Tensiones y prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas

Tensions and inclusive practices in the teaching of mathematics

Planas, N.[a], Alfonso, J. M.[b], Arnal-Bailera, A.[c], Beltrán-Pellicer, P.[c], Morell, M.[d]

[a] *Universitat Autònoma de Barcelona,*

[b] *INS de Lliçà,*

[c] *Universidad de Zaragoza,*

[d] *IES Ausiàs March*

Resumen

En el marco de la actual ley educativa, los currículos de matemáticas siguen avanzando en la dirección de pedagogías centradas en el alumno y sus procesos de aprendizaje. Esta opción no debe equipararse con una menor importancia o impacto de las prácticas de enseñanza en el aula. Un cierto papel del profesor y de la enseñanza es crucial en el desarrollo de un proyecto de educación matemática inclusiva que valore los aportes y características de todos los alumnos. En este capítulo, recomendamos tres prácticas de enseñanza relativamente sencillas y respetuosas con la distribución equitativa de oportunidades de aprendizaje matemático. Asociamos cada práctica a tensiones subyacentes en la enseñanza institucional de matemáticas: entre lenguas formales e informales, entre contextos académicos y cotidianos, y entre comunicación verbal y no verbal. Finalizamos reflexionando sobre cómo estas tensiones se relacionan entre ellas y pueden regularse para facilitar la participación en el discurso matemático mediante la resolución de problemas.

Palabras clave: Educación matemática inclusiva, Prácticas de enseñanza en el aula, Participación en el discurso matemático, Tensiones entre lenguas formales e informales / contextos académicos y cotidianos / comunicación verbal y no verbal.

Abstract

Within the context of the current educational law, the set of mathematics curricula keep moving in the direction of pedagogies centered on the student and the learning processes. This option must not be merged with a lower importance or impact of the classroom teaching practices. A certain role of the teacher and the teaching is critical to the development of an inclusive mathematics education project that values the contributions and characteristics of all the students. In this chapter, we recommend three teaching practices, relatively simple and responsible towards the equitable distribution of mathematics learning opportunities. We associate every practice with underlying tensions in the institutional mathematics teaching, namely: between formal and informal languages, between academic and everyday contexts, and between verbal and non-verbal communication. We finish with reflections on how these tensions relate to each other, and how they can be regulated by classroom cultures of participation in the mathematical discourse through problem solving

Keywords: Inclusive mathematics education, Classroom teaching practices, Participation in the mathematical discourse, Tensions between formal and informal languages / academic and everyday contexts / verbal and non-verbal communication.

El reto de la educación matemática inclusiva

Los currículos de matemáticas que se han elaborado en el marco de la nueva ley de educación (LOMLOE) suponen un paso más en la dirección de una educación matemática social y abierta, que sitúe el aprendizaje como objetivo principal de la enseñanza. En los años noventa, los currículos de la ley educativa en ese momento (LOGSE) empezaron a cuestionar de una manera radical la enseñanza de las matemáticas orientada al conocimiento de hechos y al entrenamiento individual de rutinas. Ahora se refuerza la concepción social y abierta de la educación matemática y el trabajo rutinario individual se supedita todavía más explícitamente al trabajo exploratorio compartido, orientado más a la comprensión relacional que a la comprensión de hechos. De acuerdo con esta concepción, el aula de matemáticas es sobre todo un contexto social de comunicación y producción de significados mediante la participación en tareas matemáticamente interesantes. Ya en la LOE se introdujeron las competencias básicas que, para adaptarlas a las recomendaciones europeas, pasaron a denominarse competencias clave en la LOMCE y en la LOMLOE. La novedad con esta última ley es que, además de las competencias clave, se desarrollan competencias específicas en cada materia que contribuyen a lo que se denomina "perfil de salida" del alumnado. Esto es un paso adelante, pues al ser específicas, orientan mejor el trabajo de aula en articulación con los saberes. No hay, en este sentido, un cambio importante de perspectiva sobre el papel con respecto a la LOGSE, pero sí una intención de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que aporte a todos los alumnos una educación matemática significativa y positiva a nivel personal, social y académico. Esto, en parte, se recoge con competencias matemáticas que atienden a destrezas socioafectivas y de resolución de problemas.

El reto sigue siendo avanzar hacia una educación matemática más respetuosa y sensible con la sociedad y con el desarrollo matemático y bienestar global de las personas, menos clasista y etiquetadora de grupos y de capacidades. En este volumen, el capítulo 'Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado' comparte muy especialmente el interés por lograr que en el aula de matemáticas cada alumno cuente y que cuente por igual. En nuestro capítulo, al apostar por aulas inclusivas, estamos en particular pensando en unas matemáticas también para alumnos con síndrome de Down, con altas capacidades matemáticas, con características dentro del espectro autista… entre otras diversidades. Las características de una propuesta inclusiva son esencialmente las mismas, sin perjuicio de las variaciones y adaptaciones que puedan tener lugar según necesidades específicas.

La investigación en educación matemática no acostumbra a aportar respuestas rápidas a cuestiones sobre la práctica, ni recetas para la generación automática de prácticas inclusivas de enseñanza de las matemáticas. En su lugar, proporciona recomendaciones basadas en resultados de décadas de estudios bajo distintos enfoques (Planas, 2015; Planas et al., 2021). Estas recomendaciones pueden orientar a los profesores de matemáticas en su planificación, desarrollo, evaluación y mejora continua de la enseñanza. Con base en resultados y conocimientos de la investigación en educación matemática, presentamos tres prácticas de enseñanza, cada una asociada a tensiones subyacentes en la educación matemática. No explicamos el detalle de estas tensiones, sino que las planteamos como el escenario en el cual dar sentido a las prácticas que recomendamos.

Como en Skovsmose y Godoy Penteado (2015), con tensiones nos referimos a la existencia simultánea de dos o más aspectos importantes de la educación matemática que, sin embargo, a menudo se piensan y se tratan como opuestos o en competición. Resaltamos tres tensiones en la educación matemática, aunque hay más sin duda, y proponemos ejemplos de prácticas para contribuir a reducir el impacto de las tensiones:

- Tensiones entre lenguas formales e informales
  - Compartir formas del discurso matemático
- Tensiones entre contextos académicos y cotidianos
  - Contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos
- Tensiones entre comunicación verbal y no verbal
  - Trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

Compartir formas del discurso matemático, contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos y trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales son prácticas de enseñanza relativamente simples, que valen para la actual ordenación curricular, para las anteriores y para las venideras. Son prácticas de naturaleza inclusiva que no renuncian al trabajo matemático interesante y riguroso. Nos consta que ya guían la enseñanza de muchos profesores en sus clases de matemáticas. Así se disminuyen las desigualdades de distribución y aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje creadas en la enseñanza, esto es, las oportunidades de participar en discusiones de contenidos matemáticos orientadas a la comprensión y resolución de tareas. Es urgente, sin embargo, que estas prácticas sean comunes en todavía más aulas.

Cada día hay alumnos que dejan de asistir a la escuela o que asisten sin participar en el discurso matemático en las clases de matemáticas; suelen ser alumnos con capitales culturales, sociales y lingüísticos distintos a los que representan la institución escolar, las pruebas estandarizadas, las agrupaciones por 'nivel' o 'capacidades' ligadas a miradas de déficit… Lo importante no es tanto si estos alumnos son minoría o mayoría en términos estadísticos, sino lo que estas historias humanas implican para quienes las viven y lo que nos cuentan sobre el sistema educativo y sobre cómo puede llegar a fallar el proyecto de la educación matemática. Si bien la mención a la perspectiva de género en los nuevos documentos curriculares es relevante, echamos en falta la mención explícita a las desigualdades y desventajas de los alumnos (y naturalmente las alumnas) en situación de pobreza económica. Las familias de clases trabajadoras más humildes apenas disponen de tiempo y dinero para 'complementar' las tareas escolares que otras familias sí 'complementan' con recursos que no se están ofreciendo en las aulas. El esfuerzo de estos alumnos y sus familias para encajar en la cultura dominante, y superar en parte lastres derivados de las representaciones sociales sobre sus capacidades y posibilidades académicas, es enorme. El aula no es un espacio inmune a las desigualdades, pero la elección de unas u otras prácticas de enseñanza puede hacer que el sistema sea algo menos injusto.

De las tensiones y prácticas de enseñanza resaltadas, se deduce un proyecto de educación matemática inclusiva, discutido hace más de una década en Alsina y Planas (2009), con acceso de todos los alumnos a participar en el discurso matemático en culturas de aula que aprovechan diversos conocimientos, recursos e historias de vida. El desarrollo de este proyecto necesita equipos de profesores comprometidos con el logro académico de todos los alumnos, con elevadas expectativas respecto del rendimiento de todos ellos y con suficiente autonomía para adecuar el currículo. Está claro que se necesita mucho trabajo de enseñanza, parte del cual tiene que ver con el trabajo deliberado, proactivo y sostenido de resolución equilibrada de tensiones entre lenguas formales e informales; contextos académicos y cotidianos; y comunicación verbal y no verbal.

Tensiones y prácticas de enseñanza de las matemáticas

Con la introducción del desarrollo de competencias socioafectivas en el nuevo currículo de matemáticas, se refuerza el apoyo a las pedagogías centradas en el alumno y en las condiciones de su aprendizaje. Cuando un alumno aborda un problema de matemáticas, en interacción con la demanda cognitiva, tiene lugar una demanda afectiva (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020) que engloba significados personales, en forma de emociones, actitudes, creencias y valores (Gil et al., 2005). Estos afectos, con menor o mayor grado de estabilidad, se interrelacionan entre sí y con la cognición, influyendo de distintas maneras en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (Blanco, 2012). Ante una emoción de bloqueo durante la resolución de un problema, por ejemplo, una actitud de perseverancia será clave para la puesta en marcha de estrategias de corte metacognitivo y heurísticas. O haber desarrollado ciertas creencias hacia un objeto de aprendizaje (su utilidad, su dificultad, su importancia en el currículo y en la evaluación, etc.), por ejemplo, podrá condicionar el nivel de implicación en la actividad del aula. Para identificar y actuar pedagógica y didácticamente sobre estos afectos, es importante que la cultura del aula facilite al profesor el acceso a producciones de los alumnos durante su participación en el discurso matemático. Si el profesor es el único que participa en la construcción del discurso matemático en las clases, no solo se están limitando las oportunidades de aprendizaje, sino que además difícilmente se tiene información sobre cómo se relaciona cada alumno con la matemática escolar.

Aunque la distinción entre pedagogías centradas en el profesor y pedagogías centradas en el alumno es algo simplista, la utilizamos para contrastar culturas de clases de matemáticas según el papel del profesor y de las prácticas de enseñanza.

En el extremo de unas pedagogías, el profesor es el experto en el contenido de la materia y el participante que asume la responsabilidad principal de comunicar este contenido a los alumnos; la participación de los alumnos en el discurso matemático acostumbra a basarse en responder preguntas del profesor en la instrucción al grupo clase, trabajar en parejas para resolver tareas del libro, o salir a la pizarra a compartir soluciones por escrito sin que se discutan los procesos ni las soluciones. En el extremo de las otras pedagogías, el trabajo en grupos pequeños, las dinámicas de resolución de problemas, de exploración e indagación son prácticas comunes más o menos guiadas; la participación del profesor y los momentos de instrucción acostumbran a ser mínimos o concentrados en la presentación y el cierre de las sesiones de clase. Nosotros no nos posicionamos en ninguno de estos extremos pedagógicos porque creemos que hay un continuo de opciones interesantes entre ellos. No nos pasa desapercibido, sin embargo, el valor epistemológico y ético de considerar los significados personales a lo largo de las prácticas de enseñanza de significados institucionalizados. En cualquier caso, sea en pedagogías con mucha o con poca participación del profesor, la calidad de esta participación es clave en el desarrollo de una educación matemática que apoye a los alumnos durante su participación en el discurso matemático.

Sin excepciones, la investigación en educación matemática recomienda prácticas de enseñanza para avanzar en el desarrollo del proyecto de educación matemática inclusiva, porque este proyecto es el que a la vez permite avanzar en el desarrollo de la participación de los alumnos en el discurso matemático. Ciertamente, la cantidad de cursos de matemáticas que se hayan podido estudiar no generan por sí solos esta sensibilidad en la enseñanza de las matemáticas, por lo que son esenciales las iniciativas personales y las políticas de formación que apuesten por relacionar las prácticas de enseñanza con la participación de los alumnos en el discurso matemático y en su construcción. Dicho todo esto, organizamos los tres apartados que vienen a continuación del siguiente modo:

- Identificamos un tipo de tensión en la enseñanza señalado por la investigación del área de conocimiento de educación matemática.
- Explicamos una práctica de enseñanza con ejemplos y datos de aulas de matemáticas.
- Discutimos cómo la práctica puede contribuir a resoluciones positivas de experiencias de la tensión identificadas.

Tensiones entre lenguas formales e informales

Ante el objetivo de que los alumnos participen en el discurso matemático, en las aulas y otros entornos de educación matemática surgen tensiones entre el uso de lenguas formales (académicas) e informales (cotidianas) en la enseñanza. Esto es así en parte porque la noción misma de participar en el discurso matemático es difusa, ya que existe un continuo de tipos mixtos de participación en varios discursos a la vez. En cualquier caso, tal como señala la investigación en educación matemática (e.g., Moschkovich, 2010), estas tensiones son profundas y no pueden resolverse en el sentido de desaparecer. Sí se puede lograr un cierto equilibrio entre la exposición al discurso matemático y el acceso a una lengua inteligible de enseñanza. La búsqueda de este equilibrio adopta con frecuencia formas compensatorias con sesgos hacia la utilización casi exclusiva de lenguas informales, sobre todo en aulas de zonas socioeconómicas pobres, creyéndose que esto es en beneficio de la participación y de la inclusión; no siempre se cuida, sin embargo, que la participación y la inclusión sean con respecto al discurso matemático. De hecho, se puede llegar a provocar el efecto contrario al deseado y aumentar la diferenciación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos con lenguas y culturas más alejadas de discursos académicos. Compartir formas del discurso matemático desde la enseñanza es una manera de garantizar el acceso a este discurso para la participación en él.

Compartir formas del discurso matemático

Pensar el aula de matemáticas como un contexto social de comunicación incluye pensar en los modos de comunicación que se utilizan en la enseñanza. Una parte de esta comunicación es verbal y oral. Aquí, el habla del profesor en clase es un recurso esencial para que los alumnos escuchen formas del discurso matemático y empiecen a utilizarlas con comprensión. La enseñanza debe facilitar que estas formas se muestren de maneras explícitas y accesibles a los alumnos, ofreciendo así oportunidades de participar en el discurso matemático escolar. Los alumnos aprenden matemáticas al participar en tareas matemáticamente ricas, a la vez que escuchando matemáticas desde el nivel más básico del vocabulario hasta el del razonamiento se reducen para todos. Si las oportunidades para que esto ocurra no se crean, o se crean más para unos alumnos que para otros, entonces las oportunidades de aprendizaje se reducen para todos. En una clase, por ejemplo, el profesor puede introducir el concepto de ecuación mediante frases informales como las dos primeras que siguen, pero no debería dejar de ofrecer la oportunidad a los alumnos de escuchar la tercera frase:

> Una ecuación es para decir que esto es igual a aquello
> Una ecuación es como una balanza en equilibrio
> Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas

Para la enseñanza de cualquier contenido matemático, desde los niveles más básicos del vocabulario es fundamental evitar formas de hablar que sugieran concepciones o razonamientos erróneos. No es lo mismo hablar de "reducir fracciones" que de "simplificar fracciones"; el significado informal de "reducir" puede comunicar la impresión incorrecta de que la fracción que se obtiene es un número más pequeño, cuando se trata del mismo número. Tampoco es lo mismo leer $x+1=4$ como "equis más uno da cuatro" que como "equis más uno es igual a cuatro"; el significado informal de "da" puede comunicar la impresión incorrecta de que la ecuación es una acción u operación, cuando se trata de una relación. Ni es lo mismo hablar de "los ángulos de fuera" que de "los ángulos externos" de un polígono; el significado informal de "fuera" difícilmente sugiere el ángulo que se crea con un lado del polígono y la extensión del lado adyacente. Y así encontramos muchos ejemplos.

Dar acceso al vocabulario del discurso matemático es importante, pero también que su uso se sitúe en contextos de resolución de problemas no rutinarios y tareas matemáticamente interesantes (e.g., Arnal-Bailera, 2014; Beltrán-Pellicer, 2022; Callejo, 2015) que den acceso a experimentar y participar en este discurso. Desarrollamos nuestra comprensión matemática en función de la actividad matemática a la que hemos sido expuestos y en la que hemos participado. Los alumnos en escuelas en zonas de bajos recursos socioeconómicos o con gran número de minorías (culturales, lingüísticas…) no deben dejar de estar o estar menos expuestos al discurso matemático mediante tareas matemáticas interesantes. Desde la perspectiva del aprendizaje, la comprensión se construye de manera gradual a la vez que se participa en el discurso matemático y se interactúa con explicaciones matemáticas (Goñi y Planas, 2011). Entra aquí en juego el papel de la lengua más allá del vocabulario, con atención a las explicaciones del profesor en la enseñanza (Planas et al., 2018). Las explicaciones, que son particulares para cada contenido matemático, deben tener una clara presencia en la enseñanza, no dejándose implícitos o sin explicar significados y conexiones importantes para avanzar en la comprensión del contenido específico.

Ilustramos una situación de aula, en versión traducida del catalán, donde se compartieron formas del discurso matemático sobre ecuaciones lineales. La profesora había escrito en la pizarra dos expresiones simbólicas que había nombrado "igualdades"; había leído la primera como "cuatro más tres es igual a siete" y había preguntado a los alumnos cómo debería leer la segunda.

$$4+3=7$$
$$2x+3=7$$

Durante unos segundos nadie respondió y se inició la siguiente conversación con una nueva pregunta:

Profesora:	¿Qué he escrito aquí?
Alumna 1:	Una ecuación.
Alumna 2:	No, una ecuación lineal.
Profesora:	¿Podéis decir algo más?
Alumna 2:	Hay que buscar la solución.
Profesora:	Me refiero a si podéis decir algo más sobre qué es una ecuación lineal.
Alumna 1:	Pues lo que has escrito en la pizarra.
Profesora:	De acuerdo, empiezo yo. Es una ecuación lineal porque es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. ¿Podéis decir algo más?

Alumna 1: Tiene una incógnita.
Profesora: De acuerdo, tiene una incógnita, y ¿a qué potencia está elevada?
Alumna 1: La incógnita no está elevada al cuadrado.
Profesora: De acuerdo. En una ecuación lineal, la variable o incógnita siempre aparece elevada a la potencia uno y nunca elevada a otra potencia. ¿Qué más podéis decir?
Alumna 2: Creo que no se pueden tener dos o tres variables multiplicando.
Profesora: De acuerdo, 2xy+3=7 [escribe en la pizarra] no es aceptable como ecuación lineal porque hay dos variables que se multiplican entre ellas. ¿Qué más sabemos sobre ecuaciones lineales? ¿Ya podemos leer la segunda igualdad?
Alumna 3: ¿El doble de dos más tres es igual a siete?
Profesora: Interesante, ¡ya has sustituido el valor de la incógnita en la ecuación!

En el último turno, la profesora podría haber dicho: ¡ya has puesto dos en lugar de equis! No obstante, habla nombrando el objeto matemático que se manipula (la ecuación) y de forma que los alumnos puedan notar que lo que se hace es sustituir (no poner) la incógnita (no la equis) por un valor (no un dos). Junto con nombrar vocabulario específico del registro matemático, compartir formas del discurso matemático requiere también dar explicaciones. En esa sesión de clase, por ejemplo, la profesora no acabó explicando la diferencia entre las dos igualdades que había escrito en la pizarra.

La investigación en educación matemática ha relacionado el 'abuso' de lenguas informales y la falta de explicaciones en la enseñanza escolar de las matemáticas con la persistencia de razonamientos matemáticos erróneos (Adler y Ronda, 2017). En el aprendizaje de la probabilidad, por ejemplo, sigue siendo común razonar desde el llamado sesgo de equiprobabilidad (Serrano et al, 1998). Este sesgo se refiere a la tendencia a pensar los resultados posibles de un experimento aleatorio como resultados con igual probabilidad. Así, al lanzar dos dados y sumar las puntuaciones de las caras superiores, intuitivamente se tiende a pensar que todas las sumas posibles tienen la misma probabilidad. El profesor en clase puede hablar de formas que ayuden a reconocer y reducir este sesgo. Compartir formas del discurso matemático empieza con el nivel básico de dar y explicar vocabulario y expresiones aparentemente simples como 'resultados con probabilidades diferentes', en el contexto de un experimento con un dado modificado, y sigue con el nivel de dar y explicar razonamientos, en la instrucción directa o en la conversación del aula. Estos son algunos ejemplos de razonamientos orientados a reducir el sesgo de equiprobabilidad:

Si tiramos una moneda cuatro veces, cualquier secuencia de cuatro resultados es posible y tiene la misma probabilidad de salir, es decir, todos los resultados son igual de probables.
Si tiramos un dado con las caras 1, 2, 2, 5, 5, 5, los tres resultados, 1, 2, y 5 son posibles, pero que salga 1 es lo menos probable.

> Si giramos tres veces una ruleta dividida en cinco secciones de igual área numeradas del 1 al 5, entonces 1, 1, 1 es un suceso posible, mientras que 0, 1, 2 es un suceso imposible porque no hay ninguna sección numerada con un 0.
> En una urna con 3 bolas azules, 5 rojas y 3 blancas, sacar una bola azul, sacar una roja y sacar una blanca son sucesos posibles, y es un suceso imposible sacar una bola de otro color. Además, sacar una bola azul y sacar una bola blanca son resultados con igual probabilidad porque hay la misma cantidad de bolas azules y blancas.
> Si no he comprado ningún billete de lotería, no es posible que me toque el premio y si he comprado un billete, entonces es posible ganar, pero la probabilidad es muy baja.

En Beltrán-Pellicer y Giacomone (2021) se describe una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad al final de la educación primaria o comienzo de la secundaria que incluye situaciones como la descrita anteriormente. Las tareas que se recogen tratan de reflejar la necesidad de buscar el equilibrio entre lenguas formales e informales, especialmente para articular los diferentes significados de la probabilidad. Ahí se pueden encontrar más ejemplos de prácticas de enseñanza orientadas a compartir formas (vocabulario y explicaciones) del discurso matemático. En la próxima sección, discutiremos tensiones entre el uso de contextos académicos y cotidianos en la enseñanza de las matemáticas. A lo largo de las etapas educativas, las prácticas de enseñanza deberán apoyar el acceso al discurso matemático, porque este discurso lleva al desarrollo de la comprensión relacional, a la vez que deberán facilitar la participación de los alumnos en dicho discurso, porque esta participación lleva al aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje.

Tensiones entre contextos académicos y contextos cotidianos

En los entornos de educación matemática, la necesidad de que los alumnos logren comunicarse con fluidez en el discurso matemático también está en el origen de tensiones en la enseñanza entre el uso de contextos académicos (o formales) y cotidianos (o informales). Para apoyar el aprendizaje matemático, junto con compartir formas del discurso matemático, las prácticas de enseñanza tienen que ofrecer oportunidades de participar en la resolución de tareas matemáticas que admitan conocimientos de fuera de la escuela. Ahora bien, la investigación en educación matemática (e.g., Moschkovich, 2010) señala que esto no debe confundirse con el uso único de contextos cotidianos. La resolución de tensiones, en el sentido de lograr equilibrios entre la exposición a contextos académicos y cotidianos, vuelve a adoptar formas compensatorias con sesgos hacia usos casi exclusivos de contextos cotidianos en aulas de zonas socioeconómicas pobres, con la paradoja de que estos contextos no siempre son cercanos para los alumnos. En estas aulas la tarea matemática de obtener 16 polígonos convexos con el tangram de Brugner (1984) no se propondría por no evocar un contexto cotidiano. Estamos de acuerdo con utilizar contextos cotidianos en la enseñanza de las matemáticas si se conectan con tareas matemáticamente ricas y experiencias de los alumnos. Lo que convierte este recurso en una desventaja es cuando su interpretación lleva a no ofrecer suficientes prácticas de transición hacia el discurso matemático.

Contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos

En esta sección, presentamos el trabajo en torno a tareas matemáticas en contextos cotidianos y cercanos en un aula donde el profesor ofreció oportunidades de transición al discurso matemático y de participación de los alumnos en este discurso. En Arnal y Planas (2013) se ilustra el caso de otra aula del centro con las mismas tareas donde esta transición y participación fueron menos claras. Los fragmentos escogidos muestran cómo el profesor y una alumna discuten la resolución de una tarea de geometría sobre un parque cercano al centro, identificable en los materiales dados en clase. La tarea tiene un componente tecnológico ya que se trabaja con un programa de geometría dinámica en los portátiles y se utiliza una pizarra digital. La alumna de las transcripciones tenía un historial de fracaso escolar, en particular en matemáticas, y su relación con el profesor estaba marcada por el reclamo constante de ayuda. En el problema de la Figura 1, hay dos amigos en los extremos de un camino recto dentro del parque, por cuyo punto medio y de forma perpendicular se sitúa otro camino visible en la imagen desde donde se llega a una fuente circular. La primera vez que el profesor se acerca a revisar el trabajo en pareja de la alumna, no interviene para considerar o dar valor a su solución parcial. Esta solución está basada en la imagen del parque y muestra que la fuente está a la misma distancia de A y B. El profesor sí pide a la alumna que resuelva la tarea en la pizarra digital sobre una pantalla en blanco. Este es el punto de inicio del fragmento que sigue.

Problema 1. Abdel y Blanca están en los puntos blancos. Encuentra puntos a la misma distancia de los dos. Comprueba las distancias con GeoGebra. Marca los puntos en la hoja.

Figura 1. Ejemplo de tarea de geometría en un contexto cercano

Alumna: Ahh, hay que buscar un punto que esté a la misma distancia… ¡Profe, la fuente! La fuente que hace así… [señala la forma de la fuente en la pantalla]

Profesor: Vamos a avanzar esto… ya lo comento yo aquí… Teníais dos personas en el parque de Huesca, A y B, y os pedían puntos a la misma distancia. ¿Habéis encontrado algún punto?

Alumna: ¡Yo sí! Iguales, ¿no?

Profesor: ¿Y creéis que habrá un único punto que esté a la misma distancia? ¿O habrá más?

Alumnos: Habrá más.

Profesor: [A la alumna] Sal y dibuja al menos un punto a la misma distancia.

Alumna: Es que no sé… Mira, los tengo igual.

Profesor: [Revisa la solución en el portátil; ella se levanta con dudas ante el cambio de programa, dibuja un punto correctamente en la posición relativa de la fuente respecto de A y B]. ¿Crees que habrá más puntos que cumplan eso? ¿Dónde crees que estarán más o menos?

Alumna: [Dibuja el simétrico del punto dibujado respecto de AB y el punto medio de AB] ¡Están en línea! [Recorre con la mano la línea que forman los puntos encontrados]

Profesor: Parece que están en una línea recta. Podemos encontrar muchos puntos, aquí, aquí, aquí… [señala], si los colocamos todos estarán en una línea recta como ha dicho S. [otra alumna]. Este es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de A y de B.

En esta interacción, el profesor se dispone a resolver el problema en la pizarra digital cuando la alumna dice haber encontrado “algún punto”. El profesor supera sus reticencias, tal como luego explicó en una entrevista, y hace que la alumna salga a resolver el problema. Ella resuelve el problema perfectamente incluso encontrando que la mediatriz es una línea recta, lo cual no se pregunta, y el profesor da por válida la respuesta. Mirado con una cierta retrospectiva y a raíz de lo hablado en la entrevista con el profesor, pedir a la alumna que resolviera sobre una pantalla en blanco y no sobre el programa utilizado en su portátil durante la sesión se debió a la falta de confianza en el dominio de los aspectos tecnológicos de la tarea. Más tarde durante la sesión, sin embargo, cambia la disposición hacia las posibilidades de participación de la alumna en el discurso matemático. El profesor enseña la idea de mediatriz como lugar geométrico en relación con otra tarea; luego presenta un problema con la imagen de la Figura 1 añadiendo un amigo (punto C) y solicitando un punto a igual distancia de los tres amigos. Entonces, el profesor se dirige a la alumna, que ya ha dibujado dos mediatrices, pero no el punto de intersección, y pone públicamente en valor la resolución en el portátil.

Profesor: ¿Sabes cómo se saca un punto en donde se cortan dos rectas? Pincha aquí y con el punto mides las distancias. Ya casi tienes solucionado el problema.

Alumna: ¡Me ha salido! ¡Mira! ¡Mide lo mismo! Ocho, ocho, ocho. Este es de este…

Profesor: Muy bien, ha encontrado el punto que está a la misma distancia. Le sale cero coma ochenta y ocho a los tres puntos, además lo ha hecho por el proceso correcto. Enséñaselo y explícale el proceso.

El profesor está pendiente de la contribución de la alumna y la vuelve a reforzar en su respuesta sobre la posición del incentro. El refuerzo es aún mayor cuando le pide que explique la respuesta a su compañera, que habitualmente tiene mejor desempeño en clase de matemáticas. El profesor tenía asentada la idea de que era una alumna con pocas capacidades matemáticas y de que se trataba de un grupo clase con poco interés en la materia. Esto llevaba a una desconfianza que se extendía a toda la práctica de enseñanza, con poca participación en la pizarra digital y modificaciones a la actuación diseñada, que revierten en más instrucción directa y menos participación de los alumnos en general y de la alumna del ejemplo. A pesar de esta gestión, la alumna logró encontrar espacios de participación en el discurso matemático y el profesor logró poner esto en valor. Este es un ejemplo del reto que supone contribuir, desde la enseñanza, al desarrollo de la competencia socioafectiva de los alumnos cuando hay representaciones que condicionan nuestras miradas a sus capacidades matemáticas y a las prácticas matemáticas en las que supuestamente se pueden desenvolver.

En esta sección y la anterior, hemos visto dos prácticas de enseñanza que ofrecen oportunidades de aprendizaje matemático mediante la exposición a formas del discurso matemático y la creación de espacios de participación en este discurso, también para los alumnos cuyas maneras de hablar, de comportarse y de vivir son distintas a las que tienden a valorarse en la escuela y en la sociedad. La exposición regular a formas del discurso matemático en combinación con el trabajo de tareas contextualizadas en entornos cercanos son prácticas que, si se gestionan equilibradamente en la enseñanza, reducen tensiones subyacentes a la educación matemática. Es importante que el profesor cree suficientes oportunidades de participación a los alumnos para avanzar en la construcción de conocimiento matemático antes de llevar a cabo una institucionalización o formalización del mismo (Arnal-Bailera y Planas, 2014). Esto cuestiona el sentido de anticipar, identificar o diagnosticar capacidades matemáticas cuando no se han ofrecido oportunidades para que estas capacidades se hagan visibles y desarrollen. Por otra parte, si no se acompaña a los alumnos en la transición hacia la utilización de formas del discurso matemático y hacia el reconocimiento de estructuras matemáticas en el trabajo con contextos cotidianos, es poco razonable esperar que el aprendizaje que se les pide sea una experiencia personal, social y académica positiva. Si bien las experiencias negativas de la matemática escolar no son resultado directo de las tensiones señaladas en este capítulo, varias de estas experiencias se gestan o agudizan con prácticas de enseñanza que descuidan puntos intermedios y se sitúan en los extremos.

Tensiones entre comunicación verbal y comunicación no verbal

Un tercer foco de tensiones en la educación matemática se da en el distinto valor que se acostumbra a dar a la comunicación verbal y a la no verbal en la enseñanza. La investigación en el área ha documentado la tendencia a valorar el modo de comunicación verbal por encima de otros modos de comunicación como el visual, incluso cuando las representaciones matemáticas que se trabajan son de naturaleza gráfica (Planas y Ngoepe, 2019; Nairouz y Planas, 2016). En esta sección, volvemos a proponer la búsqueda de equilibrios entre extremos con el argumento de que en los puntos intermedios se crean más oportunidades de aprendizaje matemático y de participación en el discurso matemático. La comunicación no verbal en la enseñanza de matemáticas, como ocurre con las lenguas informales y los contextos cotidianos, a menudo se esgrime como un recurso para aulas donde supuestamente se debe 'compensar' o 'remediar' la falta de dominio de la lengua de instrucción, o determinadas dificultades en el desarrollo y en el aprendizaje. Esta visión está a la vez ligada a la utilización casi exclusiva de la lengua de instrucción (hablada y escrita) como recurso de enseñanza en las aulas donde no se han planificado actuaciones 'compensatorias' por razones de diversidad lingüística o de desarrollo en el aprendizaje. No obstante, el equilibrio entre comunicación verbal y no verbal es pedagógica y didácticamente necesario en cualquier aula de matemáticas. Lo que debe 'remediarse' es el uso exclusivo de la lengua de instrucción ya que participar en el discurso matemático incluye desenvolverse con fluidez en los distintos modos de comunicación matemática. No profundizaremos en la complejidad de remediar la 'ilusión', poco realista, de enseñar en aulas donde todos los alumnos tienen una única lengua, que es la misma y compartida con la del profesor. Tal como se discute en Planas et al., (2021), además de ser poco realista, esta ilusión tiene enormes implicaciones en cómo se generan y distribuyen los espacios de participación en clase.

Trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

Las representaciones verbales y las simbólicas no son las únicas del discurso matemático. Las representaciones visuales ocupan una enorme importancia (DePiper et al., 2021) a través de creaciones gráficas como diagramas o dibujos que ilustran cantidades, relaciones cuantitativas, relaciones geométricas, patrones numéricos y algebraicos, etc. Usar e interpretar creaciones gráficas con significado matemático es parte del trabajo matemático en cualquier aula de cualquier etapa. A continuación, mostramos ejemplos del uso de representaciones visuales en la enseñanza de la divisibilidad en un aula trilingüe con el inglés como lengua de instrucción. Lejos de comunicar la idea de que los materiales visuales son una medida 'compensatoria' en aulas de matemáticas con alumnos que no dominan la lengua de instrucción, lo que pretendemos es argumentar que los materiales multimodales son recomendables para la enseñanza con cualquier grupo de alumnos ya que contribuyen, en particular, a desligar el concepto matemático en sí mismo de su representación. Veamos el siguiente episodio en torno a la noción de número par:

Profesor:	¿Cómo sabes si un número es par?
Alumna 1:	De pequeña me ayudaba de los dedos de una mano. Por ejemplo, cuatro hacía como parejitas… y si por ejemplo era el tres, se quedaba suelto porque era impar.
Profesor:	Parejitas… muy buena forma para comprenderlo.

La Figura 2 muestra varios de los materiales multimodales proporcionados a lo largo de las sesiones para la enseñanza de la divisibilidad; las clases fueron en inglés pero reproducimos los materiales en castellano. En uno de ellos, el número se relaciona con el cuerpo: se ve el gesto de los dedos agrupados de dos en dos con los textos "los números pares se pueden emparejar" y "los impares no se pueden emparejar". En otro material, recordando los números rectangulares pitagóricos, el número se relaciona con la geometría: se ve un diagrama rectangular con puntos agrupados y otro con un punto suelto. Estos agrupamientos facilitan asociar el número par con la división exacta del número entre dos y el número impar con la división de residuo uno. Se comunican así significados para los conceptos de número par y de número impar mediante representaciones geométricas que son diagramas rectangulares de puntos y gestos de la mano. De esta manera, además, se pone énfasis en la estructura de estas dos clases de números y no en la cantidad que indican. Este modo de comunicación con materiales y representaciones visuales favorece que los alumnos noten e identifiquen dos clases de números desde el punto de vista estructural.

Para ofrecer oportunidades de asociar la noción de número par con la divisibilidad entre 2 y ser múltiplo de 2, se plantearon tareas como: ¿Pueden cinco personas jugar al ajedrez a la vez sin que sobre ninguna? Los diagramas de puntos fueron retomados en la resolución de una tarea en la que se pedía elaborar frases con significado matemático a partir del enunciado: "la suma/producto de dos números pares/impares es siempre/no puede ser número par/impar":

Alumno:	La suma de dos números impares es un número par.
Profesor:	¿Par? ¿Puedes explicarnos de forma más clara este enunciado?
Alumno:	Pues que tenemos una cantidad de algo en una mano, por ejemplo, nueve. Si vas agrupando de dos en dos y te sobra uno…Y en la otra mano igual también te sobra uno. Entonces esos dos los agrupamos y forman otra pareja.

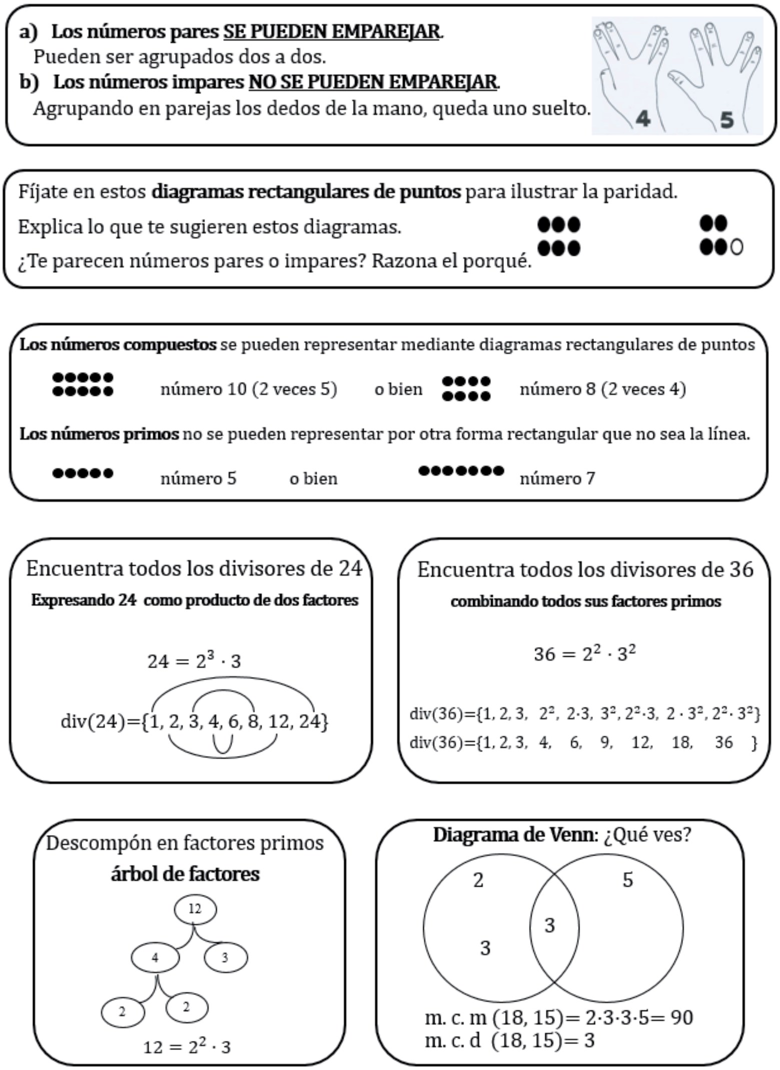


Figura 2. Ejemplos de materiales multimodales en el experimento de enseñanza

También se emplearon modelos rectangulares de puntos para clarificar la idea de número primo y número compuesto. Por lo general, las definiciones de número primo en los libros de texto se formulan a partir de una condición lógica, "si solo admite como divisores al 1 y a sí mismo", o bien contienen una negación, "no tiene más divisores que 1 y sí mismo". La comprensión de estas definiciones precisa de explicaciones durante la enseñanza. Se explicó la noción de número primo con una disposición en fila formando un único producto entre el número 1 y él mismo, y así se sugirió que es suficiente con que exista otra forma de agrupar para tener un número compuesto.

Al mantener la misma representación geométrica que con las clases de números par e impar, se propició la comprensión de relaciones entre estas clases y las clases de números primo y compuesto. Con otros materiales se explicó la factorización aritmética mediante los divisores de un número expresados con el número como producto y con la combinación de factores primos. Además, se utilizaron materiales con diagramas de factorización en árbol para números primos y diagramas de Venn (ver Figura 2) para dar significado visual a los procedimientos aritméticos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor. En el diagrama de árbol, no se necesita el concepto de número primo para descomponer los productos. A lo largo de las sesiones, se introdujeron tareas como resolver si el número 3^{23} es par o impar:

Alumno:	Es impar.
Profesor:	¿Por qué dices que es impar?
Alumno:	Porque al multiplicar un impar por otro impar el resultado siempre es impar.
Profesor:	Muy bien. Y si estuviera elevado a treinta que es un número par, ¿cam biaría la cosa?
Alumno:	No, no cambiaría nada porque la base sigue siendo tres que es un número impar.

Surgieron retos importantes puesto que algunos alumnos seguían priorizando calcular en vez de aplicar razonamientos matemáticos basándose en la representación del número, incluso con números relativamente grandes. Cuando el profesor preguntó si el número 2·5497+5 es par o impar, por ejemplo, una alumna respondió: "Es impar porque si lo multiplicas por dos, siete por dos son catorce y cuatro más cinco son nueve." Estos son ejemplos del equilibrio entre comunicación verbal y no verbal en la enseñanza de contenidos no geométricos, que dieron lugar a interesantes discusiones y a la identificación de retos en el aprendizaje. En la sección anterior ya se sugirió la importancia de las representaciones gráficas, aunque al ser ejemplos de la enseñanza de geometría mediada por tecnologías digitales, el recurso de la multimodalidad resulta más transparente por obvio. Ahí, las pantallas del programa de geometría dinámica ofrecen representaciones gráficas estandarizadas de objetos geométricos, mientras que los materiales visuales de la Figura 2 ofrecen representaciones gráficas algo menos estandarizadas de objetos aritméticos. Para cualquier contenido del currículo, el discurso matemático es siempre de naturaleza multimodal y la participación en este discurso y en su construcción siempre requieren del manejo de representaciones verbales y no verbales.

El reto de la educación matemática (inclusiva)

Empezábamos el capítulo con la sección titulada 'El reto de la educación matemática inclusiva'. Esperamos haber dado argumentos suficientes para comunicar la idea de que este es en realidad el reto de la educación matemática, y de que para lograr este reto debemos buscar equilibrios y combinar prácticas de enseñanza, varias de las cuales pueden plantearse de manera simultánea. La inclusión no es un dilema o una opción, sino un proceso hacia la consecución de una educación matemática de mayor calidad. Creemos haber dado algunos ejemplos útiles para el recorrido de este proceso. Acabamos con un último ejemplo de tarea matemática que se propuso en una clase de secundaria y que dio lugar a las tres prácticas de enseñanza resaltadas por separado a lo largo del capítulo.

Compartir formas del discurso matemático, contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos y trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

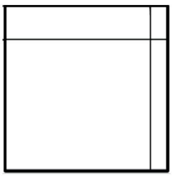
La siguiente tarea matemática se inspira en la organización de treinta minutos de lectura por semana en un curso de un centro de secundaria y en la distribución de tipos de libro, con un total de 30 libros en los estantes de la sala de descanso del centro. La profesora introdujo así la tarea:

Iremos cada viernes a la sala de descanso y haremos lectura antes del patio, cada uno con el libro que le toque de los que hemos traído de la biblioteca. Os voy a dar una pista sobre qué libro os puede tocar. La probabilidad de que os toque una novela corta es 0.9 y la probabilidad de que os toque un cómic es 0.2. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que os toque una novela gráfica?

Un alumno rápidamente respondió:

> La posibilidad de que me toque una novela gráfica es de 1.1, muy baja

La profesora dibujó un cuadrado en la pizarra, representó las dos probabilidades como áreas y empezó así su explicación:



> Tú dices que la probabilidad de que te toque una novela gráfica es la suma de 0.9 y 0.2. Yo digo que la probabilidad de que te toque es la multiplicación de 0.9 y 0.2. ¿Por qué crees que he dibujado este cuadrado?

En esta tarea, el contexto cercano se identifica en la utilización de la sala de descanso que los alumnos tienen en el centro, con una biblioteca improvisada para sesiones semanales de lectura. La comunicación no verbal se identifica en el diagrama de la probabilidad mediante el modelo del cuadrado y de las áreas que la profesora dibuja en la pizarra. Las formas del discurso matemático se identifican en el vocabulario, con la sustitución de "posibilidad" por "probabilidad" y la distinción entre "suma" y "multiplicación" de probabilidades, y en las explicaciones acerca del motivo para dibujar el cuadrado, e.g.: "Podemos pensar que las probabilidades se comportan como áreas y que la probabilidad de que os toque un cómic es un área bastante más pequeña que la probabilidad de que os toque una novela corta". Estas tres prácticas de enseñanza comparten varios elementos. Ninguna de ellas busca eliminar las tensiones, sino resolverlas, en el sentido de encontrar puntos de equilibrio.

Las tensiones que surgen entre lenguas formales e informales (e.g., probabilidad y posibilidad en el ejemplo de esta sección) no se resuelven haciendo desaparecer las unas en favor de las otras, sino planteando tareas matemáticas que conecten con una lengua informal y que, a su vez, ofrezcan oportunidades para precisar significados mediante la lengua del discurso matemático. De manera similar, la resolución de tensiones entre comunicación verbal y no verbal (las explicaciones y el dibujo del cuadrado) implica asumir que el significado de los objetos matemáticos (probabilidad, probabilidad condicionada) será tanto más rico y completo cuanto mayor sea la diversidad de registros y representaciones involucradas en la enseñanza. La propia conexión del discurso probabilístico con el correspondiente gráfico en la resolución de una tarea es un acto matemático. Ni el gráfico sirve de ayuda, como a veces parece dar la impresión, ni el simbolismo numérico-algebraico es el único registro matemático riguroso. En cuanto a la resolución de tensiones entre contextos académicos y cotidianos (cálculo de probabilidades, asignación del libro de lectura al azar), se trata de reconocer que lo importante es que el contexto con potencial matemático sea significativo para los alumnos; es decir, que conecte con sus experiencias, sea en contextos escolares o en contextos cercanos de fuera del aula o de la propia dinámica del centro. Otro elemento común en las tres prácticas es que requieren culturas de aula que permitan y valoren significados personales y que creen espacios de interacción y participación en el discurso matemático. Las pedagogías matemáticas guiadas por la resolución de problemas (o de tareas matemáticamente interesantes) en general cumplen con estas condiciones y están en la línea de los equilibrios que hemos destacado.

Hablar de la resolución de problemas en matemáticas es ciertamente otro foco de tensiones en la enseñanza. De ello habló extensamente Mari Luz Callejo a lo largo de su trayectoria investigadora (e.g., Vila y Callejo, 2004), tal como se recoge en el libro homenaje que el grupo de Didáctica de la Matemática de la Universitat d'Alacant (GIDIMAT) publicó en 2021, 'Ideas para la educación matemática. Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega'. Por un lado, las pedagogías matemáticas para la resolución de problemas tienen una concepción instrumental de la matemática escolar. Tras la exposición del conocimiento, se pide a los alumnos que lo apliquen para resolver ejercicios y, quizás más adelante, problemas para los cuales se presentan estrategias generales y heurísticas. Por otro lado, las pedagogías matemáticas a través de la resolución de problemas plantean la construcción del conocimiento mediante la participación en tareas de resolución de problemas diseñados con la intención de hacer emerger el contenido planificado (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2022). Los alumnos primero se enfrentan a problemas sin haber recibido instrucción sobre los contenidos que se quieren enseñar. Así se busca promover la reflexión y la indagación en torno a estrategias de resolución. El profesor luego utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir conceptos y los alumnos resuelven otros problemas para afianzarlos. Estas pedagogías contienen la enseñanza de heurísticas y la aplicación de contenidos. Ante estas tensiones entre dos aproximaciones a la resolución de problemas en la enseñanza, seguimos alejados de cualquier extremo porque todas las pedagogías tienen ventajas e inconvenientes según donde pongamos los énfasis en cada momento. Debemos, no obstante, buscar equilibrios que superen las concepciones meramente instrumentales de la matemática escolar.

Hay muchas más tensiones con implicaciones en la educación matemática, algunas de las cuales se explican mejor desde la perspectiva de la enseñanza, aunque tengan impacto en el aprendizaje. Por ejemplo, los profesores de matemáticas tienden a reproducir las pedagogías y comportamientos que han vivido como alumnos, otorgándoles el crédito de su propio éxito (Wright, 2017). Esto origina tensiones entre la seguridad de las pedagogías conocidas y la sospecha hacia las desconocidas. Los alumnos experimentan tensiones similares cuando no están habituados a culturas de aula donde se les pide un papel activo en la construcción del discurso matemático. Vila y Callejo (2004) comentaron la resistencia al cambio hacia pedagogías más participativas en alumnos que buscan seguridad en la instrucción o bien que tienen perfiles competitivos e individualistas, para los cuales estas pedagogías suponen una complicada demanda afectiva y generan rechazo. No debe cederse, sin embargo, en la iniciación de prácticas inclusivas de enseñanza porque estos otros alumnos, que parecen estar cómodos con pedagogías centradas en la instrucción, tienen que aprender a participar en la construcción del discurso matemático y no solo a reconocer este discurso cuando lo desarrolla el profesor en clase o cuando lo ejemplifica el libro de texto.

A todo esto, hay que añadir las eternas tensiones asociadas a los procesos institucionales de calificación y rendición de cuentas, que de nuevo deben resolverse en puntos intermedios que creen y mantengan espacios de evaluación formativa. A pesar de las numerosas recomendaciones pedagógicas y didácticas de orientar la evaluación a generar oportunidades de mejora y progreso en el aprendizaje, desde las políticas educativas se sigue exigiendo cuantificar para ordenar y certificar. Un foco en la calificación lleva al desarrollo de culturas de aula que ordenan y clasifican a los alumnos mediante prácticas competitivas que reproducen y amplifican desigualdades generalmente asociadas a cuestiones de estatus socioeconómico, de la misma forma que acostumbra a favorecer a alumnos por delante de alumnas (Macho et al., 2020). No debemos dar más importancia a la calificación que la que realmente tiene. Que haya tres momentos a lo largo del curso en los que rendir cuentas en un boletín de calificaciones, no implica que deba certificarse cualquier actividad. El foco en la evaluación formativa proporciona múltiples evidencias de aprendizaje que sirven tanto de información al profesor para adaptar y diseñar sucesivas tareas matemáticas y prácticas de enseñanza, como de guía al alumno en la regulación de sus procesos de aprendizaje. Estas evidencias son, además, especialmente visibles cuando se propicia la participación en el discurso matemático.

La enseñanza de las matemáticas es en definitiva compleja, como también se hará notar en otros capítulos de este volumen. No es realista plantear como objetivo eliminar las múltiples tensiones asociadas o, más general, simplificar la complejidad. Es cuestión de asumir que la complejidad y las tensiones van a surgir de manera inevitable en las prácticas de enseñanza y qué, según cómo las gestionemos, van a ser obstáculos para el aprendizaje de los alumnos o aliados de un proyecto de educación matemática más inclusivo y de mayor calidad. Nuestra responsabilidad es encontrar equilibrios que ofrezcan oportunidades de participar en el discurso matemático a todos los alumnos.

Agradecimientos

Grupo "Investigación en Educación Matemática" (S60_20R), Gobierno de Aragón. Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica (GIPEAM), Govern de Catalunya. PID2019-104964GB-100 "Usos matemáticamente relevantes del habla del profesor en la enseñanza de contenidos de la matemática escolar". Agradecemos a Jordi Deulofeu y a Natalia Múnera sus comentarios a versiones preliminares del capítulo.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2017). Mathematical discourse in instruction matters. En J. Adler y A. Sfard (Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 64-81). Routledge.

Alsina, À. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.

Arnal-Bailera, A. (2014). Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección. *Épsilon, 88*, 55-56.

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de geometría con grupos de riesgo: Un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). SEIEM.

Arnal-Bailera, A. y Planas, N. (2014). La actividad docente de un profesor: geometría, tecnología y grupos de riesgo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 147-155). SSEIEM.

Beltrán-Pellicer, P. y Giacomone, B. (2021). Una propuesta didáctica de probabilidad para el comienzo de la secundaria. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(4), 246-272.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1-20.

Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma, 98*, 11-21.

Beltrán-Pellicer, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 25*(1), 149-169.

Blanco, L. J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171-185). Graó.

Brügner, G. (1984). Three –Triangle–Tangram. *Bit, 24*, 380-382.

Callejo, M. L. (2015). Aprender a (enseñar) matemáticas. Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. En N. Planas (Ed.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 93-112). Graó.

DePiper, J. N., Louie, J., Nikula, J., Buffington, P., Tierney-Fife, P. y Driscoll, M. (2021). Promoting teacher self-efficacy for supporting English learners in mathematics: Effects of the visual access to mathematics professional development. *ZDM-Mathematics Education, 53*(2), 489-502.

GIDIMAT (2021). *Ideas para la educación matemática. Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega*. Editorial Compobell.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Goñi, J. M. y Planas, N. (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 167-197). Graó.

Macho, M., Padrón, E., Calaza, L., Casanellas, M., Conde, M., Lorenzo, E. y Vázquez, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las matemáticas. *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 375-420). RSME y Fundación Ramón Areces.

Moschkovich, J. N. (Ed.) (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Information Age Publishing.

Nairouz, Y. y Planas, N. (2016). La actividad matemática en un aula con estudiantes sordos y oyentes. *Números, 93*, 15-29.

Planas, N. (Ed.) (2015). *Avances y realidades de la educación matemática*. Graó.

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (Eds.) (2021). *Classroom research on mathematics and language: Seeing learners and teachers differently*. Routledge.

Planas, N. y Ngoepe, M. G. (2019). Right to learn mathematics: From language as right to language as mathematically relevant resource. En C. Xenofontos (Ed.), *Equity in mathematics education: Addressing a changing world* (pp. 93-110). Information Age Publishing.

Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*, 7-25.

Skovsmose, O. y Godoy Penteado, M. (2015). Mathematics education and democracy: An open landscape of tensions, uncertainties, and challenges. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 359-373). Routledge (3ª ed.).

Vila, A. y Callejo M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea.

Wright, P. (2017). Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture y Society, 25*(4), 515-530.