

## Численные методы расчета конструкций

### УЧЁТ ПОДКРЕПЛЕНИЙ ПРИ РАСЧЁТЕ ОБОЛОЧЕК ВАРИЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

И.В. КУШНАРЕНКО, аспирант

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, [ivan.v.kush@yandex.ru](mailto:ivan.v.kush@yandex.ru)

*Рассматривается ребристая оболочка общего вида, состоящая из обшивки, положение точек срединной поверхности которой определяется криволинейными ортогональными координатами  $\alpha$ ,  $\beta$ , и криволинейных рёбер, расположенных вдоль координатных линий. В данный момент в работе принят ставший уже классическим подход моделирования рёбер теорией стержней Кирхгофа-Клебша. Оболочка описывается теорией тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** подкрепление, рёбра, ребристые оболочки, ребристые пластинки, формообразование, численные методы, вариационно-разностный метод.

Оболочки находят широкое применение при проектировании летательных аппаратов, кораблей, тепловозов, резервуаров, в гражданском и промышленном строительстве и в других инженерных сооружениях.

Одним из основных требований, предъявляемых к подобному роду конструкциям, является обеспечение минимального веса при достаточной прочности и устойчивости. Наиболее полно удовлетворяются эти требования путем применения либо слоистых оболочек, либо оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.

Из конструктивных соображений обычно подкрепляющие ребра располагаются с наружной или с внутренней стороны оболочки, т. е. несимметрично по отношению к срединной поверхности обшивки (стенки). Учет особенностей, характерных для эксцентрично подкрепленных конструкций показал [1], что для умеренно подкрепленных цилиндрических оболочек критическая осевая нагрузка при наружном расположении продольных ребер (стрингеров) может в два и более раз превышать таковую при внутреннем расположении стрингеров. На необходимость учета эксцентриситета ребер указано и в работе [2].

С помощью разработанных аналитических и конечно-разностных методов в данный момент можно получить численные результаты только для ребристых оболочек вращения и пологих оболочек [3-7]. Ребристые оболочки произвольной формы можно рассчитать с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [8-10]. Однако при использовании МКЭ существует множество проблем [11-12]. Рассматриваемый в данной работе подход является развитием представленного в книге [13] вариационно-разностного метода (ВРМ). ВРМ имеет как и плюсы, так и минусы по сравнению с МКЭ. Основным минусом конечно-разностных методов является сложность учёта границ произвольной формы. Тем не менее существуют различные подходы для преодоления данного недостатка [14-17].

В основу ВРМ положен принцип Лагранжа – принцип минимума полной энергии деформации:

$$\Pi = \Pi_{min} . \quad (1)$$

В потенциальную энергию деформации вводится энергия деформаций ребер:

$$U = U_T + U_B + U_R, \quad (2)$$

где  $U_R$  – потенциальная энергия деформаций ребер,  $U_T, U_B$  – потенциальная энергия тангенциальных и изгибных деформаций оболочки.

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая собственно оболочки и жестко с ней соединённых по линиям контакта ребер. Принимается, что напряжённно-деформированное состояние конструкции полностью определяется в рамках линейной теории упругих тонких оболочек и криволинейных стержней. Напряжённно-деформированное состояние ребер описывается теорией криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша – учитывается растяжение, изгиб и кручение ребер. Напряжённно-деформированное состояние оболочки описывается теорией упругих тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява [13].

Координатная система – ортогональная. С целью упрощения выражений, координатные линии совпадают с линиями главных кривизн. Для произвольной ортогональной системы координат дополнительно вводятся матрицы трансформаций.

Вводится вектор-оператор производных [13]:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^* = \{ \partial^0, \quad \partial^1, \quad \partial^2, \quad \partial^3, \quad \partial^4, \quad \partial^5 \} = \\ = \left\{ 1, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

Тогда формулы относительных деформаций срединной поверхности оболочки записываются в виде:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \sum_{k=1}^3 [H^k] \cdot \bar{\partial}u_k ; \\ \bar{\chi} &= \sum_{k=1}^3 [K^k] \cdot \bar{\partial}u_k ,\end{aligned}\tag{4}$$

где индекс  $k$  – указывает направление вдоль координатных осей и ли;  $\bar{\varepsilon}$  и  $\bar{\chi}$  – векторы тангенциальных и изгибных деформаций срединной поверхности оболочки;  $[H^k]$  and  $[K^k]$  – матрицы коэффициентов [18] (геометрических характеристик срединной поверхности оболочки) при производных функций перемещений  $u_k$  в выражениях относительных тангенциальных и изгибных деформаций размерностью  $3 \times 6$  (3 – количество деформаций, 6 – размер вектора производных).

Используя геометрические характеристики срединной поверхности оболочки, деформации рёбер могут быть представлены в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{Rq} = \begin{pmatrix} \varepsilon_q + \chi_q \eta_{cg} \\ \chi_q \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} [H^k]_q + [K^k]_q \eta_{cg} \\ [K^k]_q \\ [K^k]_3 \end{pmatrix} \bar{\partial}u_k = \sum_{k=1}^3 [O^k]_q \bar{\partial}u_k ,\tag{5}$$

где индекс  $q = 1, 2$  – указывает координатную линию, вдоль которой направлено ребро; в матрицах  $H^k, K^k$  индекс  $q$  указывает номера строк соответствующих матриц;  $\bar{\varepsilon}_{Rq}$  – вектор деформаций ребра (деформации растяжения, изгибные деформации, деформации кручения);  $\eta_{cg}$  – расстояние от центра масс ребра до срединной поверхности оболочки.

С учётом выражений для деформаций (3), (4) компоненты потенциальной энергии оболочки выражаются в книге [13] в виде:

$$U_T = \frac{C}{2} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 ([H^k] \cdot \bar{\partial}u_k)^* [N] ([H^l] \cdot \bar{\partial}u_l) d\Omega ;\tag{6}$$

$$U_B = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 ([K^k] \cdot \bar{\partial}u_k)^* [N] ([K^l] \cdot \bar{\partial}u_l) d\Omega ;\tag{7}$$

где

$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  – тангенциальная и изгибная жёсткости оболочки;

$[N] = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix}$  – матрица механических характеристик рёбер;

$\nu$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Подобным образом может быть выражена потенциальная энергия деформации рёбер:

$$U_R = \sum_{q=1}^{nR} \frac{E_{Rq}}{2} \int_S \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 ([O^k]_q \cdot \bar{\partial}u_k)^* [N_{Rq}] ([O^l]_q \cdot \bar{\partial}u_l) dS ,\tag{8}$$

где

$$[N_{Rq}] = \begin{pmatrix} F_{Rq} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Rq} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{Rq}}{E_{Rq}} 2(1 + \nu_{Rq})J_{Rq} \end{pmatrix} \quad \text{– матрица механических характеристик рёбер}$$

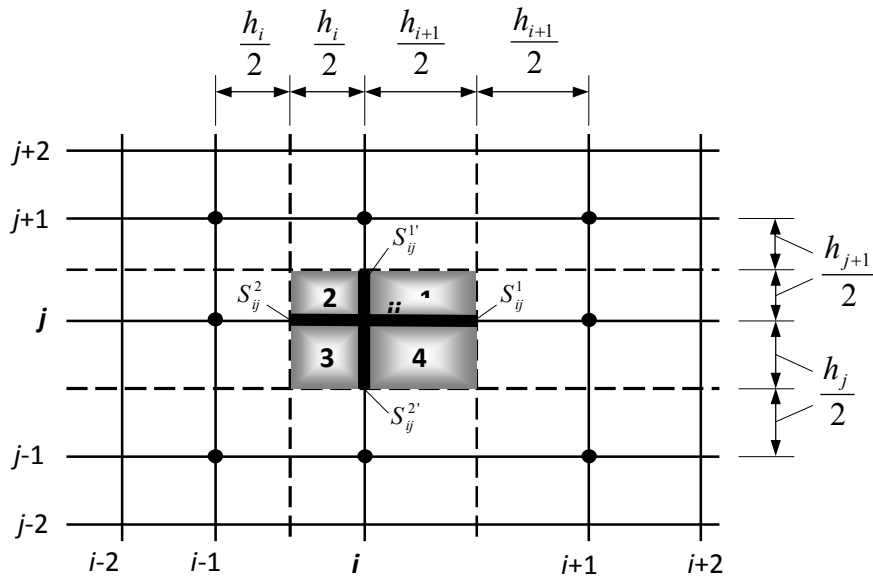
$nR$  - общее количество ребер;  $E_{Rq}$  – модуль упругости ребра;  $\nu_{Rq}$  – коэффициент Пуассона материала ребра;  $F_{Rq}$  – площадь поперечного сечения ребра;  $I_{Rq}$  – момент инерции ребра;  $J_{Rq}$  – постоянная кручения ребра;  $G_{Rq}$  – модуль сдвига материала ребра.

**Конечно-разностная схема.**

При расчете оболочки вариационно-разностным методом, срединная поверхность оболочки покрывается сеткой с постоянным или переменным шагом. Производные перемещений в векторе деформаций заменяются конечно-разностными отношениями. При этом функционал полной энергии деформаций становится функцией узловых перемещений:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} (U_T^{ij} + U_B^{ij} + U_R^{ij} - A^{ij}), \quad (9)$$

где  $i, j$  – номера сетки вдоль координатных осей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $N_1, N_2$  – число шагов (разбиений) сетки вдоль координатных осей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.



$$\underline{S_{ij}^y = A_1^{ij} \tilde{S}_{ij}^y} \quad \underline{S_{ij}^{y'} = A_2^{ij} \tilde{S}_{ij}^{y'}}$$

$$\tilde{S}_{ij}^1 = h_{i+1} / 2; \quad \tilde{S}_{ij}^2 = h_i / 2; \quad \tilde{S}_{ij}^{1'} = h_{j+1} / 2;$$

Рис.1. Кривые интегрирования в окрестности узла  $ij$ , направленные вдоль рёбер

Для минимизации полной энергии деформаций применяется метод Ритца-Тимошенко, для чего приравняются к нулю частные производные по всем неизвестным узловым перемещениям  $\partial u_k^{ij}$ , не связанным граничными условиями:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_k^{ij}} = \frac{\partial U_T}{\partial u_k^{ij}} + \frac{\partial U_B}{\partial u_k^{ij}} + \frac{\partial U_R}{\partial u_k^{ij}} - \frac{\partial A}{\partial u_k^{ij}} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $k = 1, 2, 3$  - номер компоненты вектора перемещений;  $i = -1, 0, 1, 2 \dots N_1, N_1+1$ ;  $j = -1, 0, 1, 2 \dots N_2, N_2+1$ ;  $i = -1, N_1+1$ ;  $j = -1, N_2+1$  - законтурные точки. При этом для рёбер получаются выражения:

$$\frac{\partial U_R}{\partial u_k^{ij}} = E \sum_{i=-1}^{I+1} \sum_{j=-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \{\delta_{ij}^k\}^*}{\partial u_k^{ij}} [r_{kl}^R]_{ij} \{\delta_{ij}^l\}, \quad (11)$$

где  $[r_{kl}^R]_{ij}$  - подматрица жесткости ребра в окрестности узла  $ij$  относительно перемещений  $u_k, u_l$ , (размерность подматрицы  $(9 \times 9)$ ):

$$[r_{kl}^R]_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{y/y'=1}^2 \sum_{t=1}^4 \int_{S_{ij}^{y/y'}} ([O^k]_q [d_t^{ij}]^*) [N_{Rq}] ([O^l]_q [d_t^{ij}]) dS. \quad (12)$$

где  $S_{ij}^{y/y'}$  - кривые интегрирования, направленные вдоль рёбер;  $t$  - номер квадранта в окрестности узла  $ij$ ;  $[d_t^{ij}]$  - матрицы коэффициентов разностных производных при узловых перемещениях для всех типов производных вектора  $\bar{d}$  для каждого из квадрантов  $t$ . Матрицы  $[d_t^{ij}]$  имеют такую же структуру, как и в книге [13]. В результате применения метода Ритца-Тимошенко получается система алгебраических уравнений, в результате решения которой находятся узловые перемещения. Используя формулы деформаций и закон Гука, на основе разностных производных вычисляются внутренние усилия оболочки и подкрепляющих элементов.

#### Литература

1. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем// «Изв. АН СССР», 1958, № 1.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.- Москва, Наука, 1967.
3. Zarutskii V. A., The theory and methods of the stress - strain analysis of ribbed shells//International Applied Mechanics, 2001, Vol. 36, 10, pp. 1259-1283.
4. Карнов В.В., Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения, В 2ч. Ч.1 Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 288 с
5. Карнов В.В., Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения, В 2ч. Ч.2 Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 248 с
6. Bushnell D., Almroth Bo O., Brogan F., Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis, *Computers & Structures*, 1971, vol. 1, pp. 361-387.
7. Liepins, A. A., Two-dimensional Finite-difference Equations for Shallow Spherical Shells//*AIAA Journal*, 1969, vol. 7, no.4, pp. 737-739, doi:10.2514/3.5199.
8. Bouberguig A. and Jirousek J. A family of special-purpose elements for analysis of ribbed and reinforced shells//*Computers & Structures*, 1980, vol. 12, p. 253-264.
9. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А., Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи - Москва: УРСС, 2013. - 336 с
10. Sinha G., Sheikh A. H., Mukhopadhyay M. A new finite element model for the analysis of arbitrary stiffened shells//*Finite Elements in Analysis and Design*, 12, p. 241-271, 1992.
11. Yang Henry T. Y., Saigal S., Masud A., Kapania R. K. A survey of recent shell finite elements, *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, 2000, vol. 47, 1-3, p. 101-127.
12. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинова А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций.- М.: ФИЗМАТЛИТ.- 2006.- 392с.
13. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчёта оболочек неканонической формы.- Москва, РУДН, 2010.-542с.
14. Perrones N. A general-finite difference method for arbitrary meshes//*Computers & Structures*, 1974, vol. 5, no. 1.
15. Liszka T., Orkisz J., The finite difference method at arbitrary irregular grids and its

application in applied mechanics//Computers & Structures, 1980, vol. 11.

16. Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Solving parabolic and hyperbolic equations by the generalized finite difference method// Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.209, Issue 2, 2007, p. 208-233.

17. Milewski Sławomir, Selected computational aspects of the meshless finite difference method//Numerical Algorithms, 2013, 63, no. 1.

18. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – Москва: УРСС, 2010. – 560 с.

#### References

1. Grigoluk, E. I.(1958). Finite deflections of sandwich shells with rigid filler. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, № 1 (in Russian).

2. Ambarcumyan, S. A. (1967). *Theory of Anisotropic Plates*. Moscow: Nauka (in Russian).

3. Zarutskii, V. A.(2001). The theory and methods of the stress – strain analysis of ribbed shells, *International Applied Mechanics*, Vol. 36, 10, p. 1259–1283.

4. Karpov, V.V. (2010). *Strength and Stability of Stiffened Shells of Revolution*, in 2 parts. P.1 Research models and algorithms of strength and stability of stiffened shells of revolution. - M.: FIZMATLIT, 288 p (in Russian)

5. Karpov, V.V. (2011). *Strength and Stability of Stiffened Shells of Revolution*, in 2 parts. P.2 Computational experiment by a static interaction. Moscow: FIZMATLIT, 248 p. (in Russian).

6. Bushnell, D., Almroth Bo O., Brogan, F. (1971). Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis, *Computers & Structures*, Vol. 1, p. 361–387.

7. Liepins, A. A. (1969). Two-dimensional Finite-difference Equations for Shallow Spherical Shells, *AIAA Journal*, Vol 7, 4, p. 737–739.

8. Bouberguig, A. and Jirousek, J.(1980). A family of special-purpose elements for analysis of ribbed and reinforced shells, *Computers & Structures*, vol. 12, p. 253–264.

9. Bazhenov, V.A., Krivenko, O.P., Solovei, N. A. (2013). *Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Shells with Heterogeneous Structure: Models, methods, algorithms, insufficiently explored and new problems*. Moscow: URSS, 336p. (in Russian).

10. Sinha, G., Sheikh, A. H., and Mukhopadhyay, M. (1992). A new finite element model for the analysis of arbitrary stiffened shells, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 12, p. 241–271.

11. Yang Henry T. Y., Saigal, S., Masud, A., Kapania, R.K. (2000). A survey of recent shell finite elements, *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, Vol. 47, 1-3, p. 101-127.

12. Golovanov, A.I., Tuleneva, O.N., Shigabutdinov, A.F. (2006). Finite Elements Method in the Static and Dynamic of the Thin-Shell Constructions. Moscow: FIZMATLIT, 392p (in Russian)

13. Ivanov, V.N., Krivoschapko, S.N. (2010). *Analytical Methods for Calculation of Shells of Non-Canonical Shapes*. Moscow, Izd-vo RUDN, 542p. (in Russian).

14. Perrones, N.(1974). A general-finite difference method for arbitrary meshes, *Computers & Structures*, vol. 5, no. 1.

15. Liszka, T., Orkisz, J.(1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, *Computers & Structures*, vol. 11.

16. Benito, J.J., Ureña, F., Gavete, L.(2007). Solving parabolic and hyperbolic equations by the generalized finite difference method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 209, Iss. 2, p. 208-233, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.090>.

17. Milewski Sławomir, (2013). Selected computational aspects of the meshless finite difference method, *Numerical Algorithms*, 63, no. 1, p. 107–126. doi:10.1007/s11075-012-9614-6.

18. Ivanov, V.N., Krivoschapko, S.N.(2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Moscow: URSS, 560p. (in Russian)

### AN ACCOUNT OF REINFORCEMENTS IN A SHELL ANALYSIS BY VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD

I.V. Kushnarenko

*Peoples Friendship University of Russia, Moscow*

A ribbed shell of a general form consisting from a skin, a position of points of the middle surface of which is determined by the orthogonal curvilinear coordinates  $\alpha$ ,  $\beta$ , and curved ribs, lying along coordinate lines are considered. At the moment, a classical approach is taken in the work to model ribs by the rod theory of Kirchhoff-Clebsch. A shell is described by the theory of thin shells of the Kirchhoff-Love.

KEY WORDS: reinforcement, ribs, ribbed shells, ribbed plates, form-finding, numerical methods, variation-difference method.