiento del principio del conteo de cardinalidad. Alsina (2011), al estudiar las notaciones numéricas de niñas y niños de 3 a 6 años, en dictados de números, encuentra que hay una evolución desde la ausencia de código simbólico, con representaciones icónicas (un 69,9% en 3 años), al uso de código simbólico (un 89% a los 5 años). Muchos niños, de 2-3 años, ya son capaces de representar hasta 3 objetos, mediante marcas (Clements y Sarama, 2015; De Castro et al., 2015).

En la Figura 5 vemos tres actividades cuya finalidad es el desarrollo de la representación numérica. En la primera, a la izquierda, los niños de 3 años se inician en los juegos de tablero. Lanzan un dado y deben colorear la cantidad de casillas obtenida en la tirada. Ahí aparece una primera representación numérica, en que la configuración del dado, y la relación parte-todo, permiten la subitización conceptual (Clements y Sarama, 2015) de la cantidad de puntos. Después, el niño determina las casillas a colorear, y hace una marca en la cifra correspondiente del camino numérico, mediante el conteo. Finalmente, copia el numeral en el espacio intermedio. Los cambios de color en cada tirada permiten evaluar el desarrollo de la partida. En el centro de la Figura 5, observamos el desarrollo de una partida de bingo. Los pequeños comienzan copiando los números de los cartones en su propio cartón, en el cuaderno. Se pueden utilizar los números hasta 15 en 4 años, y hasta 30 en 5 años. Durante la partida, se van escribiendo los “números que han salido” y redondeando los que tenemos en el cartón. Cuando un niño no sabe leer el número que tiene que “cantar” al extraer una bola del bombo, o consigue escribir el número que canta un compañero, utiliza un camino numérico, o una tabla 100, contando casillas, para saber cómo “se llama” cada número escrito con cifras en el camino numérico. Finalmente, a la derecha, vemos la actividad del “número misterioso”. En ella, cada día tenemos que averiguar qué número está escondido tras cada dibujo, bien examinando e interpretando la representación numérica de cada casilla, o bien buscando pautas en los números correspondientes a los días anteriores. En esta actividad, para niñas y niños de 5 años, se discute primero por parejas, y después se elige a tres alumnos, que deben explicar a los demás sus hipótesis sobre cuál es el número secreto del día.



Figura 5. Actividades de representación numérica

Las actividades de la Figura 5, pretenden mostrar que, a cualquier edad, dentro de la Educación Infantil, podemos aprender a usar distintas notaciones numéricas, incluyendo la lectoescritura de números hasta 30. Esto se puede hacer, a través del juego, y en diferentes situaciones de aula típicas en estas edades: la partida de bingo se desarrolla en gran grupo; el juego de tablero, en el trabajo por rincones; y el número misterioso, en la asamblea. En esta última actividad, el alumnado de 5 años se aproxima a las ideas sobre el sistema de numeración decimal, incluyendo las decenas, que serán tan importantes en los primeros cursos de Educación Primaria, trabajando con representaciones gráficas de materiales manipulativos que usan en el aula, que enfatizan los agrupamientos de 10: marcos de diez (*ten frames*), bloques de base 10, y palillos agrupados de 10 en 10.

Con estos ejemplos, tratamos de ilustrar el principio didáctico de que, en la Educación Infantil, es viable articular las propuestas matemáticas basadas en el juego y adecuadas al desarrollo cognitivo, físico y emocional de los pequeños, logrando un desarrollo del sentido numérico apropiado para afrontar los retos que supondrá el cambio de etapa educativa a los 6 años.

SENTIDO ALGEBRAICO

El álgebra se ha vinculado tradicionalmente al lenguaje simbólico con el que se comunican las Matemáticas (Alsina, 2020). Sin embargo, hay que considerar que existe también una larga tradición de promover conocimientos de naturaleza algebraica previos al simbolismo ya desde la Educación Infantil, como los distintos tipos de relaciones, los patrones o los cambios.

Autores como Montessori, Piaget o Dienes situaron estos conocimientos dentro de la *Lógica*, la *Lógica Matemática* o el *Razonamiento Lógico-matemático*. Alsina (2019b) indica que los currículos de infantil de países como Estados Unidos, Australia, Singapur o Nueva Zelanda han empezado a sustituir paulatinamente estas nociones por el término *Early Algebra* (Álgebra Temprana), que intenta introducir habilidades propias del pensamiento algebraico como la predicción o la generalización desde las primeras edades. A partir del análisis de contenido de estos currículos, Pincheira y Alsina (2021) han caracterizado el álgebra temprana en infantil como:

La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos (p. 175-176).

Considerando estos antecedentes, se presenta una síntesis de los principales conocimientos matemáticos y didácticos que debería movilizar el profesorado de infantil para promover el desarrollo del sentido algebraico en esta etapa educativa.

Conocimientos matemáticos y didácticos para promover el desarrollo del sentido algebraico en educación infantil

Con base en la caracterización del álgebra temprana, el profesorado de infantil debería tener un conocimiento de las matemáticas asociadas al sentido algebraico que puede movilizar un niño de esta etapa, asumiendo que debería conocerlas de una manera profunda y diferente a como debe saberlo un alumno (Alsina y Delgado, en prensa). Desde este punto de vista, Alsina (2022) se refiere a tres conocimientos importantes:

- Reconocimiento de atributos para establecer relaciones: el reconocimiento de atributos es un conocimiento físico acerca de las características de los

objetos del entorno (color, tamaño, tipo de material, olor, etc.) que, a su vez, es imprescindible para promover el conocimiento matemático propiamente, estableciendo diversos tipos de relaciones: relaciones binarias de equivalencia (clasificaciones), que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; relaciones binarias de orden (ordenaciones), que cumplen las propiedades antireflexiva, antisimétrica y transitiva; y las correspondencias, que son una ley que asocia determinados elementos de una agrupación A con uno o más elementos de otra agrupación B.

- Patrones: la identificación de patrones implica la observación y reconocimiento de regularidades o secuencias iterativas en objetos o datos. Rittle-Johnson et al. (2013), Wijns, et al. (2019) y Lüken (2020) han determinado que las tareas de modelado más frecuentes son: a) duplicar el mismo patrón; b) ampliar la secuencia; c) encontrar elementos faltantes; y d) construir el mismo patrón con diferentes materiales; siendo copiar, extender, interpolar y generalizar respectivamente, las principales habilidades.
- Descripción de cambios: el cambio es una idea matemática importante que se refiere a una transformación que, desde una perspectiva genérica, se puede entender como una operación que consta de un estado inicial, el cambio o transformación propiamente dicha a través de un operador, y un estado final (Alsina, 2006).

En relación a los conocimientos didácticos, que se focalizan en la organización y las prácticas enseñanza, Alsina (2015) y Alsina y Berciano (2020), entre otros, han identificado que los niños menores de tres años ya empiezan a realizar acciones vinculadas a los conocimientos descritos. Asimismo, diversos autores han planteado trayectorias de aprendizaje y/o propuestas de distribución de contenidos para niños de 3 a 6 años que contribuyen a desarrollar el sentido algebraico. Para el caso de los patrones, por ejemplo, Clements y Sarama (2015) y Rittle-Johnson et al. (2015) afirman que alrededor de los tres-cuatro años los niños son capaces de copiar un patrón. Las habilidades de extender e interpolar emergen a los cuatro años (Lüken, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013); y a partir de los 5-6 años identifican la unidad de repetición y transfieren dicho conocimiento para generalizar un patrón (Clements y Sarama, 2015; Rittle-Johnson et al. 2015).

Para promover el desarrollo progresivo del sentido algebraico, las experiencias informales de exploración del entorno, manipulación, experimentación y juego son imprescindibles en la Escuela Infantil (0-3 años). Autores como Goldschmied (2000), Alsina (2006, 2015) o Edo (2012), entre otros, describen propuestas como el cesto de los tesoros, el juego heurístico o las bandejas de experimentación, que permiten a los niños menores de 3 años descubrir de qué están hechos los objetos, qué acciones se pueden realizar con ellos, plantear hipótesis y conjeturas, etc. y, de este modo, iniciar el aprendizaje de conocimientos matemáticos intuitivos e informales que son la base del sentido algebraico.

Respecto al segundo ciclo, Alsina (2019, en prensa) propone itinerarios de enseñanza, es decir, secuencias intencionadas a partir de diversos recursos y estrategias didácticas organizadas en tres niveles:

- Recursos informales, que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta: situaciones reales, materiales manipulativos y juegos; p. ej., en la Figura 6 los niños descubren un patrón de repetición AB en una plaza (columna-farola), clasifican piezas por un criterio de forma y observan cambios de color a partir de la máquina de cambiar cualidades.



Figura 6. Recursos informales para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

- Recursos intermedios, que permiten avanzar hacia la esquematización y la generalización progresiva: recursos literarios y tecnológicos; p. ej., en la Figura 7 se muestra el cuento “La Ratita Presumida”, cuya estructura sigue siempre el mismo patrón, pero con un cambio al final que advierte que, aunque los patrones sirven para predecir lo que va a suceder, hay que estar atentos a los cambios y comprobar si las predicciones se cumplen o no; junto con un robot educativo programable para trabajar patrones que, a su vez, permite desarrollar el pensamiento computacional. Para Wing (2006), el pensamiento computacional se

vincula principalmente a la resolución de problemas haciendo uso de los conceptos fundamentales de la informática. Las principales habilidades asociadas son: formular problemas que permitan usar un ordenador u otras herramientas para encontrar la solución; organizar y analizar lógicamente datos; representar datos a través de abstracciones, como modelos y simulaciones; automatizar soluciones mediante la secuenciación de pasos ordenados: identificar, implementar y analizar posibles soluciones para conseguir la más eficiente; y generalizar y transferir un proceso de resolución a una amplia variedad de problemas (ISTE y CSTA, 2011).



Figura 7. Recursos intermedios para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

Como se aprecia en la segunda imagen de la Figura 7, al resolver la tarea de patrones se ponen en juego algunas de las habilidades indicadas, sin que ello signifique que el pensamiento computacional sirva exclusivamente para desarrollar el sentido algebraico. Desde este punto de vista, Alsina y Acosta (2018) establecen unos primeros vínculos entre la educación matemática infantil y el pensamiento computacional a partir de los procesos del NCTM (2003).

- Recursos formales, que permiten trabajar la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales: recursos gráficos; p. ej., en la Figura 8 se muestra un ejemplo de WODB (*Which One Doesn't Belong?*), un recurso creado por un profesor estadounidense en el que, a partir de cuatro situaciones representadas gráficamente, los niños deben pensar cual no pertenece y argumentar por qué a partir de características como el color, el tipo de alimento, la cantidad de elementos, etc.



Figura 8. Recursos formales para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

La planificación y gestión de la enseñanza del álgebra temprana en infantil a partir de estos itinerarios de enseñanza permite completar el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico y, lo que es más importante, empezar a desarrollar habilidades imprescindibles del sentido algebraico como la predicción y la generalización, que son una puerta de entrada a las matemáticas superiores.

SENTIDO ESPACIAL

El desarrollo del razonamiento espacial en las edades iniciales, no sólo se constituye en una base para que los niños puedan explicar el mundo que les rodea, sino también para generar conexiones entre diferentes ideas matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas como el arte, las ciencias, la tecnología, el diseño, las ciencias sociales, etc. (Moss et al., 2016). De acuerdo con Newcombe y Frick (2010) el pensamiento espacial se refiere a la ubicación de los objetos, sus formas, sus relaciones entre sí y las trayectorias que siguen cuando se mueven. El razonamiento espacial involucra diferentes acciones: visualización, localización, orientación, cambio de dimensiones, elaboración de mapas, transformaciones, diseño, composición y descomposición, entre otras (Davis y Spatial Reasoning Study Group, 2015). A continuación, se resaltan varios aspectos que es importante considerar en el fomento del sentido espacial en Educación Infantil.

Contextos y sentido espacial

Los niños se desarrollan en un contexto social que le brinda múltiples informaciones, que generalmente percibe por la propia exploración de lo que tiene alrededor.

El niño hace exploraciones y progresivamente crea formas de representación de los diferentes contextos: imágenes, diseños, y lenguaje verbal (Stocco et al., 2003). En consecuencia, es necesario brindar oportunidades para que los niños vivencien diversos tipos de contextos. No es lo mismo la experiencia de ver formas al subir una montaña que usar un conjunto de piezas de madera para hacer una construcción. No es lo mismo reconocer formas de la naturaleza que identificar formas en la cocina. Tampoco es lo mismo hablar del movimiento de un columpio o el que se produce en la elaboración de la masa para hacer pan. Todas estas situaciones ofrecen posibilidades diversas que junto con preguntas adecuadas pueden ayudar a agudizar el sentido espacial.

Si se posibilita que los niños vivencien experiencias en diferentes espacios, podrán identificar no sólo las formas en el universo sino también las transformaciones asociadas a acciones, como: cerrar/abrir; inflar/desinflar; estirar/apretar; encajar/apilar/entrelazar; vaciar/llenar; balancear/saltar; etc. Las experiencias en el suelo deben complementarse con la mirada del cielo, la pantalla del ordenador, o ver estructuras de realidad virtual. El trabajo con el mundo del arte permite hablar tanto de lo que se ve como de la función de los objetos como representaciones de ideas, sentimientos o vivencias.

Es necesario usar diferentes contextos y analizar sus potencialidades para desarrollar ideas geométricas. Empezar por los más cercanos, hasta proponer situaciones desconocidas a partir de videos o noticias televisivas. Otros escenarios como el juego y el cuento pueden situar a los niños para “viajar” en mundos diferentes pero necesarios para explorar su idea de espacio.

Una mirada cultural sobre el sentido espacial

La Geometría ha formado y forma parte de la cultura de nuestra sociedad. Desde que se habla de migración, o de traslado se habla de movimiento en el espacio. O bien cuando jugamos a la gallinita ciega o el cuatro en raya pensamos en situar objetos en el espacio (Bishop, 1999). Fenómenos como la observación de cambios en sombras, analizar qué pasa cuando se observan reflejos en espejos naturales, o contruidos, son observaciones que consideran este elemento cultural. Experimentar con espejos cilíndricos -como han hecho algunos artistas como Dalí-, implica introducir invenciones culturales que sorprenden a los niños y sirven como elemento de provocación para razonar y hablar de la forma, la medida, la posición, la repetición, entre otras nociones. Imaginar puntos de vista diferentes con ayuda de materiales manipulativos o medios tecnológicos como *google-earth* es otra experiencia cultural. Separar regiones como la tierra y el cielo mediante la línea del horizonte o línea del cielo, son experiencias clave para entender el nacimiento de la astronomía, y asociar elementos turísticos de la arquitectura.

Reconocer propiedades como la rodadura, el empaquetamiento, el equilibrio e identificar sus conexiones con ciertas relaciones geométricas (p.e. paralelismo, perpendicularidad, etc.) es importante para explicar el funcionamiento de muchos objetos y enriquece el sentido espacial. Por ejemplo, se puede asociar los balones/pelotas a objetos que ruedan pero que no lo hacen de la misma manera que los objetos con forma de cono. También se puede explorar la idea de estabilidad de formas arquitectónicas asociada a la simetría, de hecho, los niños lo hacen de manera intuitiva en sus construcciones libres (De Castro y Quiles, 2014). Otro caso puede ser el análisis de la repetición en el mundo artístico, el cual permite iniciar la mirada a los mosaicos y las transformaciones. Con estas observaciones, mostramos a los niños que el pensamiento visual es importante en muchos dominios del conocimiento actual: desde la ingeniería, la arqueología, la arquitectura, el diseño, etc.

Hablar del sentido espacial, implica reconocer que se trata de una reflexión cultural. Muchos juegos tradicionales tienen su base en observaciones espaciales. Reconocer el porqué de la forma de los iglús y/o las inclinaciones de los techos en países con un clima predominantemente frío es hacer conscientes a los niños de los modelos de la geometría en distintas culturas.

Construcción de un lenguaje asociado al sentido espacial

Promover sentido espacial implica desarrollar capacidades diversas en cada persona. Supone un largo proceso, que requiere: explorar, comparar, expresar verbalmente e interiorizar (Canals, 1997). Requiere de un lenguaje adecuado para describir relaciones y descubrimientos. Los niños necesitan disponer de referencias que les permitan explicar cómo es su casa, su clase, su barrio, su ciudad, etc. Actualmente los niños ven el mundo a través de cuentos, dibujos, pinturas, TV, videojuegos, etc., y desde allí incorporan expresiones/palabras como arriba, abajo, grande, estrecho, gira, mueve, entre muchas otras, las cuales se debe ayudar a significar con el trabajo que se haga de ellas en el aula. El lenguaje asociado al sentido espacial, además de implicar el uso de referentes, debe permitir a los niños hablar de diversas situaciones desde describir dónde están, dónde se encuentra un objeto que quieren, dónde encontrar determinado producto en el supermercado hasta hablar de la proximidad o lejanía de sus casas a la de sus seres queridos y/o amigos.

El sentido espacial no se adquiere recibiendo información, ni consiste sólo en reconocer visualmente determinadas formas y saber su nombre correcto. El lenguaje se debe ir incorporando de manera progresiva, incidiendo especialmente en la comprensión que los niños van construyendo de las nociones y explorando diferentes formas de representación y comunicación de las ideas espaciales.

La dimensionalidad y referencialidad



El desarrollo del razonamiento espacial en los niños implica trabajar la orientación espacial. Esto supone, saber situarse; establecer relaciones entre los objetos respecto a uno mismo como referencia según donde están situados; y, por último, situar objetos en el entorno. Todo ello comporta hablar de posición, movimiento, localización, distancias, medidas, etc., aspectos clave en la comprensión de los sistemas de referencia (Clements, 2004). Aquí entran en juego experiencias como la elaboración e interpretación de mapas, el seguimiento o planteamiento de instrucciones para seguir un itinerario, pero considerando que los niños deberían iniciar recreando situaciones de orientación usando materiales concretos, luego hacer dibujos de la organización de dichos objetos, para finalmente elaborar mapas que incluyan el uso de códigos y la utilización de símbolos (Vanegas, 2018).



La comprensión y representación de las relaciones espaciales es uno de los desafíos de formación en las edades iniciales. El sentido de localización implica reconocer sistemas de referencia propios o externos; ubicar objetos, seguir estrategias de orientación, interpretar instrucciones de navegación y construir representaciones como los mapas, itinerarios o una maqueta. Todas estas actividades son complejas (involucran diferentes procesos y nociones), pero de gran riqueza para fomentar el sentido espacial.

Promover habilidades espaciales

Una actividad geométrica que busca un aprendizaje significativo involucra diversas habilidades (de dibujo, de construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia, entre otras), por ello es importante potenciar procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación (Clements, 2004; Giménez y Vanegas, 2007). Además, las habilidades de pensamiento espacial y el razonamiento geométrico desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas; el aprendizaje matemático y la comprensión lectora de los niños (Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2008). Como educadores es primordial conocer y promover actividades que potencien dichas habilidades en los niños. Y, generar un entorno de aprendizaje que les permita discutir y evidenciar sus progresos sobre las ideas geométricas (Clements et al., 2018). Para finalizar y concretar algunas de las ideas expresadas en este apartado en la Tabla 1 se describen ejemplos de actividades señalando algunas de las habilidades que potencian.

Tabla 1. Ejemplos de actividades que potencian el sentido espacial

Actividad	Descripción	Habilidades
<p>¿Hacemos un diseño?</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Se presenta a los niños el material • Dependiendo del material disponible, se puede pedir a los niños, que usen en su diseño, todas las piezas o acotar si se quiere focalizar en un aspecto (cierta forma, una cantidad de piezas, etc.). • El diseño puede ser libre o asociado a una temática que se esté abordando en el aula. También se pueden pedir diseños relacionados a objetos y/o personajes de una historia en particular. • Generar un diálogo para que el niño describa qué ha querido representar con su diseño. 	<ul style="list-style-type: none"> • Visualización • Composición figuras de 3D • Comunicación
<p>¿Dibujamos?</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Se presenta un diseño a los niños (Puede ser uno de los que hayan realizado en la actividad anterior) • Se pide a los niños analizar el diseño y determinar cuáles y cuántas piezas se han utilizado • Se pide a los niños hacer un dibujo de las partes del diseño en papel 	<ul style="list-style-type: none"> • Visualización • Composición y descomposición de figuras de “D y 3D • Representación
<p>¿Hacemos un dictado geométrico?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Se da a los niños instrucciones orales para construir una figura en 2D o 3D. • Se da un tiempo para que los niños construyan una imagen mental de la figura descrita en las instrucciones • Los niños dibujan o construyen la figura del dictado. • Se muestran cada una de las elaboraciones a toda la clase • Se discute/razona sobre las similitudes y/o diferencias que tienen los dibujos/figuras construidas por los niños 	<ul style="list-style-type: none"> • Visualización • Composición y descomposición de figuras de “D y 3D • Representación • Comprensión del lenguaje espacial

Actividad	Descripción	Habilidades
 <p>¿Cómo ir del aula al comedor?</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Se plantea a los niños una situación en la que se debe ayudar a un alumno nuevo i/o invitado para que pueda dirigirse de un lugar a otro de la escuela (p.e. de la clase al comedor). • Se pide a los niños que individualmente realicen un dibujo que describa el recorrido que ellos hacen para ir de la clase al comedor de la escuela. • Se comparte en la clase las diferentes propuestas elaboradas por los niños. Se analiza el tipo de información que se presenta. • Se pide a un niño que interprete el dibujo propuesto por otro. Se aprovecha para hablar si contiene toda la información necesaria para que la persona sepa llegar al comedor. • Se pide a los niños que añadan, modifiquen para mejorar su propuesta. 	<ul style="list-style-type: none"> • Representación • Uso del lenguaje espacial • Orientación • Razonamiento visual-espacial • Localización

SENTIDO DE LA MEDIDA

El sentido de la medida es fundamental para la comprensión del mundo que nos rodea. Su desarrollo es lo que nos permite describir los objetos y situaciones en las que nos encontramos: el edificio es grande, el juguete es pequeño, el colegio está cerca, o lejos, de casa, ..., y uno de sus fines puede ser asignar un valor numérico a un atributo como puede ser la longitud o el peso de un objeto.

La noción de medida está estrechamente relacionada con la geometría y la aritmética y, en ocasiones, se presenta mediante aplicación de métodos e instrumentos de medida estructurados, cuyo uso supone entender los procesos de medida y el concepto de unidad de medida.

Sin embargo, hasta llegar a este nivel de comprensión, el desarrollo del sentido de la medida ha de pasar, especialmente en la etapa de Educación Infantil, por: comprender cuáles de los atributos de un objeto son susceptibles de ser medidos; establecer comparaciones entre los objetos para decidir “cuál es más largo o más corto”, “cuál pesa más”, “cuál es más grande”,...; comprender como medir o esti-

mar medidas con medidas no estándar y estándar; o saber elegir el instrumento y la unidad apropiados para medir.

Mediante la manipulación y la experimentación, que son actividades habituales en esta etapa, y partiendo de la comprensión intuitiva que las experiencias previas de medir proporcionan, se construye el significado de la medida.

La enseñanza de la medida en Educación Infantil

Los estándares que plantea el NCTM (2003) para la medida indican que todo el alumnado debería: comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida; y aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas. La concreción de estos estándares coincide con las recomendaciones del Comité Español de matemáticas (CeMat, 2021) al plantear que en Educación Infantil todo el alumnado debería: reconocer los atributos mensurables de los objetos (volumen, longitud, masa, capacidad, grosor, tiempo); componer y descomponer atributos mensurables de un objeto; clasificar, ordenar y establecer correspondencias entre objetos según sus atributos mensurables.

Así mismo, la nueva ordenación curricular contempla la inclusión de determinados aspectos del sentido de la medida en las tres áreas en las que se organiza: crecimiento en armonía, descubrimiento y exploración del entorno, y comunicación y representación de la realidad, si bien es en la segunda en la que más se mencionan. Concretamente, la primera de las competencias específicas asociadas a esta área consiste en:

Identificar las características de materiales, objetos y colecciones y establecer relaciones entre ellos, mediante la exploración, la manipulación sensorial, el manejo de herramientas sencillas y el desarrollo de destrezas lógico-matemáticas para descubrir y crear una idea cada vez más compleja del mundo.

Más específicamente, tanto en el primer ciclo como en el segundo, aparece mención expresa a establecer relaciones entre los objetos atendiendo a sus cualidades o atributos (entre los que podemos considerar el tamaño), ubicarse en los espacios habituales (relacionado con nociones de proximidad o lejanía), o identificar situaciones en las que es preciso medir, utilizando el cuerpo u otros materiales y herramientas.

Atendiendo a las ya mencionadas recomendaciones de NAEYC y NCTM (2002) y el propio currículum de Educación Infantil establecido en el Real Decreto 95/2022, se sugiere el desarrollo de una metodología activa, articulada en torno a situaciones de aprendizaje.

Para el diseño de estas situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo adecuado del sentido numérico podemos basarnos en las trayectorias de aprendizaje

de Sarama y Clemens (2009), que describen no solamente los conceptos matemáticos que niños y niñas son capaces de comprender sino el proceso que siguen en su comprensión y las acciones de la persona adulta que les acompaña en el aprendizaje que pueden favorecerlo.

Una secuencia de enseñanza debe contemplar:

- Identificación de la magnitud: reconocimiento de la magnitud. La descripción de los objetos, y las preguntas que se les planteen, permite fijar su atención en determinada característica del objeto y no en otras (haciendo énfasis por ejemplo en la longitud y no en el color).
- Comparación de magnitudes. Comparación directa, con o sin desplazamiento de los objetos, comparación indirecta, con objetos intermedios, partes del propio cuerpo o con objetos auxiliares.
- Ordenación de cantidades de magnitud.
- Medida de magnitudes con unidades no estándar y estándar, identificación de un valor numérico con la magnitud medida.

El uso y la comprensión del sistema de medida decimal y los cambios de unidades, así como las cuestiones relativas a la precisión en la medida, quedan para niveles educativos superiores.

La magnitud que primero se hace evidente para los niños y niñas de educación infantil es la longitud. Son propensos a realizar comparaciones entre sus alturas, ordenarse de mayor a menor, colocarse los altos atrás, y querer ponerse “más cerca”. Esto nos permite tomar en consideración dos aspectos de la longitud como dimensión de un objeto y como distancia entre dos objetos, este último más difícil de comprender.

Un ejemplo de aparición de la idea de longitud se puede observar en la secuencia siguiente. Se había pedido a los niños y niñas que llevaran a clase almuerzos naranjas durante la semana. Partiendo de una situación inicial en la que el objetivo era clasificar los distintos almuerzos en función de sus características geométricas y contar cuántos había de cada clase, del grupo surgió la idea de organizarlos en fila. Para saber si había “muchos o pocos” se les ocurrió comparar “¿cuántos de largo somos?” y se tumbaron sobre las mesas para hacer una comparación directa. La siguiente pregunta que se plantearon es “si los ponemos en una fila en el suelo ¿cabe en la clase? ¿hasta dónde llegará?”. La maestra se pregunta si es fácil poner todos los almuerzos en fila en el suelo o si es conveniente, y si no habrá otra forma de responder a las preguntas. Mediante una lana colocada a lo largo de la fila se puede transportar la longitud y hacer comparaciones con el largo de la clase o la altura de la maestra. El resultado de la actividad se registra individualmente (Figura 9).



Figura 9. Desarrollo de actividad de longitud en 3 años

Una secuencia similar podemos plantear para trabajar el volumen. Partiendo de un obsequio traído a clase por el padre de un niño, un recipiente de dulce de membrillo elaborado por él, se presenta en asamblea y se pregunta ¿cuánto hay? ¿hay mucho? ¿hay poco? ¿cómo podemos representar cuánto hay? Surge la idea de utilizar los multicubos encajables para “hacer un trozo igual”. Esta idea es aprovechada por la maestra para plantear preguntas como “¿igual en qué? ¿de color? ¿de forma?” “noooo, de grande”. Se facilitan cubos suficientes para que cada persona pueda construir su “pieza de membrillo” y a medida que lo van construyendo pueden acercarse al modelo las veces que necesiten (Figura 10).



Figura 10. Desarrollo de actividad de volumen en 4 años

Para favorecer la comprensión del peso planteamos preguntas relativas a objetos cotidianos como la bolsa de la compra, la mochila del cole “¿pesa mucho? ¿es fácil de levantar?” para continuar con comparaciones “¿qué cuesta más levantar, el balón o la sandía?”. Para ordenar la cantidad de peso podemos estimar la cantidad de agua que hay en una colección de botellas. La primera aproximación permite a los niños y niñas levantar cada botella y comparar unas con otras para hacer una ordenación. El uso de un peso les permite asignar un valor numérico a cada recipiente, que dependerá de la cantidad de agua que contiene, y les llevará a una ordenación que puede coincidir, o no, con la estimada previamente (Figura 11).



Figura 11. Desarrollo de actividad de peso en 5 años

SENTIDO ESTOCÁSTICO

La incorporación de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil es reciente. A principios del siglo XXI, por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003) propone estándares de contenido de “Análisis de datos y probabilidad” a partir de los 3 años. Desde entonces, algunos países han empezado a incluir la estadística y la probabilidad de forma explícita en los currículos de Infantil, a medida que han reconocido la importancia de que se empiecen a desarrollar progresivamente los primeros conocimientos para interpretar los datos de manera crítica y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, que son habilidades imprescindibles para los ciudadanos del siglo XXI (Alsina, 2022).

Considerando estos antecedentes, este apartado se organiza en torno a las tres dimensiones para caracterizar la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil propuestas por Alsina (2021): las finalidades (¿para qué se enseña? y ¿por qué se enseña?), la organización de la enseñanza (¿qué se enseña? y ¿cuándo se enseña?) y las prácticas de enseñanza (¿cómo se enseña?).

Finalidades de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

Alsina (2017) señala que la presencia explícita de contenidos de estadística y probabilidad en las primeras edades trata de dar respuesta a una necesidad social, ya que la ciudadanía se ve enfrentada constantemente a una gran cantidad de datos recibidos a través de diversos medios. Desde esta perspectiva, la primera finalidad es iniciar el desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística que se refieren, respectivamente, a la capacidad de las personas para interpretar datos, evaluarlos críticamente y, cuando sea pertinente, expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos (Gal, 2002); y a la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real (Gal, 2005).

Otra finalidad relevante es poner de manifiesto, desde los primeros niveles, que la estadística y la probabilidad mantienen estrechas conexiones en el marco de la estocástica (Alsina, 2021), que incluye lo que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico. Así, cuando tenemos un experimento aleatorio con resultados equiprobables, podemos intentar predecir el resultado con cierto grado de certidumbre, por ejemplo, al lanzar un dado. Después de realizar el experimento, el resultado se habrá producido o no, pero una sola repetición no respalda ni refuta el grado de certidumbre. En consecuencia, sería necesario tener un gran número de repeticiones para poder revisar dicha probabilidad, y ahí es donde interviene la estadística descriptiva para recopilar, organizar y analizar los datos del resultado de ese experimento cuantas veces haya sido realizado. De este modo, en el ejemplo indicado, el hecho de sacar un cinco no implica que siempre se obtenga este mismo valor al lanzar un dado, por lo que se puede estudiar el comportamiento del azar mediante una investigación estadística (p. ej., al lanzar 30 veces un dado).

Organización de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

El NCTM (2003) tiene el mérito de haber explicitado los conocimientos en estadística y probabilidad que deberían aprender los niños a partir de los 3 años, como se ha indicado. Estos conocimientos se organizan alrededor de tres estándares de contenido: formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; y comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad. Más en concreto, para las primeras edades recomiendan proponer preguntas y recoger

datos relativos a ellos y su entorno; ordenar y clasificar datos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquellos; representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos; describir parte de los datos y el conjunto total de los mismos para determinar lo que muestran los datos; y, finalmente, discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias del alumnado.

A partir de estos estándares, principalmente, (Alsina, 2022) hace una propuesta de organización de los contenidos de estadística y probabilidad para el 2º ciclo de Educación Infantil (3-6 años), alrededor de dos tipos de actividades: identificación y comparación de datos y hechos. Siguiendo el ciclo de investigación estadística propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), estas actividades se refieren a la recogida y la organización de datos (p. ej., a través de tablas de recuento y de frecuencias), junto con la representación a través de gráficos concretos (con materiales manipulativos) y su posterior interpretación. Se trata de datos cercanos a la propia experiencia, que pueden ser propuestos por el profesorado o bien por el alumnado.

Con relación a la probabilidad, diversos autores (e. g., Alsina, 2021, 2022; Batanero et al., 2021) proponen que las niñas y los niños menores de 6 años establezcan un primer contacto con el significado intuitivo de la probabilidad y empiecen a usar de forma comprensiva lenguaje probabilístico elemental en el marco de una escala cualitativa que vaya desde “imposible” hasta “seguro”, en situaciones de incertidumbre que forman parte de su entorno y que permitan ir desarrollando progresivamente el razonamiento probabilístico.

Prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

El NCTM (2003), por ejemplo, recomienda presentar un enfoque experimental que permita proporcionar una experiencia estocástica desde Infantil. También el Proyecto GAISE (Bargagliotti, 2020; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016; Franklin et al. 2005), aunque no se centra en Infantil, recomienda enseñar el pensamiento estadístico como un proceso investigativo de resolución de problemas y toma de decisiones, centrarse en la comprensión conceptual, integrar datos reales con un contexto y propósito, fomentar el aprendizaje activo o usar tecnología para explorar conceptos y analizar datos.

Batanero y Díaz (2011) ubican estos planteamientos en el enfoque del trabajo con proyectos, que pretende que el alumnado sea capaz de aplicar sus conocimientos a la resolución de problemas que sean significativos para ellos, para su entorno, siguiendo los pasos de un ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999). Estos proyectos otorgan protagonismo al alumnado, además de “favorecer el aprendizaje significativo, promueven el trabajo en grupo y desarrollan capacidades como la reflexión y la autonomía del alumno” (Anasagasti y Berciano, 2016, p. 33). De forma complementaria al trabajo con proyectos, Godino et al. (1987) promueven también

el uso de materiales manipulativos y otros recursos para la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde Educación Primaria.

Considerando estas distintas estrategias y recursos didácticos, las actividades que planteemos desde Educación Infantil en estadística y en probabilidad, atendiendo a los conocimientos que se pueden movilizar, deben estar encaminadas a la argumentación y a la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre de contextos próximos a los niños y las niñas, que les permitan manejarse progresivamente con cierta soltura respecto a qué información se maneja en cada caso, antes o después de realizar un experimento aleatorio (Alsina et al., 2021).

Así, tomando como referencia el ejemplo anterior del dado, una práctica de aula con alumnado de 3, 4 o 5 años podría seguir la siguiente secuencia:

- 1) Contexto asociado a una rutina cercana al alumnado, por ejemplo, la cocina: “imaginad que colocamos un dado en una sartén, la movemos y tras un par de vueltas la cara superior del dado ha cambiado, esto es, la parte de arriba del dado... ¿qué cantidad de puntos aparece ahora? (Figura 12, izda.).
- 2) Todo el alumnado interactúa con los dados y la sartén y a partir de la observación de lo que ocurre en cada lanzamiento gracias a las preguntas de la maestra (¿qué veis?, ¿puntos?, ¿cantidad?), se observan varias caras del dado y se establece una relación entre los puntos de cada una y la cantidad que representan. A partir de la observación y comparación de elementos concretos, se trata de abstraer y representar la cantidad (Figura 12, centro).
- 3) Posteriormente, la maestra guía por medio de preguntas la secuencia asociada a la repetición de los lanzamientos (¿qué número te ha salido?, ¿cuál es mayor?, ¿cuál es menor?, ¿cuánto mayor es?, ¿cuánto menor?, etc.).
- 4) Finalmente, todo el alumnado registra y observa los resultados extraídos tras cada lanzamiento, recogiendo así la información en tablas de recuento (Hoong et al., 2015; Rodríguez-Muñiz et al., 2021); para, posteriormente, establecer una conversación con la maestra que invita a hablar de casos posibles, imposibles, qué es el azar, etc. (Figura 12, derecha).



Figura 12. Detección e identificación de las características de las caras del dado (izdo.). Correspondencia entre la cantidad y sus representaciones (centro). Recolección de datos en una tabla de recuento (dcha.)

RECURSOS Y ASPECTOS METODOLÓGICOS. ¿DÓNDE, CUÁNDO Y CÓMO APRENDER MATEMÁTICAS EN INFANTIL?

Empezamos afirmando que en la Educación Infantil se puede aprender matemáticas *en y de* cualquier situación. Sólo es necesario que las maestras y maestros dominen los contenidos matemáticos, detecte la presencia de estos en cualquier situación, escoja posibles objetivos de aprendizaje para sus alumnos, y comparta preguntas, reflexiones, retos y actividades con su grupo para conocer mejor algún tema, resolver alguna pregunta u organizar algún evento, entre otros.

Actualmente, existe una gran diversidad de situaciones didácticas escolares para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil, por ejemplo: proyectos, rincones, sesiones en gran grupo, talleres, ambientes, espacios, microespacios, provocaciones, rutinas, el día a día del aula, la gamificación, etc. Además, a menudo no se define cada una de estas dinámicas de la misma forma, por ejemplo, en un centro proponen una serie de actividades concretas en los ‘rincones’ y en otro centro planten las mismas propuestas en sus ‘espacios’. Así que, vamos a intentar hacer un recorrido por distintas situaciones didácticas de Infantil, aunque no focalicemos en los nombres en concreto.

Los aspectos que nos ayudaran a presentar y discriminar estas situaciones didácticas son: las características de la propuesta y el tipo de participación de las personas implicadas, es decir, el rol del maestro y el tipo de participación del alumnado.

Rutinas

Las rutinas son actividades que se repiten de forma regular en el aula, independientemente del resto de situaciones didácticas que se hayan seleccionado (Edo y Revelles, 2004). Las rutinas cumplen funciones de organización del grupo con la intención de ayudar a conocer la secuencia de dinámicas en el aula, poder anticipar qué va a pasar y así aumentar la seguridad y la autonomía del alumnado. En Infantil, estas son actividades de aprendizaje y enseñanza y varias de ellas tienen gran relación con contenidos matemáticos curriculares. Ejemplos de estas actividades son: Pasar lista y recuento de los compañeros ausentes. Señalar el día en el calendario y escribir la fecha. Señalar días especiales en el calendario. Repartir, distribuir y reponer materiales. Organizar los alumnos en filas o grupos. Organizar y distribuir mesas y sillas en el aula o en los rincones. Registrar y comparar el tiempo meteorológico, etc. En estas actividades los maestros conducen las dinámicas y con el tiempo, van cediendo el control de las mismas a los alumnos (Coll et al., 1999) El uso regular del calendario puede ser una poderosa herramienta para aprender a leer y nombrar números, para situarse y estructurar conceptos temporales, para aplicar pequeños cálculos, resolver interrogantes, comparar cantidades, etc. (ejemplo en Edo, 2005).

Hechos puntuales en el día a día escolar

En este caso nos referimos a aprovechar alguna situación imprevista para compartirla, estudiarla o resolverla conjuntamente con el grupo. Por ejemplo, una niña ha encontrado un ‘bicho palo’ en el patio, animal que suscita interés y desean conocerlo más. Así que buscan información y descubren que es un insecto, que tienen 6 patas, 3 a cada lado, que es simétrico, que tiene 2 antenas, que suelen medir de 7 a 10 centímetros, que las hembras ponen 3 o 4 huevos cada día, etc. Otro ejemplo, hay un día que desean cambiar la disposición de las mesas en el aula, la maestra invita a los alumnos a estudiar posibles composiciones: ¿Cómo las colocaríais vosotros? A medida que los niños y niñas van representando y mostrando arreglos de mesas van apareciendo los ‘condicionantes’. Si las colocamos así ¿todo el mundo podrá ver la pizarra? ¿Podremos pasar entre las mesas? Si tocan a la pared ¿podremos sentarnos todos?, etc. (Carbó y Gracia, 2009). En estas situaciones, es realmente importante que la decisión final sea por votación de todo el grupo y que esta se lleve a cabo. Implicar el alumnado en la toma de decisiones que les afectan es muy interesante y productivo pero los maestros deben estar dispuestos a ceder, al grupo, la última decisión y a aplicar lo que el grupo elija.

Sesiones en gran grupo

Hay centros que organizan el trabajo matemático (siguiendo alguna editorial, o no), realizando sesiones (una o más por semana) de forma regular. Estas sesiones en gran grupo focalizan principalmente en algún contenido matemático concreto. En este caso existe una programación *a priori* y ésta asegura que se presentan todos los contenidos curriculares a lo largo del curso. El rol del maestro es el de diseñar un conjunto de actividades, preparar los materiales y guiar el desarrollo de la sesión. El alumnado sigue las consignas del maestro. Esta dinámica puede ser constructiva si, durante el desarrollo de la sesión, se alternan actividades en las que el adulto expone, pregunta o guía un diálogo con otras en las que el alumnado debe enfrentarse, en pequeños grupos o individualmente, a retos o propuestas que deben llevar a cabo sin prácticamente ayuda del maestro. Una buena secuencia de actividades para estas sesiones sería: se inicia la sesión con un diálogo, sigue una actividad en pequeño grupo, a continuación, se realiza una actividad de representación individual y aparece un nuevo diálogo conjunto como conclusión final. Veamos un ejemplo de I4: La maestra desea que los alumnos practiquen pequeños cálculos (+1, +2, +0) y la composición de pequeños números (entre 0 y seis). Les presenta el juego ‘cuadrado y ángulo’ (Figura 13). Para ello se dibuja en el suelo un cuadrado de 1,5m. de lado y un cuadrado más pequeño (40cm.) concéntrico al primero. Se marca también una zona en cada uno de los 4 ángulos. Cada jugador, en su turno, se coloca en el cuadrado central y dispone de 3 piedras o chapas que lanzará haciendo puntería. Si la piedra

va dentro de la zona del ángulo vale 2 puntos, dentro del cuadrado grande 1 punto y si va fuera 0 puntos. A continuación, los niños y niñas juegan, practican e intentan llevar los cálculos de su puntuación. En un momento determinado la maestra ofrece una hoja para que anoten sus puntuaciones de la última partida. Al volver a clase se pide a los alumnos que realicen una representación gráfica siguiendo las pautas de 'la página en blanco' (Edo, 2021).

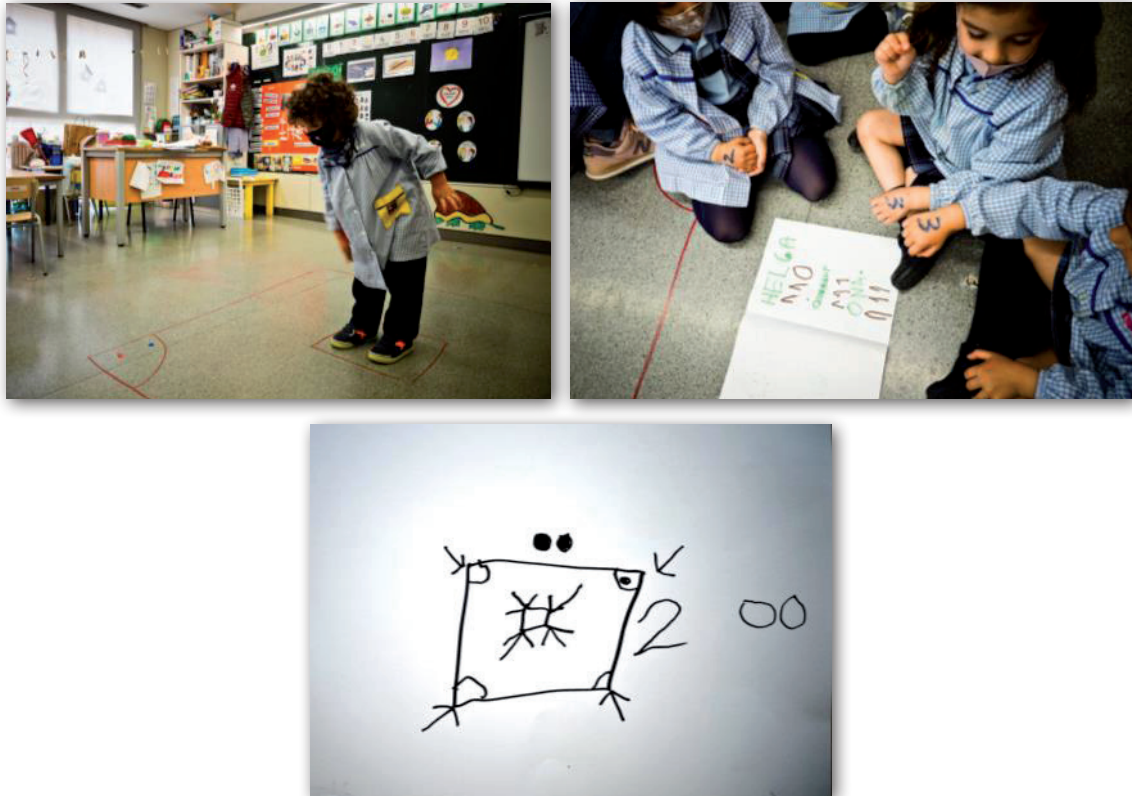


Figura 13. Vemos a un niño jugando a cuadrado y ángulo. Vemos la hoja donde han anotado las puntuaciones de cada tiro y el total escrito en el dorso de su mano. Vemos una hoja en blanco donde interpretamos que este jugador obtiene un total de dos puntos por haber colocado una piedra en la zona de un ángulo y dos ceros (escritos con el numeral) y representados con dos piedras fuera del cuadrado

El trabajo por proyectos

Los proyectos se crean para saber más sobre algún tema que ha elegido el grupo y son necesariamente interdisciplinares. Los alumnos deben escoger, pensar, investigar, proponer, discutir, argumentar, rectificar y consensuar... competencias que les ayudan a ser más autónomos y críticos. Suele hacerse un dialogo inicial sobre ¿Qué sabemos? del tema elegido y ¿qué queremos saber? A partir de aquí, se busca información que

se va compartiendo con los demás compañeros para llegar a consensos. En esta dinámica los maestros: guían los alumnos en sus descubrimientos, proporcionan recursos para que sean los ellos los que construyan sus conocimientos. Los alumnos buscan y aportan datos y conocimientos que comparten, discuten con los demás. (Serrano, 2012). Muchos centros aprovechan la elección del nombre de la clase para realizar un proyecto de estas características, que a grandes rasgos contiene estas fases: elección del tema de estudio, ¿Qué sabemos y qué debemos saber? Comunicación y recogida de las ideas previas. Búsqueda de fuentes de información. Organización y puesta en marcha del trabajo. Desarrollo de propuestas. Dialogo de conclusión. En Educación Infantil suelen aparecer temas, como: las ballenas, los volcanes, las mariposas, el bicho palo, los planetas y el universo, etc. En cualquiera de estos temas, y otros que podamos nombrar, siempre hay algún aspecto del tema que conecta con el contenido de número y cantidad (cuantas aletas, patas...); también aparecen aspectos de medida (cuánto pesa, mide de longitud, de altura...); también intervienen contenidos de relación y cambio como agrupar y clasificar por categorías universales (mamífero - no mamífero, insecto - no insecto, estrellas - planteas, etc.); en ocasiones contenidos geométricos de forma o de posición (el volcán tienen forma cónica; el bicho palo es simétrico; los planetas tienen forma de esfera). Así que, solo podemos invitar a los maestros a estar atentos, al realizar un proyecto, y evidenciar y compartir los contenidos matemáticos que nos ayudan a conocer mejor cualquier tema.

Rincones y talleres

El trabajo por rincones consiste en organizar el aula en varios espacios donde los alumnos, distribuidos en pequeños grupos, realizan actividades simultáneas de manera autónoma. Esta organización posibilita que cada pequeño grupo realice una tarea determinada y distinta a las demás. Según el tipo de actividad algunos rincones pueden requerir la presencia de la maestra; en otros los niños actúan con gran autonomía. Los rincones crean una dinámica que favorecen el aprendizaje de todos los niños ya que, se respeta el ritmo de cada uno, se basan en la exploración directa de materiales, potencian la autonomía y la seguridad en uno mismo, y los niños adquieren responsabilidades como, por ejemplo, el cuidado de los materiales. El maestro decide el número de rincones simultáneos, los contenidos y objetivos de aprendizaje de cada uno, prepara los espacios y los materiales, decide la forma que los alumnos escogerán los rincones y cuando y como se cambia de rincón. La rotación de cada alumno por los distintos rincones varía según el centro, desde la permanencia de cada alumno a un único rincón por sesión hasta los centros en los que la maestra marca los momentos de cambio de forma regular, cada 15 minutos. Para promover realmente la iniciativa y la autonomía sería recomendable que los niños y niñas pudieran escoger algo, el rincón al cual ir, la tarea que desean realizar o cuando quieren cambiar.



Figura 14. Una de las propuestas de un rincón. Hay varias plantillas y piezas de colores. Los niños pueden cubrir y reproducir un modelo, pueden cubrir y completar o construir la imagen en otra cuadrícula de distinto tamaño (homotecia)

Ambientes, espacios, microespacios, provocaciones

Los ambientes son espacios de aprendizaje, de relación y de comunicación preparados por los adultos, con materiales bien seleccionados, bien dispuestos y pensados para satisfacer las necesidades evolutivas de los niños (Silvente, 2017). Cada ambiente cuenta con una serie de propuestas que ofrecen nuevos retos a los niños. La característica fundamental de los ambientes, espacios o provocaciones es que la actividad que realiza cada alumno es autónoma y se permite la libre circulación entre espacios o ambientes. Son actividades no directivas y que responden al interés genuino de cada alumno. En estos ambientes los alumnos realizan sus actividades a partir de su motivación intrínseca (sin necesidad de ningún incentivo externo ni esperar ninguna recompensa). Esta motivación, la que surge de su interés natural, es la que produce mayores aprendizajes al dar respuesta a las necesidades reales de cada individuo. La función de los maestros es preparar bien los materiales y los espacios y hacer de organizadoras, de mediadoras que faciliten el proceso de aprendizaje. Los niños disponen de un tiempo de experiencia activa, no directiva; preparada por el adulto, pero reconstruida por ellos mismos, donde se reúnen para explorar diversas posibilidades de juego y de los materiales.



Figura 15. Ambiente con geoplanos, gomas, tarjetas y papel pautado.
Acceso libre -si no supera el número máximo de participantes-
y cada cual decide qué desea hacer

Gamificación, ludificación

La gamificación en el aprendizaje consiste en la incorporación de elementos y dinámicas propias de los juegos en entornos de aprendizaje, todo ello con el objetivo de potenciar la motivación, promover el esfuerzo e inspirar al alumnado a través del juego y del compromiso. Sin embargo, debemos vigilar porque entre los elementos propios del juego a menudo se destacan la competitividad y los premios, aspectos que no serían muy adecuados en Infantil. Por otra parte, el 'juego' puede y debe estar presente en cualquiera de las otras dinámicas enunciadas hasta ahora, así que, no creemos necesario diseñar dinámicas de 'gamificación' extra. Por el contrario, recomendamos vivamente el uso de juegos en sesiones de gran grupo, en el trabajo por rincones, en los ambientes, e incluso en las rutinas.

Hasta aquí un breve repaso a las dinámicas más frecuentes. A estas deberíamos añadir los espacios de juego simbólico, los espacios de construcción, las propuestas relacionadas con arte, cuentos, danzas, canciones, psicomotricidad, etc. Al ser imposible ser exhaustivo pasamos a las recomendaciones finales.

Reflexiones y recomendaciones sobre la pregunta inicial

Luego ... ¿Dónde, cuándo y cómo aprender matemáticas escolares? Una vez revisadas las dinámicas más frecuentes, recomendaríamos:

- No centrarnos en una sola dinámica. Diversificar las situaciones didácticas con contenidos matemáticos. Procurar alternar propuestas más guiadas con otras con alto grado de autonomía infantil.
- Cuanto más pequeños son los alumnos más presencia de tareas abiertas, exploratorias y no directivas. Las sesiones en gran grupo funcionan mejor con los alumnos mayores (I4 y I5).
- No preocuparse mucho del ‘nombre’ de la dinámica escogida y reflexionar sobre aspectos metodológicos como:
 - Diversificar las agrupaciones de los alumnos (individual, parejas, pequeño grupo, media clase, gran grupo).
 - Ofrecer retos y resolución de problemas en cualquiera de las dinámicas.
 - Crear espacios y propuestas autónomas y no directivas donde pueda aflorar la motivación intrínseca.
 - Aprovechar las rutinas, los imprevistos, los proyectos para evidenciar las matemáticas y compartirlas con los pequeños.
- Usar ‘el juego’ como recurso inestimable, en cualquiera de sus variaciones: exploratorio, reglado de motricidad gruesa, juegos de mesa, juegos verbales, etc.

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, A. (2011). Consideraciones didácticas para la enseñanza de los números escritos en las primeras edades. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 67, 21-26.
- Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 100-153.
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 95, 25-48.
- Alsina, Á. (2019a). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 1-19. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19>
- Alsina, Á. (2019b). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números*, 100, 85-108.
- Alsina, Á. (2020). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(2), 1-20. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2020.1-20>
- Alsina, Á. (2020). Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 5-20. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16>
- Alsina, Á. (2021). “Ça commence aujourd'hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA*, 15(4), 243-266. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357>

- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.
- Alsina, Á. y Berciano, A. (2020). Developing informal mathematics in Early Childhood Education. *Early Child Development and Care*, 190(13), 2013-2031. <https://doi.org/10.1080/03004430.2018.1555823>
- Alsina, Á. y Delgado, R. (en prensa). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*.
- Alsina, Á. y León, N. (2016). Acciones matemáticas de 0 a 3 años a partir de instalaciones artísticas. *Educatio Siglo XXI*, 34(2), 33-62. <https://doi.org/10.6018/j/263801>
- Alsina, Á., Salgado M., Toalongo-Guamba, X. y Trelles-Zambrano, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *RIDEMA, Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*, 5(1), 1-21. <https://doi.org/10.34019/2594-4673>
- Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos*, 1 (extraordinario), 31-43. <https://doi.org/10.18172/con.2699>
- Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012). Declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 1-4. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2012.1-4>
- Bargagliotti, B. (Ed.) (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. American Statistical Association. Recuperado de: https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf
- Baroody, A.J. (2005). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial (6ª ed.)*. Madrid: A. Machado Libros S.A.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Canals, M. (1997). Geometría en las primeras edades escolares. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 25, 31-44.
- Canals, M.A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.
- Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.
- Carlsen, M., Erfjord, I. y Sigurd, P. (2020). *Mathematics Education in the Early Years*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5>
- CeMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas.
- Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Pearson- Prentice Hall.
- Clements, D. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. Clements, J. Sarama y A.M. DiBaise (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. (pp. 267-297). Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Clements, D., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D. y Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning Geometry: early foundations. *Quadrante*, 25(2), 7-31.
- Coll, C., Martín, H., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala A. (1999). *El Constructivismo en el aula*. Novena edición. Barcelona: Graó.

- Carbó, L. y Gracia, V. (2009). *El mundo a través de los números*. Lleida: Milenio.
- Dacey, L., Schulman, L. y Eston, R. (1999). *Growing mathematical ideas in kindergarten*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
- De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta*, 14, 47-65.
- De Castro, C. y Bosch, A. (2016). Representaciones gráficas de cantidades discretas en contextos de comunicación y resolución de problemas en educación infantil. En E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 227-236). Granada: Comares.
- De Castro, C. y Flecha, G. (2018). Provocación de intuiciones matemáticas a través del juego infantil de cero a tres años. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 39, 117-146.
- De Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 26, 89-108.
- De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA*, 8(3), 99-114.
<https://doi.org/10.30827/pna.v8i3.6114>
- De Castro, C. y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36.
- Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil. En A. P. Pequito, A. Pinheiro (eds.), *Proceeding of the First International Congress on Learning in Childhood Education* (pp. 125-137). Porto, Portugal: Gailivro.
- Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números*, 80, 71-84.
- Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). Málaga: SEIEM.
- Edo, M. (2021). *Educación Infantil. La página en blanco*. fórMATE. Innovamat. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=jURZjUpYAcY>
- Edo, M. y Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. En M. Anton, B. Moll (eds.) *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp.103-179). Barcelona: Praxis.
- Elia, I., Baccaglioni-Frank, A. Levenson, E., Matsuo, N. y Feza, N. (2021). Survey on Early Childhood Mathematics Education at ICME-14. *European Mathematical Society Magazine*, 120, 59-61. <https://doi.org/10.4171/MAG-32>
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Holland Reidel Pub.
- Franklin, C.A. y Garfield, J. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades pre-K-12 and college courses. En G. Burrill, y P. Elliott (eds.), *Thinking and reasoning with data and chance (68th Yearbook)* (pp. 345-376). NCTM.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.
- GAISE College Report ASA Revision Committee (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016*. Recuperado de:
[https://www.amstat.org/education/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-statistics-education-\(gaise\)-reports](https://www.amstat.org/education/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-statistics-education-(gaise)-reports)

- Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
<https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x>
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- Giménez, J. y Vanegas, Y. (2007). Vivir el espacio fomentando competencias geométricas, *Novedades Educativas*, 195, 80-87.
- Ginsburg, H. P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En I.E. Siegel y K.A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Children Psychology in practice (5th ed.)*(pp. 401-476). Wiley.
- Ginsburg, H.P. y Baroody, A.J. (2007). *Tema-3: Test de Competencia Matemática Básica*. TEA Ediciones.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.
- Goldschmied, E. (2000). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Morata.
- Gura, P. (Ed.) (1992). *Exploring learning: Young children and blockplay*. London, Paul Chapman Publishing.
- Hoong, L.Y., Kin, H.W. y Pien, C.L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-18.
- Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8 meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 64-71. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2012.64-71>
- Lüken M.M. (2020). Patterning as a mathematical activity: An analysis of young children's strategies when working with repeating patterns. En M. Carlsen, I. Erfjord, y P. Hundeland (Eds.) *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 79-92). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5
- Moss, J., Burce, C., Caswell, B., Flynn, T. y Hawes, Z. (2016). *Taking Shape*. Pearson.
- Muñoz-Catalán, C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de las matemáticas: para maestros de Educación Infantil*. Madrid: Paraninfo.
- NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.1-23>
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).
- Newcombe, N. y Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education*, 4(3), 102-111. <https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2010.01089.x>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E.R., Loehr, A. M. y Miller, M.R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 101-112.
<https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005>

- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E.R., McLean, L.E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376–396. <https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897>
- Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA*, 15(4), 311-338. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511>
- Salinas, M.J. (2016). Investigación en Educación Matemática Infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 17-18). Málaga: SEIEM.
- Sarama, J. y Clements, D.H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Serrano, A.I. (2012). Trabajar por proyectos en infantil. *Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza*, 21, 1-8.
- Silvente, J. (2017). *Diseñar espacios educativos "calidad, estética y amabilidad en el diseño"*. Madrid: Proyectos Editoriales de Arquitectur.
- Stocco, K., Ignez, M. y Cándido, P. (2003). *Figuras e formas. Matemática de 0 a 6*. Artmed Editora.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Brill Sense. <https://doi.org/10.1163/9789087903985>
- Vanegas, Y. (2018). Percepción, interpretación y representación del espacio. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Coords.), *Didáctica de las matemáticas: para maestros de Educación Infantil* (pp. 213-242). Paraninfo.
- Vanegas, Y., Giménez, J, Prat, M. y Edo, M. (2021). Professional tasks in early childhood education teacher education: promoting reasoning at 0-3. *Acta Scientiae* 23(7), 60-90. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6307>
- Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt B. y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, 49, 152-163. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004>
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223–265. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>